ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. т 2 (2017). С. 63-93.

УДК 517.518.1

ДИСКРЕТНЫЕ ГЕЛЬДЕРОВЫ ОЦЕНКИ ДЛЯ ОДНОЙ РАЗНОВИДНОСТИ ПАРАМЕТРИКСА. II

А.И. ПАРФЁНОВ

Аннотация. В предыдущей статье этой серии мы ввели некоторый параметрикс и отвечающий ему потенциал. Параметрикс соответствует равномерно эллиптическому дифференциальному оператору второго порядка, имеющему локально непрерывные по Гёльдеру коэффициенты в полупространстве. Здесь мы показываем, что потенциал является приближенным левым обратным оператором к дифференциальному оператору по модулю взятых по гиперплоскости интегралов, с погрешностью, оцениваемой в локальных гёльдеровых нормах. В качестве следствия мы приближенно вычисляем потенциал, плотность и дифференциальный оператор которого возникают из распрямления специальной липшицевой области. Это следствие предназначено к будущему выводу приближенных формул для гармонических функций.

Ключевые слова: кубическая дискретизация, липшицева область, локальные гёльдеровы нормы, параметрикс, потенциал, распрямление.

Mathematics Subject Classification: 35A17

1. Введение

Пусть $\mathcal{A}_\lambda^\mu$ — множество всех равномерно эллиптических дифференциальных операторов второго порядка в верхнем полупространстве $\mathbb{R}^n_+$ $(n \geqslant 2)$, имеющих постоянную эллиптичности $\lambda \geqslant 1$ и локально μ-гельдеровы коэффициенты, $0 < \mu < 1$. В работе [1] предложен Z-параметрикс $E(A; x, y)$ (сокращенно: параметрикс) оператора $A \in \mathcal{A}_\lambda^\mu$, а для соответствующего потенциала

$$\Phi_f(x) = \int_{y_n>0} E(A; x, y) f(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n_+,$$

установлены оценки локальных гельдеровых норм $\|D^\alpha \Phi_f\|_I$ $(|\alpha| \leqslant 2)$ и $\|Rf\|_I$ через такие же нормы $\|f\|_J$, где $f \mapsto Rf = f - A\Phi_f$ — оператор невязки.

Параметрикс $E(A; x, y)$ и потенциал Φ_f введены с целью изучения одной специальной гармонической функции. Пусть Ω — надграфик липшицевой функции $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$. Из леммы 3.7 в [2] и свойств преобразования Кельвина следует существование и единственность с точностью до положительного множителя функции U со следующими свойствами:

$$U \in C^\infty(\Omega) \cap C\big(\overline{\Omega}\big), \quad \Delta U = 0 \text{ и } U > 0 \text{ в области } \Omega, \quad U\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Функция U с точностью до эквивалентности определяет поведение произвольных положительных гармонических функций, непрерывным образом принимающих нулевые значения на части границы липшицевой области. В самом деле, любые две такие функции, грубо говоря, сравнимы между собой по граничному принципу Гарнака. Для примера см. теорему 5.1 в [3].

Наметим план изучения функции U. Обозначив

$$u = (U \circ g)\varphi$$

A.I. Parfenov, Dicrete Holder estimates for a certain kind of parametrix. II.

Поступила 15 марта 2016 г.

для подходящих распрямляющего диффеоморфизма $g : \mathbb{R}^n_+ \to \Omega$ и срезающей функции $\varphi \in C_0^\infty\big(\overline{\mathbb{R}^n_+}\big)$, из уравнения Лапласа $\Delta U = 0$ получаем дифференциальное уравнение

$$Au = LD_n u + L'$$

для некоторых оператора $A \in \mathcal{A}^\mu_\lambda$ и функций $L, L' \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$. Здесь A и L зависят от Ω и g, но не от U и φ. Если функция ω финитна, а ее постоянная Липшица достаточно мала, то можно придать смысл ряду Неймана

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} R^k.$$

Граничное условие $u\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = 0$ и ограниченность носителя функции u являются предпосылками справедливости интегрального представления

$$u = \Phi_F, \quad F = QAu = Q(vL + L'), \quad v = D_n u = D_n \Phi_F.$$

Для функции $\mathbf{x}_n^{-1}(x) = x_n^{-1}$ и числа v_0 запишем

$$v = \mathbf{x}_n^{-1}\Phi_F\{\underbrace{D_n\Phi_L - \mathbf{x}_n^{-1}\Phi_L + 1}_{\Theta}\} + \underbrace{D_n\Phi_{F-v_0L} - \mathbf{x}_n^{-1}\Phi_{F-v_0L}}_{\Theta_1} + \{\underbrace{D_n\Phi_L - \mathbf{x}_n^{-1}\Phi_L}_{\Theta_2}\}\{\underbrace{v_0 - \mathbf{x}_n^{-1}\Phi_F}_{\Theta_3}\}.$$

Оказывается, что $\Theta \approx \mathbf{x}_n D_n(S \circ g)$, где

$$S(x) = \lim_{r\to\infty}\left\{\ln r - \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}\int_{y\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega:\ |x-y|<r} |x-y|^{-n}\,dy\right\}, \quad x \in \Omega,$$

а ошибка аппроксимации квадратична по аппроксимационным числам b_I, выражающим степень локальной близости поверхности $\partial\Omega$ к гиперплоскости. Можно взять v_0 так, что слагаемое Θ_1 оценивается квадратично, а выражения Θ_2 и Θ_3 — линейно по b_I, откуда $\frac{D_n u}{u} \approx D_n(S\circ g)$ с квадратичной ошибкой. Обобщив рассуждения и определение функции S на случай не обязательно финитной функции ω с любой постоянной Липшица, с помощью поворотов системы координат получим приближенную формулу

$$\frac{\nabla U}{U} \approx \nabla S, \tag{1}$$

интегрирование которой доставляет экспоненциальную асимптотическую формулу (ЭАФ)

$$U \approx U_0 \mathrm{e}^S.$$

Об известных ЭАФ для конформных отображений, ЭАФ для решений эллиптических систем и асимптотике положительных гармонических функций см. работы [4]–[8].

Настоящая статья посвящена реализации части намеченного плана, а именно обоснованию для формулы $\Theta \approx \mathbf{x}_n D_n(S \circ g)$ оценки погрешности, квадратичной по аппроксимационным числам функции ω. Статья состоит из введения и еще двух параграфов.

В § 2 приближенно найден потенциал Φ_{Af}. Основные обозначения даны в п. 2.1 и п. 2.2. В п. 2.3 дискретные гельдеровы оценки из [1] функций $D^\alpha\Phi_f$ и Rf дополнены оценкой агрегата $D_n\Phi_f - \mathbf{x}_n^{-1}\Phi_f$, которая точнее оценок функций Φ_f и $D_n\Phi_f$ по отдельности. В п. 2.4 производные $D^\alpha\Phi_{Af}$ и агрегат $D_n\Phi_{Af} - \mathbf{x}_n^{-1}\Phi_{Af}$ найдены с погрешностями, мажорируемыми через локальные гельдеровы полунормы $|A|_J$ коэффициентов оператора A и нормы $\|D^2 f\|_J$.

В § 3 паре (ω, θ), где $\theta \geqslant \|\omega\|_{\mathrm{Lip}}$, сопоставлен *стандартный набор*

$$\big(\{\gamma_K\}, w, W, g, \mathfrak{g}, \mathfrak{G}, A, \lambda, L\big),$$

относящийся к распрямлению области Ω, после чего формула $\Theta \approx \mathbf{x}_n D_n(S \circ g)$ и ее аналог для производных $D_{ij}\Phi_L$ установлены редукцией к п. 2.4. Заметим, что формула для производных $D_{ij}\Phi_L$ может оказаться полезной при выводе аналога формулы (1) для производных $D_{ij}U$.

Соглашения. Буква c (с возможным индексом) обозначает различные положительные постоянные и всегда снабжается в скобках всеми числовыми параметрами, от которых эти постоянные зависят. Для $t > 0$ и куба или шара $X \subset \mathbb{R}^d$ с центром $\mathfrak{c}_X$ и произвольной длиной ребра или радиусом положим

$$tX = \{\mathfrak{c}_X + t(\xi - \mathfrak{c}_X)\colon \xi \in X\}.$$

Если $\xi \in \mathbb{R}^d$, то $|\xi|_\infty = \max_i |\xi_i|$ и (если ξ не мультииндекс) $|\xi|^2 = \sum_i |\xi_i|^2$. Для мультииндексов $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ через $D^\alpha f$ записываются частные производные вещественной функции f, при этом $D_i f \equiv D^{e_i} f$ и $D_{ij} f \equiv D^{e_i+e_j} f$, где $\{e_i\}_1^d$ — канонический базис в $\mathbb{R}^d$. Для полунормы p и числа $q \in \mathbb{N}_0$ пусть

$$p(D^q f) = \max_{|\alpha|=q} p(D^\alpha f).$$

Например, $|Df| = \max_{1\leqslant i\leqslant d} |D_i f| = |\nabla f|_\infty$, где ∇f — градиент функции f. Через $\overline{X}$ и X° обозначаем замыкание и внутренность множества $X \subset \mathbb{R}^d$.

2. Приближенные вычисления с потенциалом Φ_{Af}

2.1. Базовые сведения о двоичном семействе. Для целого $n \geqslant 2$ введем двоичное семейство $\mathcal{D}$ в $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$\mathcal{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_k,$$

$$\mathcal{D}_k = \bigl\{I\colon I = [0, 2^k)^{n-1} + 2^k a \text{ для некоторого } a \in \mathbb{Z}^{n-1}\bigr\}.$$

Для множеств $I_i \subset \mathbb{R}^{n-1}$ с ограниченным непустым объединением положим

$$[I_1, I_2] = \sup_{\xi,\eta\in I_1\cup I_2} |\xi - \eta|_\infty.$$

Обозначим $l_I = [I, \varnothing]$ при $I \in \mathcal{D}$ (длина ребра). Для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ пусть

$$\Gamma_{IJ}^{(\alpha,\beta)} = l_I^\alpha l_J^\beta [I, J]^{-\alpha-\beta}, \quad I, J \in \mathcal{D}.$$

Следующее утверждение суть [9, теорема 2(a)]. В нем, как и всюду далее, суммирование по умолчанию выполняется по множеству $\mathcal{D}$.

Лемма 1. *Если $\alpha > 0$ и $\beta > n - 1$, то*

$$\sum_J \Gamma_{IJ}^{(\alpha,\beta)} \leqslant c(n, \alpha, \beta), \quad I \in \mathcal{D}.$$

Для $I, J \in \mathcal{D}$ скажем, что $I \odot J$, если $l_I = l_J$ и $\overline{I} \cap \overline{J} \neq \varnothing$. Через $\{I^J, J^I\}$ обозначим пару кубов $\{H_1, H_2\} \subset \mathcal{D}$ с наименьшим возможным значением величины $l_{H_1} = l_{H_2}$ и свойством

$$I \subset H_1 \odot H_2 \supset J.$$

Кубы I и J можно соединить цепочкой

$$\widehat{IJ} = \bigl\{H \in \mathcal{D}\colon I \subset H \subset I^J \text{ или } J \subset H \subset J^I\bigr\}.$$

Зафиксируем $\mu \in (0,1)$. Для функции f на множестве $X \subset \mathbb{R}^d$, состоящем более чем из одной точки, положим

$$|f|_{C^\mu(X)} = \sup_{x,y\in X:\, x\neq y} \frac{\bigl|f(x)-f(y)\bigr|}{|x-y|^\mu},$$
$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{x,y\in X:\, x\neq y} \frac{\bigl|f(x)-f(y)\bigr|}{|x-y|}.$$

Обозначим

$$\mathbb{R}^n_+ = \bigl\{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n\colon x_n > 0\bigr\},$$
$$I^{\boxdot} = \overline{I} \times [l_I, 2l_I], \quad I \in \mathcal{D},$$
$$\mathfrak{c}_I^{\boxdot} = (\mathfrak{c}_I, 3l_I/2) \quad \text{для центра } \mathfrak{c}_I \text{ куба } I.$$

Пусть $\mathcal{C} = C^\mu_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$, т.е. $\mathcal{C}$ состоит из таких вещественных функций f на $\mathbb{R}^n_+$, что $|f|_{C^\mu(I^{\boxdot})} < \infty$ для любого $I \in \mathcal{D}$. Положим

$$|f|_I = l_I^\mu |f|_{C^\mu(I^{\boxdot})},$$
$$\|f\|_I = \|f\|_{L^\infty(I^{\boxdot})} + |f|_I.$$

Очевидна оценка

$$|f|_I \leqslant n l_I \|Df\|_{L^\infty(I^{\boxdot})}, \quad f \in C^1(I^{\boxdot}). \tag{2}$$

2.2. Приведем основные обозначения, связанные с Z-параметриксом $E(A;x,y)$ произвольного оператора $A \in \mathcal{A}^\mu_\lambda$.

Пусть δ_{ij} — символ Кронекера, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, а $\mathcal{A}$ — множество всех дифференциальных операторов

$$A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} \tag{3}$$

с постоянными коэффициентами $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$. Для $\lambda \geqslant 1$ положим

$$\mathcal{A}_\lambda = \left\{ A \in \mathcal{A}\colon (\forall \zeta \in \mathbb{R}^n)\ \lambda^{-1}|\zeta|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\zeta_i\zeta_j \leqslant \lambda|\zeta|^2 \right\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{z}_I$ единственный угол куба $I \in \mathcal{D}$, обладающий свойством $\mathfrak{z}_I/(2l_I) \in \mathbb{Z}^{n-1}$. Пусть

$$I^\times = \bigl\{\xi \in \overline{3I}\colon |\xi - \mathfrak{z}_I|_\infty \leqslant 3l_I/2\bigr\} \quad (\Rightarrow I \subset \overline{2I} \subset I^\times \subset \overline{3I}),$$
$$I^{\boxtimes} = I^\times \times [3l_I/4, 3l_I] \qquad (\Rightarrow I^{\boxdot} \subset I^{\boxtimes}).$$

Запись $\mathcal{A}^\mu$ означает множество всех операторов (3) с вещественными коэффициентами $a_{ij} = a_{ji} \in \mathcal{C}$. Далее a_{ij} всегда по умолчанию означает коэффициенты оператора $A \in \mathcal{A}$ или $A \in \mathcal{A}^\mu$. Если $A \in \mathcal{A}^\mu$, то

$$|A|_I = l_I^\mu \max_{i,j} |a_{ij}|_{C^\mu(I^{\boxtimes})},$$
$$A[x] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_{ij}, \quad x_n > 0,$$
$$Af\big|_x = A[x]f\big|_x, \quad f \in C^2(\mathbb{R}^n_+).$$

Положим $\mathcal{A}^\mu_\lambda = \bigl\{A \in \mathcal{A}^\mu\colon A[x] \in \mathcal{A}_\lambda \text{ для всех } x\bigr\}$.

Для $I \in \mathcal{D}$ и $k \in \mathbb{N}_0$ через $I^{(k)}$ обозначим единственный куб из $\mathcal{D}$ со свойствами $I \subset I^{(k)}$ и $l_{I^{(k)}} = 2^k l_I$. Легко построить такие функции $\varphi_k : \mathbb{R}^n_+ \to [0,1]$ класса C^∞, что $\varphi_0 \equiv 0$ и, при $k \geqslant 1$,

$$\varphi_k \equiv 1 \text{ на множестве } \mathfrak{P}_k \equiv \overline{3I^{(k-1)}} \times (0, 3l_{I^{(k-1)}}], \tag{4a}$$

$$\operatorname{supp} \varphi_k \subset \mathfrak{P}^*_k \equiv (5I^{(k-1)})^\circ \times (0, 4l_{I^{(k-1)}}), \tag{4b}$$

$$|D^\alpha \varphi_k| \leqslant c(\alpha) l_{I^{(k)}}^{-|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n_0. \tag{4c}$$

Положим также $\mathfrak{Q}_{-1} = \mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}^*_0 = \varnothing$ и

$$\mathfrak{Q}_k = \overline{3I^{(k)}} \times (0, 2l_{I^{(k)}}], \quad k \geqslant 0. \tag{5}$$

Очевидно, что

$$\mathfrak{Q}_{k-1} \subset \mathfrak{P}_k \subset \mathfrak{P}^*_k \subset \mathfrak{Q}^\circ_k. \tag{6}$$

Легко проверить существование C^∞-функций $\psi_K \colon \mathbb{R}^n_+ \to [0,1]$ со свойствами

$$\operatorname{supp} \psi_K \subset \overline{\frac{3}{2}K} \times \left[\frac{3}{4}l_K, \frac{5}{2}l_K\right], \quad K \in \mathcal{D}, \tag{7a}$$

$$\sum_K \psi_K(x) = 1, \quad x_n > 0, \tag{7b}$$

$$|D^\alpha \psi_K| \leqslant c(\alpha) l_K^{-|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n_0. \tag{7c}$$

Для $A \in \bigcup_{\lambda \geqslant 1} \mathcal{A}_\lambda$ и $x \neq 0$ обозначим

$$\begin{gathered}
\det_A = \det(a_{ij}),\\
(b_{ij}) = (a_{ij})^{-1},\\
Q_A(x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j,\\
E_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\sqrt{\det_A}} \ln Q_A(x), & n = 2,\\ \frac{\Gamma(n/2)}{(2-n)2\pi^{n/2}\sqrt{\det_A}} Q_A^{\frac{2-n}{2}}(x), & n \geqslant 3. \end{cases}
\end{gathered}$$

Для $x, y \in \mathbb{R}^n_+$, $x \neq y$, пусть

$$\begin{gathered}
e^A_n = a^{-1}_{nn}\bigl\{a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n\bigr\},\\
\widetilde{y}^A = y - y_n e^A_n,\\
\widetilde{y}_A = y - 2y_n e^A_n,\\
G_A(x,y) = E_A(x-y) - E_A(x - \widetilde{y}_A).
\end{gathered}$$

Для $A \in \mathcal{A}^\mu_\lambda$ и $x, y \in \mathbb{R}^n_+$, $x \neq y$, положим

$$E(A; x, y) = \sum_K G_{A[\mathfrak{c}^{\boxdot}_K]}(x,y) \psi_K\bigl(Z(x,y)\bigr),$$

где

$$\begin{gathered}
Z(x,y) = x + \kappa|x - \widetilde{y}|e_n,\\
\kappa = \frac{1}{3\sqrt{4n+9}},\\
\widetilde{y} = (y', -y_n).
\end{gathered}$$

В [1] параметрикс $E(A; x, y)$ был введен с постоянной $\kappa_0 = \frac{1}{3\sqrt{n+15}}$ вместо κ.

2.3. Выпишем потенциал Φ_f и дискретные гельдеровы оценки для него.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda \geqslant 1$, $0 < \mu < 1$ *и* $A \in \mathcal{A}^{\mu}_{\lambda}$. *Тогда для любой функции* $f \in \mathrm{VL}(0)$, *где*

$$\mathrm{VL}(0) = \Big\{ f \in \mathcal{C} \colon (\exists I \in \mathcal{D}) \ \sum_J \Gamma^{(0,n)}_{IJ} l_J \|f\|_J < \infty \Big\} = \Big\{ f \in \mathcal{C} \colon (\forall I \in \mathcal{D}) \ \sum_J \Gamma^{(0,n)}_{IJ} l_J \|f\|_J < \infty \Big\},$$

абсолютно сходится и дважды непрерывно дифференцируем по x *интеграл*

$$\Phi_f(x) = \int_{y_n>0} E(A; x, y) f(y)\, dy,$$

причем $D^\alpha \Phi_f \in \mathcal{C}$ $(|\alpha| \leqslant 2)$ *и для любого* $I \in \mathcal{D}$

$$l_I^{-1} \|\Phi_f\|_I + \|D\Phi_f\|_I \leqslant c(n,\lambda,\mu) \sum_J \Gamma^{(0,n)}_{IJ} l_J \|f\|_J, \tag{8}$$

$$l_I^{-1} \|D_n \Phi_f - \mathbf{x}_n^{-1} \Phi_f\|_I + \|D^2 \Phi_f\|_I \leqslant c(n,\lambda,\mu) \sum_J \Gamma^{(0,n+1)}_{IJ} \|f\|_J, \tag{9}$$

$$\|f - A\Phi_f\|_I \leqslant c(n,\lambda,\mu) \sum_J \Gamma^{(0,n+1)}_{IJ} \|f\|_J \min \Big\{ 1 + |A|_I, \sum_{H \colon I \subset H \subset I^J} |A|_H \Big\}. \tag{10}$$

Замечание. Здесь $\mathbf{x}_n^{-1}$ — это функция $x \mapsto x_n^{-1}$.

Доказательство. Все утверждения теоремы, кроме оценки для нормы $\|D_n \Phi_f - \mathbf{x}_n^{-1} \Phi_f\|_I$, проверены в [1, теорема 5] для параметрикса $E(A; x, y)$, заданного с помощью постоянной κ_0 вместо κ. Ввиду свойства $\kappa \leqslant \kappa_0$ рассуждения переносятся на наш параметрикс с минимальными изменениями. Поэтому осталось проверить неравенство

$$l_I^{-1} \|D_n \Phi_f - \mathbf{x}_n^{-1} \Phi_f\|_I \leqslant c(n,\lambda,\mu) \sum_J \Gamma^{(0,n+1)}_{IJ} \|f\|_J. \tag{11}$$

Для функции φ_1 из (4) в силу (2), (4b) и (4c) имеем

$$\|\varphi_1\|_J + \|1 - \varphi_1\|_J \leqslant 2 + 2n l_J \|D\varphi_1\|_{L^\infty(J^\boxdot)} \leqslant c_1(n),$$
$$\|\varphi_1 f\|_J + \big\|(1-\varphi_1) f\big\|_J \leqslant c_1 \|f\|_J, \quad J \in \mathcal{D},$$

так что $\varphi_1 f \in \mathrm{VL}(0)$ и $(1-\varphi_1) f \in \mathrm{VL}(0)$. Аналогично,

$$\|\mathbf{x}_n^{-1} \Phi_{\varphi_1 f}\|_I \leqslant \|\mathbf{x}_n^{-1}\|_I \|\Phi_{\varphi_1 f}\|_I \leqslant c_2(n) l_I^{-1} \|\Phi_{\varphi_1 f}\|_I.$$

Если $\|\varphi_1 f\|_J \neq 0$, то $J^\boxdot \cap \mathfrak{Q}_1^\circ \neq \varnothing$ ввиду (4b) и (6), откуда $J^\boxdot \subset \mathfrak{Q}_1$ и

$$l_I^{-1} \Gamma^{(0,n)}_{IJ} l_J = l_I^{-1} \Gamma^{(0,n+1)}_{IJ} [I, J] \leqslant l_I^{-1} \Gamma^{(0,n+1)}_{IJ} [I^{(1)}, J] \leqslant 4 \Gamma^{(0,n+1)}_{IJ}. \tag{12}$$

На основании (8) заключаем

$$\begin{aligned} l_I^{-1} \|D_n \Phi_{\varphi_1 f} - \mathbf{x}_n^{-1} \Phi_{\varphi_1 f}\|_I &\leqslant l_I^{-1} \|D_n \Phi_{\varphi_1 f}\|_I + c_2 l_I^{-2} \|\Phi_{\varphi_1 f}\|_I \\ &\leqslant c_3(n,\lambda,\mu) l_I^{-1} \sum_J \Gamma^{(0,n)}_{IJ} l_J \|\varphi_1 f\|_J \\ &\leqslant 4 c_1 c_3 \sum_J \Gamma^{(0,n+1)}_{IJ} \|f\|_J. \end{aligned}$$

Допустим, что для функций

$$\zeta_K(x,y) = G_{A[\mathfrak{c}^\boxdot_K]}(x,y) \psi_K\big(Z(x,y)\big),$$
$$\zeta^*_K(x,y) = D_{x_n} \zeta_K(x,y) - x_n^{-1} \zeta_K(x,y)$$

при любых $x \in I^{\boxdot}$ и $y \in J^{\boxdot} \setminus \mathfrak{P}_1$ $(J \in \mathcal{D})$ установлены неравенства

$$\big|\zeta_K(x,y)\big| \leqslant c(n,\lambda) l_I \Gamma_{IJ}^{(0,n)} l_J^{1-n}, \tag{13}$$

$$\big|D_x^\alpha \zeta_K^*(x,y)\big| \leqslant c(\alpha,\lambda) l_I^{1-|\alpha|} \Gamma_{IJ}^{(0,n+1)} l_J^{-n}, \quad |\alpha| \leqslant 1. \tag{14}$$

Тогда ввиду (4a), (7a) и включения $(1-\varphi_1)f \in \mathrm{VL}(0)$ законно от формулы

$$\Phi_{(1-\varphi_1)f}(x) = \int_{y_n>0} \left(\sum_K \zeta_K(x,y)\right) \big(1-\varphi_1(y)\big) f(y)\, dy$$

перейти к формуле с абсолютно сходящимся рядом

$$D^\alpha (D_n \Phi_{(1-\varphi_1)f} - \mathbf{x}_n^{-1} \Phi_{(1-\varphi_1)f})(x) = \sum_{J,K} \int_{J^{\boxdot}} D_x^\alpha \zeta_K^*(x,y) \big(1-\varphi_1(y)\big) f(y)\, dy,$$

откуда в сочетании с (2), (7a) и свойством $\int_{J^{\boxdot}} |f|\, dy \leqslant l_J^n \|f\|_J$ имеем

$$l_I^{-1} \|D_n \Phi_{(1-\varphi_1)f} - \mathbf{x}_n^{-1} \Phi_{(1-\varphi_1)f}\|_I \leqslant c(n,\lambda) \sum_J \Gamma_{IJ}^{(0,n+1)} \|f\|_J.$$

С учетом результата предыдущего абзаца получаем (11).

Проверим (13) и (14). Для $x, y \in \mathbb{R}^n_+$, $x \neq y$, оценка [1, (23)] имеет вид

$$\big|D_x^\alpha G_B(x,y)\big| \leqslant c(\alpha,\lambda) y_n |x-y|^{1-n-|\alpha|}, \quad (\alpha, B) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathcal{A}_\lambda. \tag{15}$$

Пусть $x \in I^{\boxdot}$ и $y \in J^{\boxdot} \setminus \mathfrak{P}_1$ $(J \in \mathcal{D})$. Тогда

$$[I,J] \leqslant 4\big|(x', \tau x_n) - y\big|_\infty \quad \text{при } 0 < \tau \leqslant 1, \tag{16}$$

что легко выводится из неравенства $\big|(x', \tau x_n) - y\big|_\infty > l_I$. Отсюда

$$\big|G_{A[\mathfrak{c}_K^{\boxdot}]}(x,y)\big| \leqslant \left|\int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} G_{A[\mathfrak{c}_K^{\boxdot}]}\big((x', \tau x_n), y\big)\, d\tau\right| \leqslant c(n,\lambda) l_I l_J [I,J]^{-n},$$

что влечет (13). Пусть $\alpha \in \{0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$. По формуле Тейлора

$$\zeta_K^*(x,y) = x_n \int_0^1 \tau D^{2e_n} \zeta_K\big((x', \tau x_n), y\big)\, d\tau, \tag{17a}$$

$$D_x^\alpha \zeta_K^*(x,y) = x_n \int_0^1 \tau D^{\alpha+2e_n} \zeta_K\big((x', \tau x_n), y\big)\, d\tau, \tag{17b}$$

$$D_{x_n} \zeta_K^*(x,y) = \int_0^1 \{\tau D^{2e_n} + x_n \tau^2 D^{3e_n}\} \zeta_K\big((x', \tau x_n), y\big)\, d\tau, \tag{17c}$$

где производные D^β берутся по первому векторному аргументу. В силу (15), (16), (7a), (7c) и формулы Лейбница при $\bar{x} = (x', \tau x_n)$ имеем

$$\big|D_{\bar{x}}^\beta G_{A[\mathfrak{c}_K^{\boxdot}]}(\bar{x},y)\big| \leqslant c(\beta,\lambda) l_J [I,J]^{1-n-|\beta|}, \quad |\beta| \leqslant 3, \tag{17d}$$

$$\big|D_{\bar{x}}^\beta \psi_K(Z(\bar{x},y))\big| \leqslant c(\beta) |\bar{x} - \widetilde{y}|^{-|\beta|} \leqslant c(\beta) [I,J]^{-|\beta|}, \tag{17e}$$

$$\big|D_{\bar{x}}^\beta \zeta_K(\bar{x},y)\big| \leqslant c(\beta,\lambda) l_J [I,J]^{1-n-|\beta|}. \tag{17f}$$

Поэтому

$$\big|D_x^\alpha \zeta_K^*(x,y)\big| \leqslant c_4(\alpha,\lambda) l_I l_J [I,J]^{-n-1-|\alpha|} \leqslant c_4 l_I^{1-|\alpha|} l_J [I,J]^{-n-1}, \tag{17g}$$

$$\big|D_{x_n} \zeta_K^*(x,y)\big| \leqslant c_5(n,\lambda) \big\{l_J [I,J]^{-n-1} + l_I l_J [I,J]^{-n-2}\big\} \leqslant 2c_5 l_J [I,J]^{-n-1}, \tag{17h}$$

что суть (14). Это значит, что неравенство (11) и теорема 1 доказаны. □

2.4. Вычисление Φ_{Af}. Доказательство следующей леммы тривиально.

Лемма 2. *Если $d \in \mathbb{N}$, $f \in C(\mathbb{R}^d)$ и $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\bigl|f(\xi)\bigr||\xi|^d < \infty$, то предел*

$$\lim_{r\to\infty}\int_{|\xi-\mathfrak{x}|<r} f(\xi)\,d\xi$$

либо существует для всех $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^d$, либо для всех $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^d$ не существует. В первом случае его значение не зависит от выбора $\mathfrak{x}$.

Скажем, что $D^2 f \in \mathrm{VL}(0)$, если $f \in C^{2,\mu}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$ и

$$\sum_J \Gamma^{(0,n)}_{IJ} l_J \|D^2 f\|_J < \infty \text{ для некоторого } I \in \mathcal{D}.$$

Пусть $\mathbb{P}^n_1$ — пространство всех полиномов в $\mathbb{R}^n$ степени не выше первой. Через $\langle x,y\rangle$ обозначаем скалярное произведение $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 3. *Пусть $D^2 f \in \mathrm{VL}(0)$. Тогда*

$$t\nabla f(\cdot,t) \to 0 \text{ в } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ при } t \downarrow 0, \tag{18}$$

$$\text{в } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ существует предел } f(\cdot,0+). \tag{19}$$

Если $f(x) = \gamma(x)$ при больших $|x|$ для некоторого многочлена $\gamma \in \mathbb{P}^n_1$, то для любых оператора $A \in \bigcup_{\lambda\geqslant 1}\mathcal{A}_\lambda$ и точек $x \in \mathbb{R}^n_+$ и $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ имеем

$$\begin{aligned} f(x) - \int_{y_n>0} G_A(x,y)Af(y)\,dy \\ = x_n\frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}\sqrt{\det_A}}\lim_{r\to\infty}\int_{|\xi-\mathfrak{x}|<r} Q_A^{-n/2}\bigl(x-(\xi,0)\bigr)f(\xi,0+)\,d\xi + \langle\nabla\gamma, e^A_n\rangle x_n. \end{aligned} \tag{20}$$

Замечание. Мы без педантизма пишем $f(\cdot,t)$ вместо $f\bigl((\cdot,t)\bigr)$. Первый из интегралов в (20) существует по теореме 1, поскольку $G_A(x,y) = E(A;x,y)$.

Доказательство. Из условия $D^2 f \in \mathrm{VL}(0)$ элементарно следует, что

$$\int_{\Xi\times(0,1)} x_n\bigl|D^2 f(x)\bigr|\,dx < \infty$$

для любого компакта $\Xi \subset \mathbb{R}^{n-1}$. При $0 < t < 1$ имеем

$$\begin{aligned} t\bigl\|Df(\cdot,t)\bigr\|_{L^1(\Xi)} &\leqslant t\bigl\|Df(\cdot,1)\bigr\|_{L^1(\Xi)} + t\int_{\Xi\times(t,1)}\bigl|D^2 f(x)\bigr|\,dx \\ &\leqslant t\bigl\|Df(\cdot,1)\bigr\|_{L^1(\Xi)} + \int_{\Xi\times(t,\sqrt{t})} x_n\bigl|D^2 f(x)\bigr|\,dx + \sqrt{t}\int_{\Xi\times(\sqrt{t},1)} x_n\bigl|D^2 f(x)\bigr|\,dx, \end{aligned}$$

что при $t \to 0$ доказывает (18). При $0 < t_1 < t_2 < 1$ выполнено

$$\begin{aligned} \bigl\|f(\cdot,t_1) - f(\cdot,t_2)\bigr\|_{L^1(\Xi)} &\leqslant \int_{\Xi\times(t_1,t_2)}\bigl|D_n f(x)\bigr|\,dx \\ &\leqslant t_2\bigl\|D_n f(\cdot,1)\bigr\|_{L^1(\Xi)} + \int_{\Xi\times(t_1,t_2)} x_n\bigl|D_{nn} f(x)\bigr|\,dx + t_2\int_{\Xi\times(t_2,1)}\bigl|D_{nn} f(x)\bigr|\,dx. \end{aligned}$$

Предыдущая выкладка и критерий сходимости Коши дают (19).

Докажем, что если носитель $\operatorname{supp} f$ ограничен в условиях формулы (20), то

$$f(x) - \int_{y_n>0} G_A(x,y)Af(y)\,dy = x_n\frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}\sqrt{\det_A}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} Q_A^{-n/2}\bigl(x-(\xi,0)\bigr)f(\xi,0+)\,d\xi. \tag{21}$$

Ввиду [1, (19)] и формулы $\int_{\mathbb{R}^n} E_A(y-z)A\varphi(y)\,dy = \varphi(z)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, имеем

$$Q_A(x-y) - Q_A(x-\widetilde{y}_A) = -\frac{4x_n y_n}{a_{nn}} = Q_A(y-x) - Q_A(y-\widetilde{x}_A), \tag{22}$$

$$Q_A(x-\widetilde{y}_A) = Q_A(y-\widetilde{x}_A), \tag{23}$$

$$G_A(x,y) = G_A(y,x), \tag{24}$$

$$\int_{y_n>0} G_A(x,y)A\varphi(y)\,dy = \int_{y_n>0} G_A(y,x)A\varphi(y)\,dy = \varphi(x), \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+).$$

Если функция f сосредоточена около точки x, то по регуляризации

$$f(x) - \int_{y_n>0} G_A(x,y)Af(y)\,dy = 0.$$

Значит, при проверке (21) можно предположить, что $f \equiv 0$ вблизи точки x. В этом случае, рассматривая интегралы по множеству $\{y\colon y_n > t\}$ и используя соотношения $(15)\big|_{\alpha=0}$, (18), (19) и ограниченность $\operatorname{supp} f$, получаем

$$\begin{aligned}
-\int_{y_n>0} G_A(x,y)Af(y)\,dy &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \int_{y_n>0} D_{y_i}G_A(x,y)D_{y_j}f(y)\,dy \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \int_{y_n>0} D_{y_j}\bigl\{D_{y_i}G_A(x,y)f(y)\bigr\}\,dy \\
&= -\sum_{i=1}^n a_{in} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} D_{y_i}G_A\bigl(x,(\xi,0)\bigr)f(\xi,0+)\,d\xi.
\end{aligned}$$

С учетом (22) выводим

$$\begin{aligned}
D_{y_i}G_A\bigl(x,(\xi,0)\bigr) &= C_A Q_A^{-n/2}(x-y)D_{y_i}\bigl\{Q_A(x-y) - Q_A(x-\widetilde{y}_A)\bigr\}\Big|_{y=(\xi,0)} \\
&= -\frac{4x_n\delta_{in}}{a_{nn}} C_A Q_A^{-n/2}\bigl(x-(\xi,0)\bigr), \quad C_A = \frac{\Gamma(n/2)}{4\pi^{n/2}\sqrt{\det_A}}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует (21), т.е. формула (20) с $\gamma = 0$.

При $\gamma \ne 0$ применим формулу (21) к функции $f - \gamma$. Ввиду равенства

$$\gamma(x) - \gamma(\widetilde{x}^A) = \langle \nabla\gamma, x_n e_n^A \rangle$$

формула (20) будет доказана, если установить соотношение

$$\gamma(\widetilde{x}^A) = x_n \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}\sqrt{\det_A}} \lim_{r\to\infty} \int_{|\xi-\mathfrak{x}|<r} Q_A^{-n/2}\bigl(x-(\xi,0)\bigr)\gamma(\xi,0)\,d\xi. \tag{25}$$

Раскладывая $\gamma(\xi,0)$ по степеням переменной $\eta \equiv \xi - (\widetilde{x}^A)'$, видим, что требуется проверить равенства

$$x_n \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}\sqrt{\det_A}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} Q_A^{-n/2}\bigl(x-(\xi,0)\bigr)\,d\xi = 1,$$

$$\lim_{r\to\infty} \int_{|\eta+(\widetilde{x}^A)'-\mathfrak{x}|<r} Q_A^{-n/2}\bigl(x_n e_n^A - (\eta,0)\bigr)\eta_i\,d\eta = 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Первое равенство получается подстановкой в (21) функции $f = \varphi(\cdot/r)$, где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi \equiv 1$ около начала координат, с переходом к пределу при $r \to \infty$ при учете неравенства

$$\bigl|G_A(x,y)\bigr| \leqslant c(n,\lambda)x_n|x-y|^{1-n},$$

которое следует из (15) и (24). Второе равенство следует из соотношений

$$Q_A\big(x_n e_n^A - (\eta,0)\big) \overset{(23)}{=} Q_A\Big((\eta,0) - x_n \widetilde{e_n^A}_A\Big) = Q_A\big(x_n e_n^A + (\eta,0)\big)$$

и леммы 2. Тем самым (25), (20) и лемма 3 доказаны. $\square$

Следующий результат позволяет приближенно найти производные $D^\alpha \Phi_{Af}$ потенциала Φ_{Af} и агрегат $D_n\Phi_{Af} - \mathbf{x}_n^{-1}\Phi_{Af}$.

Теорема 2. *Пусть* $\lambda \geqslant 1$, $0 < \mu < 1$, $A \in \mathcal{A}_\lambda^\mu$, $D^2 f \in \mathrm{VL}(0)$, $I \in \mathcal{D}$ *и*

$$\Theta = \sum_J \Gamma_{IJ}^{(0,n)} l_J \left(\sum_{H \in \overleftarrow{IJ} \cup \overrightarrow{IJ}} |A|_H\right) \mathcal{F}_J < \infty,$$

где

$$\begin{aligned} \overleftarrow{IJ} &= \big\{H \in \mathcal{D}\colon I \subset H \subset I^J \ \&\ 12 l_H > \kappa l_{I^J}\big\}, \\ \overrightarrow{IJ} &= \big\{H \in \mathcal{D}\colon J \subset H \subset J^I\big\}, \\ \mathcal{F}_J &= \|D^2 f\|_J + [I,J]^{-1} \sum_{H \in \{I^J\} \cup \overrightarrow{IJ}} l_H \|D^2 f\|_H. \end{aligned}$$

Тогда $Af \in \mathrm{VL}(0)$, *так что абсолютно сходится интеграл*

$$\Phi_{Af}(x) = \int_{y_n > 0} E(A; x, y) Af(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Для $k \in \mathbb{N}_0$ *и функций* $\{\varphi_k\}$ *из* (4) *обозначим*

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}_k &= \mathfrak{c}_{I(k)}^{\boxdot}, \\ A_k &= A[\mathfrak{c}_k], \\ \gamma_k(x) &= f(\mathfrak{c}_k) + \langle \nabla f(\mathfrak{c}_k), x - \mathfrak{c}_k \rangle, \\ f_k &= \varphi_k f + (1 - \varphi_k)\gamma_k, \\ f_{(k)} &= f_{k+1} - f_k. \end{aligned}$$

Тогда $D^2 f_k \in \mathrm{VL}(0)$, *при* $x \in I^\boxdot$ *существуют пределы*

$$F_k(x) = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}\sqrt{\det_{A_k}}} \lim_{r\to\infty} \int_{|\xi - \mathfrak{c}_k'| < r} Q_{A_k}^{-n/2}\big(x - (\xi, 0)\big) f_{(k)}(\xi, 0+)\, d\xi,$$

функции F_k *принадлежат* $C^{2,\mu}(I^\boxdot)$, *ряд*

$$F = \sum_{k=0}^\infty F_k$$

абсолютно сходится в $C^{2,\mu}(I^\boxdot)$, *числовой ряд*

$$\gamma' = \sum_{k=0}^\infty \langle \nabla(\gamma_{k+1} - \gamma_k), e_n^{A_k} \rangle$$

абсолютно сходится и выполнены неравенства

$$l_I^{-1}\|\mathcal{R}_f\|_I + \|D\mathcal{R}_f\|_I \leqslant c(n,\lambda,\mu)\Theta, \tag{26a}$$

$$l_I^{-1}\|D_n\mathcal{R}_f - \mathbf{x}_n^{-1}\mathcal{R}_f\|_I + \|D^2\mathcal{R}_f\|_I \leqslant c(n,\lambda,\mu)\Theta^*, \tag{26b}$$

где

$$\mathcal{R}_f = \Phi_{Af} - \Psi,$$
$$\Psi = f - \gamma_0 - \mathbf{x}_n F - \gamma' \mathbf{x}_n,$$
$$\Theta^* = \sum_J \Gamma_{IJ}^{(0,n+1)} \left(\sum_{H \in \overleftarrow{IJ} \cup \overrightarrow{IJ}} |A|_H \right) \mathcal{F}_J.$$

Замечание. Пределы $f_{(k)}(\cdot, 0+)$ понимаются в смысле (19). Из неравенства

$$\Theta^* \leqslant \Theta / l_I$$

следует конечность величины Θ^*.

Доказательство. Очевидно, что $Af \in \mathcal{C}$. Для любого $J \in \mathcal{D}$

$$\big\| a_{ij} - a_{ij}(\mathfrak{c}_J^{\boxdot}) \big\|_J = \big\| a_{ij} - a_{ij}(\mathfrak{c}_J^{\boxdot}) \big\|_{L^\infty(J^{\boxdot})} + l_J^\mu |a_{ij}|_{C^\mu(J^{\boxdot})} \leqslant c(n)|A|_J, \tag{27}$$
$$\|Af\|_J \leqslant \big\| Af - A[\mathfrak{c}_J^{\boxdot}]f \big\|_J + \big\| A[\mathfrak{c}_J^{\boxdot}]f \big\|_J \leqslant c(n)|A|_J \|D^2 f\|_J + c(n,\lambda)\|D^2 f\|_J.$$

Ввиду условий $D^2 f \in \mathrm{VL}(0)$ и $\Theta < \infty$ получаем включение $Af \in \mathrm{VL}(0)$ и тем самым абсолютную сходимость интеграла $\Phi_{Af}(x)$ по теореме 1.

Пусть $k \geqslant 0$ и $J^{\boxdot} \subset \mathfrak{Q}_k$ (см. (5)). Рассматривая многочлены Тейлора функции f относительно точек, по которым касаются между собой кубы из множества $\big\{ H^{\boxdot} \colon H \in \widehat{I^{(k)}J} \big\}$, ввиду неравенств

$$\|\gamma\|_{L^\infty(J^{\boxdot})} \leqslant \|\gamma\|_{L^\infty(3(H^{\boxdot}))} \leqslant c(n)\|\gamma\|_{L^\infty(H^{\boxdot})}, \quad \gamma \in \mathbb{P}_1^n,$$

и формулы Тейлора получаем оценки

$$\|f - \gamma_k\|_{L^\infty(J^{\boxdot})} \leqslant c(n) \sum_{H \in \widehat{I^{(k)}J}} l_H^2 \|D^2 f\|_{L^\infty(H^{\boxdot})},$$
$$\big\| D(f - \gamma_k) \big\|_{L^\infty(J^{\boxdot})} \leqslant c(n) \sum_{H \in \widehat{I^{(k)}J}} l_H \|D^2 f\|_{L^\infty(H^{\boxdot})}.$$

С учетом соотношений (2), $|D^2\gamma_k| \equiv 0$ и $(I^{(k)})^J = I^{(k)}$ заключаем

$$\|f - \gamma_k\|_J \leqslant c(n) \sum_{H \in \widehat{I^{(k)}J}} l_H^2 \|D^2 f\|_H,$$
$$\big\| D(f - \gamma_k) \big\|_J \leqslant c(n) \sum_{H \in \widehat{I^{(k)}J}} l_H \|D^2 f\|_H,$$
$$l_H \leqslant l_{I^{(k)}} \quad \& \quad [I, J] \leqslant [I^{(k)}, J] \leqslant 2 l_{I^{(k)}},$$
$$l_{I^{(k)}}^{-2} \|f - \gamma_k\|_J + l_{I^{(k)}}^{-1} \big\| D(f - \gamma_k) \big\|_J \leqslant c(n)[I, J]^{-1} \sum_{H \in \widehat{I^{(k)}J}} l_H \|D^2 f\|_H. \tag{28}$$

Оценим $\big\| D^2(f - f_k) \big\|_J$ и $\|D^2 f_{(k)}\|_J$. Запишем

$$f - f_k = (1 - \varphi_k)(f - \gamma_k),$$
$$f_{(k)} = f_{k+1} - f_k = \{f - f_k\} - \{f - f_{k+1}\}.$$

Если $J^{\boxdot} \subset \mathfrak{Q}_k \setminus \mathfrak{Q}_{k-1}^{\circ}$, то $l_J \leqslant l_{I^{(k)}}$ и $\widehat{I^{(k)}J} = \{I^J\} \cup \overrightarrow{IJ}$. Отсюда по (2), (4c), (28) и формуле Лейбница

$$l_{I^{(k)}}^2 \big\| D^2(1 - \varphi_k) \big\|_J + l_{I^{(k)}} \big\| D(1 - \varphi_k) \big\|_J + \|1 - \varphi_k\|_J \leqslant c(n),$$
$$\big\| D^2(f - f_k) \big\|_J \leqslant c_1(n) \mathcal{F}_J.$$

В силу (4a), (4b) и (6)

$$\begin{aligned} f - f_k &\equiv 0 \quad \text{на множестве } \mathfrak{Q}_{k-1}, \\ |D^2 f_k| &\equiv 0 \quad \text{на множестве } \mathbb{R}^n_+ \setminus \mathfrak{Q}^\circ_k, \\ |D^2 f_{(k)}| &\equiv 0 \quad \text{на множестве } \mathbb{R}^n_+ \setminus \mathfrak{Q}^\circ_{k+1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\big\|D^2(f - f_k)\big\|_J \leqslant \begin{cases} 0, & J^\boxdot \subset \mathfrak{Q}_{k-1}, \\ c_1 \mathcal{F}_J, & J^\boxdot \subset \mathfrak{Q}_k \setminus \mathfrak{Q}^\circ_{k-1}, \\ \|D^2 f\|_J \leqslant \mathcal{F}_J, & J^\boxdot \subset \mathbb{R}^n_+ \setminus \mathfrak{Q}^\circ_k, \end{cases} \tag{29}$$

$$\|D^2 f_{(k)}\|_J \leqslant \begin{cases} (c_1+1)\mathcal{F}_J, & J^\boxdot \subset \mathfrak{Q}_{k+1} \setminus \mathfrak{Q}^\circ_{k-1}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{30}$$

Ввиду [9, (25e)] имеем $[I^J, J] \leqslant 3[I, J]$, откуда для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Gamma^{(\alpha,\beta)}_{IJ} \leqslant \max\{1, 3^{\alpha+\beta}\} \Gamma^{(\alpha,\beta)}_{IH} \Gamma^{(\alpha,\beta)}_{HJ}, \quad H \in \widehat{IJ}. \tag{31}$$

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > n-1$ и $H \in \overleftarrow{IJ} \cup \overrightarrow{IJ}$. Тогда

$$\begin{gathered} [H, J] \leqslant [I^J, J^I] \leqslant 2 l_{I^J} < 24 \kappa^{-1} l_H \quad \text{при } H \in \overleftarrow{IJ}, \\ [H, J] = l_H \quad \text{при } H \in \overrightarrow{IJ}, \\ \Gamma^{(\alpha,\beta)}_{HJ} \leqslant c(n,\alpha) \Gamma^{(\alpha_1,\beta)}_{HJ}, \quad \alpha_1 = \max\{\alpha, 1\}. \end{gathered}$$

В силу (31) и леммы 1 для любого $H \in \mathcal{D}$ получаем

$$\sum_{J\colon H \in \overleftarrow{IJ} \cup \overrightarrow{IJ}} \Gamma^{(\alpha,\beta)}_{IJ} \leqslant c(n,\alpha,\beta) \Gamma^{(\alpha,\beta)}_{IH} \sum_J \Gamma^{(\alpha_1,\beta)}_{HJ} \leqslant c(n,\alpha,\beta) \Gamma^{(\alpha,\beta)}_{IH}. \tag{32}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_J \Gamma^{(0,n)}_{IJ} l_J [I,J]^{-1} \sum_{H \in \{I^J\} \cup \overrightarrow{IJ}} l_H \|D^2 f\|_H &\leqslant \sum_H l_H \|D^2 f\|_H \sum_{J\colon H \in \overleftarrow{IJ} \cup \overrightarrow{IJ}} \Gamma^{(0,n+1)}_{IJ} \\ &\leqslant c(n) \sum_H \Gamma^{(0,n+1)}_{IH} l_H \|D^2 f\|_H, \\ \theta := \sum_J \Gamma^{(0,n)}_{IJ} l_J \mathcal{F}_J &\leqslant c(n) \sum_J \Gamma^{(0,n)}_{IJ} l_J \|D^2 f\|_J < \infty. \end{aligned}$$

Ввиду (29) заключаем, что $D^2(f - f_k), D^2 f_k, D^2 f_{(k)} \in \mathrm{VL}(0)$.

Далее считаем, что $x \in I^\boxdot$. В силу (30)

$$\begin{aligned} \|A f_{(k)}\|_J &\leqslant c(n,\lambda)(|A|_J + 1) \|D^2 f_{(k)}\|_J, \\ \|A_k f_{(k)}\|_J &\leqslant c(n,\lambda) \|D^2 f_{(k)}\|_J, \\ \sum_J \Gamma^{(0,n)}_{IJ} l_J \big\{ \|A f_{(k)}\|_J + \|A_k f_{(k)}\|_J \big\} &\leqslant c_2(n,\lambda) \sum_J \Gamma^{(0,n)}_{IJ} l_J (|A|_J + 1) \mathcal{F}_J \\ &\leqslant c_2 \{\Theta + \theta\} < \infty. \end{aligned}$$

Значит, $Af_{(k)} \in \mathrm{VL}(0)$ и $A_k f_{(k)} \in \mathrm{VL}(0)$, так что определены потенциалы

$$\begin{aligned}\Phi_k(x) &= \int_{y_n>0} E(A;x,y) Af_{(k)}(y)\,dy,\\ \Phi'_k(x) &= \int_{y_n>0} E(A;x,y) A_k f_{(k)}(y)\,dy,\\ \Phi''_k(x) &= \int_{y_n>0} G_{A_k}(x,y) A_k f_{(k)}(y)\,dy.\end{aligned}$$

Ввиду (8), (9), (29) и (30) ряды

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k, \qquad \Phi' = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi'_k, \qquad \Phi'' = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi''_k$$

абсолютно сходятся в $C^{2,\mu}(I^{\boxdot})$, а потенциал $\Phi_{A(f-f_k)}$ стремится в $C^{2,\mu}(I^{\boxdot})$ к нулю при $k \to \infty$. Учитывая соотношение $f_0 = \gamma_0 \in \mathbb{P}_1^n$, на $I^{\boxdot}$ получаем

$$\Phi_{Af} = \Phi_{A(f-f_q)} + \sum_{k=0}^{q-1} \Phi_k = \lim_{q\to\infty} \left(\Phi_{A(f-f_q)} + \sum_{k=0}^{q-1} \Phi_k \right) = \Phi.$$

По лемме 3 пределы $F_k(x)$ существуют и

$$f_{(k)} - \Phi''_k = \mathbf{x}_n F_k + \langle \nabla(\gamma_{k+1} - \gamma_k), e_n^{A_k} \rangle \mathbf{x}_n.$$

В частности, $F_k \in C^{2,\mu}(I^{\boxdot})$. По формуле Тейлора

$$\begin{gathered}\big|\nabla(\gamma_{k+1} - \gamma_k)\big| \leqslant c(n) l_{I^{(k)}} \big\{ \|D^2 f\|_{I^{(k)}} + \|D^2 f\|_{I^{(k+1)}} \big\},\\ \sum_{k=0}^{\infty} \big| \langle \nabla(\gamma_{k+1} - \gamma_k), e_n^{A_k} \rangle \big| \leqslant c(n,\lambda) \sum_J \Gamma_{IJ}^{(0,n)} l_J \|D^2 f\|_J < \infty,\end{gathered}$$

то есть ряд γ' абсолютно сходится. Абсолютная сходимость ряда F вытекает из соотношения $f_{(k)}\big|_{I^{\boxdot}} \equiv 0$ $(k \geqslant 1)$ и абсолютной сходимости рядов Φ'' и γ'. На кубе $I^{\boxdot}$ выполнены тождества

$$\begin{gathered}\Psi = f - \gamma_0 - \sum_{k=0}^{\infty} \big\{ f_{(k)} - \Phi''_k \big\} = f - \gamma_0 - f_{(0)} + \Phi'' = \Phi'',\\ \mathcal{R}_f = \Phi - \Phi''.\end{gathered}$$

Нам осталось проверить неравенства (26). Если $J^{\boxdot} \subset \mathfrak{Q}_{k+1} \setminus \mathfrak{Q}^{\circ}_{k-1}$, где $k \geqslant 0$, то $I^J = I^{(k)}$ или $I^J = I^{(k+1)}$, так что $\mathfrak{c}_k \in (I^J)^{\boxtimes}$. Аналогично (27) имеем

$$\begin{gathered}\big\| a_{ij} - a_{ij}(\mathfrak{c}_k) \big\|_J \leqslant c(n) \sum_{H \in \{I^J\} \cup \overrightarrow{IJ}} |A|_H,\\ \big\| (A - A_k) f_{(k)} \big\|_J \leqslant c(n) \left(\sum_{H \in \{I^J\} \cup \overrightarrow{IJ}} |A|_H \right) \|D^2 f_{(k)}\|_J.\end{gathered}$$

С учетом (30) и теоремы 1 получаем

$$\begin{aligned}l_I^{-1} \|\Phi_k - \Phi'_k\|_I + \big\| D(\Phi_k - \Phi'_k) \big\|_I &\leqslant c(n,\lambda,\mu) \Theta_k,\\ l_I^{-1} \big\| D_n(\Phi_k - \Phi'_k) - \mathbf{x}_n^{-1}(\Phi_k - \Phi'_k) \big\|_I + \big\| D^2(\Phi_k - \Phi'_k) \big\|_I &\leqslant c(n,\lambda,\mu) \Theta^*_k,\end{aligned}$$

где

$$\Theta_k = \sum_{J\colon J^{\boxdot}\subset\mathfrak{Q}_{k+1}\setminus\mathfrak{Q}^{\circ}_{k-1}} \Gamma^{(0,n)}_{IJ} l_J \left(\sum_{H\in\overleftarrow{IJ}\cup\overrightarrow{IJ}} |A|_H\right)\mathcal{F}_J,$$

$$\Theta^*_k = \sum_{J\colon J^{\boxdot}\subset\mathfrak{Q}_{k+1}\setminus\mathfrak{Q}^{\circ}_{k-1}} \Gamma^{(0,n+1)}_{IJ} \left(\sum_{H\in\overleftarrow{IJ}\cup\overrightarrow{IJ}} |A|_H\right)\mathcal{F}_J.$$

Отсюда и из сходимости рядов Φ и Φ' заключаем, что

$$l_I^{-1}\|\Phi-\Phi'\|_I + \big\|D(\Phi-\Phi')\big\|_I \leqslant c(n,\lambda,\mu)\Theta, \tag{33a}$$

$$l_I^{-1}\big\|D_n(\Phi-\Phi') - \mathrm{x}_n^{-1}(\Phi-\Phi')\big\|_I + \big\|D^2(\Phi-\Phi')\big\|_I \leqslant c(n,\lambda,\mu)\Theta^*. \tag{33b}$$

Положим

$$\mathcal{H}_k = \big\{K\in\mathcal{D}\colon \mathfrak{c}^{\boxdot}_K \in (I^{(j)})^{\boxtimes} \text{ для некоторого } j\in\mathbb{N}_0,\ k-\log_2(6/\kappa)<j\leqslant k\big\}.$$

Для любых $(k,K)\in\mathbb{N}_0\times\mathcal{D}$ покажем, что

$$\text{если } \psi_K\big(Z(x,y)\big)A_k f_{(k)}(y)\neq 0 \text{ для некоторого } y\in\mathbb{R}^n_+, \text{ то } K\in\mathcal{H}_k. \tag{34}$$

Пусть верна посылка в (34). Тогда $y\in\mathfrak{Q}_{k+1}\setminus\mathfrak{Q}_{k-1}$ по (30), откуда

$$\begin{aligned}
|x-\widetilde{y}| &> x_n \geqslant l_I, & k&=0,\\
|x-\widetilde{y}| &\geqslant \max\{|x'-y'|_\infty, y_n\} > l_{I^{(k-1)}}, & k&\neq 0,\\
|x-\widetilde{y}|^2 &\leqslant (n-1)|x'-y'|^2_\infty + (x_n+y_n)^2\\
&\leqslant 16(n-1)l^2_{I^{(k)}} + (2l_I+4l_{I^{(k)}})^2 < \kappa^{-2}l^2_{I^{(k)}},
\end{aligned}$$

$$l_I < l_I + \frac{\kappa}{2}l_{I^{(k)}} < Z(x,y)_n = x_n + \kappa|x-\widetilde{y}| < 2l_I + l_{I^{(k)}} \leqslant 3l_{I^{(k)}}.$$

Поэтому найдется j такое, что $0\leqslant j\leqslant k$ и

$$Z(x,y)\in\Big[\overline{I^{(j)}}\times(l_{I^{(j)}}, 3l_{I^{(j)}})\Big]\cap\operatorname{supp}\psi_K.$$

Имеем $\frac{\kappa}{2}l_{I^{(k)}} < Z(x,y)_n < 3l_{I^{(j)}}$, так что $k-\log_2(6/\kappa)<j$. В силу (7a)

$$\overline{I^{(j)}}\cap\overline{\frac{3}{2}K}\neq\varnothing \quad \& \quad \frac12\leqslant\frac{l_{I^{(j)}}}{l_K}\leqslant 2.$$

Легко убедиться, что это дает включение $\mathfrak{c}^{\boxdot}_K\in(I^{(j)})^{\boxtimes}$. Мы доказали (34).

Из соотношений (7b), (30) и (34) следует, что

$$\Phi'_k(x)-\Phi''_k(x) = \sum_{K\in\mathcal{H}_k}\int_{\mathfrak{Q}_{k+1}\setminus\mathfrak{Q}^{\circ}_{k-1}}\big(G_{A[\mathfrak{c}^{\boxdot}_K]}(x,y) - G_{A_k}(x,y)\big)\psi_K\big(Z(x,y)\big)A_k f_{(k)}(y)\,dy. \tag{35}$$

Если $J^{\boxdot}\subset\mathfrak{Q}_{k+1}\setminus\mathfrak{Q}^{\circ}_{k-1}$, то $I^J=I^{(k)}$ или $I^J=I^{(k+1)}$, откуда

$$I\subset I^{(j)}\subset I^{(k)}\subset I^J \quad \& \quad l_{I^{(j)}} > \frac{\kappa}{6}l_{I^{(k)}} \geqslant \frac{\kappa}{12}l_{I^J} \quad \& \quad I^{(j)}\in\overleftarrow{IJ}$$

для любого индекса j из определения множества $\mathcal{H}_k$. Поэтому

$$\max_{i,j=\overline{1,n}}\max_{K\in\mathcal{H}_k}\big|a_{ij}(\mathfrak{c}^{\boxdot}_K) - a_{ij}(\mathfrak{c}_k)\big| \leqslant c(n)\sum_{H\in\overleftarrow{IJ}}|A|_H, \quad J^{\boxdot}\subset\mathfrak{Q}_{k+1}\setminus\mathfrak{Q}^{\circ}_{k-1}, \tag{36a}$$

$$\|A_k f_{(k)}\|_J \leqslant c(n,\lambda)\mathcal{F}_J, \tag{36b}$$

где второе неравенство тривиально следует из (30). Из (35) и (36) несложной модификацией построений работы [1] выводятся оценки

$$l_I^{-1}\|\Phi'_k-\Phi''_k\|_I+\big\|D(\Phi'_k-\Phi''_k)\big\|_I\leqslant c(n,\lambda,\mu)\Theta_k, \tag{37a}$$

$$\big\|D^2(\Phi'_k-\Phi''_k)\big\|_I\leqslant c(n,\lambda,\mu)\Theta^*_k. \tag{37b}$$

(В [1, п. 2.1] записана оценка производных функции Грина (см. (15)), которая в [1, п. 2.2] применена к оцениванию норм $\|D^\alpha\Phi\|_I$, где функция Φ аналогична потенциалу Φ_f. Параллельно в [1, п. 2.1] получена оценка производных разности $G_{B_1}-G_{B_2}$, примененная в [1, п. 2.2] для оценивания нормы $\|f-A\Phi\|_I$ невязки $f-A\Phi$. Эти две линии рассуждений легко скомбинировать, получив неравенства (37).) В силу (12) и (37a)

$$l_I^{-1}\big\|D_n(\Phi'_0-\Phi''_0)-\mathbf{x}_n^{-1}(\Phi'_0-\Phi''_0)\big\|_I\leqslant c(n,\lambda,\mu)\Theta^*_0.$$

Поэтому если установить неравенство

$$l_I^{-1}\big\|D_n(\Phi'_k-\Phi''_k)-\mathbf{x}_n^{-1}(\Phi'_k-\Phi''_k)\big\|_I\leqslant c(n,\lambda)\Theta^*_k\quad(k\geqslant 1), \tag{38}$$

то из сходимости рядов Φ' и Φ'' в $C^{2,\mu}(I^\boxdot)$ и соотношений $\mathcal{R}_f=\Phi-\Phi''$ (на $I^\boxdot$) и (33) получим требуемые оценки (26).

Пусть $k\geqslant 1$, $J^\boxdot\subset\mathfrak{Q}_{k+1}\setminus\mathfrak{Q}^\circ_{k-1}$, $\bar x=(x',\tau x_n)$ для $0<\tau\leqslant 1$, $y\in J^\boxdot\setminus\mathfrak{P}_1$ и $K\in\mathcal{H}_k$. В силу [1, (23′)], (16) и (36a) имеем

$$\begin{aligned}\Big|D^\beta_{\bar x}\big(G_{A[\mathfrak{c}^\boxdot_K]}(\bar x,y)-G_{A_k}(\bar x,y)\big)\Big|&\leqslant c(\beta,\lambda)y_n|\bar x-y|^{1-n-|\beta|}\sum_{H\in\overleftarrow{IJ}}|A|_H\\&\leqslant c(\beta,\lambda)l_J[I,J]^{1-n-|\beta|}\sum_{H\in\overleftarrow{IJ}}|A|_H,\quad|\beta|\leqslant 3,\end{aligned}$$

что можно рассматривать как аналог неравенства (17d). Для функций

$$\begin{aligned}\delta_K(\bar x,y)&=\big(G_{A[\mathfrak{c}^\boxdot_K]}(\bar x,y)-G_{A_k}(\bar x,y)\big)\psi_K\big(Z(\bar x,y)\big),\\ \delta^*_K(x,y)&=D_{x_n}\delta_K(x,y)-x_n^{-1}\delta_K(x,y)\end{aligned}$$

имитация выкладок (17) доставляет оценки

$$\big|D^\beta_{\bar x}\delta_K(\bar x,y)\big|\leqslant c(\beta,\lambda)l_J[I,J]^{1-n-|\beta|}\sum_{H\in\overleftarrow{IJ}}|A|_H, \tag{39}$$

$$\big|D^\alpha_x\delta^*_K(x,y)\big|\leqslant c(\alpha,\lambda)l_I^{1-|\alpha|}l_J[I,J]^{-n-1}\sum_{H\in\overleftarrow{IJ}}|A|_H,\quad\alpha\in\{0,e_1,\dots,e_{n-1}\}, \tag{40}$$

$$\big|D_{x_n}\delta^*_K(x,y)\big|\leqslant c(n,\lambda)l_J[I,J]^{-n-1}\sum_{H\in\overleftarrow{IJ}}|A|_H. \tag{41}$$

Ввиду (4a), (35), (39) и включения $A_kf_{(k)}\in\mathrm{VL}(0)$ справедлива формула

$$\begin{aligned}&D^\alpha\big(D_n(\Phi'_k-\Phi''_k)-\mathbf{x}_n^{-1}(\Phi'_k-\Phi''_k)\big)(x)\\&\qquad=\sum_{J,K:\ J^\boxdot\subset\mathfrak{Q}_{k+1}\setminus\mathfrak{Q}^\circ_{k-1}\text{ и }K\in\mathcal{H}_k}\int_{J^\boxdot\setminus\mathfrak{P}_1}D^\alpha_x\delta^*_K(x,y)A_kf_{(k)}(y)\,dy,\quad|\alpha|\leqslant 1,\end{aligned}$$

где ряд абсолютно сходится. Отсюда с учетом (2), (36b), (40) и (41) получаем оценку (38). Тем самым (26) и теорема 2 доказаны. □

3. Стандартный набор и вычисления с потенциалом Φ_L

3.1. Стандартный набор и потенциал Φ_{Aw}. Сопоставим липшицевой функции $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ ее надграфик Ω и аппроксимационные числа b_I:

$$\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > \omega(x')\},$$
$$b_I = l_I^{-\frac{n+1}{2}} \left(\min_{\gamma \in \mathbb{P}_1^{n-1}} \int_{5I} |\omega - \gamma|^2 \, d\xi \right)^{1/2}, \quad I \in \mathcal{D}.$$

Введем ряд вспомогательных понятий, предназначенных для изучения гармонических функций в области Ω путем ее распрямления.

Теорема 3. *Для $K \in \mathcal{D}$ пусть $\gamma_K \in \mathbb{P}_1^{n-1}$ — многочлен со свойством*

$$\int_K |\omega - \gamma_K|^2 \, d\xi = \min_{\gamma \in \mathbb{P}_1^{n-1}} \int_K |\omega - \gamma|^2 \, d\xi.$$

Для разбиения единицы $\{\psi_K\}$ из (7) положим

$$w(x) = \sum_K \psi_K(x) \gamma_K(x'), \quad x \in \mathbb{R}^n_+.$$

Тогда функция w принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, липшицева и

$$w(\xi, 0+) = \omega(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{42}$$

Возьмем постоянную $\theta \geqslant \|\omega\|_{\mathrm{Lip}}$. Тогда для любого $I \in \mathcal{D}$

$$|\nabla \gamma_I| \leqslant c(n)\theta, \tag{43}$$
$$b_I \leqslant c(n)\theta, \tag{44}$$
$$\|D^\alpha w\|_{L^\infty(I^\boxtimes)} \leqslant c(\alpha) l_I^{1-|\alpha|} b_I, \quad \alpha \notin \{0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}, \tag{45}$$
$$\|D^\alpha w\|_{L^\infty(I^\boxtimes)} \leqslant c(\alpha) l_I^{1-|\alpha|} \theta, \quad \alpha \neq 0. \tag{46}$$

Существует такое $W = c(n, \theta)$, что для отображения $\mathbf{x}' : x \mapsto x'$

$$\|\omega - \gamma_I\|_{L^\infty(5I)} \leqslant W l_I / 3, \quad I \in \mathcal{D}, \tag{47}$$
$$\|w - \gamma_I \circ \mathbf{x}'\|_{L^\infty(I^\boxtimes)} \leqslant W l_I / 3, \quad I \in \mathcal{D}, \tag{48}$$

отображение $g : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$ вида $g(x) = \bigl(x', g_n(x)\bigr)$ с функцией

$$g_n = w + W \mathbf{x}_n$$

является диффеоморфизмом $\mathbb{R}^n_+$ на Ω, а обратный диффеоморфизм $\mathfrak{g} = g^{-1}$ представим формулой

$$\mathfrak{g}(y) = \bigl(y', \mathfrak{G}(y)\bigr)$$

с липшицевой функцией $\mathfrak{G} \in C^\infty(\Omega)$, удовлетворяющей неравенствам

$$\bigl\|(D^\alpha \mathfrak{G}) \circ g\bigr\|_{L^\infty(I^\boxtimes)} \leqslant c(\alpha, \theta) l_I^{1-|\alpha|} b_I, \quad |\alpha| > 1, \tag{49}$$
$$\bigl\|(D^\alpha \mathfrak{G}) \circ g\bigr\|_{L^\infty(I^\boxtimes)} \leqslant c(\alpha, \theta) l_I^{1-|\alpha|}, \quad \alpha \neq 0. \tag{50}$$

Оператор

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ D_{ii} + \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y_i}(g) D_{in} + \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y_i}(g) D_{ni} \right\} + \bigl|\nabla \mathfrak{G}(g)\bigr|^2 D_{nn}$$

принадлежит $\mathcal{A}^{\mu}_{\lambda}$ *для некоторого* $\lambda(n,\theta) \geqslant 1$ *и любого* $0<\mu<1$. *Выполнены неравенства*

$$|A|_I \leqslant c(n,\theta) b_I, \tag{51}$$

$$\|L\|_I \leqslant c(n,\theta) l_I^{-1} b_I \quad \textit{для } L = -(\Delta \mathfrak{G}) \circ g = -\sum_{i=1}^{n} (D_{ii}\mathfrak{G}) \circ g. \tag{52}$$

Назовем $\big(\{\gamma_K\}, w, W, g, \mathfrak{g}, \mathfrak{G}, A, \lambda, L\big)$ *стандартным набором пары* (ω,θ).

Доказательство. Очевидно, что $w \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n_+)$. Элементарно проверяется (достаточно рассмотреть одномерные двоичные интервалы), что

$$\text{если } (I^{\times})^{\circ} \cap \overline{\frac{3}{2}K} \neq \varnothing \text{ и } l_K \in \{l_I/2, l_I, 2l_I\}, \text{ то } K \subset 5I.$$

Отсюда аналогично [10, п. 2.7] выводятся свойства (42)–(46) и оценка

$$\|\omega - \gamma_I\|_{L^{\infty}(5I)} \leqslant c_1(n,\theta) l_I, \quad I \in \mathcal{D}.$$

Липшицевость w следует из неравенств (46) с $|\alpha| = 1$.

В силу (7a) и (7b) функция w совпадает с многочленом $\gamma_I \circ \mathbf{x}'$ в некоторой окрестности точки $(\mathfrak{c}_I, 11 l_I/8) \in I^{\boxtimes}$. По (45), формуле Тейлора, выпуклости параллелепипеда $I^{\boxtimes}$ и (44) получаем

$$\begin{aligned} \|w - \gamma_I \circ \mathbf{x}'\|_{L^{\infty}(I^{\boxtimes})} &\leqslant c(n) l_I b_I, \\ \|w - \gamma_I \circ \mathbf{x}'\|_{L^{\infty}(I^{\boxtimes})} &\leqslant c_2(n,\theta) l_I. \end{aligned} \tag{53}$$

Непосредственно из (46) имеем $\|D_n w\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant c_3(n,\theta)$. Положим

$$W(n,\theta) = 3\max\{c_1, c_2, c_3\}.$$

Неравенства (47) и (48) тривиальны. Требуемые свойства отображений g и $\mathfrak{g}$, включая оценки (49) и (50) на $\mathfrak{G}$, выводятся с учетом теоремы 2.5 из [10].

Постоянная билипшицевости отображения g меньше некоторого числа $c(n,\theta)$ ввиду (46) и (50). Отсюда для некоторого $\lambda(n,\theta) \geqslant 1$ легко вывести условие равномерной эллиптичности $A[x] \in \mathcal{A}_{\lambda}$, см. [9, с. 100]. Поэтому $A \in \mathcal{A}^{\mu}_{\lambda}$.

В силу неравенств (46), (49) и (50) имеем

$$\|D a_{ij}\|_{L^{\infty}(I^{\boxtimes})} + \|L\|_{L^{\infty}(I^{\boxtimes})} + l_I \|DL\|_{L^{\infty}(I^{\boxtimes})} \leqslant c(n,\theta) l_I^{-1} b_I.$$

Отсюда (51) и (52) получаются по аналогу оценки (2) для множества $I^{\boxtimes}$. □

Замечание. Оператор A и функция L таковы, что для любой гармонической в области Ω функции U выполняется уравнение $A(U \circ g) = L D_n (U \circ g)$.

Ограничимся в остальной части параграфа функциями $\omega \in \mathrm{LI}\mathbb{P}$.

Определение 1. *Множество* $\mathrm{LI}\mathbb{P}$ *состоит из липшицевых функций*

$$\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R},$$

каждая из которых совпадает на дополнении некоторого компакта с многочленом из $\mathbb{P}^{n-1}_1$.

Изучим, что теорема 2 дает применительно к потенциалу Φ_{Aw}.

Лемма 4. *Пусть* $\omega \in \mathrm{LI}\mathbb{P}$ *и* $I \in \mathcal{D}$. *Тогда*

$$\Theta_1 := \sum_J \Gamma_{IJ}^{(0,n)} b_J < \infty,$$

$$\Theta_2 := \sum_J \Gamma_{IJ}^{(0,n)} b_J^2 < \infty,$$

$$\Theta_2^* := \sum_J \Gamma_{IJ}^{(1,n)} b_J^2 < \infty.$$

Для постоянной $\theta \geqslant \|\omega\|_{\mathrm{Lip}}$ *пусть* $\big(\{\gamma_K\}, w, W, g, \mathfrak{g}, \mathfrak{G}, A, \lambda, L\big)$ — *стандартный набор пары* (ω, θ). *При* $k \geqslant 0$ *обозначим*

$$\gamma_k' = \gamma_{I^{(k)}}, \quad \tau_{1,k} = D_1 \gamma_k', \quad \ldots, \quad \tau_{n-1,k} = D_{n-1}\gamma_k'.$$

Тогда выполнены неравенства

$$\|\omega - \gamma_{k+1}'\|_{L^2(5I^{(k)})} + \|\omega - \gamma_k'\|_{L^2(5I^{(k)})} \leqslant c(n) l_{I^{(k)}}^{\frac{n+1}{2}} b_{I^{(k)}}, \tag{54}$$

$$l_{I^{(k)}}^{-1} \big\|\gamma_{k+1}' - \gamma_k'\big\|_{L^\infty(5I^{(k)})} + \big|\nabla(\gamma_{k+1}' - \gamma_k')\big| \leqslant c(n) b_{I^{(k)}}. \tag{55}$$

Для любого $\mu \in (0,1)$ *и функции* $f = w$ *верны все предпосылки теоремы 2, а в обозначениях этой теоремы имеют место соотношения*

$$\Theta \leqslant c(n,\theta)\Theta_2, \tag{56}$$

$$\Theta^* \leqslant c(n,\theta) l_I^{-1} \Theta_2^*, \tag{57}$$

$$A_k = \sum_{i=1}^{n-1} \Big\{ D_{ii} - \frac{\tau_{i,k}}{W} D_{in} - \frac{\tau_{i,k}}{W} D_{ni} \Big\} + \frac{1 + \sum_{s=1}^{n-1} \tau_{s,k}^2}{W^2} D_{nn}, \tag{58}$$

$$\gamma_k(x) = \gamma_k'(x'), \tag{59}$$

$$F_k(x) = W \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \lim_{r\to\infty} \int_{|\xi - \mathfrak{c}_k'| < r} \frac{\omega_{(k)}(\xi)}{\Big|\big(x', \gamma_k'(x') + W x_n\big) - \big(\xi, \gamma_k'(\xi)\big)\Big|^n} \, d\xi, \tag{60}$$

где

$$\omega_{(k)} = \omega_{k+1} - \omega_k,$$

$$\omega_k = \varphi_k' \omega + (1 - \varphi_k')\gamma_k',$$

$$\varphi_k'(\xi) = \varphi_k(\xi, 0+).$$

Замечание. Предел $\varphi_k'(\xi)$ существует ввиду неравенства (4c).

Доказательство. Ввиду (44) имеем $b_J \leqslant c_1(n,\theta)$. Определение множества $\mathrm{LI}\mathbb{P}$ и определение чисел b_J показывают, что

$$b_J \leqslant C_1(\omega) l_J^{-\frac{n+1}{2}} \leqslant C_2(\omega, l_I) l_I^{\frac{n+1}{2}} l_J^{-\frac{n+1}{2}},$$

откуда с учетом леммы 1

$$b_J \leqslant \min\Big\{c_1, C_2 l_I^{\frac{n+1}{2}} l_J^{-\frac{n+1}{2}}\Big\} \leqslant c_1^{\frac{n}{n+1}} C_2^{\frac{1}{n+1}} l_I^{1/2} l_J^{-1/2},$$

$$\Theta_1 \leqslant c_1^{\frac{n}{n+1}} C_2^{\frac{1}{n+1}} \sum_J \Gamma_{IJ}^{(1/2, n-1/2)} < \infty.$$

Соотношения $\Theta_2 < \infty$ и $\Theta_2^* < \infty$ вытекают из неравенств $b_J \leqslant c_1$ и $\Theta_1 < \infty$.

Оценки (54) и (55) выводятся из вложений $I^{(k)} \subset I^{(k+1)} \subset 5I^{(k)}$ и простых свойств многочленов аналогично [10, п. 2.7].

Условия $\lambda \geqslant 1$ и $A \in \mathcal{A}^{\mu}_{\lambda}$ теоремы 2 следуют из теоремы 3. По (2) и (45)

$$\begin{gathered}\|D^2 w\|_J \leqslant c_2(n) l_J^{-1} b_J, \\ \sum_J \Gamma_{IJ}^{(0,n)} l_J \|D^2 w\|_J \leqslant c_2 \Theta_1 < \infty,\end{gathered} \tag{61}$$

так что $D^2 w \in \mathrm{VL}(0)$. Из (51), (61) и неравенства Коши

$$\mathcal{F}_J \leqslant c_2 l_J^{-1} b_J + c_2 [I, J]^{-1} \sum_{H \in \{I^J\} \cup \overrightarrow{IJ}} b_H \leqslant 2 c_2 l_J^{-1} \sum_{H \in \overleftarrow{IJ} \cup \overrightarrow{IJ}} b_H,$$

$$\left(\sum_{H \in \overleftarrow{IJ} \cup \overrightarrow{IJ}} |A|_H \right) \mathcal{F}_J \leqslant c(n, \theta) l_J^{-1} \left(\sum_{H \in \overleftarrow{IJ} \cup \overrightarrow{IJ}} b_H \right)^2 \leqslant c_3(n, \theta) l_J^{-3/2} \sum_{H \in \overleftarrow{IJ} \cup \overrightarrow{IJ}} l_H^{1/2} b_H^2.$$

В силу (32)

$$\begin{gathered}\sum_{J\colon H \in \overleftarrow{IJ} \cup \overrightarrow{IJ}} \Gamma_{IJ}^{(0,n)} l_J l_J^{-3/2} \leqslant c_4(n) \Gamma_{IH}^{(0,n)} l_H^{-1/2}, \\ \sum_{J\colon H \in \overleftarrow{IJ} \cup \overrightarrow{IJ}} \Gamma_{IJ}^{(0,n+1)} l_J^{-3/2} \leqslant c_5(n) l_I^{-1} \Gamma_{IH}^{(1,n)} l_H^{-1/2}.\end{gathered}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}\Theta \leqslant c_3 \sum_H \left(\sum_{J\colon H \in \overleftarrow{IJ} \cup \overrightarrow{IJ}} \Gamma_{IJ}^{(0,n)} l_J l_J^{-3/2} \right) l_H^{1/2} b_H^2 \leqslant c_3 c_4 \Theta_2, \\ \Theta^* \leqslant c_3 \sum_H \left(\sum_{J\colon H \in \overleftarrow{IJ} \cup \overrightarrow{IJ}} \Gamma_{IJ}^{(0,n+1)} l_J^{-3/2} \right) l_H^{1/2} b_H^2 \leqslant c_3 c_5 l_I^{-1} \Theta_2^*.\end{gathered}$$

Мы получили оценки (56) и (57), откуда $\Theta < \infty$. Поэтому для функции $f = w$ выполнены все условия теоремы 2.

В силу (7а) функция $w(x)$ совпадает с $\gamma_k'(x')$ в «полуокрестности» точки $\mathfrak{c}_k$, а функция $\mathfrak{G}(y)$ — с функцией $\frac{y_n - \gamma_k'(y')}{W}$ в «полуокрестности» точки $g(\mathfrak{c}_k)$. Это дает (58) и (59).

Докажем равенство (60). Из (58) легко проверяется, что

$$\det\nolimits_{A_k} = W^{-2}.$$

Откажемся от индекса k в обозначении чисел $\tau_{i,k}$ и коэффициентов $a_{ij,k}$ оператора A_k. Вводя сокращение $\tau_n = W$, можем записать (58) в виде

$$a_{ij} = \delta_{ij} - \delta_{in} \frac{\tau_j}{W} - \delta_{jn} \frac{\tau_i}{W} + \delta_{in} \delta_{jn} \frac{1 + \sum_{s=1}^n \tau_s^2}{W^2}.$$

Числа

$$b_{ij} = \delta_{ij} - \delta_{in} \delta_{jn} + \tau_i \tau_j$$

удовлетворяют равенствам

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jq} = \sum_j a_{ij}(\delta_{jq} - \delta_{jn}\delta_{qn} + \tau_j\tau_q) = a_{iq} - a_{in}\delta_{qn} + \left(\sum_j a_{ij}\tau_j\right)\tau_q,$$

$$\begin{aligned} a_{iq} - a_{in}\delta_{qn} &= \delta_{iq} - \delta_{in}\frac{\tau_q}{W} - \delta_{qn}\frac{\tau_i}{W} + \delta_{in}\delta_{qn}\frac{1+\sum_{s=1}^n \tau_s^2}{W^2} \\ &\quad - \left(\delta_{in} - \delta_{in} - \frac{\tau_i}{W} + \delta_{in}\frac{1+\sum_{s=1}^n \tau_s^2}{W^2}\right)\delta_{qn} = \delta_{iq} - \delta_{in}\frac{\tau_q}{W}, \end{aligned}$$

$$\sum_j a_{ij}\tau_j = \tau_i - \frac{\delta_{in}}{W}\sum_j \tau_j^2 + \left(-\frac{\tau_i}{W} + \delta_{in}\frac{1+\sum_{s=1}^n \tau_s^2}{W^2}\right)\tau_n = \frac{\delta_{in}}{W},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jq} = \delta_{iq} - \delta_{in}\frac{\tau_q}{W} + \frac{\delta_{in}}{W}\tau_q = \delta_{iq}.$$

Значит, $(b_{ij}) = (a_{ij})^{-1}$. Вводя еще сокращение $\xi_n = 0$, для $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ имеем

$$\begin{aligned} Q_{A_k}\big(x - (\xi, 0)\big) &= \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - \xi_i)^2 + \sum_{i,j=1}^{n}\tau_i\tau_j(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j) \\ &= |x' - \xi|^2 + \big(\gamma_k'(x') - \gamma_k'(\xi) + \tau_n x_n - \tau_n\xi_n\big)^2 \\ &= \Big|\big(x', \gamma_k'(x') + W x_n\big) - \big(\xi, \gamma_k'(\xi)\big)\Big|^2, \end{aligned}$$

что ввиду (42) и (59) дает (60). Лемма 4 доказана. □

В условиях леммы 4 обозначим

$$\begin{aligned} H_0 &= \big\{x \in \overline{I} \times \mathbb{R}\colon x_n \geqslant \gamma_0'(x') + 2W l_I/3\big\}, \\ H_k &= \overline{I} \times \mathbb{R} \quad \text{при } k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{62}$$

Положим $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}_{I^{(k)}}$. Очевидно, что для $x \in H_k$ существует предел

$$F_{(k)}(x) = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \lim_{r\to\infty} \int_{|\xi - \mathfrak{x}|<r} \omega_{(k)}(\xi)\Big|x - \big(\xi, \gamma_k'(\xi)\big)\Big|^{-n} d\xi. \tag{63}$$

Имеем $g(I^{\boxdot}) \subset H_k$ (ввиду (48)) и $\big(x', \gamma_k'(x') + W x_n\big) \in H_k$ для $x \in I^{\boxdot}$, см. (60).

Лемма 5. *В условиях леммы 4 для $(x,\xi) \in H_k \times \mathbb{R}^{n-1}$ положим*

$$\xi^* = 2\mathfrak{x} - \xi,$$

$$M_k(x,\xi) = \frac{1}{2}\left\{\omega_{(k)}(\xi)\Big|x - \big(\xi, \gamma_k'(\xi)\big)\Big|^{-n} + \omega_{(k)}(\xi^*)\Big|x - \big(\xi^*, \gamma_k'(\xi^*)\big)\Big|^{-n}\right\}.$$

Тогда $F_{(k)} \in C^\infty(H_k)$ и для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \big|D_x^\alpha M_k(x,\xi)\big|\, d\xi \leqslant c(\alpha,\theta) l_{I^{(k)}}^{-|\alpha|} b_{I^{(k)}}, \tag{64a}$$

$$D^\alpha F_{(k)}(x) = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} D_x^\alpha M_k(x,\xi)\, d\xi. \tag{64b}$$

Доказательство. Обозначим

$$\mathfrak{X} = \big(\mathfrak{x}, \gamma_k'(\mathfrak{x})\big),$$
$$\Xi = |x - \mathfrak{X}| + |\mathfrak{x} - \xi|.$$

Пусть $T_k(\xi)$ — выпуклая оболочка множества $\big\{\gamma_k'(\xi), \omega(\xi), \omega_{k+1}(\xi)\big\} \subset \mathbb{R}$.

Докажем, что

$$\begin{gathered}\text{если } (x,\xi) \in H_k \times \mathbb{R}^{n-1} \text{ и } t \in T_k(\xi), \text{ причем } \xi \notin 3I^{(k-1)} \text{ для } k \geqslant 1,\\ \text{то } \big|x - (\xi, t)\big| \geqslant c(n,\theta)\Xi \geqslant c(n,\theta) l_{I^{(k)}}.\end{gathered} \tag{65}$$

Если верна посылка в (65), то $t = \zeta(\xi)$ для выпуклой линейной комбинации

$$\zeta = \beta_1 \gamma_k' + \beta_2 \omega + \beta_3 \gamma_{k+1}',$$

поскольку $\omega_{k+1} = \varphi_{k+1}'\omega + (1 - \varphi_{k+1}')\gamma_{k+1}'$. Обозначим

$$Z = \big(x', \zeta(x')\big),$$
$$R = |x - Z| + |x' - \xi|.$$

Из неравенств $\theta \geqslant \|\omega\|_{\mathrm{Lip}}$ и (43) следует, что $\|\zeta\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant c(n)\theta$, поэтому треугольник с вершинами x, Z и $(\xi,t) = (\xi, \zeta(\xi))$ показывает, что

$$\big|x - (\xi,t)\big| \geqslant c_1(n,\theta)\big\{|x - Z| + \big|Z - (\xi,t)\big|\big\} \geqslant c_1 R.$$

Разберем случаи $\xi \in 3I$ и $\xi \notin 3I$. Если $\xi \in 3I$, то $k = 0$ и $\omega_{k+1}(\xi) = \omega(\xi)$ ввиду (4a), так что $\beta_3 = 0$ без умаления общности. В силу $x \in H_0$ и (47) имеем

$$x_n - \gamma_0'(x') \geqslant 2Wl_I/3,$$
$$x_n - \omega(x') \geqslant x_n - \gamma_0'(x') - Wl_I/3 \geqslant Wl_I/3,$$
$$R \geqslant |x - Z| = \beta_1\big[x_n - \gamma_0'(x')\big] + \beta_2\big[x_n - \omega(x')\big] \geqslant Wl_I/3.$$

Если же $\xi \notin 3I$, то $|x' - \xi| \geqslant l_I$ при $k = 0$ и $|x' - \xi| \geqslant l_{I^{(k-1)}}$ при $k \geqslant 1$, откуда

$$R \geqslant \min\{W/3, 1/2\} l_{I^{(k)}} \quad \text{для любого } \xi.$$

На основании (43), (44), (47) и (55) заключаем

$$\big|\omega(x') - \gamma_k'(x')\big| \leqslant \|\omega - \gamma_{I^{(k)}}\|_{L^\infty(I^{(k)})} \leqslant Wl_{I^{(k)}}/3,$$
$$\big|\gamma_{k+1}'(x') - \gamma_k'(x')\big| \leqslant c(n,\theta) l_{I^{(k)}},$$
$$|\mathfrak{X} - Z| \leqslant \Big|\big(\mathfrak{x}, \gamma_k'(\mathfrak{x})\big) - \big(x', \gamma_k'(x')\big)\Big| + \big|\gamma_k'(x') - \zeta(x')\big| \leqslant c(n,\theta) l_{I^{(k)}},$$
$$\Xi \leqslant R + |\mathfrak{X} - Z| + |\mathfrak{x} - x'| \leqslant R + c(n,\theta) l_{I^{(k)}} \leqslant c_2(n,\theta) R,$$
$$\big|x - (\xi,t)\big| \geqslant c_1 c_2^{-1}\Xi.$$

Если $\xi \in 3I$, то $k = 0$ и $\gamma_0'(\mathfrak{x}) \in T_0(\mathfrak{x})$, откуда

$$\Xi \geqslant |x - \mathfrak{X}| \geqslant c_1 R\big|_{\xi = \mathfrak{x}} \geqslant c_1 \min\{W/3, 1\} l_I.$$

Если же $\xi \notin 3I$, то $|\mathfrak{x} - \xi| \geqslant 3l_I/2$ при $k = 0$, $|\mathfrak{x} - \xi| \geqslant l_{I^{(k-1)}}$ при $k \geqslant 1$ и тем самым $\Xi \geqslant l_{I^{(k)}}/2$ для любого k. Поэтому $\Xi \geqslant c(n,\theta) l_{I^{(k)}}$ для любого ξ, и импликация (65) доказана.

Если $\omega_{(k)}(\xi) \neq 0$, то $\xi \notin 3I^{(k-1)}$ при $k \geqslant 1$ ввиду (4a), так что по (65)

$$\begin{gathered}\text{если } (x,\xi) \in H_k \times \mathbb{R}^{n-1} \text{ и либо } \omega_{(k)}(\xi) \neq 0, \text{ либо } \xi \notin 5I^{(k)},\\ \text{то } \Big|D_x^\alpha \big|x - (\xi,t)\big|^{-n}\Big| \leqslant c(\alpha,\theta)\Xi^{-n-|\alpha|} \leqslant c(\alpha,\theta) l_{I^{(k)}}^{-n-|\alpha|} \quad \text{при } t \in T_k(\xi).\end{gathered} \tag{66}$$

Отсюда с учетом (54) и неравенства Гельдера получаем

$$\omega_{(k)} = (\varphi'_{k+1} - 1)(\omega - \gamma'_{k+1}) + (1 - \varphi'_k)(\omega - \gamma'_k), \tag{67}$$
$$\|\omega_{(k)}\|_{L^1(5I^{(k)})} \leqslant c(n) l^n_{I^{(k)}} b_{I^{(k)}},$$
$$\bigl\|D^\alpha_x M_k(x,\cdot)\bigr\|_{L^1(5I^{(k)})} \leqslant c(\alpha,\theta)\|\omega_{(k)}\|_{L^1(5I^{(k)})} l^{-n-|\alpha|}_{I^{(k)}} \leqslant c(\alpha,\theta) l^{-|\alpha|}_{I^{(k)}} b_{I^{(k)}}. \tag{68}$$

Пусть $\xi \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \overline{5I^{(k)}}$ ($\Rightarrow$ $\xi^* \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus 5I^{(k)}$). Тогда $\omega_{(k)}(\xi) = \gamma'_{k+1}(\xi) - \gamma'_k(\xi)$ и $\omega_{(k)}(\xi^*) = \gamma'_{k+1}(\xi^*) - \gamma'_k(\xi^*)$ ввиду (4b). В силу (55) и (66) получаем

$$\left|\frac{\omega_{(k)}(\xi) + \omega_{(k)}(\xi^*)}{2}\right| = \bigl|\gamma'_{k+1}(\mathfrak{x}) - \gamma'_k(\mathfrak{x})\bigr| \leqslant c(n) l_{I^{(k)}} b_{I^{(k)}}, \tag{69}$$
$$\left|\frac{\omega_{(k)}(\xi) + \omega_{(k)}(\xi^*)}{2} D^\alpha_x \Bigl|x - \bigl(\xi, \gamma'_k(\xi)\bigr)\Bigr|^{-n}\right| \leqslant c(\alpha,\theta) l_{I^{(k)}} b_{I^{(k)}} \Xi^{-n-|\alpha|},$$
$$\bigl|\omega_{(k)}(\xi^*)\bigr| \leqslant c(n)\bigl(l_{I^{(k)}} + |\mathfrak{x} - \xi^*|\bigr) b_{I^{(k)}} \leqslant c(n)|\mathfrak{x} - \xi| b_{I^{(k)}} \leqslant c(n)\Xi b_{I^{(k)}}, \tag{70}$$
$$\bigl|D^\alpha_x M_k(x,\xi)\bigr| \leqslant c(\alpha,\theta) l_{I^{(k)}} b_{I^{(k)}} \Xi^{-n-|\alpha|} + c(n)\Xi b_{I^{(k)}} |Y_\alpha|,$$

где

$$Y_\alpha = D^\alpha_x \Bigl|x - \bigl(\xi, \gamma'_k(\xi)\bigr)\Bigr|^{-n} - D^\alpha_x \Bigl|x - \bigl(\xi^*, \gamma'_k(\xi^*)\bigr)\Bigr|^{-n}.$$

Мажорируя каждое слагаемое по (66), имеем

$$|Y_\alpha| \leqslant c(\alpha,\theta)\Xi^{-n-|\alpha|}, \tag{71}$$
$$\begin{aligned}\bigl|D^\alpha_x M_k(x,\xi)\bigr| &\leqslant c_3(\alpha,\theta)(l_{I^{(k)}} + \Xi) b_{I^{(k)}} \Xi^{-n-|\alpha|} \\ &\leqslant \frac{7c_3}{5} b_{I^{(k)}} \Xi^{1-n-|\alpha|} \leqslant \frac{7c_3}{5} b_{I^{(k)}} |\mathfrak{x} - \xi|^{1-n-|\alpha|}.\end{aligned} \tag{72}$$

Соотношения $x' \in \overline{I} \subset \overline{I^{(k)}}$, $\mathfrak{X}' = \mathfrak{x} \in I^{(k)}$ и $\xi \notin 5I^{(k)}$ показывают, что

$$\bigl|\tau x' + (1-\tau)\mathfrak{x} - \xi\bigr|_\infty \geqslant \frac{4}{5}|\mathfrak{x} - \xi|_\infty,$$
$$\bigl|\tau x + (1-\tau)\mathfrak{X} - (\xi, t)\bigr| \geqslant \frac{4}{5\sqrt{n-1}}|\mathfrak{x} - \xi| \quad \text{для любых } \tau \in [0,1] \text{ и } t \in \mathbb{R}. \tag{73}$$

Отсюда, из равенства $\Bigl|\mathfrak{X} - \bigl(\xi, \gamma'_k(\xi)\bigr)\Bigr| = \Bigl|\mathfrak{X} - \bigl(\xi^*, \gamma'_k(\xi^*)\bigr)\Bigr|$ и из (71) выводим

$$|Y_0| \leqslant c(n)|x - \mathfrak{X}||\mathfrak{x} - \xi|^{-n-1},$$
$$|Y_0| \leqslant \min\bigl\{c(n)|x - \mathfrak{X}||\mathfrak{x} - \xi|^{-n-1}, c(n,\theta)\Xi^{-n}\bigr\} \leqslant c(n,\theta)|x - \mathfrak{X}|\Xi^{-n-1},$$
$$\bigl|M_k(x,\xi)\bigr| \leqslant c(n,\theta)\bigl(l_{I^{(k)}} + |x - \mathfrak{X}|\bigr) b_{I^{(k)}} \Xi^{-n},$$
$$\int_{|\mathfrak{x}-\xi| \geqslant 5 l_{I^{(k)}}/2} \bigl(|x - \mathfrak{X}| + |\mathfrak{x} - \xi|\bigr)^{-n} d\xi \leqslant c(n)\bigl(l_{I^{(k)}} + |x - \mathfrak{X}|\bigr)^{-1},$$
$$\bigl\|M_k(x,\cdot)\bigr\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1} \setminus 5I^{(k)})} \leqslant c(n,\theta) b_{I^{(k)}}. \tag{74}$$

Оценка (64a) при $\alpha = 0$ следует из (68) и (74), а при $\alpha \neq 0$ — из (68) и (72). Равенство (64b) при $\alpha = 0$ вытекает из (63) и замены переменной $\xi \to \xi^*$, а при $\alpha \neq 0$ (вместе с утверждением $F_{(k)} \in C^\infty(H_k)$) — из дифференцирования формулы (64b) под знаком интеграла, которое законно ввиду (72). □

3.2. Функция S и потенциал Φ_L. Дадим «качественный» аналог леммы 5 для функций, определяемых объемными интегралами.

Лемма 6. *Пусть* $\omega_+, \omega_- \in \mathrm{LIP}$, $\Omega_\pm = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_n > \omega_\pm(x')\}$ *и* $\chi = \chi_+ - \chi_-$, *где* $\chi_\pm$ — *характеристические функции множеств* Ω_+ *и* Ω_-. *Положим*

$$\xi^* = 2\mathfrak{x} - \xi,$$

$$N_\mathfrak{x}(x,\xi) = \int_\mathbb{R} \frac{\chi(\xi,t)\big|x-(\xi,t)\big|^{-n} + \chi(\xi^*,t)\big|x-(\xi^*,t)\big|^{-n}}{2}\,dt$$

для $(\mathfrak{x}, x, \xi) \in \mathbb{R}^{n-1} \times (\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}\chi) \times \mathbb{R}^{n-1}$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) Функция $N_{x'}(x,\cdot)$ *принадлежит* $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$, *существует предел*

$$s(x) = \lim_{r\to\infty} \int_{|x-y|<r} \chi(y)|x-y|^{-n}\,dy,$$

и выполнено равенство $s(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} N_{x'}(x,\xi)\,d\xi$.

(ii) Для любых $(\mathfrak{x}, x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n-1} \times (\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}\chi) \times \mathbb{N}_0^n$ *имеем включение*

$$D_x^\alpha N_\mathfrak{x}(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^{n-1}), \tag{75a}$$

функция s *бесконечно дифференцируема в* $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}\chi$ *и*

$$D^\alpha s(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} D_x^\alpha N_\mathfrak{x}(x,\xi)\,d\xi. \tag{75b}$$

Доказательство. (i) Для $\omega \in \mathrm{LIP}$ через $\chi[\omega]$ обозначим характеристическую функцию надграфика функции ω, а через $\gamma[\omega]$ — полином из $\mathbb{P}_1^{n-1}$, с которым ω совпадает в окрестности бесконечности. При $x \notin \operatorname{supp}\chi$ положим

$$\gamma_\pm = \gamma[\omega_\pm] \quad \& \quad \gamma^\pm = \gamma_\pm - \gamma_\pm(x') + x_n.$$

Функции χ_+ и χ_- совпадают около x, поэтому найдутся такие $\omega^\pm \in \mathrm{LIP}$, что

$$\chi_+ = \chi[\omega^+] = \chi[\omega^-] = \chi_- \text{ около } x \quad \& \quad \gamma^\pm = \gamma[\omega^\pm].$$

Из представления $\chi = \{\chi_+ - \chi[\omega^+]\} + \{\chi[\omega^+] - \chi[\omega^-]\} + \{\chi[\omega^-] - \chi_-\}$ видим, что для проверки утверждения (i) достаточно проверить (i) для пар (ω_+, ω^+), (ω^+, ω^-) и (ω^-, ω_-) вместо (ω_+, ω_-). Следовательно, достаточно проверить (i) в частных случаях

(a) $\gamma_+ - \gamma_- = \mathrm{const}$;

(b) $\gamma_+(x') = x_n = \gamma_-(x')$.

В случае (a) функция $y \mapsto \chi(y)|x-y|^{-n}$ принадлежит $L^1(\mathbb{R}^n)$, что дает (i) по теореме Фубини и замене переменных $\xi \to \xi^\star = 2x' - \xi$. В случае (b) замена переменных $y = (\xi,t) \to 2x - y$ и теорема Фубини показывают, что

$$N_{x'}(x,\xi) = 0 \quad \text{для больших значений } |x'-\xi|,$$

$$(\exists r_0 > 0)\ (\forall r > r_0) \quad \int_{|x-y|<r} \chi(y)|x-y|^{-n}\,dy = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} N_{x'}(x,\xi)\,d\xi.$$

Тем самым утверждение (i) полностью доказано.

(ii) Для $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ положим

$$\nu(\xi) = \int_\mathbb{R} \frac{\chi(\xi^\star,t)\big|x-(\xi^\star,t)\big|^{-n} - \chi(\xi^*,t)\big|x-(\xi^*,t)\big|^{-n}}{2}\,dt.$$

В силу равенства $\xi^\star - \xi^* = 2x' - 2\mathfrak{x}$ нетрудно получить, что $\sup_\xi\big|\nu(\xi)\big||\xi|^n < \infty$, $\nu \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ и $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \nu(\xi)\,d\xi = 0$. Поэтому свойства (75) с $\alpha = 0$ следуют из утверждения (i). Случай $\alpha \neq 0$ разбирается по образцу леммы 5, через проверку аналога оценки (72) для функции $N_\mathfrak{x}(x,\xi)$. $\square$

Пусть $\omega \in \mathrm{LI}\mathbb{P}$. Чтобы сопоставить леммы 4, 5 и 6, введем функцию

$$S(x) := S_\Omega(x) := \lim_{r\to\infty}\left\{\ln r - \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}\int_{y\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega\colon |x-y|<r}|x-y|^{-n}\,dy\right\},\quad x\in\Omega.$$

Предел здесь существует потому, что площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ равна $\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$. Функция S инвариантна относительно сдвигов и вращений области Ω в очевидном смысле.

Лемма 7. *В условиях леммы 4 пусть* $\Omega_k = \{x\in\mathbb{R}^n\colon x_n > \omega_k(x')\}$ *и* $S_k = S_{\Omega_k}$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\|D^\alpha S - D^\alpha S_0\|_{L^\infty(g(I^\boxdot))} \leqslant c(\alpha,\theta)\sum_{k=0}^{\infty} l_{I^{(k)}}^{-|\alpha|} b_{I^{(k)}},\quad \alpha\in\mathbb{N}_0^n, \tag{76}$$

$$\big\|D^\alpha(S\circ g - S_0\circ g)\big\|_I \leqslant c(\alpha,\theta)\sum_{k=0}^{\infty} l_{I^{(k)}}^{-|\alpha|} b_{I^{(k)}},\quad |\alpha|\leqslant 1, \tag{77}$$

$$\big\|D^\alpha(S\circ g - S_0\circ g)\big\|_I \leqslant c(\alpha,\theta)\sum_{j=0}^{1} l_I^{(1-|\alpha|)j} b_I^j \sum_{k=0}^{\infty} l_{I^{(k)}}^{(j-1)|\alpha|-j} b_{I^{(k)}},\quad |\alpha|\geqslant 2. \tag{78}$$

Если $\varepsilon = 0$ *при* $|\alpha|\leqslant 1$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 2$ *при* $|\alpha| = 2$, *то для суммы* F *ряда* $\sum_{k=0}^\infty F_k$

$$\big\|D^\alpha(F + WS\circ g - WS_0\circ g)\big\|_I \leqslant c(\alpha,\theta,\varepsilon) l_I^{-\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty} l_{I^{(k)}}^{\varepsilon-|\alpha|} b_{I^{(k)}}^2,\quad |\alpha|\leqslant 2. \tag{79}$$

Доказательство. По вложению $g(I^\boxdot)\subset H_k$ (см. (62)) и лемме 5 имеем

$$\|D^\alpha F_{(k)}\|_{L^\infty(g(I^\boxdot))} \leqslant c(\alpha,\theta) l_{I^{(k)}}^{-|\alpha|} b_{I^{(k)}},\quad \alpha\in\mathbb{N}_0^n. \tag{80}$$

Установим второе базовое неравенство

$$\|D^\alpha F_{(k)} + D^\alpha S_{k+1} - D^\alpha S_k\|_{L^\infty(g(I^\boxdot))} \leqslant c(\alpha,\theta) l_{I^{(k)}}^{-|\alpha|} b_{I^{(k)}}^2,\quad \alpha\in\mathbb{N}_0^n. \tag{81}$$

Для $x\in g(I^\boxdot)\subset H_k$ пусть $\mathfrak{x}$, $F_{(k)}$, ξ^*, M_k, $\mathfrak{X}$, Ξ и T_k имеют тот же смысл, что в лемме 5 и ее доказательстве, а функции χ, $N_\mathfrak{x}$ и s построены по лемме 6 для пары функций $(\omega_+,\omega_-) = (\omega_{k+1},\omega_k)$. Положим

$$U(\xi) = D_x^\alpha\Big|x - \big(\xi,\gamma_k'(\xi)\big)\Big|^{-n} - D_x^\alpha\Big|x - \big(\xi,\omega_k(\xi)\big)\Big|^{-n},$$
$$V(\xi,\tau) = D_x^\alpha\Big|x - \big(\xi,\omega_k(\xi)\big)\Big|^{-n} - D_x^\alpha\Big|x - \big(\xi,\omega_k(\xi)+\omega_{(k)}(\xi)\tau\big)\Big|^{-n}.$$

Ввиду включений $\gamma_k'(\xi),\omega_k(\xi)\in T_k(\xi)$, соотношений (66) (для $\alpha+e_n$), (67), (54) и неравенства Гельдера

$$\big|U(\xi)\big| \leqslant c_1(\alpha,\theta)\big|\gamma_k'(\xi)-\omega_k(\xi)\big| l_{I^{(k)}}^{-n-|\alpha|-1}\quad \text{при } \omega_{(k)}(\xi)\neq 0,$$
$$|\omega_{(k)}U| \leqslant c_1\big[|\omega-\gamma_{k+1}'| + |\omega-\gamma_k'|\big]|\omega-\gamma_k'| l_{I^{(k)}}^{-n-|\alpha|-1}\quad \text{в } \mathbb{R}^{n-1},$$
$$\|\omega_{(k)}U\|_{L^1(5I^{(k)})} \leqslant c(\alpha,\theta) l_{I^{(k)}}^{-|\alpha|} b_{I^{(k)}}^2.$$

Аналогичным образом,

$$\big|V(\xi,\tau)\big| \leqslant c(\alpha,\theta)\big|\omega_{(k)}(\xi)\big| l_{I^{(k)}}^{-n-|\alpha|-1}\quad \text{при } \omega_{(k)}(\xi)\neq 0 \text{ и } 0\leqslant\tau\leqslant 1,$$
$$\left\|\omega_{(k)}\int_0^1 V(\cdot,\tau)\,d\tau\right\|_{L^1(5I^{(k)})} \leqslant c(\alpha,\theta) l_{I^{(k)}}^{-|\alpha|} b_{I^{(k)}}^2.$$

Отсюда с учетом тождества $U\big|_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus 5I^{(k)}} \equiv 0$ получаем

$$\omega_{(k)}(\xi)\left\{U(\xi)+\int_0^1 V(\xi,\tau)\,d\tau\right\} = \omega_{(k)}(\xi)D_x^\alpha\Big|x-\big(\xi,\gamma_k'(\xi)\big)\Big|^{-n} + \int_{\mathbb{R}}\chi(\xi,t)D_x^\alpha\big|x-(\xi,t)\big|^{-n}\,dt,$$

$$D_x^\alpha M_k(x,\xi)+D_x^\alpha N_{\mathfrak{x}}(x,\xi) = \frac{\omega_{(k)}(\xi)}{2}\left\{U(\xi)+\int_0^1 V(\xi,\tau)\,d\tau\right\} + \frac{\omega_{(k)}(\xi^*)}{2}\left\{U(\xi^*)+\int_0^1 V(\xi^*,\tau)\,d\tau\right\},$$

$$\big\|D_x^\alpha M_k(x,\cdot)+D_x^\alpha N_{\mathfrak{x}}(x,\cdot)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant c(\alpha,\theta)l_{I^{(k)}}^{-|\alpha|}b_{I^{(k)}}^2+\frac{1}{2}\|\Theta\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1}\setminus 5I^{(k)})},$$

где

$$\Theta(\xi)=\omega_{(k)}(\xi)\int_0^1 V(\xi,\tau)\,d\tau+\omega_{(k)}(\xi^*)\int_0^1 V(\xi^*,\tau)\,d\tau.$$

Пусть $\xi\in\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{5I^{(k)}}$. В силу (66), (69) и (70) имеем

$$\left|\int_0^1 V(\xi,\tau)\,d\tau\right| \leqslant \frac{c(\alpha,\theta)\big|\omega_{(k)}(\xi)\big|}{|\mathfrak{x}-\xi|^{n+|\alpha|+1}} \leqslant c(\alpha,\theta)b_{I^{(k)}}|\mathfrak{x}-\xi|^{-n-|\alpha|},$$

$$\big|\Theta(\xi)\big| \leqslant \frac{c(\alpha,\theta)l_{I^{(k)}}b_{I^{(k)}}^2}{|\mathfrak{x}-\xi|^{n+|\alpha|}}+c(n)|\mathfrak{x}-\xi|b_{I^{(k)}}\left|\int_0^1\big[V(\xi^*,\tau)-V(\xi,\tau)\big]\,d\tau\right|.$$

Отсюда при $\alpha\neq 0$

$$\|\Theta\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1}\setminus 5I^{(k)})}\leqslant c(\alpha,\theta)l_{I^{(k)}}^{-|\alpha|}b_{I^{(k)}}^2. \tag{82}$$

Пусть $\alpha=0$, так что

$$V(\xi,\tau)=\omega_{(k)}(\xi)\tau\int_0^1 D_{x_n}\Big|x-\big(\xi,\omega_k(\xi)+\omega_{(k)}(\xi)\tau\sigma\big)\Big|^{-n}\,d\sigma,$$

$$V(\xi^*,\tau)=\omega_{(k)}(\xi^*)\tau\int_0^1 D_{x_n}\Big|x-\big(\xi^*,\omega_k(\xi^*)+\omega_{(k)}(\xi^*)\tau\sigma\big)\Big|^{-n}\,d\sigma.$$

Тогда ввиду (69), (70) и (73)

$$\big|V(\xi,\tau)-V(\xi^*,\tau)\big|\leqslant\frac{c(n)l_{I^{(k)}}b_{I^{(k)}}}{|\mathfrak{x}-\xi|^{n+1}}+c(n)|\mathfrak{x}-\xi|b_{I^{(k)}}\max_{0\leqslant\rho\leqslant 1}\big|\Theta(\xi,\rho)\big|,$$

$$\Theta(\xi,\rho)\equiv D_{x_n}\Big|x-\big(\xi,\omega_k(\xi)+\omega_{(k)}(\xi)\rho\big)\Big|^{-n}+D_{x_n}\Big|x-\big(\xi^*,\omega_k(\xi^*)+\omega_{(k)}(\xi^*)\rho\big)\Big|^{-n}.$$

Рассмотрим середину X соответствующего отрезка:

$$2X=\big(\xi,\omega_k(\xi)+\omega_{(k)}(\xi)\rho\big)+\big(\xi^*,\omega_k(\xi^*)+\omega_{(k)}(\xi^*)\rho\big).$$

В силу соотношений (46), $\mathfrak{x}=\mathfrak{c}_{I^{(k)}}$, $\mathfrak{X}=\big(\mathfrak{x},\gamma_k'(\mathfrak{x})\big)$, $\gamma_k'=\gamma_{I^{(k)}}$, (48), $\omega_k(\xi)=\gamma_k'(\xi)$, $\omega_k(\xi^*)=\gamma_k'(\xi^*)$, $\omega_{k+1}(\xi)=\gamma_{k+1}'(\xi)$, $\omega_{k+1}(\xi^*)=\gamma_{k+1}'(\xi^*)$, (44) и (55) получаем

$$\big|x-g(\mathfrak{c}_{I^{(k)}}^{\boxdot})\big|\leqslant c(n,\theta)\big|\mathfrak{g}(x)-\mathfrak{c}_{I^{(k)}}^{\boxdot}\big|\leqslant c(n,\theta)l_{I^{(k)}},$$

$$\big|g(\mathfrak{c}_{I^{(k)}}^{\boxdot})-\mathfrak{X}\big|=\big|w(\mathfrak{c}_{I^{(k)}}^{\boxdot})+3Wl_{I^{(k)}}/2-\gamma_k'(\mathfrak{x})\big|<2Wl_{I^{(k)}},$$

$$X=\mathfrak{X}+\big(0,(\gamma_{k+1}'(\mathfrak{x})-\gamma_k'(\mathfrak{x}))\rho\big),$$

$$|x-X|\leqslant c(n,\theta)l_{I^{(k)}}.$$

По аналогии с (73) имеем

$$D_{X_n}\Big|X-\big(\xi,\omega_k(\xi)+\omega_{(k)}(\xi)\rho\big)\Big|^{-n}+D_{X_n}\Big|X-\big(\xi^*,\omega_k(\xi^*)+\omega_{(k)}(\xi^*)\rho\big)\Big|^{-n}=0,$$
$$\big|\tau x+(1-\tau)X-(\xi,t)\big|\geqslant\frac{4}{5\sqrt{n-1}}|\mathfrak{x}-\xi|\quad\text{для любых } \tau\in[0,1] \text{ и } t\in\mathbb{R},$$
$$\big|\Theta(\xi,\rho)\big|\leqslant c(n)|x-X||\mathfrak{x}-\xi|^{-n-2}\leqslant c(n,\theta)l_{I^{(k)}}|\mathfrak{x}-\xi|^{-n-2},$$
$$\big|V(\xi,\tau)-V(\xi^*,\tau)\big|\leqslant c(n,\theta)l_{I^{(k)}}b_{I^{(k)}}|\mathfrak{x}-\xi|^{-n-1},$$
$$\big|\Theta(\xi)\big|\leqslant c(n,\theta)l_{I^{(k)}}b^2_{I^{(k)}}|\mathfrak{x}-\xi|^{-n}.$$

Отсюда следует (82) при $\alpha=0$.

Из неравенства (82) получаем, что

$$\big\|D^\alpha_x M_k(x,\cdot)+D^\alpha_x N_{\mathfrak{x}}(x,\cdot)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}\leqslant c(\alpha,\theta)l^{-|\alpha|}_{I^{(k)}}b^2_{I^{(k)}}.$$

Имеем $g(I^\boxdot)\subset H_0\subset\Omega_0$ и $g(I^\boxdot)\subset\bigcap_{j=1}^\infty\Omega_j$ (см. (4a)), так что верно условие $x\notin\operatorname{supp}\chi$ леммы 6. Поэтому

$$S_{k+1}-S_k=\frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}s\quad\text{около любой точки } x\in g(I^\boxdot),$$
$$D^\alpha(F_{(k)}+S_{k+1}-S_k)(x)=\frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\big[D^\alpha_x M_k(x,\xi)+D^\alpha_x N_{\mathfrak{x}}(x,\xi)\big]\,d\xi$$

из определения функции $s(x)$ и тождеств (64b) и (75b). Это дает (81).

По (44), (80) и (81) заключаем

$$\|D^\alpha S_{k+1}-D^\alpha S_k\|_{L^\infty(g(I^\boxdot))}\leqslant c(\alpha,\theta)l^{-|\alpha|}_{I^{(k)}}b_{I^{(k)}},\quad \alpha\in\mathbb{N}^n_0.$$

Ряд из правых частей сходится ввиду $\Theta_1<\infty$, поэтому в $C^\infty\big(g(I^\boxdot)\big)$ существует предел $\lim_{k\to\infty}(S_k-S_0)$, с очевидностью равный $S-S_0$. Отсюда следует (76). Дифференцируя композицию и применяя (45), (46) и (76), имеем

$$\big\|D^\alpha(S\circ g-S_0\circ g)\big\|_{L^\infty(I^\boxdot)}\leqslant c(\alpha,\theta)\sum_{k=0}^\infty l^{-1}_{I^{(k)}}b_{I^{(k)}},\quad |\alpha|=1,$$
$$\big\|D^\alpha(S\circ g-S_0\circ g)\big\|_{L^\infty(I^\boxdot)}\leqslant c(\alpha,\theta)\sum_{j=0}^1 l_I^{(1-|\alpha|)j}b_I^j\sum_{k=0}^\infty l^{(j-1)|\alpha|-j}_{I^{(k)}}b_{I^{(k)}},\ |\alpha|\geqslant 2.$$

С учетом (2), (44) и (76) получаем оценки (77) и (78).

В силу (60) и (63) имеем

$$F_k=WF_{(k)}\circ h^k$$

на кубе $I^\boxdot$, где

$$h^k(x)=\big(x',\gamma'_k(x')+Wx_n\big),\quad x_n>0.$$

Из (2), (43) и леммы 5 следует оценка

$$\big\|(D^\alpha F_{(k)})\circ h^k\big\|_I\leqslant c(\alpha,\theta)l^{-|\alpha|}_{I^{(k)}}b_{I^{(k)}},\quad \alpha\in\mathbb{N}^n_0. \tag{83}$$

Для $x\in I^\boxdot$ в силу (53) и (55)

$$\begin{aligned}\big|g(x)-h^k(x)\big|&=\big|g_n(x)-h^k_n(x)\big|=\big|w(x)-\gamma'_k(x')\big|\\&\leqslant\big|w(x)-\gamma'_0(x')\big|+\big|\gamma'_0(x')-\gamma'_k(x')\big|\leqslant c(n)\sum_{j=0}^k l_{I^{(j)}}b_{I^{(j)}}.\end{aligned} \tag{84}$$

Точки $g(x)$ и $h^k(x)$ принадлежат выпуклому множеству H_k, поэтому по лемме 5 и неравенству (81)

$$\Big|D^\alpha F_{(k)}\big|_{g(x)} - D^\alpha F_{(k)}\big|_{h^k(x)}\Big| \leqslant \big|g(x) - h^k(x)\big| \sup |D^{\alpha+e_n} F_{(k)}| \leqslant c(\alpha,\theta) l_{I^{(k)}}^{-|\alpha|} b_{I^{(k)}} \sum_{j=0}^{k} 2^{j-k} b_{I^{(j)}},$$

$$\|f_{k,\alpha}\|_{L^\infty(I^\boxdot)} \leqslant c(\alpha,\theta) l_{I^{(k)}}^{-|\alpha|} b_{I^{(k)}} \sum_{j=0}^{k} 2^{j-k} b_{I^{(j)}}, \tag{85}$$

где

$$f_{k,\alpha} = (D^\alpha F_{(k)}) \circ h^k + (D^\alpha S_{k+1} - D^\alpha S_k) \circ g.$$

Очевидно, что на кубе $I^\boxdot$

$$D_i f_{k,\alpha} = \sum_{p=1}^{n} \Big\{ \big[(D^{\alpha+e_p} F_{(k)}) \circ h^k\big][D_i h_p^k - D_i g_p] + f_{k,\alpha+e_p} D_i g_p \Big\}. \tag{86}$$

Отсюда с учетом (2), (46), (83) и (85) для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ заключаем

$$\|D_i g_p - D_i h_p^k\|_I \leqslant c(n) \sum_{j=0}^{k} b_{I^{(j)}} \quad \text{(по аналогии с (84))}, \tag{87a}$$

$$\|D_i g_p\|_I \leqslant \|D_i g_p\|_{L^\infty(I^\boxdot)} + n l_I \big\|D(D_i g_p)\big\|_{L^\infty(I^\boxdot)} \leqslant c(n,\theta), \tag{87b}$$

$$\|D_i f_{k,\alpha}\|_{L^\infty(I^\boxdot)} \leqslant c(\alpha,\theta) l_{I^{(k)}}^{-|\alpha|-1} b_{I^{(k)}} \sum_{j=0}^{k} b_{I^{(j)}},$$

$$\|f_{k,\alpha}\|_I \leqslant c(\alpha,\theta) l_{I^{(k)}}^{-|\alpha|} b_{I^{(k)}} \sum_{j=0}^{k} 2^{j-k} b_{I^{(j)}}, \tag{87c}$$

$$\|D_i f_{k,\alpha}\|_I \leqslant c(\alpha,\theta) l_{I^{(k)}}^{-|\alpha|-1} b_{I^{(k)}} \sum_{j=0}^{k} b_{I^{(j)}}. \tag{87d}$$

Для функции $f'_{k,\alpha} = D^\alpha f_{k,0}$ проверим неравенство

$$\|f'_{k,\alpha}\|_I \leqslant c(\alpha,\theta) l_{I^{(k)}}^{-|\alpha|} b_{I^{(k)}} \sum_{j=0}^{k} 2^{(j-k)(1-|\alpha|)} b_{I^{(j)}}, \quad |\alpha| \leqslant 2. \tag{88}$$

При $\alpha = 0$ оно идентично (87c), а при $|\alpha| = 1$ — совпадает с оценкой (87d) для $\alpha = 0$. Дифференцирование формулы (86) дает тождество

$$D_{ij} f_{k,0} = \sum_{p=1}^{n} \Big\{ -\big[(D_p F_{(k)}) \circ h^k\big] D_{ij} g_p + f_{k,e_p} D_{ij} g_p + (D_j f_{k,e_p}) D_i g_p \Big\} + \sum_{p,q=1}^{n} \big[(D_{pq} F_{(k)}) \circ h^k\big][D_i h_p^k - D_i g_p] D_j h_q^k.$$

Применяя (83), (87) и неравенства

$$\|D_{ij}g_p\|_I \leqslant c(n)l_I^{-1}b_I,$$
$$\|D_j h_q^k\|_I \leqslant c(n,\theta),$$
$$\sum_{j=0}^{k} 2^{j-k}b_{I^{(j)}} \leqslant c(n,\theta),$$

которые следуют из (2) и (43)–(45), приходим к оценке (88) с $|\alpha|=2$.

Для любого $\delta\in\mathbb{R}$ по (88) и неравенству Коши получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|f'_{k,\alpha}\|_I \leqslant c_2(\alpha,\theta)\Lambda^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} l_{I^{(k)}}^{-\varepsilon-|\alpha|}\left(\sum_{j=0}^{k}2^{(j-k)(1-|\alpha|)}b_{I^{(j)}}\right)^2\right)^{1/2},$$

$$\left(\sum_{j=0}^{k}2^{(j-k)(1-|\alpha|)}b_{I^{(j)}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=0}^{k}2^{-2j\varepsilon+2(j-k)\delta}\right)\sum_{j=0}^{k}2^{2j\varepsilon+2(j-k)(1-|\alpha|-\delta)}b_{I^{(j)}}^2,$$

где $\Lambda=\sum_{k=0}^{\infty} l_{I^{(k)}}^{\varepsilon-|\alpha|}b_{I^{(k)}}^2$. Пусть $\delta=\frac14$ при $|\alpha|\leqslant 1$ и $\delta=0$ при $|\alpha|=2$, так что

$$\sum_{j=0}^{k}2^{-2j\varepsilon+2(j-k)\delta}\leqslant c_3(\alpha,\varepsilon),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|f'_{k,\alpha}\|_I \leqslant c_2c_3^{1/2}l_I^{-\frac{\varepsilon+|\alpha|}{2}}\Lambda^{1/2}\left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{2j(\varepsilon+1-|\alpha|-\delta)}b_{I^{(j)}}^2\sum_{k=j}^{\infty}2^{k(-\varepsilon+|\alpha|-2+2\delta)}\right)^{1/2}$$
$$\leqslant c_4(\alpha,\theta,\varepsilon)l_I^{-\frac{\varepsilon+|\alpha|}{2}}\Lambda^{1/2}\left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{j(\varepsilon-|\alpha|)}b_{I^{(j)}}^2\right)^{1/2}=c_4l_I^{-\varepsilon}\Lambda. \tag{89}$$

Но $\Lambda<\infty$ в силу $\Theta_2<\infty$, поэтому в $C^{2,\mu}(I^{\boxdot})$ абсолютно сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}f_{k,0}=\sum_{k=0}^{\infty}\big\{F_{(k)}\circ h^k+S_{k+1}\circ g-S_k\circ g\big\}.$$

Из такой же сходимости ряда $F=\sum_{k=0}^{\infty}WF_{(k)}\circ h^k$ (теорема 2) и вышеупомянутого соотношения $C^\infty\big(g(I^{\boxdot})\big)$-$\lim_{k\to\infty}(S_k-S_0)=S-S_0$ имеем равенство

$$W\sum_{k=0}^{\infty}f_{k,0}=F+WS\circ g-WS_0\circ g.$$

Оно в сочетании с (89) доказывает (79). □

Вычислим S_Ω, когда Ω — полупространство. Введем функцию расстояния

$$\varrho_\omega(x)=\min_{\xi\in\mathbb{R}^{n-1}}\big|x-(\xi,\omega(\xi))\big|,\quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{90}$$

Теорема 4. *Если $\omega\in\mathbb{P}_1^{n-1}$, то*

$$S\equiv\ln\varrho_\omega\big|_\Omega+\sigma_n, \tag{91}$$

где

$$\sigma_n=\begin{cases}\ln 2+\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\frac{1}{2k}, & n \text{ четно},\\ \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}}\frac{1}{2k+1}, & n \text{ нечетно}.\end{cases} \tag{92}$$

Доказательство. При проверке (91) можно считать, что $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ и $x = (0, x_n)$. Введем сферические координаты

$$\begin{aligned} y_1 &= \rho \cos\phi_2 \cos\phi_3 \dots \cos\phi_n, \\ y_2 &= \rho \sin\phi_2 \cos\phi_3 \dots \cos\phi_n, \\ &\dots \\ y_{n-1} &= \rho \sin\phi_{n-1} \cos\phi_n, \\ x_n - y_n &= \rho \sin\phi_n. \end{aligned}$$

Множество $\{y \in \mathbb{R}^n : y_1 \dots y_{n-1}(x_n - y_n) \neq 0\}$ изображается значениями

$$\rho > 0, \quad |\phi_2| \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi), \quad 0 < |\phi_3|, \dots, |\phi_n| < \pi/2.$$

По формуле замены переменных

$$\Theta(r) := \int_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n_+ : \\ |x-y|<r}} |x-y|^{-n}\, dy = \int \frac{\cos\phi_3 \cos^2\phi_4 \dots \cos^{n-2}\phi_n}{\rho}\, d\rho\, d\phi_2 \dots d\phi_n,$$

где правый интеграл берется при ограничениях $x_n \leqslant \rho \sin\phi_n$ и $\rho < r$. Имеем

$$\int_{(-\pi/2,\pi/2)^{n-2}} \cos\phi_3 \dots \cos^{n-3}\phi_{n-1}\, d\phi_2 \dots d\phi_{n-1} = \frac{\operatorname{vol}\mathbb{S}^{n-2}}{2} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)},$$

$$\Theta(r) = \operatorname{vol}\mathbb{S}^{n-2} \int_{\rho>0\ \&\ -\pi/2<\phi<\pi/2:\ x_n \leqslant \rho\sin\phi < r\sin\phi} \frac{\cos^{n-2}\phi}{\rho}\, d\rho\, d\phi.$$

(Случаи $n = 2$ и $n > 2$ надо разобрать отдельно.) Если $r > x_n$, то

$$\begin{aligned} \Theta(r) &= \operatorname{vol}\mathbb{S}^{n-2} \int_{\arcsin\frac{x_n}{r}}^{\pi/2} \cos^{n-2}\phi\, d\phi \int_{\frac{x_n}{\sin\phi}}^{r} \frac{d\rho}{\rho} \\ &= \operatorname{vol}\mathbb{S}^{n-2} \int_{\arcsin\frac{x_n}{r}}^{\pi/2} \left(\ln\frac{r}{x_n} + \ln\sin\phi\right) \cos^{n-2}\phi\, d\phi \\ &= \frac{\operatorname{vol}\mathbb{S}^{n-1}}{2} \ln\frac{r}{x_n} + O\left(\frac{x_n}{r}\ln\frac{r}{x_n}\right) \\ &+ \operatorname{vol}\mathbb{S}^{n-2} \int_0^{\pi/2} (\ln\sin\phi)\cos^{n-2}\phi\, d\phi + O\left(\frac{x_n}{r}\ln\frac{r}{x_n}\right) \quad \text{при } r \to \infty, \end{aligned}$$

поскольку $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-2}\phi\, d\phi = \operatorname{vol}\mathbb{S}^{n-1} / \operatorname{vol}\mathbb{S}^{n-2}$. Это дает (91) с постоянной

$$\sigma_n = -\frac{2\operatorname{vol}\mathbb{S}^{n-2}}{\operatorname{vol}\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{\pi/2} (\ln\sin\phi)\cos^{n-2}\phi\, d\phi.$$

Легко видеть, что $\sigma_2 = \ln 2$ и $\sigma_3 = 1$. Из интегрирования по частям

$$n\int_0^{\pi/2} (\ln\sin\phi)\cos^n\phi\, d\phi = (n-1)\int_0^{\pi/2} (\ln\sin\phi)\cos^{n-2}\phi\, d\phi - \int_0^{\pi/2} \cos^n\phi\, d\phi.$$

Отсюда $\sigma_{n+2} = \sigma_n + \frac{1}{n}$, что доказывает (92). □

Следующая теорема — главный результат статьи. Наряду с теоремами 1, 3, 4 и леммой 7 она предназначена для вывода (1) и родственных формул.

Теорема 5. *Для* $\omega \in \mathrm{LIP}$ *и* $\theta \geqslant \|\omega\|_{\mathrm{Lip}}$ *пусть* $\big(\{\gamma_K\}, w, W, g, \mathfrak{g}, \mathfrak{G}, A, \lambda, L\big)$ *— стандартный набор пары* (ω, θ)*. Тогда* $L \in \mathrm{VL}(0)$*, а потенциал*

$$\Phi_L(x) = \int_{y_n>0} E(A; x, y) L(y)\, dy$$

и функция $S \equiv S_\Omega$ для любого $I \in \mathcal{D}$ удовлетворяют неравенству

$$\big\|D_n\Phi_L - \mathbf{x}_n^{-1}\Phi_L + 1 - \mathbf{x}_n D_n(S\circ g)\big\|_I \leqslant c(n,\theta,\mu)\sum_J \Gamma_{IJ}^{(1,n)} b_J^2. \tag{93a}$$

Функция $\varrho_{\gamma_I}\circ g$ положительна на $I^{\boxdot}$ (см. (90)) и выполнена оценка

$$\Big\|D_{ij}\big\{\Phi_L - W^{-1}w + \mathbf{x}_n[\ln\varrho_{\gamma_I}\circ g - S\circ g]\big\}\Big\|_I \leqslant \frac{c(n,\theta,\mu)}{l_I}\sum_J \Gamma_{IJ}^{(1,n)} b_J^2. \tag{93b}$$

Доказательство. Лемма 4 позволяет применить теорему 2 (к функции $f = w$) и лемму 7. Тем самым приобретают смысл обозначения f, Θ, $\overleftarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IJ}$, $\mathcal{F}_J$, $\mathfrak{c}_k$, A_k, γ_k, w_k, $w_{(k)}$, F_k, F, γ', $\mathcal{R}_w$, Ψ, Θ^*, Θ_1, Θ_2, Θ_2^*, γ_k', $\tau_{i,k}$, $\omega_{(k)}$, ω_k, φ_k', $\tau_{s,\infty}$, Ω_k и S_k. Включение $L \in \mathrm{VL}(0)$ следует из (52) и соотношения $\Theta_1 < \infty$. Интеграл $\Phi_L(x)$ существует по теореме 1. Функция $\varrho_{\gamma_I}\circ g$ положительна на $I^{\boxdot}$ ввиду равенства $\gamma_I = \gamma_0'$ и вложения $g(I^{\boxdot}) \subset H_0$ (см. утверждение ниже (63)).

Функция $U(x) = x_n$ гармонична в области Ω. Отсюда по замечанию к теореме 3 и неравенствам (2), (45) и (52) имеем

$$Aw = Ag_n = LD_ng_n = LD_nw + WL,$$
$$\|Aw - WL\|_J \leqslant \|D_nw\|_J\|L\|_J \leqslant c(n,\theta)l_J^{-1}b_J^2, \quad J\in\mathcal{D}.$$

По неравенству (9) теоремы 1 получаем

$$\|WD_n\Phi_L - W\mathbf{x}_n^{-1}\Phi_L - D_n\Phi_{Aw} + \mathbf{x}_n^{-1}\Phi_{Aw}\|_I \leqslant c(n,\theta,\mu)\Theta_2^*,$$
$$\|WD_{ij}\Phi_L - D_{ij}\Phi_{Aw}\|_I \leqslant c(n,\theta,\mu)l_I^{-1}\Theta_2^*.$$

Вместе с тем

$$\|D_n\Phi_{Aw} - \mathbf{x}_n^{-1}\Phi_{Aw} - D_n\Psi + \mathbf{x}_n^{-1}\Psi\|_I \leqslant c(n,\theta,\mu)\Theta_2^*,$$
$$\|D_{ij}\Phi_{Aw} - D_{ij}\Psi\|_I \leqslant c(n,\theta,\mu)l_I^{-1}\Theta_2^*$$

ввиду оценок (26b) и (57) теоремы 2 и леммы 4. В силу (59)

$$D_n\Psi - \mathbf{x}_n^{-1}\Psi = D_nw - \mathbf{x}_n^{-1}w + \mathbf{x}_n^{-1}\gamma_0 - \mathbf{x}_nD_nF,$$
$$D_{ij}\Psi = D_{ij}w - D_{ij}(\mathbf{x}_nF).$$

По неравенству (79) леммы 7 с $\varepsilon = |\alpha| - 1 \in \{0,1\}$ получаем

$$\big\|\mathbf{x}_nD_nF + \mathbf{x}_nD_n[WS\circ g - WS_0\circ g]\big\|_I \leqslant c(n,\theta)\Theta_2^*,$$
$$\big\|D_{ij}(\mathbf{x}_nF) + D_{ij}(\mathbf{x}_n[WS\circ g - WS_0\circ g])\big\|_I \leqslant c(n,\theta)l_I^{-1}\Theta_2^*.$$

При этом $S_0\circ g = \ln\varrho_{\gamma_I}\circ g + \sigma_n$ на $I^{\boxdot}$ по теореме 4. Из тождества

$$\begin{aligned}\Big\{WD_n\Phi_L - W\frac{\Phi_L}{\mathbf{x}_n} - D_n\Phi_{Aw} + \frac{\Phi_{Aw}}{\mathbf{x}_n}\Big\} + \Big\{D_n\Phi_{Aw} - \frac{\Phi_{Aw}}{\mathbf{x}_n} - D_n\Psi + \frac{\Psi}{\mathbf{x}_n}\Big\}&\\ + D_nw - \mathbf{x}_n^{-1}w + \mathbf{x}_n^{-1}\gamma_0 - \big\{\mathbf{x}_nD_nF + \mathbf{x}_nD_n[WS\circ g - WS_0\circ g]\big\}&\\ = W\big[D_n\Phi_L - \mathbf{x}_n^{-1}\Phi_L + \mathbf{x}_nD_n[\ln\varrho_{\gamma_I}\circ g - S\circ g]\big]&\end{aligned}$$

и тождества

$$\begin{aligned}\{WD_{ij}\Phi_L - D_{ij}\Phi_{Aw}\} + \{D_{ij}\Phi_{Aw} - D_{ij}\Psi\} + D_{ij}w&\\ - \big\{D_{ij}(\mathbf{x}_nF) + D_{ij}(\mathbf{x}_n[WS\circ g - WS_0\circ g])\big\} = WD_{ij}\big[\Phi_L + \mathbf{x}_n[\ln\varrho_{\gamma_I}\circ g - S\circ g]\big]&\end{aligned}$$

видно, что проверка неравенств (93) свелась к проверке оценки

$$\|u\|_I \leqslant c(n,\theta,\mu)\Theta_2^*,$$

где
$$u = D_n w - \mathbf{x}_n^{-1} w + \mathbf{x}_n^{-1}\gamma_0 + W - W\mathbf{x}_n D_n[\ln \varrho_{\gamma_I} \circ g].$$
С учетом формулы $\gamma_I \circ \mathbf{x}' = \gamma_0$ запишем
$$\varrho_{\gamma_I} \circ g = C[g_n - \gamma_I \circ \mathbf{x}'] = C[w + W\mathbf{x}_n - \gamma_0], \quad C = C(\nabla \gamma_I) > 0,$$
$$W\mathbf{x}_n D_n[\ln \varrho_{\gamma_I} \circ g] = W\mathbf{x}_n \frac{D_n w + W}{w + W\mathbf{x}_n - \gamma_0} = \frac{D_n w + W}{1 + \frac{w-\gamma_0}{W\mathbf{x}_n}},$$
$$u = \frac{\gamma_0 - w}{\mathbf{x}_n} + D_n w + W - \frac{D_n w + W}{1 + \frac{w-\gamma_0}{W\mathbf{x}_n}} = \frac{\gamma_0 - w}{\mathbf{x}_n} \frac{\frac{w-\gamma_0}{\mathbf{x}_n} - D_n w}{1 + \frac{w-\gamma_0}{W\mathbf{x}_n}} W^{-1}.$$
На основании (2), формулы Тейлора, (45), (48) и (44) имеем
$$\left\| \frac{\gamma_0 - w}{\mathbf{x}_n} \right\|_I = \left\| \frac{w - \gamma_0}{\mathbf{x}_n} \right\|_I \leqslant \|w - \gamma_0\|_I \|\mathbf{x}_n^{-1}\|_I \leqslant c_1(n) b_I,$$
$$\|D_n w\|_I \leqslant c_2(n) b_I,$$
$$\left\| \frac{w - \gamma_0}{W\mathbf{x}_n} \right\|_{L^\infty(I^\boxdot)} \leqslant \frac{1}{3},$$
$$\left\| \frac{1}{1 + \frac{w-\gamma_0}{W\mathbf{x}_n}} \right\|_I \leqslant \frac{3}{2} + l_I^\mu \frac{9}{4} \left| \frac{w - \gamma_0}{W\mathbf{x}_n} \right|_{C^\mu(I^\boxdot)} \leqslant \frac{3}{2} + \frac{9 c_1 b_I}{4W} \leqslant c_3(n, \theta),$$
$$\|u\|_I \leqslant [c_1 b_I][c_1 b_I + c_2 b_I] c_3 W^{-1} \leqslant c(n, \theta)\Theta_2^*.$$
Тем самым теорема 5 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Парфёнов А.И. *Дискретные гёльдеровы оценки для одной разновидности параметрикса* // Математ. труды. Т. 17, № 1. 2014. С. 175–201.
2. R.A. Hunt, R.L. Wheeden *Positive harmonic functions on Lipschitz domains* // Trans. Amer. Math. Soc. V. 147. 1970. P. 507–527.
3. D.S. Jerison, C.E. Kenig *Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentially accessible domains* // Adv. Math. V. 46. 1982. P. 80–147.
4. S.E. Warschawski *On conformal mapping of infinite strips* // Trans. Amer. Math. Soc. V. 51. 1942. P. 280–335.
5. V. Kozlov, V. Maz'ya *Asymptotic formula for solutions to elliptic equations near the Lipschitz boundary* // Ann. Mat. Pura Appl. (4). V. 184. 2005. P. 185–213.
6. V. Kozlov *Asymptotic representation of solutions to the Dirichlet problem for elliptic systems with discontinuous coefficients near the boundary* // Electron. J. Diff. Equ. V. 2006. 2006. P. 1–46.
7. V. Kozlov *Behavior of solutions to the Dirichlet problem for elliptic systems in convex domains* // Comm. Partial Diff. Equ. V. 34, N 1. 2009. P. 24–51.
8. K. Ramachandran *Asymptotic behavior of positive harmonic functions in certain unbounded domains* // Potential Anal. V. 41, N 2. 2014. P. 383–405.
9. Парфёнов А.И. *Весовая априорная оценка в распрямляемых областях локального типа Ляпунова-Дини* // Сибирские электр. математ. известия. Т. 9. 2012. С. 65–150.
10. Парфёнов А.И. *Критерии распрямляемости липшицевой поверхности по Лизоркину-Трибелю. III* // Математ. труды. Т. 13, № 2. 2010. С. 139–178.

Антон Игоревич Парфёнов,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090, г. Новосибирск, Россия
E-mail: parfenov@math.nsc.ru