ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. т 2 (2017). С. 104-111.

УДК 517.5 517.9

# НИЖНЯЯ ОЦЕНКА КОНСТАНТЫ ХАРДИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ В $\mathbb{R}^n$

**И.К. ШАФИГУЛЛИН**

**Аннотация.** В статье рассмотрена гипотеза Е.Б.Дэвиса о равномерной нижней оценке константы Харди. Приведены известные на данный момент контрпримеры, которые опровергают данную гипотезу в размерностях выше или равных 4. В работе получены отличные от нуля нижние оценки константы Харди. Данные оценки являются точными по порядку, при $n \to \infty$, где $n$ – размерность пространства. Более того, оценки не зависят от свойств рассматриваемой области и справедливы для любых областей, не совпадающих со всем пространством. В доказательстве основной теоремы используется сведение многомерного случая к одномерному путём подбора специальных классов функций. В результате рассматриваемые неравенства сводятся к хорошо известному неравенству Пуанкаре.

**Ключевые слова:** константа Харди, нижние оценки, неравенства Харди, вариационные неравенства.

**Mathematics Subject Classification:** 26D15

## 1. Введение

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Через $\delta(x)$ обозначим расстояние до границы области, а именно:

$$\delta(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|.$$

С учетом введенных определений рассмотрим неравенство типа Харди

$$\int_{\Omega} \frac{|f(x)|^2}{\delta^2(x)}\, dx \leq c_n(\Omega) \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2\, dx \qquad \forall f \in C_0^1(\Omega), \tag{1.1}$$

где $C_0^1(\Omega)$ — множество непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем на $\Omega$, а $c_n(\Omega)$ — наименьшая из постоянных, возможных в этом неравенстве для заданной области $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

Через $c_n$ обозначим наибольшую величину, которая ограничивает снизу константу Харди в приведенном выше неравенстве, а именно:

$$c_n = \inf_{\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \neq \mathbb{R}^n} c_n(\Omega) = \inf_{\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \neq \mathbb{R}^n} \sup_{f \in C_0^1(\Omega), f \not\equiv 0} \frac{\int_{\Omega} \frac{|f(x)|^2}{\delta^2(x)}\, dx}{\int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2\, dx}.$$

---

I.K. Shafigullin, Lower bound for the Hardy constant for an arbitrary domain in $\mathbb{R}^n$.



Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант РФФИ № 14-01-00751).

*Поступила 19 мая 2016 г.*

Очевидно, что $c_n \geq 0$. Оценкой данной величины занимались многие математики. Наиболее полно изучены одномерные неравенства типа Харди. Так, например, хорошо известно, что при $n = 1$ из классических результатов Харди следует, что

$$c_1 = 4.$$

Более того, им было показано, что константа является недостижимой, то есть не существует экстремальной функции $f \not\equiv 0$, для которой интегральное неравенство превращалось бы в равенство с константой $c_1 = 4$.

Следует отметить, что исследование одномерных неравенств типа Харди охватывает гораздо больше вопросов, нежели оценка величины $c_1$. Серьезный вклад в развитие тематики внесли работы В.Г. Мазьи [1], Дж. Таленти [2], Дж. Томаселли [3], А. Куфнера и Л.Э. Персона [4], Ю.А. Дубинский [5], Д.В. Прохоров и В.Д. Степанов [6], Ф.Г. Авхадиева и К.-Й.Вирс [7] и многих других математиков. Результаты получены как для различных весовых функций, так и для неравенств с большим количеством слагаемых. Большое внимание в исследованиях уделено точности констант.

Исследование одномерных неравенств типа Харди продолжается до сих пор. Однако, при этом в последние 30 лет существенно больше внимания стало уделяться их многомерным аналогам. Теория многомерных неравенств типа Харди содержит большое количество нерешенных вопросов. Так, вопрос с оценкой величины $c_n$ для неравенств в $n$-мерном пространстве при $n \geq 2$ не решен до сих пор. На сегодняшний день исследователям не удалось получить равномерных оценок этой константы для произвольных областей. Однако исследованы широкие классы областей, для которых получены нижние оценки константы Харди. Так, например, показано, что для любой выпуклой области также выполняется равенство:

$$c_n(\Omega) = 4.$$

Этот факт был доказан несколькими математиками с использованием различных технических приемов. Одно из наиболее простых доказательств приведено в статье [8], см. также [9]–[12].

Кроме того, $c_n(\Omega) > 0$ для любой ограниченной области с локально липшицевой границей [см., например, [13]]. Однако остается неясной положительность величины $\inf_\Omega c_n(\Omega)$, даже если инфимум берется в классе областей с локально липшицевыми границами.

Е.Б. Дэвис, при исследовании нижних оценок констант Харди, применял иной подход, а именно: он показал, что константа Харди имеет локально-геометрическую природу и, при оценке константы снизу, необязательно знать структуру всей области, а достаточно знать локальное строение границы вблизи одной граничной точки [9]. Таким образом, был получен результат, что если граница области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ обладает хотя бы одной регулярной по Дэвису граничной точкой, то выполняется неравенство:

$$c_n(\Omega) \geq 4.$$

С определением регулярной по Дэвису точки можно ознакомиться в его работе [9]. В результате он получил, что для достаточно широкого класса областей, объемлющего известные результаты, искомая величина не может быть менее 4. В 1997 г. он выдвинул гипотезу, что константа $c_n(\Omega)$ должна быть больше или равна 4 для любой области без каких-либо ограничений на нее, так же, как и в случае $n = 1$. При $n = 2$ и $n = 3$ до сих пор не известен ни один контрпример, опровергающий эту гипотезу. Однако при $n \geq 4$ пример существует [см., например, [7], [8]]. Известно неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2}{|x|^2}\,dx \leq \frac{4}{(n-2)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2\,dx, \quad \forall f \in C_0^1(\mathbb{R}^n).$$

С учетом того, что для $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ расстояние до границы области будет выражаться в виде $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) = \delta(x) = |x|$, мы можем переписать это неравенство в следующем виде

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f(x)|^2}{\delta^2(x)}\, dx \le \frac{4}{(n-2)^2} \int\limits_{\Omega} |\nabla f(x)|^2\, dx, \quad \forall f \in C_0^1(\Omega).$$

А это значит, что при $n \ge 4$ будет выполняться неравенство:

$$c_n \le \frac{4}{(n-2)^2} < 4.$$

Таким образом, гипотеза Е.Б. Дэвиса оказывается неверной для $n \ge 4$.

В данной работе рассматриваются нижние оценки констант Харди. С нашими результатами для верхних оценок можно ознакомиться в работах [14], [15], [16].

Столь пристальное и продолжительное внимание математиков к неравенствам типа Харди объясняется тем, что данные неравенства находят широкое применение в различных областях математики. Например, они играют важную роль при исследовании задач, возникающих в функциональном анализе (теория вложения функциональных пространств), теории операторов (теория эллиптических операторов, спектральная теория операторов), теории дифференциальных уравнений (проблема существования резонансных состояний), теории интегральных уравнений (неравенства типа Соболева–Харди), математической физике и нелинейном анализе.

## 2. Постановка задачи и основные результаты

С учетом введенных определений сформулируем теорему, дающую оценку снизу для константы Харди произвольной области, не совпадающей со всем пространством.

**Теорема 2.1.** *Константа $c_n$ удовлетворяет неравенству:*

$$c_n = \inf_{\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \neq \mathbb{R}^n} \sup_{f \in C_0^1(\Omega), f \not\equiv 0} \frac{\int\limits_{\Omega} \frac{|f(x)|^2}{\delta^2(x)}\, dx}{\int\limits_{\Omega} |\nabla f(x)|^2\, dx} \ge \frac{2\pi^2}{5(8 + n(n+1)\pi^2)}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную область $\Omega$. Пусть $B(x,r)$ — открытый шар радиуса $r$ с центром в точке $x$. Граница области $\Omega$ обладает хотя бы одной конечной граничной точкой, а это значит, что мы можем рассмотреть некоторый шар, лежащий внутри области $\Omega$, граница которого будет содержать как минимум одну точку из границы $\Omega$. Более строго это можно записать так:

$$\exists\, x_0 \in \Omega, r_0 > 0 \ \ | \ \ B(x_0, r_0) \subset \Omega \ \text{ и } \ \partial B(x_0, r_0) \bigcap \partial\Omega \neq \emptyset.$$

Произвольным образом выберем одну из граничных точек, лежащих на пересечении границ шара $B(x_0, r_0)$ и области $\Omega$. Для определенности обозначим ее через $a$, т.е.

$$a \in \partial B(x_0, r_0) \bigcap \partial\Omega.$$

Можно показать, что константа в неравенствах типа Харди является инвариантом конформных линейных преобразований, а значит, мы можем без ограничения общности взять

$$x_0 = 0, r_0 = 1, a = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Перейдем к сферической системе координат:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(\varphi_{n-1}), \\ x_2 = r\sin(\varphi_{n-1})\cos(\varphi_{n-2}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} = r\sin(\varphi_{n-1})\sin(\varphi_{n-2})\dots\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_1), \\ x_n = r\sin(\varphi_{n-1})\sin(\varphi_{n-2})\dots\sin(\varphi_2)\sin(\varphi_1), \end{cases}$$

где

$$r \in \mathbb{R}, r \geq 0; \varphi_1 \in [0, 2\pi), \varphi_k \in [0, \pi], k = \overline{2, n-1}.$$

Якобиан такого преобразования координат равен

$$r^{n-1}\sin^{n-2}(\varphi_{n-1})\sin^{n-3}(\varphi_{n-2})\dots\sin\varphi_2.$$

Введенный нами шар $B(0,1)$ в сферических координатах будет задаваться следующим образом:

$$x \in \mathbb{R}^n \mid r \in [0,1), \varphi_1 \in [0, 2\pi), \varphi_k \in [0, \pi], k = \overline{2, n-1}.$$

Координаты нашей точки $a$ во вновь введенной системе координат будут

$$r = 1, \varphi_{n-1} = 0, \varphi_1 \in [0, 2\pi), \varphi_k \in [0, \pi], k = \overline{2, n-2}.$$

Нам необходимо оценить константу Харди снизу, а это значит, что нам достаточно доказать это утверждение на более узком классе функций, нежели рассматриваемый изначально класс $C_0^1(\Omega)$. Для этого введем в рассмотрение область

$$A_{\alpha,\rho} = \{x \in \Omega | r \in (\rho, 1), \varphi_{n-1} \in (0, \alpha), \varphi_1 \in [0, 2\pi), \varphi_k \in [0, \pi], k = \overline{2, n-2}\},$$

где $\rho \in (0,1), \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Очевидно, что $A_{\alpha,\rho} \subset B \subset \Omega$.

Для дальнейшего исследования нам будет важно понимать, как выглядит граница области $A_{\alpha,\rho}$, запишем ее в явном виде:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \mid r = \rho, \quad \varphi_{n-1} \in [0, \alpha), \ \varphi_1 \in [0, 2\pi), \varphi_i \in [0, \pi), i = \overline{2, n-2}, \\ x \in \mathbb{R}^n \mid r = 1, \quad \varphi_{n-1} \in [0, \alpha), \ \varphi_1 \in [0, 2\pi), \varphi_i \in [0, \pi), i = \overline{2, n-2}, \\ x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_{n-1} = \alpha, \ r \in (\rho, 1), \ \varphi_1 \in [0, 2\pi), \varphi_i \in [0, \pi), i = \overline{2, n-2}. \end{cases}$$

Выделим области $A_\alpha$ следующим образом — среди всех областей $A_{\alpha,\rho}$ рассмотрим только те, которые удовлетворяют условиям $1 - \rho = 2\alpha$ и $\alpha < \frac{\pi}{10}$. Можно показать, что для любой точки из $A_\alpha \subset \Omega$ будут выполняться следующие неравенства:

$$\delta(x) \geq 1 - r, \ \ \delta^2(x) \leq (1-r)^2 + \alpha^2, \ \ \forall x \in A_\alpha,$$

где $r$ — радиус-вектор рассматриваемой точки; а $\delta(x)$ — расстояние до границы области $\Omega$.

Теперь рассмотрим функции $f \in C_0^1(\Omega)$, которые обладают компактным носителем, содержащимся в $A_\alpha$, и, при этом, задаются в виде произведения двух функций одной переменной:

$$f_0(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = u(r)v(\varphi_{n-1}).$$

Для простоты понимания обозначим функции такого вида через $f_0$ и запишем исходное неравенство для таких функций

$$\int\limits_\Omega \frac{|f_0(x)|^2}{\delta^2(x)}\,dx \leq c_n(\Omega)\int\limits_\Omega |\nabla f_0|^2\,dx \qquad \forall f_0 \in C_0^1(A_\alpha).$$

Теперь перейдем к сферическим координатам и используем то, что носитель нашей функции полностью содержится в $A_\alpha$

$$\int\limits_{A_\alpha} \frac{|f_0|^2}{\delta^2} r^{n-1} \sin^{n-2}(\varphi_{n-1}) \sin^{n-3}(\varphi_{n-2}) \ldots \sin\varphi_2 \, dr \, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1} \le$$

$$\le c_n(\Omega) \int\limits_{A_\alpha} |\nabla f_0|^2 r^{n-1} \sin^{n-2}(\varphi_{n-1}) \sin^{n-3}(\varphi_{n-2}) \ldots \sin\varphi_2 \, dr \, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1}$$

$$\forall f_0 \in C_0^1(A_\alpha).$$

Для удобства дальнейших вычислений, перенесем константу $c_n(\Omega)$ в левую часть. Ввиду того, что наша функция $f_0$ задается произведением двух функций одной переменной, мы можем вычислить модуль градиента $f_0$ согласно следующей формуле:

$$|\nabla f_0|^2 = \left(\frac{\partial f_0}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \varphi_{n-1}}\right)^2.$$

Применим это соотношение к последнему неравенству.

$$\frac{1}{c_n(\Omega)} \int\limits_0^\alpha v^2(\varphi_{n-1}) \sin^{n-2}(\varphi_{n-1}) \int\limits_\rho^1 \frac{u^2(r) r^{n-1}}{(1-r)^2+\alpha^2} \, dr \; Q \le$$

$$\le \int\limits_0^\alpha v^2(\varphi_{n-1}) \sin^{n-2}(\varphi_{n-1}) \int\limits_\rho^1 u'^2(r) r^{n-1} \, dr \; Q +$$

$$+ \int\limits_0^\alpha v'^2(\varphi_{n-1}) \sin^{n-2}(\varphi_{n-1}) \int\limits_\rho^1 u^2(r) r^{n-3} \, dr \; Q,$$

где

$$Q = \int\limits_0^\pi \sin^{n-3}(\varphi_{n-2}) \, d\varphi_{n-2} \cdots \int\limits_0^\pi \sin(\varphi_2) \, d\varphi_2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1.$$

Величина $Q$ — некоторое положительное число. Поделим на нее обе части неравенства. Нам необходимо оценить интеграл от $v'^2(\varphi)$ через интеграл от $v^2(\varphi)$, тогда мы сможем сократить на этот интеграл и свести все к хорошо изученному случаю интегрального неравенства для функций одной переменной. Эту оценку проведем в 2 этапа.

Первый этап, рассмотрим функцию $v_0(\varphi_{n-1}) = \alpha - \varphi_{n-1}$. Теперь оценим соотношение, которое в дальнейшем поможет нам осуществить требуемые оценки:

$$L(\alpha) = \frac{\int\limits_0^\alpha v_0'^2(\varphi_{n-1}) \sin^{n-2}(\varphi_{n-1}) \, d\varphi_{n-1}}{\int\limits_0^\alpha v_0^2(\varphi_{n-1}) \sin^{n-2}(\varphi_{n-1}) \, d\varphi_{n-1}}.$$

Отдельно рассмотрим числитель и знаменатель этой дроби. Воспользуемся известной оценкой для функции $\sin x$

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} x \le \sin x \le x \quad \forall x \in [0, \alpha].$$

Теперь мы можем рассмотреть числитель искомого соотношения и оценить его сверху:

$$\int\limits_0^\alpha v_0'^2(\varphi_{n-1})\sin^{n-2}(\varphi_{n-1})\,d\varphi_{n-1} = \int\limits_0^\alpha \sin^{n-2}(\varphi_{n-1})\,d\varphi_{n-1} \le$$

$$\le \int\limits_0^\alpha \varphi_{n-1}^{n-2}\,d\varphi_{n-1} = \frac{\alpha^{n-1}}{n-1}.$$

Знаменатель нашей дроби оценим снизу:

$$\int\limits_0^\alpha v_0^2(\varphi_{n-1})\sin^{n-2}(\varphi_{n-1})\,d\varphi_{n-1} = \int\limits_0^\alpha (\alpha-\varphi_{n-1})^2\sin^{n-2}(\varphi_{n-1})\,d\varphi_{n-1} \ge$$

$$\ge \frac{\sin^{n-2}(\alpha)}{\alpha^{n-2}}\int\limits_0^\alpha \varphi_{n-1}^{n-2}(\alpha-\varphi_{n-1})^2\,d\varphi_{n-1} =$$

$$= \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^{n-2}\int\limits_0^\alpha \alpha^2\varphi_{n-1}^{n-2} - 2\alpha\varphi_{n-1}^{n-1} + \varphi_{n-1}^{n}\,d\varphi_{n-1} = \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^{n-2}\frac{2\alpha^{n+1}}{n(n+1)(n-1)}.$$

Таким образом, мы можем оценить нашу функцию $L(\alpha)$ следующим образом

$$L(\alpha) \le \frac{(n+1)n}{2\alpha^2}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right)^{n-2} = \frac{(n+1)n}{2\alpha^2}K(\alpha),$$

где $\lim\limits_{\alpha\to 0} K(\alpha) = 1$.

Теперь перейдем ко второму этапу. С учетом вида функции $v_0(\varphi_{n-1})$ можно сделать вывод, что мы можем приблизить ее по норме $L_2(sin^{n-2}(\varphi_{n-1}))$ функциями вида $v_1(\varphi_{n-1})$, которые бы обращалась в ноль в некоторой окрестности точки $a$, а также производные которых в точке 0 были бы равны 0. Для таких функций будет справедливо неравенство.

$$\int\limits_0^\alpha v_1'^2\sin^{n-2}(\varphi_{n-1})\,d\varphi_{n-1} \le \left(\frac{n(n+1)}{2\alpha^2}K(\alpha)+\varepsilon\right)\int\limits_0^\alpha v_1^2\sin^{n-2}(\varphi_{n-1})\,d\varphi_{n-1}. \tag{2.1}$$

Теперь вернемся к основной идее доказательства и еще более сузим рассматриваемый класс функций и вместо $f_0$ будем рассматривать функции

$$f_1(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}) = u(r)v_1(\varphi_{n-1}).$$

Тогда исходное неравенство для функций вида $f_1$ сведется к следующему одномерному неравенству:

$$\frac{1}{c_n(\Omega)}\int\limits_\rho^1 \frac{u^2(r)r^{n-1}}{(1-r)^2+\alpha^2}\,dr \le \int\limits_\rho^1 u'^2(r)r^{n-1}\,dr +$$

$$+\left(\frac{n(n+1)}{2\alpha^2}K(\alpha)+\varepsilon\right)\int\limits_\rho^1 u^2(r)r^{n-3}\,dr \quad \forall u\in C_0^1(\rho,1).$$

Воспользуемся тем, что переменная $r$ меняется в пределах $[\rho, 1]$ и проведем замену переменных $1 - r = \alpha(1-t)$. В результате получим:

$$\frac{\rho^{n-1}}{\alpha^2 c_n(\Omega)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{z^2(t)}{(1-t)^2+1}\,dt \le \frac{1}{\alpha^2}\int\limits_{-1}^{1} z'^2(t)\,dt +$$

$$+\left(\frac{n(n+1)}{2\alpha^2}K(\alpha)+\varepsilon\right)\int\limits_{-1}^{1} z^2(t)\,dt \quad \forall z \in C_0^1(-1,1).$$

Теперь устремим $\alpha$ к нулю, при этом $\rho$ стремится к единице, и поэтому

$$\frac{1}{c_n(\Omega)}\int\limits_{-1}^{1}\frac{z^2(t)}{(1-t)^2+1}\,dt \le \int\limits_{-1}^{1} z'^2(t)\,dt + \frac{n(n+1)}{2}\int\limits_{-1}^{1} z^2(t)\,dt \quad \forall z \in C_0^1(-1,1).$$

Заметим, что в интеграле в левой части неравенства исчезла сингулярность. Оценим знаменатель в подынтегральной функции с учетом очевидного неравенства $(1-t)^2+1 \le 5$ при $t \in [-1,1]$. Будем иметь

$$\left(\frac{1}{5c_n(\Omega)} - \frac{n(n+1)}{2}\right)\int\limits_{-1}^{1} z^2(t)\,dt \le \int\limits_{-1}^{1} z'^2(t)\,dt \quad \forall z \in C_0^1(-1,1).$$

А это уже известное одномерное неравенство Пуанкаре, и константа снизу ограничена через $\frac{4}{\pi^2}$. Что и дает искомую оценку

$$c_n(\Omega) \ge \frac{2\pi^2}{5(8+n(n+1)\pi^2)}.$$

Таким образом, мы получили, что константа Харди равномерно ограничена снизу для любой области, т.е.

$$c_n = \inf_{\Omega\subset\mathbb{R}^n, \Omega\ne\mathbb{R}^n} c_n(\Omega) \ge \frac{2\pi^2}{5(8+n(n+1)\pi^2)}.$$

Теорема доказана полностью.

$\square$

В завершении статьи хочется выразить благодарность своему научному руководителю, профессору Фариту Габидиновичу Авхадиеву за внимание к работе и ценные замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V.G. Maz'ya *Sobolev Spaces*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1985.
2. G. Talenti *Osservazione sopra una classe di disuguaglianze* // Rend. Semin. mat. efis. Milano. 1969. V. 39. P. 171–185.
3. G. Tomaselli *A class of inequalities* // Boll. Unione mat. ital. 1969. Ser. 4. No 6. P. 622–631.
4. A. Kufner, L.-E. Persson *Weighted inequalities of Hardy type*. World Scientific Pub Co Inc., 2003, P. 376.
5. Дубинский Ю.А. *Об одном неравенстве типа Харди и его приложениях*. Теория функций и дифференциальные уравнения, Сборник статей. К 105-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского, Тр МИАН. 269. МАИК, М. 2010. С. 112–132.
6. Прохоров Д.В., Степанов В.Д. *О весовых неравенствах Харди в смешанных нормах*. Теория функций и уравнения математической физики, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Льва Дмитриевича Кудрявцева, Тр. МИАН. 283. МАИК, М. 2013. С. 155–170.

7. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths *Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains* // Z. Angew. Math. Mech. 2007. V. 87. No. 8–9. P. 632–642.
8. M. Marcus, V.J. Mizel, Y. Pinchover *On the best constants for Hardy's inequality in* $\mathbb{R}^n$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1998. V. 350. P. 3237–3250.
9. E.B. Davies *The Hardy constant* // Quart. J. Math. Oxford (2) 1995. V. 46:4. P. 417–431.
10. T. Matskewich, P.E. Sobolevskii *The best possible constant in a generalized Hardy's inequality for convex domains in* $\mathbb{R}^n$ // Nonlinear Anal. 1997. V. 28. No 9. P. 1601–1610.
11. H. Brezis, M. Marcus *Hardy's inequality revisited* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1997. V. 25. No. 1-2. P. 217–237.
12. M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, A. Laptev *A geometrical version of Hardy's inequality* // J. Funct. Anal. 2002. V. 189. No. 2. P. 539–548.
13. V. Opic, A. Kufner *Hardy-type Inequalities* // Pitman Research Notes in Math. 1990. V. 219.
14. Авхадиев Ф.Г., Шафигуллин И.К. *Точные оценки констант Харди для областей со специальными граничными свойствами* // Известия вузов. Матем. 2014. № 2. С. 69–73.
15. Авхадиев Ф.Г., Шафигуллин И.К. *Оценки констант Харди при трубчатом расширении множеств и в областях с конечными граничными моментами* // Математические труды. 2013. Том 16. № 2. С. 3–12.
16. Авхадиев Ф.Г., Насибуллин Р.Г., Шафигуллин И.К. *Неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими весами в областях евклидова пространства* // Известия вузов. Матем. 2011. № 9. С. 90–94.

Ильнар Касыймович Шафигуллин,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 35,
420008, г. Казань, Россия
E-mail: shafigullin.ik@gmail.com