

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К.У. ХУБИЕВ

Аннотация. В работе исследуется аналог задачи Трикоми для характеристически нагруженного уравнения гиперβολо-параболического типа с переменными коэффициентами. Доказана теорема единственности и существования решения исследуемой задачи. Единственность решения доказывается с помощью принципа максимума, существование – методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: нагруженные уравнения, уравнения смешанного типа, гиперβολо-параболические уравнения, задача Трикоми, краевая задача.

Mathematics Subject Classification: 35M12

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения смешанного типа занимают важное место в теории дифференциальных уравнений в частных производных благодаря их теоретической и прикладной значимости. Одним из важнейших классов уравнений с частными производными являются нагруженные уравнения смешанного типа. Исследованию локальных и нелокальных краевых задач для нагруженных уравнений с частными производными посвящена монография А.М. Нахушева [1].

Впервые аналог задачи Трикоми для модельного гиперβολо-параболического уравнения был изучен в работе [2]. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений гиперβολо-параболического типа, в том числе обратные задачи и задачи для вырождающихся уравнений исследовались в работах многих авторов (см., например, [3]–[6]).

В настоящее время теория краевых задач и теория обратных задач для уравнений гиперβολо-параболического типа, в том числе для вырождающихся уравнений продолжает интенсивно развиваться. В этой связи укажем следующие работы. В [7] доказывается априорная оценка классического решения аналога задачи Трикоми для неоднородного модельного уравнения гиперβολо-параболического типа с правой частью из класса Гельдера. В [8] для уравнения смешанного гиперβολо-параболического типа в прямоугольной области изучена обратная задача, связанная с поиском неизвестной правой части, установлен критерий единственности решения задачи, решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. В [9] исследуется нелокальная внутреннекраевая задача с оператором Эрдейи-Кобера для модельного уравнения гиперβολо-параболического типа. В [10] для вырождающегося в области гиперболичности уравнения в прямоугольной области методом спектрального анализа установлен

K.U. KHUBIEV, ANALOGUE OF TRICOMI PROBLEMS FOR CHARACTERISTICLY LOADED HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS.

© ХУБИЕВ К.У. 2017.

Поступила 7 июля 2016 г.

критерий единственности решения задачи с нелокальным условием, связывающим значения искомого решения, которые принадлежат разным типам изучаемого уравнения, построено решение задачи в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи, установлена устойчивость решения по нелокальному условию. В [11], [12] исследованы нелокальные краевые задачи с условием типа условия Бицадзе–Самарского для вырождающегося уравнения гиперболо-параболического типа второго рода. В [13] для неоднородного гиперболо-параболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа изучается краевая задача с граничными условиями первого рода на характеристиках в параболической и гиперболической частях области задания уравнения, и с условием третьего рода на нехарактеристической части границы в параболической части.

Отметим также работы для нагруженных уравнений гиперболо-параболического типа второго и третьего порядков в различных областях [14]–[19]. В [14] исследуются краевые задачи для модельных нагруженных уравнений гиперболо-параболического типа второго порядка, когда линия изменения типа является нехарактеристической, и третьего порядка, когда линия изменения типа является характеристической. В [15] доказана однозначная разрешимость краевых задач для нагруженного дифференциального уравнения третьего порядка с гиперболическим и параболо-гиперболическим оператором. В [16] для уравнения гиперболо-параболического типа исследована однозначная разрешимость нелокальной задачи с обобщенными операторами дробного интегро-дифференцирования в краевом условии. В [17], [18] для различных уравнений смешанного гиперболо-параболического типа с нагруженными слагаемыми установлены критерии единственности решения начально-граничной задачи в прямоугольной области. Решения построены в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения. В [19] исследован аналог задачи Трикоми для нагруженного модельного уравнения гиперболо-параболического типа с дробной производной при нагрузке.

В настоящей работе рассмотрим нагруженное [1] уравнение гиперболо-параболического типа

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y + a_1 u_x + c_1 u + d_1 u(x, 0) = f_1, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 u + d_2 u(x + y, 0) + e_2 u(x - y, 0) = f_2, & y < 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

в области Ω , ограниченной отрезками AA_0 , BB_0 , A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = l$, $y = h > 0$ соответственно, и характеристиками $AC : x + y = 0$, $BC : x - y = l$. Через Ω_1 и Ω_2 обозначим параболическую и гиперболическую части смешанной области Ω соответственно, а через J – интервал $0 < x < l$ прямой $y = 0$, $a_i = a_i(x, y)$, $c_i = c_i(x, y)$, $d_i = d_i(x, y)$, $f_i = f_i(x, y)$, $b_2 = b_2(x, y)$, $e_2 = e_2(x, y)$ – заданные функции из класса $C(\bar{\Omega}_i)$, $i = 1, 2$.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1.1) назовем функцию $u(x, y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_2) \cap C_x^2(\Omega_1)$, $u_x, u_y \in L(J)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Задача Т. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(l, y) = \varphi_l(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (1.2)$$

$$u(x/2, -x/2) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.3)$$

где $\varphi_0(y), \varphi_l(y), \psi(x)$ – заданные функции, $\varphi_0(y), \varphi_l(y) \in C[0, h]$, $\psi(x) \in C[0, l] \cap C^2]0, l[$, причем $\varphi_0(0) = \psi(0)$.

В работах [20], [21] для задачи Т при $e_2 \equiv 0$ было доказано существование и единственность решения исследуемой задачи при очень сильных ограничениях на функцию d_2 , а точнее в случае, если функция d_2 определенным образом зависела от функций a_2, b_2, c_2 . В данной работе эти условия существенно ослаблены, причем при $d_1 = d_2 = e_2 \equiv 0$ полученные результаты совпадают с результатами, приведенными в [3].

2. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Для задачи Т справедлива следующая

Теорема 2.1. Пусть

1) в $\bar{\Omega}_1$ функции $a_1(x, y), c_1(x, y), d_1(x, y), f_1(x, y)$ непрерывны и удовлетворяют по x условию Гельдера, $a_1(x, 0) \in C^1[0, l]$, кроме того

$$c_1(x, y) + d_1(x, y) < 0, \quad d_1(x, y) \geq 0; \quad (2.1)$$

2) функции $a_2(x, y), b_2(x, y) \in C^1(\bar{\Omega}_2)$, $c_2(x, y), d_2(x, y), e_2(x, y), f_2(x, y) \in C(\bar{\Omega}_2)$, функция $u(x, y)$ обладает свойством $\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u \in C(\bar{\Omega}_2 \setminus \bar{J})$, кроме того, выполняются условия

$$a_2^2 - b_2^2 + 2a_{2x} + 2b_{2x} + 2a_{2y} + 2b_{2y} - 4c_2 \geq 0, \quad (2.2)$$

$$a_2(x, y) + b_2(x, y) > 0, \quad c_2(x, y) + d_2(x, y) + e_2(x, y) \geq 0, \quad d_2(x, y) \leq 0, \quad e_2(x, y) \leq 0. \quad (2.3)$$

Тогда решение задачи Т существует и единственно.

Доказательство. Пусть существует решение $u(x, y)$ задачи Т. Обозначим через

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u_y(x, 0) = \nu(x). \quad (2.4)$$

Тогда из условий задачи следует, что $\tau(0) = \varphi_0(0) = \psi(0)$, $\tau(l) = \varphi_l(0)$, $\tau(x) \in C(\bar{J}) \cap C^1(J)$, $\nu(x) \in C(J) \cap L(J)$.

2.1. Единственность решения задачи Т. Рассмотрим однородную задачу Т, т.е. $\varphi_0(y) = \varphi_l(y) = \psi(x) \equiv 0$, $f_1(x, y) = f_2(x, y) \equiv 0$. В Ω_2 уравнение (1.1) в характеристических координатах $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ примет вид

$$v_{\xi\eta} + pv_{\xi} + qv_{\eta} + rv + \lambda v(\xi, \xi) + \mu v(\eta, \eta) = 0, \quad (2.5)$$

где $4p = a_2 + b_2$, $4q = a_2 - b_2$, $4r = c_2$, $4\lambda = d_2$, $4\mu = e_2$, $v = v(\xi, \eta) = u(x, y)$, а $\Omega^- \cup AB$ перейдет в область $D = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < l\}$.

Следуя [22], покажем, что положительный максимум функции $v(\xi, \eta)$ в \bar{D} может достигаться только на отрезке $0 \leq \xi = \eta \leq l$. Действительно, пусть (ε, δ) – произвольным образом фиксированная точка из области D , $\varepsilon, \delta = \text{const} > 0$. Как следует из условий теоремы 2.1, функция p в области D имеет непрерывную производную по ξ , а q – непрерывна в D , и уравнение (2.5) в классе функций $v = v(\xi, \eta)$, имеющих в D первые и вторые смешанные производные, эквивалентно уравнению

$$(q_1 v_{\eta} + p_1 v)_{\xi} + r_1 v + \lambda_1 v(\xi, \xi) + \mu_1 v(\eta, \eta) = 0$$

или нагруженному уравнению первого порядка

$$\begin{aligned} & q_1(\xi, \eta)v_{\eta}(\xi, \eta) + p_1(\xi, \eta)v(\xi, \eta) + \int_{\varepsilon}^{\xi} r_1(\xi_1, \eta)v(\xi_1, \eta)d\xi_1 = \\ & = q_1(\varepsilon, \eta)v_{\eta}(\varepsilon, \eta) + p_1(\varepsilon, \eta)v(\varepsilon, \eta) - \int_{\varepsilon}^{\xi} \lambda_1(\xi_1, \eta)v(\xi_1, \xi_1)d\xi_1 - \int_{\varepsilon}^{\xi} \mu_1(\xi_1, \eta)v(\eta, \eta)d\xi_1, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $r_1 = rq_1 - p_{1\xi}$, $p_1 = pq_1$, $q_1 = \exp \int_{\delta}^{\xi} q(t, \eta)dt$, $\lambda_1 = \lambda q_1$, $\mu_1 = \mu q_1$, $0 < \xi < \eta < l$.

Перепишем (2.6) в следующем виде:

$$q_1(\xi, \eta)v_{\eta}(\xi, \eta) = \int_{\varepsilon}^{\xi} [v(\xi, \eta) - v(\xi_1, \eta)]r_1(\xi_1, \eta)d\xi_1 + q_1(\varepsilon, \eta) \left[v_{\eta}(\varepsilon, \eta) + p(\varepsilon, \eta)v(\varepsilon, \eta) \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\varepsilon}^{\xi} [v(\xi, \eta) - v(\xi_1, \xi_1)] \lambda_1(\xi_1, \eta) d\xi_1 + \int_{\varepsilon}^{\xi} [v(\xi, \eta) - v(\eta, \eta)] \mu_1(\xi_1, \eta) d\xi_1 - \\
 & - v(\xi, \eta) \left[p_1(\xi, \eta) + \int_{\varepsilon}^{\xi} [r(\xi_1, \eta) q_1(\xi_1, \eta) + \lambda_1(\xi_1, \eta) + \mu_1(\xi_1, \eta)] d\xi_1 \right] = \\
 & = \int_{\varepsilon}^{\xi} [v(\xi, \eta) - v(\xi_1, \eta)] r_1(\xi_1, \eta) d\xi_1 + q_1(\varepsilon, \eta) [v_{\eta}(\varepsilon, \eta) + p(\varepsilon, \eta) v(\varepsilon, \eta)] + \\
 & + \int_{\varepsilon}^{\xi} [v(\xi, \eta) - v(\xi_1, \xi_1)] \lambda_1(\xi_1, \eta) d\xi_1 + \int_{\varepsilon}^{\xi} [v(\xi, \eta) - v(\eta, \eta)] \mu_1(\xi_1, \eta) d\xi_1 - \\
 & - v(\xi, \eta) \left[p_1(\varepsilon, \eta) + \int_{\varepsilon}^{\xi} [r(\xi_1, \eta) + \lambda(\xi_1, \eta) + \mu(\xi_1, \eta)] q_1(\xi_1, \eta) d\xi_1 \right]. \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

Допустим теперь, что положительный максимум функции $v(\xi, \eta)$, являющейся регулярным решением уравнения (2.5), в \bar{D} достигается в точке (ξ_0, η_0) , $0 < \xi_0 < \eta_0 \leq l$. Из (2.7) при $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0, \varepsilon \rightarrow 0$, имеем:

$$\begin{aligned}
 q_1(\xi_0, \eta_0) v_{\eta}(\xi_0, \eta_0) & = \int_0^{\xi_0} [v(\xi_0, \eta_0) - v(\xi_1, \eta_0)] r_1(\xi_1, \eta_0) d\xi_1 + \\
 & + \int_0^{\xi_0} [v(\xi_0, \eta_0) - v(\xi_1, \xi_1)] \lambda_1(\xi_1, \eta_0) d\xi_1 + \int_0^{\xi_0} [v(\xi_0, \eta_0) - v(\eta_0, \eta_0)] \mu_1(\xi_1, \eta_0) d\xi_1 - \\
 & - v(\xi_0, \eta_0) \left[p_1(\xi_0, \eta_0) + \int_0^{\xi} [r(\xi_1, \eta_0) + \lambda(\xi_1, \eta_0) + \mu(\xi_1, \eta_0)] q_1(\xi_1, \eta_0) d\xi_1 \right] + \\
 & + q_1(0, \eta) [v_{\eta}(0, \eta) + p(0, \eta) v(0, \eta)]. \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

Из условий теоремы 2.1 следует, что $p, p_{\xi}, q, r, \lambda$ и μ принадлежат $C(0 \leq \xi < \eta \leq l)$, $v_{\eta} \in C(0 \leq \xi < \eta \leq l)$, кроме того, из (2.2), (2.3) получим, что

$$r_1(\xi, \eta) \leq 0, \quad \lambda(\xi, \eta) \leq 0, \quad \mu(\xi, \eta) \leq 0,$$

$$p_1(\xi, \eta) + \int_0^{\xi} [r(\xi_1, \eta) + \lambda(\xi_1, \eta) + \mu(\xi_1, \eta)] q_1(\xi_1, \eta) d\xi_1 > 0,$$

а из того, что $\psi(x) \equiv 0$ следует, что

$$v_{\eta}(0, \eta) + p(0, \eta) v(0, \eta) = 0.$$

Таким образом, учитывая условия теоремы 2.1 и то что $q_1(\xi, \eta) > 0$, из (2.8) получаем, что $v_{\eta}(\xi_0, \eta_0) < 0$. Но это противоречит сделанному допущению, так как в точке (ξ_0, η_0) положительного максимума $v_{\eta}(\xi_0, \eta_0) \geq 0$. Следовательно, положительный максимум функции $v(\xi, \eta)$ в \bar{D} достигается только на отрезке $0 \leq \xi = \eta \leq l$, и при выполнении условий теоремы 2.1 решение $u(x, y)$ уравнения (1.1) при $y < 0$ свой положительный максимум в $\bar{\Omega}_2$ принимает во внутренней точке $(x_0, 0)$ отрезка AB , причем в точке положительного максимума

$$\nu(x_0) \geq 0. \tag{2.9}$$

Замечание 2.1. Отметим, что при $d_2 = e_2 \equiv 0$ полученный принцип экстремума для нагруженного гиперболического уравнения совпадает с принципом экстремума Агмона-Ниренберга-Проттера, сформулированным для гиперболического уравнения в [22], и полученные условия согласуются с условиями, полученными в работе [23]. Краткий обзор результатов исследований по принципу максимума для уравнений смешанного типа приведен в работе [24].

Покажем, аналогично [22], что при $y > 0$ положительный максимум функции $u(x, y)$ в $\bar{\Omega}^+$ может достигаться только на AA_0, AB, BB_0 . Пусть регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (1.1) при $y > 0$ достигает положительного максимума в точке $(x_0, y_0) \in \Omega^+$. Необходимое условие максимума функции u в точке (x_0, y_0) имеет следующий вид: $u_x = 0, u_y = 0, u_{xx} \leq 0$. Принимая это во внимание, из (1.1) находим

$$c_1(x_0, y_0)u(x_0, y_0) + d_1(x_0, y_0)u(x_0, 0) = -u_{xx}(x_0, y_0) \geq 0.$$

С другой стороны, при выполнении условий (2.1) теоремы 2.1 $c_1 + d_1 < 0, d_1 \geq 0$, получим

$$\begin{aligned} & c_1(x_0, y_0)u(x_0, y_0) + d_1(x_0, y_0)u(x_0, 0) = \\ & = c_1(x_0, y_0)u(x_0, y_0) + d_1(x_0, y_0)u(x_0, 0) + d_1(x_0, y_0)u(x_0, y_0) - d_1(x_0, y_0)u(x_0, y_0) = \\ & = [c_1(x_0, y_0) + d_1(x_0, y_0)]u(x_0, y_0) - d_1(x_0, y_0)[u(x_0, y_0) - u(x_0, 0)] < 0. \end{aligned}$$

Полученное противоречие – результат неверного допущения, и $(x_0, y_0) \notin \Omega^+$. Утверждение, что точка максимума не принадлежит A_0B_0 , доказывается также, как и в случае, когда $y_0 < h$, но с той лишь разницей, что необходимое условие экстремума $u_y(x_0, y_0) = 0$ при $y_0 < h$ заменяется условием $u_y(x_0, y_0) \geq 0$ при $y_0 = h$.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 2.1 следует, что положительный максимум функции $u(x, y)$ может достигаться только на отрезках AA_0, BB_0, AB .

Покажем теперь, что для функции $u(x, y)$ любая внутренняя точка $(x_0, 0)$ отрезка AB не может быть точкой положительного максимума. В самом деле, в силу непрерывности производных u_x, u_y, u_{xx} из уравнения (1.1) мы можем перейти к пределу при $y \rightarrow +0$ и тогда получим

$$\tau''(x) + a_1(x, 0)\tau'(x) + [c_1(x, 0) + d_1(x, 0)]\tau(x) - \nu(x) = 0. \quad (2.10)$$

Из (2.10) в силу условий (2.1) теоремы 2.1 в точке положительного максимума имеем $\nu(x_0) < 0$, что противоречит неравенству (2.9), откуда следует, что функция $u(x, y)$ не может достигать положительного максимума во внутренней точке $(x_0, 0)$ отрезка AB . Таким образом, при выполнении условий теоремы 2.1 положительный максимум функции $u(x, y)$ может достигаться только на отрезках AA_0 и BB_0 . Так как $\varphi_0(y) = \varphi_l(y) \equiv 0$, то заключаем, что максимум функции $u(x, y) = 0$ в $\bar{\Omega}$. Аналогично доказывается, что функция $u(x, y)$ не может достигать отрицательного минимума, и минимум функции $u(x, y) = 0$. Следовательно, однородная задача, соответствующая задаче Т, имеет только тривиальное решение $u(x, y) \equiv 0$, из чего заключаем единственность решения задачи Т.

2.2. Существование решения задачи Т. Решая задачу Коши [25] для уравнения (1.1) в области Ω_2 как для неоднородного волнового уравнения с правой частью $f_2(x, y) - d_2(x, y)\tau(x+y) - e_2(x, y)\tau(x-y)$, получим

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{1}{2} [R(x, y; x+y, 0)\tau(x+y) + R(x, y; x-y, 0)\tau(x-y)] - \\ & - \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} [R_\eta(x, y; \xi, 0) + b_2(\xi, 0)R(x, y; \xi, 0)] \tau(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} R(x, y; \xi, 0) \nu(\xi) d\xi + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_y^0 \int_{x+y-\eta}^{x-y+\eta} R(x, y; \xi, \eta) \left[f_2(\xi, \eta) - d_2(\xi, \eta)\tau(\xi + \eta) - e_2(\xi, \eta)\tau(\xi - \eta) \right] d\xi d\eta, \quad (2.11)$$

где $R(x, y; \xi, \eta)$ - функция Римана, определяемая как решение задачи Гурса

$$R_1 = R(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=x+y-\xi} = \exp \left(\frac{1}{2} \int_x^\xi [a_2(t, x+y-t) + b_2(t, x+y-t)] dt \right),$$

$$R_2 = R(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=\xi-x+y} = \exp \left(\frac{1}{2} \int_x^\xi [a_2(t, t-x+y) + b_2(t, t-x+y)] dt \right),$$

$$R(x, y; x, y) = 1,$$

для уравнения

$$R_{\xi\xi} - R_{\eta\eta} - (a_2R)_\xi - (b_2R)_\eta + c_2R = 0. \quad (2.12)$$

Удовлетворяя (2.11) условию (1.3), получим

$$R_2(x/2, -x/2; x, 0)\tau(x) + \int_0^x [R_\eta(x/2, -x/2; \xi, 0) + b_2(\xi, 0)R(x/2, -x/2; \xi, 0)] \tau(\xi) d\xi -$$

$$- \int_{-x/2}^0 \int_{-\eta}^{x+\eta} d_2(\xi, \eta)R(x/2, -x/2; \xi, \eta)\tau(\xi + \eta) - e_2(\xi, \eta)R(x/2, -x/2; \xi, \eta)\tau(\xi - \eta) d\xi d\eta =$$

$$= 2\psi(x) - R_1(x/2, -x/2; 0, 0)\psi(0) + \int_0^{-x/2} \int_{x+\eta}^{-\eta} R(x/2, -x/2; \xi, \eta)f_2(\xi, \eta) d\xi d\eta +$$

$$+ \int_0^x R(x/2, -x/2; \xi, 0)\nu(\xi) d\xi. \quad (2.13)$$

Меняя пределы интегрирования в двойных интегралах, получим

$$\int_{-x/2}^0 \int_{-\eta}^{x+\eta} d_2(\xi, \eta)R(x/2, -x/2; \xi, \eta)\tau(\xi + \eta) d\xi d\eta =$$

$$= \int_0^x \tau(\xi) \int_{\frac{\xi-x}{2}}^0 d_2(\xi - \eta, \eta)R(x/2, -x/2; \xi - \eta, \eta) d\eta d\xi,$$

$$\int_{-x/2}^0 \int_{-\eta}^{x+\eta} e_2(\xi, \eta)R(x/2, -x/2; \xi, \eta)\tau(\xi - \eta) d\xi d\eta =$$

$$= \int_0^x \tau(\xi) \int_{-\xi/2}^0 e_2(\xi + \eta, \eta)R(x/2, -x/2; \xi + \eta, \eta) d\eta d\xi,$$

и обозначив

$$K_1(x, \xi) = \int_{\frac{\xi-x}{2}}^0 d_2(\xi - \eta, \eta) R(x/2, -x/2; \xi - \eta, \eta) d\eta + \int_{-\xi/2}^0 e_2(\xi + \eta, \eta) R(x/2, -x/2; \xi + \eta, \eta) d\eta,$$

$$K(x, \xi) = \frac{K_1(x, \xi) - R_\eta(x/2, -x/2; \xi, 0) - b_2(\xi, 0) R(x/2, -x/2; \xi, 0)}{R_2(x/2, -x/2; x, 0)},$$

$$g_1(x) = \frac{2\psi(x) - R_1(x/2, -x/2; 0, 0)\psi(0) + \int_0^{-x/2} \int_{x+\eta}^{-\eta} R(x/2, -x/2; \xi, \eta) f_2(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R_2(x/2, -x/2; x, 0)},$$

$$g_2(x) = \int_0^x \frac{R(x/2, -x/2; \xi, 0) \nu(\xi)}{R_2(x/2, -x/2; x, 0)} d\xi, \quad g(x) = g_1(x) + g_2(x),$$

получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\tau(x) - \int_0^x K(x, \xi) \tau(\xi) d\xi = g(x).$$

После обращения полученного интегрального уравнения относительно $\tau(x)$ будем иметь первое функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_2 в виде

$$\tau(x) - \int_0^x T(x, \xi) \nu(\xi) d\xi = \rho(x), \quad (2.14)$$

где

$$T(x, \xi) = \frac{R(x/2, -x/2, \xi, 0) + \int_\xi^x \Gamma(x, t) R(t/2, -t/2; \xi, 0) dt}{R_2(x/2, -x/2; x, 0)},$$

$$\rho(x) = g_1(x) + \int_0^x \Gamma(x, \xi) g_1(\xi) d\xi, \text{ а } \Gamma(x, \xi) \text{ - резольвента ядра } K(x, \xi).$$

Замечание 2.2. Отметим, что для уравнения (1.1) в Ω_2 при $d_2 = e_2 = f_2 \equiv 0$ аналогичные соотношения были получены в [3], [26].

Для неоднородного уравнения (1.1) соотношение (2.10) примет вид:

$$\tau''(x) + a_1(x, 0)\tau'(x) + [c_1(x, 0) + d_1(x, 0)]\tau(x) = f_1(x, 0) + \nu(x). \quad (2.15)$$

Поэтому второе функциональное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_1 , определим как решение уравнения (2.15), удовлетворяющее крайним условиям

$$\tau(0) = \varphi_0(0), \quad \tau(l) = \varphi_l(0). \quad (2.16)$$

При выполнении условий теоремы 2.1 на гладкость функций a_1, c_1, d_1, f_1 оно имеет вид

$$\tau(x) = f(x) - \int_0^l G(x, \xi) \nu(\xi) d\xi, \quad (2.17)$$

где

$$f(x) = \varphi_0(0) + x\{\varphi_l(0) - \varphi_0(0)\} + \int_0^l \left[G(x, \xi) \left(f_1(\xi, 0) - \right. \right. \\ \left. \left. - \{a_1(\xi, 0) + \xi[c_1(\xi, 0) + d_1(\xi, 0)]\} \{\varphi_l(0) - \varphi_0(0)\} - \varphi_0(0)[c_1(\xi, 0) + d_1(\xi, 0)] \right) \right] d\xi,$$

а $G(x, \xi)$ – функция Грина, обладающая свойствами [25]

а) в промежутках $0 \leq x < \xi$, $\xi < x \leq l$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка и удовлетворяет уравнению, сопряженному с уравнением (2.15), кроме того, при каждом фиксированном ξ , $0 < \xi < l$, удовлетворяет как функция от x однородным краевым условиям (2.16);

б) в точке $\xi = x$ как функция ξ сама непрерывна, а ее первая производная по x имеет скачок, причем $G_x(x, x+0) - G_x(x, x-0) = 1$.

Исключая $\tau(x)$ из (2.14) и (2.17), получаем интегральное уравнение

$$\int_0^x T(x, \xi)\nu(\xi)d\xi + \rho(x) = f(x) - \int_0^l G(x, \xi)\nu(\xi)d\xi,$$

из которого после дифференцирования по x с учетом того, что $T(x, x) \equiv 1$ имеем

$$\nu(x) - \int_0^x T_1(x, \xi)\nu(\xi)d\xi = f'(x) - \rho'(x) - \int_0^l G_x(x, \xi)\nu(\xi)d\xi, \quad (2.18)$$

где $T_1(x, \xi) = \frac{T_x(x, \xi)}{R_2(x/2, -x/2, x, 0)}$. Обращая уравнение (2.18), получим

$$\nu(x) + \int_0^l K_2(x, t)\nu(t)dt = \sigma(x). \quad (2.19)$$

Здесь

$$K_2(x, t) = G_x(x, t) + \int_0^x \Gamma_1(x, \xi)G_x(\xi, t)d\xi, \\ \sigma(x) = f'(x) - \rho'(x) + \int_0^x \Gamma_1(x, \xi) [f'(\xi) - \rho'(\xi)] d\xi,$$

а $\Gamma_1(x, \xi)$ – резольвента ядра $T_1(x, \xi)$.

Так как мы будем искать $\nu(x)$ в классе непрерывных функций, интегрируемых на интервале, то $\sigma(x)$ тоже должно быть в этом же классе. В силу свойств функций $G(x, \xi)$ и $R(x, y, \xi, \eta)$ заключаем, что функция $K_2(x, \xi)$ в промежутке $0 \leq x < \xi$, $\xi < x \leq l$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по x , а $\sigma(x)$ непрерывно дифференцируема в $0 < x < l$.

Разрешимость интегрального уравнения Фредгольма второго рода (2.19) в классе непрерывных функций, интегрируемых на интервале, следует из единственности решения задачи Т.

Из (2.19), принимая во внимание условия, наложенные на коэффициенты уравнения (2.15), вышеприведенные свойства функции Грина, а также равенство

$$\frac{d^2 G(x, \xi)}{dx^2} = \frac{d}{dx} [a_1(x, 0)G(x, \xi)] - [c_1(x, 0) + d_1(x, 0)]G(x, \xi),$$

верное при $x \neq \xi$, имеем:

$$\begin{aligned} \nu'(x) = \sigma'(x) + \nu(x) - \int_0^l \left(\frac{d}{dx} [a_1(x, 0)G(x, t)] - [c_1(x, 0) + d_1(x, 0)]G(x, t) \right) \nu(t) dt - \\ - \int_0^l \Gamma_1(x, x)G_x(x, t)\nu(t) dt - \int_0^l \int_0^x \Gamma_{1x}(x, \xi)G_x(\xi, t)\nu(t) d\xi dt, \end{aligned}$$

откуда нетрудно заключить, что $\nu(x) \in C^1(J)$.

После нахождения $\nu(x)$ функция $\tau(x)$ находится из (2.14) или (2.17), причем функция $\tau(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$. Далее решение задачи Т в области Ω сводится к решению задачи Коши для уравнения (1.1) в Ω_2 , т.е. задается формулой (2.11), а в Ω_1 , учитывая, что $a_1(x, y)$, $c_1(x, y)$, $d_1(x, y)$, $f_1(x, y)$ непрерывны и удовлетворяют по x условию Гельдера, к решению первой краевой задачи для уравнения (1.1) в Ω_1 [27]. Теорема 2.1 доказана.

Замечание 2.3. Заметим, что условие (2.2) теоремы 2.1 при $|a_2| = |b_2| \equiv const$ не имеет места, если $c_2 \neq 0$, так же, как и в [3], поэтому этот случай должен быть рассмотрен отдельно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушев А.М. *Нагруженные уравнения и их применения*. М.: Наука, 2012. 232 с.
2. Золина Л.А. *О краевой задаче для модельного уравнения гиперβολо-параболического типа* // Журн. вычис. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6. № 6. С. 991–1001.
3. Джураев Т.Д., Сопуев А.С., Мамажанов М. *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа*. Ташкент: ФАН. 1986. 220 с.
4. Бжихатлов Х.Г., Нахушев А.М. *Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа* // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183. № 2. С. 261–264.
5. Нахушев А.М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*. М.: Наука, 2006. 287 с.
6. Елеев В.А. *О некоторых краевых задачах со смещением для одного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа* // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 1. С. 22–29.
7. Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю. *Уточнение априорной оценки решения одной известной задачи для параболо-гиперболического уравнения* // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427. № 5. С. 591–592.
8. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа* // Математические заметки. 2010. Т. 87. № 6. С. 907–918.
9. Нахушева З.А. *Нелокальная задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе и его аналогов в теории уравнений смешанного параболо-гиперболического типа* // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 10. С. 1332–1339.
10. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. *Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 3. С. 356–365.
11. Исламов Н.Б. *Аналог задачи Бицадзе-Самарского для одного класса уравнений параболо-гиперболического типа второго рода* // Уфимский математический журнал. 2015. Т. 7. № 1. С. 31–45.
12. Салахитдинов М.С., Исламов Н.Б. *Нелокальная краевая задача с условием Бицадзе-Самарского для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода* // Известия вузов. Математика. 2015. № 6. С. 43–52.
13. Гуляев Д.А. *О неоднородной задаче для параболо-гиперболического уравнения* // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 10. С. 1423–1425.
14. Елеев В.А. *О некоторых краевых задачах для смешанных нагруженных уравнений второго и третьего порядка* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 2. С. 230–237.

15. Балтаева У.И., Исломов И.Б. *Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов третьего порядка* // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3. № 3. С. 15–25.
16. Тарасенко А.В. *О разрешимости нелокальной задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения* // Известия вузов. Математика. 2013. № 1. С. 73–81.
17. Сабитов К.Б. *Начально-граничная задача для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа* // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2009. Т. 11. № 1. С. 66–73.
18. Сабитов К.Б. *Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми* // Известия вузов. Математика. 2015. № 6. С. 31–42.
19. Хубиев К.У. *Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с дробной производной при нагрузке* // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17. № 3. С. 54–59.
20. Хубиев К.У. *Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения смешанного типа с переменными коэффициентами* // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2006. Т. 8. № 2. С. 69–72.
21. Хубиев К.У. *Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с переменными коэффициентами* // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физико-математические науки. 2007. № 2(15). С. 155–158.
22. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии*. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
23. S. Agmon, L. Nirenberg, M. Protter *A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type* // Communications on pure and applied mathematics. 1953. V. VI. P. 455–470.
24. Сабитов К.Б. *О принципе максимума для уравнений смешанного типа* // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 11. С. 1967–1976.
25. Соболев С.Л. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1966. 444 с.
26. Пулькин С.П. *Задача Трикоми для общего уравнения Лаврентьева-Бицадзе* // Докл. АН СССР, 1958. Т. 118. № 1. С. 38–41.
27. Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. *Линейные уравнения второго порядка параболо-гиперболического типа* // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. Вып. 3(105). С. 3–141.

Казбек Узеирович Хубиев,
Институт прикладной математики и автоматизации,
ул. Шортанова, 89 А,
360000, г. Нальчик, Россия
E-mail: khubiev_math@mail.ru