ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. т 2 (2017). С. 40-55.

УДК 517.911

О ГЕОМЕТРИИ РЕШЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИММЕТРИЯХ

В.В. ГОРБАЦЕВИЧ

Аннотация. Статья посвящена разработке геометрического подхода к теории приближенных уравнений (в том числе ОДУ и УРЧП) и их симметрий. Вводятся дуальные алгебры Ли, многообразия над дуальными числами и дуальные группы Ли. Описываются некоторые конструкции, применяемые к этим объектам. На основе этих построений показывается, как можно сформулировать основные понятия и методы в теории приближенных уравнений и их симметрий. Доказательства многих общих утверждений при этом получают почти автоматически из классических рассуждений, в отличие от использовавшихся до сих пор методов изучения приближенных уравнений.

Ключевые слова: приближенное уравнение, приближенная алгебра Ли, дуальные числа, дуальная алгебра Ли, многообразие над дуальными числами

Mathematics Subject Classification: 53C15, 34C30, 37J15, 51H30

Введение

В статье рассматриваются понятия, возникающие при изучении приближенных симметрий различных функциональных и дифференциальных объектов, зависящих от малого параметра. Это направление было инициировано статьей [1] и затем продолжено во многих других работах. Основная цель статьи — не разбор новых примеров решения уравнений или вычисления симметрий новых уравнений, а построение геометрического подхода к изучению этих уравнений и симметрий и развитие соответствующей методологии. Основой здесь для автора был принцип, который пропагандировал А. Гротендик: «Для того чтобы решить задачу, нужно вложить ее в такую математическую среду, в которой ее решение станет очевидным». Статья посвящена как раз описанию такой среды, в которой приближенные уравнения и их симметрии формулируются и решаются наиболее естественным образом. В частности, будет доказано весьма общее утверждение — принцип соответствия, который можно сформулировать так:

Пусть $F(x, u, \epsilon) = 0$ — некоторое уравнение (возможно, дифференциальное — обыкновенное или с частными производными), где u — гладкая функция (скалярная или векторная) независимой переменной x (скалярной или векторной), а ϵ — некоторый параметр (обычно предполагаемый близким к 0). Рассмотрим линеаризацию $F(x, u) \approx f_0(x, u) + \epsilon f_1(x, u)$ левой части этого уравнения и продолжим ее на область дуальных (т.е. принадлежащих области дуальных чисел $a + \epsilon b$, где $a, b \in \mathbf{R}, \epsilon^{\mathbf{2}} = \mathbf{0}$) значений аргумента. Получим уравнение $\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{u}) = 0$. Пусть $\tilde{u}(\tilde{x})$ — его точное решение. Тогда при ограничении на вещественные значения аргумента $\tilde{x} = x$ мы получим приближенное решение исходного уравнения с точностью до $o(\epsilon)$.

Совсем общая формулировка основного методологического результата статьи совершенно элементарна: две функции $\Phi(*, \epsilon)$ и $\Psi(*, \epsilon)$ равны с точностью до $o(\epsilon)$ тогда и только тогда, когда равны соответствующие им функции дуального аргумента $\Phi(\tilde{*})$ и $\Psi(\tilde{*})$. В

V.V. Gorbatsevich, On geometry of solutions to approximate equations and their symmetries.

Поступила 14 июля 2016 г.

применении к решениям дифференциального уравнения мы получает приведенную выше формулировку принципа соответствия.

Используемые в этих формулировках понятия будут подробно описаны ниже. Общий принцип соответствия применим, в частности, к решению дифференциальных уравнений, зависящих от параметра, а также к вычислению симметрий этих уравнений.

В §1 будут сформулированы исходные понятия, связанные с методами решения приближенных уравнений и вычислением их симметрий. Рассматриваются варианты определения приближенных алгебр Ли – одного из важных понятий дальнейшего изложения.

В §2 рассматриваются понятия симметрии и приближенной симметрий уравнений.

В §3 дается определение приближенной алгебры Ли, которое связывается с понятием алгебр Ли над алгеброй дуальных чисел D_2.

В §4 вводится основное для данной статьи понятие D_2-многообразия, дающее геометрическую основу для изучения приближенных уравнений и их симметрий. Вводятся также обычные сопутствующие понятию многообразия объекты – касательные векторы и поля и др.

В §5 доказаны некоторые результаты общей теории дифференциальных уравнений с дуальным аргументом.

Параграф §6 посвящен краткому обсуждению теории Ли в D_2-ситуации.

И, наконец, в §7 рассмотрено применение всего вышеизложенного к вопросу о методах решения и анализа приближенных уравнений. Дана геометрическая интерпретация одного широко распространенного метода решения приближенных уравнений и указано обобщение этого метода. В качестве иллюстрации рассмотрен несложный пример решения задачи Коши для приближенного ОДУ второго порядка, иллюстрирующий полезность перехода в D_2-область.

1. Мотивировки и исходные понятия

Как известно, Софус Ли начал свои исследования по теории непрерывных групп преобразований, пытаясь перенести на дифференциальные уравнения методы теории Галуа. При этом ему понадобилось ввести понятие группы симметрий дифференциального уравнения и некоторых других функциональных или дифференциальных объектов. Затем было введено понятие, говоря современным языком, группы Ли преобразований и соответствующей алгебры Ли векторных полей. И только потом в математику были введены общие понятия группы Ли (не обязательно группы преобразований) и абстрактной алгебры Ли.

Первоначальное понятие группы симметрий (фактически речь обычно шла об однопараметрической группе преобразований), сохраняющей функцию или дифференциальное уравнение, было довольно подробно изучено и многократно были рассмотрены различные его применения (в теории дифференциальных уравнений, в геометрии, теоретической физике и др.). Но при практических применениях стали возникать определенные трудности при использовании понятия симметрии. Большинство дифференциальных уравнений в физике, механике и других областях применений математики являются приближенными, в них входят некоторые параметры (обычно малые). Равенство нулю некоторого такого параметра соответствует определенной «классической» ситуации. Но реальные физические и другие объекты описываются более точно при некоторых ненулевых, хотя и малых, значениях этих параметров. Типичные примеры такого рода параметра — параметр h (постоянная Планка) или же величина $1/c$, где c — скорость света. При $c \to \infty$ мы имеем $1/c \to 0$ и переход от релятивистской теории к классической физике. Квантовая механика при $h \to 0$ переходит в классическую. Такого рода малые параметры вызвали в математике понятие квантования, под которым, в самой общей ситуации, понимается некоторая деформация, зависящая от параметра. При таких «квантованиях» группы симметрий меняются, причем некоторые из симметрий «разрушаются». Это указывало на необходимость изучать такие симметрии, которые не исчезают при ненулевых значениях параметров, а просто как-то «деформируются». Так появились методы изучения «приближенной» симметрии. Имеется несколько подходов к понятию приближенной симметрии дифференциального уравнения. В данной работе мы основываемся на том из них, который был введен в [1] и потом был довольно подробно исследован рядом автором (см. например обзоры [2], [3]). Однако наш подход будет несколько отличен от принятого этими авторами — он будет более геометричен и основан на понятии многообразия над алгеброй дуальных чисел.

В дальнейшем будет использоваться стандартное обозначение $f \approx g$ для эквивалентности двух функций по переменной ϵ: запись $f(x,\epsilon) \approx g(x,\epsilon)$ обозначает условие $f(x,\epsilon) - g(x,\epsilon) = o(\epsilon)$ при $\epsilon \to 0$. Можно рассматривать и $o(\epsilon^p)$ при произвольном натуральном p, но здесь мы этого обычно использовать не будем (указывая иногда на возможные в этом случае обобщения).

Начнем с предварительных соображений и определений (введенных и первоначально изученных в [1]). Пусть имеется уравнение $F(x,\epsilon) = 0$, где F — некоторая функция (гладкая или даже аналитическая), зависящая от переменной x (возможно, векторной — $x = (x_1, x_2 \dots)$) и малого параметра ϵ. Значению $\epsilon = 0$ будет соответствовать уравнение $f_0(x) = 0$ (где $f_0(x) = F(x,0)$), которое мы будем называть точным, а исходное — приближенным. Аналогично можно рассматривать и зависящие от скалярного параметра системы уравнений (когда F — это вектор-значное отображение), а также дифференциальные уравнения, например $F(x,u,u',\dots,\epsilon) = 0$ или $F(x,y,u,u_x,u_y,\dots,\epsilon) = 0$.

Теперь рассмотрим понятие однопараметрической приближенной группы преобразований и ее инфинитезимальный аналог — приближенное векторное поле (или, что эквивалентно, приближенный дифференциальный оператор, соответствующий этой группе). Рассмотрения будут локальными, поэтому можно предполагать, что все объекты определены в некоторой окрестности начала координат евклидова пространства $\mathbf{R^n}$. При этом исходить мы будем из классических определений теории групп преобразований.

Однопараметрическая (локальная) группа преобразований — это такое преобразование $x' = \phi(x,a)$, зависящее от $a \in \mathbf{R}$ (возможно, что a пробегает только некоторый симметричный интервал в локальной ситуации), для которого при $a, b \in \mathbf{R}$ выполняются два тождества:

$$\phi(\phi(x,a),b) = \phi(x,a+b)$$

$$\phi(x,0) = x.$$

Отметим, что обратное преобразование здесь всегда существует — оно соответствует значению параметра $-a$. Векторное поле $\mathcal{X}$, соответствующее этой однопараметрической группе преобразований (его еще иногда называют инфинитезимальным преобразованием или генератором), определяется так: оно имеет вид $\mathcal{X} = X(x)\frac{d}{dx}$, где

$$X(x) = \frac{d}{da}(\phi(x,a))_{a=0}.$$

Инвариантность функции $F(x)$ относительно однопараметрической группы преобразований определяется естественным образом:

$$\phi(F(x),a) = F(x)$$

для любого допустимого $a \in \mathbf{R}$.

Это условие эквивалентно, как известно еще со времен С. Ли, обращению в нуль результата применения соответствующего дифференциального оператора к этой функции — т.е. условию $\mathcal{X} \cdot F = 0$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда имеется малый параметр ϵ. Здесь повторяются те же конструкции, которые были приведены выше, только появляется дополнительная переменная — параметр ϵ — и равенства заменяются на «приближенные равенства». В частности, приближенная однопараметрическая (локальная) группа преобразований — это такое преобразование $x' \approx \phi(x, a)$, где $a \in \mathbf{R}$ (или же a пробегает некоторый интервал в локальной ситуации), для которого при $a, b \in \mathbf{R}$ выполняются тождества

$$\phi(\phi(x, a), b) \approx \phi(x, a + b)$$

$$\phi(x, 0) \approx x.$$

В этих соотношениях подразумевается наличие малого параметра ϵ.

Условие приближенной инвариантности функции F (когда $\phi(F(x), a) \approx F(x)$ для любого $a \in \mathbf{R}$) принимает вид $\mathcal{X} \cdot F \approx 0$. Здесь $\mathcal{X} = \mathcal{X}(x, \epsilon)$ — векторное поле (гладкое или аналитическое, в зависимости от рассматриваемой нами ситуации), зависящее от параметра ϵ. При этом $\mathcal{X}(x, \epsilon)$ можно рассматривать и как однопараметрическое семейство (зависящее от параметра ϵ) «точных» векторных полей.

Для дифференциальных уравнений понятия симметрии и приближенной симметрии определяются естественным образом, при этом используется естественное продолжение преобразования координат на производные.

Когда мы переходим от однопараметрических групп преобразований дифференциальных уравнений к полным группам симметрий (являющихся группами Ли, возможно, бесконечномерными), соответствующие инфинитезимальные преобразования образуют алгебры Ли векторных полей. При наличии параметра ϵ получаемые семейства векторных полей (соответствующих приближенным симметриям) не образуют, вообще говоря, алгебру Ли, так как аксиомы алгебры Ли (в частности, условие Якоби) выполняются только приближенно. Соответствующие инфинитезимальные объекты естественно называть приближенными алгебрами Ли, о них будет рассказано подробнее ниже.

Рассмотрение функций и векторных полей с точностью до $o(\epsilon)$ эквивалентно их линеаризации по параметру ϵ. В частности, функция $F(x, \epsilon)$ заменяется на функцию $f_0(x) + \epsilon f_1(x)$, где f_0, f_1 — некоторые гладкие или аналитические функции. Для приближенного векторного поля $\mathcal{X}(x, \epsilon)$ имеем

$$\mathcal{X}(x, \epsilon) \approx \mathcal{X}_0(x) + \epsilon \mathcal{X}_1(x),$$

где $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1$ — обычные векторные поля. Коммутирование подобных приближенных векторных полей происходит так:

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = [\mathcal{X}_0 + \epsilon \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_0 + \epsilon \mathcal{Y}_1] = [\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0] + \epsilon([\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_1] + [\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_0]).$$

При этом билинейность коммутирования и кососимметричность сохраняются, тождество Якоби тоже выполняется. Тем самым мы получаем некоторую алгебру Ли. Но если рассматривать обычный коммутатор линеаризованных векторных полей, то его результат уже не будет, вообще говоря, линейным по ϵ. Поэтому указанное выше коммутирование уже не является операцией коммутирования векторных полей, оно производится немного по-другому. Мы приходим к новому понятию, в котором в единый объект объединяются все алгебры Ли, зависящие от параметра ϵ. Этот объект $\mathcal{X}(\epsilon)$ называется (следуя [4]) приближенной алгеброй Ли, и сейчас мы рассмотрим несколько различных подходов к рассмотрению таких объектов.

Вот первый подход. Пусть Φ — некоторая алгебра Ли векторных полей (или их ростков) в некоторой окрестности точки $x \in \mathbf{R^n}$. Рассмотрим множество векторных полей вида $X + \epsilon Y$, где $X, Y \in \Phi$, а ϵ — некоторый параметр. Это множество обозначим $\Phi(\epsilon)$ или представим его в виде $\Phi + \epsilon\Phi$. Вообще говоря, это множество (ростков) векторных полей не образует алгебру Ли, так как операция коммутирования может приводить к векторным полям, не лежащим в $\Phi(\epsilon)$ (ибо может появится слагаемое с ϵ^2). Но если мы определим на $\Phi(\epsilon)$ операцию коммутирования по-другому (как это сделано выше для приближенных векторных полей), то получим, как нетрудно убедиться, алгебру Ли (но это уже не будет алгебра Ли векторных полей). Такие алгебры Ли называются в указанных выше статьях приближенными.

Кроме уже построенных таким способом приближенных алгебр Ли, полезно рассматривать и некоторые их подалгебры — но не все, а только те, которые выдерживают умножение на ϵ. Именно такие подалгебры Ли соответствуют группам Ли приближенных симметрий дифференциальных уравнений, изучение которых и инициировало введение понятия приближенной алгебры Ли.

Отметим также, что рассмотрение выражений сходного вида $\bar{a} + \omega\bar{a}^0$, где $\bar{a}, \bar{a}^0$ — трехмерные векторы, а ω — символ, для которого $\omega^2 = 0$, используется в механике как объект винтового исчисления (см. например [5]).

Рассмотрим теперь и другую конструкцию. Пусть Φ — произвольная вещественная алгебра Ли. Рассмотрим двумерную алгебру D_2 (алгебру дуальных чисел вида $a+\epsilon b$, иногда ее называют алгеброй Штуди, а ее элементы — числами Штуди) над $\mathbf{R}$ с образующими 1 и ϵ, причем $\epsilon^2 = 0$. Отметим, что алгебра D_2 (коммутативная, ассоциативная и с единицей) имеет точное матричное представление, матрицы которого имеют вид $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$, где $a, b \in \mathbf{R}$. Интересно также отметить, что в отличие от поля $\mathbf{R}$, группа автоморфизмов которого тривиальна, и поля комплексных чисел $\mathbf{C}$, группа автоморфизмов которого изоморфна $\mathbf{Z_2}$ (с единственным нетривиальным автоморфизмом — комплексным сопряжением), алгебра D_2 имеет одномерную группу автоморфизмов — она состоит из преобразований вида $a + \epsilon b \to a + \epsilon\alpha b$ при произвольных ненулевых $\alpha \in \mathbf{R}$.

Положим $\tilde{\Phi} = \Phi \otimes D_2$ — это тензорное произведение алгебр Φ и D_2. Можно записать элементы $\tilde{\Phi}$ в виде $a + \epsilon b$, где $a, b \in \Phi$. Операция коммутирования в алгебре $\tilde{\Phi}$ задается естественным образом (коммутирование по первому и умножение по второму тензорному сомножителям), при этом получаем структуру алгебры Ли. Фактически $\tilde{\Phi}$ можно рассматривать как полупрямую сумму $\Phi +_{ad} \Phi$ подалгебры, изоморфной Φ, и абелева идеала, соответствующее присоединенному действию ad алгебры Ли Φ на себе как на векторном пространстве. Ясно, что если Φ — алгебра Ли векторных полей, то мы такой конструкцией получаем приближенную алгебру Ли из предыдущей конструкции.

Эту конструкцию можно обобщать. Например, рассмотрим алгебру вида $D_p = \mathbf{R}[\epsilon]/ < \epsilon^{\mathbf{p}} >$, где $\mathbf{R}[\epsilon]$ — алгебра полиномов от ϵ, а $< \epsilon^p >$ — идеал, порожденный элементом ϵ^p. Получаем ассоциативную и коммутативную алгебру с единицей размерности p над $\mathbf{R}$, она иногда называется алгеброй плюральных чисел. При $p = 2$ эта алгебра уже была введена выше. Рассмотрим теперь тензорное произведение $\Phi \otimes D_p$ с естественной операцией коммутирования — полученную алгебру Ли можно рассматривать как приближенную алгебру Ли при использовании приближений порядка p с помощью $o(\epsilon^p)$. Она представляется в виде полупрямой суммы подалгебры, изоморфной Φ и нильпотентного идеала вида $\epsilon\Phi + \epsilon^2 \cdot \Phi \cdots + \epsilon^{p-1} \cdot \Phi$.

2. О симметриях уравнений

Приступим к более подробному изучению приближенных симметрий уравнений. Основная наша цель — построение геометрического подхода и методики изучения приближенных групп симметрий дифференциальных уравнений (ОДУ и УРЧП). Начнем же с приближенного решения самих уравнений. Будем вести рассмотрение на простейшем примере — рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка и задачу Коши для него на некотором отрезке (a, b):

$$u' = F(x, u, \epsilon)$$

$$u|_{x=x_0} = u^0.$$

Здесь $u(x)$ — неизвестная функция. Уравнение при $\epsilon = 0$ будем называть точным.

Рассмотрим группу Diff (бесконечномерную группу Ли) локальных диффеоморфизмов интервала изменения переменной x (окрестности точки x_0). Она действует на искомые функции u и на дифференциальное уравнение в целом. Стационарные подгруппы этого действия при каждом ϵ — это и есть группы (локальные) Ли симметрий рассматриваемых дифференциальных уравнений при данных ϵ. Предположим для простоты, что эти группы симметрий конечномерны (так бывает довольно часто для важных и интересных дифференциальных уравнений). Тогда, как известно, при малых значениях ϵ размерность (конечная!) стационарной подгруппы не больше, чем у стационарной подгруппы при $\epsilon = 0$ (т.е. при деформации «точки» размерность ее стационарной подгруппы не возрастает). Это явление при изучении симметрий дифференциальных уравнений изучается очень подробно. Если размерность группы симметрий при малых ϵ постоянна, то говорят об устойчивых симметриях и о возможности продолжения симметрии уравнения, соответствующего $\epsilon = 0$ (т.е. точного уравнения). Если же размерность группы симметрий при малых $\epsilon \neq 0$ падает, то говорят, что некоторые симметрии точного уравнения не допускают продолжения, и потому даже для точного уравнения их можно и не рассматривать (т.е. они неустойчиво зависят от параметра). Полезно отметить, что свойство устойчивости группы симметрий для разных, хотя и близких между собой, уравнений может проявляться по-разному. Подчеркнем, что выше речь шла о группах симметрий, понимаемых в обычном (точном) смысле этого слова. На самом деле рассматриваются и приближенные симметрии, к которым указанные выше соображения о размерности стационарных подгрупп напрямую применять пока не получается. Так что приведенные выше соображения о характере изменения размерности групп симметрий следует понимать в основном как наводящие соображения.

Для изучения дифференциальных уравнений, зависящих от параметра, и нахождения приближенных групп Ли их симметрий было предложено два метода (имеющих довольно точные географические локализации).

Один из них (развиваемый изначально в уфимской математической школе) основан на линеаризации уравнений и дифференциальных операторов симметрии (через рассмотрение их с точностью до $o(\epsilon)$; иногда используются и приближения более высоких порядков). Здесь возникают принципиально новые математические объекты, которые были названы приближенными группами преобразований (с соответствующими им приближенными алгебрами Ли). Были доказаны (копируя классические доказательства в «точном» случае) аналог точной теоремы Коши о существовании приближенного решения для приближенной задачи Коши и другие аналоги классических результатов. Активно изучаются приближенные симметрии получающихся приближенных уравнений.

Второй метод был создан в киевской математической школе, и он более классичен — рассматривается разложение неизвестной функции по параметру. У получившегося приближенного уравнения рассматриваются точные (классические) симметрии.

При применении двух этих методов к конкретным уравнениям они довольно часто дают различные результаты. Имеется несколько работ (например [6]), в которых на целом ряде дифференциальных уравнений из различных разделов физики и механики, для которых можно вычислить точные группы симметрий при произвольных значениях параметра, выясняется, какой из этих двух методов дает более точные результаты. В [6] отдается предпочтение второму методу, который, однако, в целом получил среди специалистов меньшее распространение. При этом следует отметить, что группы симметрий дифференциальных уравнений — весьма тонкий объект, и многое зависит от природы изучаемого уравнения и от выбора малого параметра. Поэтому «статистический анализ» при сравнении эффективности двух указанных методов представляется не очень уместным.

Как уже было отмечено выше, в данной статье мы будет изучать именно первый метод и те новые математические объекты, которые с ним связаны (второй метод в этом смысле намного беднее).

3. Приближенные и дуальные алгебры Ли

Выше было отмечено, что можно ввести понятие приближенной алгебры Ли векторных полей — здесь обычные условия, задающие алгебры Ли, заменяются на их приближенные аналоги. Но более естественно перейти к более общим конструкциям, что мы и сделаем.

Приближенными алгебрами Ли мы назовем поначалу алгебры Ли вида $L \otimes D_2$ — тензорные произведения обычных алгебр Ли L и двумерной алгебры $D_2 =< 1, \epsilon >$ (алгебры дуальных чисел). Отметим, что такие алгебры Ли можно рассматривать и как D_2-модули. Более того, приближенные алгебры Ли симметрий приближенных дифференциальных уравнений тоже имеют структуру D_2-модулей. Это следует из такого простого факта: если векторное поле X является инфинитезимальной симметрией дифференциального уравнения, то и векторное поле ϵX — тоже. Тем самым алгебра Ли инфинитезимальных симметрий инвариантна относительно умножений на элементы алгебры D_2.

Кроме алгебр Ли вида $L \otimes D_2$, можно (и нужно!) рассматривать и их подалгебры. Но если мы интересуется алгебрами Ли приближенных симметрий, то естественно рассматривать только такие подалгебры, которые являются D_2-модулями. Именно их и имеет смысл называть приближенными алгебрами Ли (в том понимании, какое возникает при изучении приближенных дифференциальных уравнений и их симметрий). Тем самым мы приходим к необходимости рассматривать класс всех алгебр Ли, определенных над D_2. Их мы и будем называть приближенными алгебрами Ли. Итак, вот окончательное определение:

Определение 1. *Приближенная алгебра Ли — это алгебра Ли над алгеброй D_2 дуальных чисел. Другими словами, это алгебра Ли, которая дополнительно обладает структурой D_2-модуля, согласованной с операцией коммутирования.*

При этом структура D_2-модуля задается линейным оператором, соответствующим умножению на ϵ. Мы будем обозначать этот оператор через $\mathcal{E}$. Естественно изучать и соответствующие (инвариантные относительно $\mathcal{E}$) подалгебры Ли, идеалы, гомоморфизмы и т.п. Отметим, что как D_2-модуль алгебра Ли может быть и тривиальной (когда оператор $\mathcal{E}$ — нулевой). Тем самым обычные алгебры Ли, для которых как раз $\mathcal{E} = 0$, можно рассматривать и как D_2-алгебры Ли. Однако в дальнейшем мы будем в основном полагать, что $\mathcal{E} \neq 0$. Более того, иногда полезно рассматривать только «невырожденные» D_2-структуры, когда ранг оператора $\mathcal{E}$ равен половине размерности алгебры Ли (которая при этом предполагается, естественно, четномерной). Именно таковы алгебры Ли вида $L \otimes D_2$.

Под базисом D_2-алгебры Ли можно понимать минимальный набор векторов, порождающих эту алгебру Ли как D_2-модуль. Говоря другими словами, это такой минимальный набор векторов, которые вместе с их произведениями на ϵ порождают алгебру Ли как векторное пространство над $\mathbf{R}$. Такого рода базисы были введены в [4] и там они названы существенными. Отметим, что только для алгебр Ли над D_2 имеет смысл понятие существенного базиса. Число элементов в нем — это некоторый не совсем стандартный аналог размерности рассматриваемой алгебры Ли над D_2. Например, подалгебра Ли в

$L \otimes D_2$, порожденная элементом вида ϵX — одномерна над $\mathbf{R}$, а порожденная элементом $X \in L$ — двумерна.

В качестве примеров D_2-алгебр Ли можно брать алгебры Ли вида $L \otimes D_2$ для произвольных вещественных алгебр Ли. В частности, если алгебра Ли L линейна, то при тензорном умножении ее на D_2 просто матричные элементы этой алгебры Ли берутся лежащими в D_2 (с соответствующими алгебре Ли L соотношениями). Например, если $L = sl(n, \mathbf{R})$, то получаем алгебру Ли $sl(n, D_2)$, состоящую из матриц порядка n с элементами из D_2, причем след этих матриц равен 0. Отметим, что если алгебра Ли L полупроста, то $L \otimes D_2$ уже полупростой никогда не будет (все алгебры Ли вида $L \otimes D_2$ имеют ненулевой радикал).

4. Гладкие многообразия с D_2-структурой

Введя алгебры Ли над D_2, естественно на этом не остановиться и рассматривать гладкие многообразия, имеющие дополнительную D_2-структуру. Это позволит рассматривать приближенные дифференциальные уравнения и многие связанные с ними понятия (в частности, группы приближенных симметрий) более естественно, используя геометрические методы.

Отметим, что при изучении приближенных уравнений нам можно было бы и не выходить за пределы обычных многообразий, что и делалось до сих пор. Используя отношение $\approx$, можно ввести понятие приближенной алгебры Ли векторных полей — это будет такой набор векторных полей, который по модулю $o(\epsilon)$ замкнут относительно коммутирования и удовлетворяет обычным по форме аксиомам алгебры Ли, но выполненным по модулю $o(\epsilon)$. Но такой подход представляется искусственным, и мы его развивать далее не будем.

Переходим теперь к описанию понятия D_2-многообразий и связанных с ним понятий (касательные пространства, отображения, группы Ли и др.). Отметим, что соответствующие геометрические построения были подробно развиты в рамках дифференциальной геометрии в казанской математической школе [7].

Рассмотрим понятие многообразия над алгеброй дуальных чисел (аналогичны построения и над алгебрами плюральных чисел, но мы здесь на этом останавливаться не будем). Многообразия определяются по стандартной схеме — карты, диффеоморфные областям в D_2^n, склеиваются с помощью функций перехода, которые сохраняют D_2-структуру. Дадим более подробное описание.

Рассмотрим пространство D_2^n — это свободный D_2-модуль над алгеброй D_2, имеющий n образующих. Как векторное пространство над $\mathbf{R}$ он изоморфен $\mathbf{R^{2n}}$. Но, в отличие от пространства $\mathbf{R^{2n}}$, его элементы допускают умножение на элементы $a + \epsilon b$ дуальной алгебры D_2, что задает — например, с помощью оператора $\mathcal{E}$ — на нем D_2-структуру.

Гладкое отображение $f : U \to V$ области $U \subset D_2^n$ в область $V \subset D_2^m$ называется гладким D_2-отображением (иногда употребляют термины «голоморфное» или «аналитическое» отображение по аналогии с комплексным случаем), если его дифференциал сохраняет естественную D_2-структуру на касательных пространствах (отождествляемых с D_2^n и D_2^m соответственно). Другими словами, оператор умножения на ϵ должен быть перестановочен с дифференциалом.

Вкратце рассмотрим условие D_2-гладкости или «голоморфности» для функций одной переменной (в общем случае это — условия Шefферса, впервые изучившего гладкие отображения над алгебрами и которые являются аналогом условий Коши-Римана). Условие голоморфности для функции $F(z) = f(x, y) + \epsilon g(x, y)$ дуальной переменной $z = x + \epsilon y$ можно записать в виде условия на дифференциал, который имеет вид $dF = (A + \epsilon B) \cdot dz$ (где $A = A(z), B = B(z) \in \mathbf{R}$ при фиксированном значении аргумента z). Раскрывая скобки и приравнивая вещественные и «мнимые» части, получаем:

$$f'_x = A, g'_x = B, f'_y = 0, g'_y = A.$$

Отсюда следует, что $f(x,y) = \phi(x)$ — произвольная функция от x, а $g(x,y) = y \cdot \phi_x + \psi(x)$, где $\psi(x)$ — еще одна произвольная функция от x. Тем самым получаем общий вид D_2-гладких функций одной переменной

$$F(x+\epsilon y) = \phi(x) + \epsilon(y \cdot \phi_x + \psi(x)).$$

Отметим, что если $y = 0$, т.е. если аргумент вещественен, то значения D_2-гладкой функции имеют вид $F(x) = \phi(x) + \epsilon\psi(x)$, т.е. $F(x)$ является произвольной гладкой вектор-функцией от x. Отсюда следует, что функция дуального аргумента однозначно определяется своими значениями при вещественных значениях аргумента. Если рассматривать $F(x+\epsilon y)$ как вектор-функцию двух переменных, то ее матрица Якоби имеет вид

$$\begin{pmatrix} \phi'(x) & 0 \\ y\phi'(x)+\psi'(x) & \phi'(x) \end{pmatrix}.$$

Ясно, что эта матрица перестановочна с матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ оператора $\mathcal{E}$ на $\mathbf{R^2}$, что соответствует определению дифференцируемой функции дуального аргумента.

Так как в качестве компонент D_2-гладкой функции могут фигурировать произвольные гладкие вещественные функции, то ясно, что D_2-гладкие функции далеко не всегда будут иметь разложения в степенные ряды (которые можно ввести, используя понятие мультипликативной нормы на D_2, указанной ниже). Поэтому название «голоморфные» для D_2-функций представляется не очень удачным, так как оно по ассоциации с ТФКП наводит на мысль об аналитичности, которой в D_2-ситуации может и не быть.

Аналогично можно вывести и общий вид D_2-гладких функций нескольких переменных; об этом можно прочесть, например, в [7].

Отметим, что с помощью разложения по формуле Тейлора можно строить — причем совершенно естественно — продолжение обычных гладких функций в дуальную область значений аргумента. Для функции $u(x)$ такое продолжение будем обозначать $\tilde{u}(\tilde{x})$. Напомним, что рассмотрение выражений вида $\bar{a} + \omega\bar{a}^0$, где $\bar{a}, \bar{a}^0$ — трехмерные векторы, а ω — символ, для которого $\omega^2 = 0$ используется в механике как объект винтового исчисления (см.[5]). Именно из винтового исчисления были позаимствованы и многие формулы при изучении функций дуального аргумента.

Переходим теперь непосредственно к определению D_2-многообразий. Топологическое пространство M называется гладким D_2-многообразием, если оно хаусдорфово, удовлетворяет 2-й аксиоме счетности и имеет атлас с картами в D_2^n, функции перехода которого являются D_2-гладкими функциями. Но можно подойти и по-другому: пусть M — обычное четномерное гладкое многообразие. Оно называется D_2-многообразием (или многообразием, имеющем D_2-структуру), если для некоторого его атласа (набора карт) соответствующие функции перехода являются D_2-гладкими. Так или иначе, для D_2-многообразий их касательные пространства имеют D_2-структуру. Отображения в этой категории — это гладкие отображения, сохраняющие D_2-структуру (в частности, дифференциалы которых являются D_2-отображениями). Используя понятие оператора $\mathcal{E}$, соответствующего D_2-структуре, условие гладкости отображения $f : M \to N$ записываем в виде $df(\mathcal{E}_M) = \mathcal{E}_N(df)$.

Отметим, что для произвольного гладкого D_2-многообразия M пространство $T(M)$ его касательного расслоения (о касательных векторах см. ниже) имеет естественную D_2-структуру (подробнее о D_p-структурах на касательных пространств высших порядков см. например [7]). В частности, D_2-многообразие можно рассматривать как гладкое многообразие, моделью для которого служит касательное расслоение над произвольным евклидовым пространством.

Отметим также, что для задании D_2-топологии мы можем пользоваться обычной метрикой в евклидовом пространстве. Однако далее нам потребуется существование на D_2

мультипликативной нормы. Сам факт существования мультипликативной нормы доказан, как известно, для произвольных банаховых алгебр и потому верен и для двумерной алгебры D_2. Однако нам будет удобно иметь в своем распоряжении мультипликативную норму на D_2, заданную явно.

Для произвольного дуального числа $a + \epsilon b$ положим $\|a + \epsilon b\| = \frac{1}{3}\max(\mid a \mid, \mid b \mid)$.

Лемма 1. *Норма* $\|a+\epsilon b\| = \frac{1}{3}max(\mid a \mid, \mid b \mid)$ *на* D_2 *является мультипликативной, т.е.* $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ *для любых* $x, y \in D_2$.

Доказательство. Пусть $x = a + \epsilon b$, $y = a' + \epsilon a'$. Тогда $xy = aa' + \epsilon(ab' + a'b)$. Но тогда $\|xy\| = \frac{1}{3}\max(\mid aa' \mid, \mid ab' + a'b \mid)$. Числа $\mid a \mid, \mid b \mid$ не превосходят $\max(\mid a \mid, \mid b \mid)$, аналогично для a', b'. Поэтому $\frac{1}{3}\max(\mid aa' \mid, \mid ab' + a'b \mid \leq \frac{1}{3} \cdot 3\|x\|\|y\|$, тем самым $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$. □

С помощью указанной нормы можно построить «стандартное» дифференциальное исчисление для функций над D_2. Вводятся понятие предела (по норме), производной, неопределенного и определенного интегралов (последний – как предел интегральных сумм). Все привычные свойства сохраняются. Далее, вводятся функциональные ряды, степенные ряды и т.д. Далее здесь мы не будем далее развивать эти перспективы, однако в другом месте они будут нами использованы.

Мы привели стандартное определение многообразия над алгеброй D_2. Соответствующую D_2-структуру будем называть невырожденной. Но оказывается, что естественно рассматривать и более общий случай. Это необходимо, например, при рассмотрении фактор-пространств групп Ли и однородных пространств. При этом можно использовать понятие ϵ-структуры на многообразии — так будем называть поле линейных операторов в касательных пространствах (некоторые геометры предпочитают говорить о поле аффиноров) на многообразии, квадрат которых равен нулю. Тем самым задается и поле P образов этих операторов, а также поле их ядер — мы получаем два распределения на многообразии. При этом возникает вопрос об интегрируемости этих распределений, на чем мы здесь подробно останавливаться не будем.

Наличие на многообразии M D_2-структуры эквивалентно тому, что на M существует такой атлас, на картах которого линейный оператор $\mathcal{E}$ в касательных пространствах, введенный выше, имеет постоянные матрицы. Образы этих линейных операторов $\mathcal{E}$ дают нам распределение (половинной размерности в невырожденном случае) на D_2-многообразии, которое (в силу самого определения D_2-многообразия) интегрируемо и тем самым определяет слоение (называемое обычно каноническим). При этом все D_2-диффеоморфизмы (т.е. взаимно однозначные и взаимно D_2-гладкие отображения) сохраняют это слоение. Оно является важным инвариантом в категории D_2-многообразий.

Под D_2-гладкой кривой на многообразии M понимается D_2-гладкое отображение $\gamma : U \to M$, где $U \subset D_2$ — некоторое открытое подмножество в D_2 (можно в качестве U брать некоторый круг относительно введенной выше нормы).

Естественным образом вводится понятие касательного вектора – например, определяя их как дифференцирования ростков D_2-гладких функций в данной точке или через отношение эквивалентности D_2-кривых в данной точке. Получаем касательное пространство $T_x(M)$. которое естественным образом имеет структуру свободного D_2-модуля.

Естественным образом на D_2-многообразии определяются далее D_2-дифференциальные формы и другие объекты из стандартного набора дифференциальной геометрии. Напомним, что при этом умножение на $\epsilon \in D_2$ в касательном пространстве мы рассматриваем как линейный оператор $\mathcal{E}$.

Далее, естественно вводится касательное расслоение произвольного D_2-многообразия M (которое можно рассматривать и как касательное расслоение многообразия M, если игнорировать его D_2-структуру). Тогда D_2-векторным полем на M называется D_2-гладкое сечение этого расслоения. Множество всех D_2-векторных полей на многообразии образует алгебру Ли над D_2. Произвольные D_2-векторные поля на многообразии M можно рассматривать как инфинитезимальные преобразования этого многообразия, сохраняющие на нем D_2-структуру.

5. О дифференциальных уравнениях с дуальным аргументом

Здесь мы рассмотрим вопрос о задаче Коши в D_2-случае.

Теорема 1. *Пусть функция $f(\tilde{x}, \tilde{u})$ является D_2-гладкой в некоторой окрестности точки $(\tilde{x}_0, \tilde{u}^0)$. Тогда задача Коши*

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}} = f(\tilde{x}, \tilde{u})$$

$$\tilde{u}|_{\tilde{x}=\tilde{x}_0} = \tilde{u}^0$$

имеет решение в некоторой окрестности точки $\tilde{x}_0$, причем единственное.

Доказательство
Задача Коши может быть переписана в следующем виде:

$$\tilde{u}(\tilde{x}) = \tilde{u}_0 + \int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}} f(\tilde{x}, \tilde{u}) dx.$$

Это соотношение рассматривается в D_2-области, о понятии интеграла в которой уже было сказано выше. Далее можно следовать, например, схеме доказательства из книги В.И. Арнольда [8], которое основано на отображении Пикара и применении процесса итераций (или, что здесь одно и то же, теоремы о неподвижной точке). Все рассуждения из этой книги автоматически переносятся в нашу ситуацию, если только вместо абсолютной величины числа использовать введенную выше мультипликативную норму для дуальных чисел. Нет необходимости полностью воспроизводить здесь все рассуждения из [8].

Можно продолжить изучение дифференциальных уравнений дуального аргумента, следуя, например, тому, как это сделано в книге [8] для вещественного аргумента. Вот несколько результатов такого рода. Доказательства их здесь не приводятся, так как они буквально копируют доказательства из [8] (с заменой абсолютной величины вещественного числа на норму дуального числа).

Теорема 2. *(о зависимости от параметра) Для любой D_2-гладкой функции $f(x, u, \alpha)$ задача Коши, непрерывно зависящая от параметра α (не обязательного малого)*

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}} = f(\tilde{x}, \tilde{u}, \alpha)$$

$$\tilde{u}|_{\tilde{x}=x_0} = \tilde{u}_0(\alpha)$$

в некоторой окрестности точки $\tilde{x}_0$ имеет, причем единственное, решение, гладко зависящее от параметра α.

Если исходные данные задачи Коши гладко зависят от параметра α, то и решение этой задачи Коши тоже гладко зависит от указанного параметра.

Справедлива, конечно, и теорема о зависимости (непрерывной, гладкой) решения задачи Коши от начальных условий (которые можно рассматривать и как параметры).

Справедливы также и теорема о максимальном продолжении решений (вплоть до границы области, где задано уравнение). Доказательство основано на Теореме 1, в силу которого решение существует в окрестности каждой допустимой областью определения точке. Затем берется объединение всех таких окрестностей и выделяется связная его компонента, содержащая точку, заданную начальным условием задачи Коши. Решение в этой области является, очевидно, максимально продолженным.

Верен, конечно, и тот факт, что для линейного дифференциального уравнения решения определены там, где определены правые части уравнений. Другими словами, практически все утверждения классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений почти автоматически в рамках изложенного выше геометрического подхода переносятся на случай приближенных уравнений и их приближенных решений. Так же автоматически получаем и критерий приближенной инвариантности уравнений, сформулированный выше.

6. О D_2-теории Ли

Следующий наш шаг — введение понятия D_2-групп Ли. Группы Ли G над D_2 — это такие группы Ли, которые имеют D_2-структуру на группе Ли G как на многообразии и на отображениях, входящих в стандартное определение группы Ли (т.е. отображение группового умножения и отображение обратного элемента должны быть D_2-гладкими). Касательное пространство D_2-группы Ли в единичном ее элементе естественным образом имеет структуру D_2-алгебры Ли (т.е. алгебры Ли, являющейся D_2-модулем, о чем уже было сказано выше). Наконец, естественным стандартным образом определяется понятие D_2-действия D_2-группы Ли на D_2-многообразии. Это действие задается D_2-гладким отображением $G \times M \to M$ при условии выполнения обычных соотношений, задающих действие группы на множестве. В частности, мы имеем стандартное определение однопараметрической подгруппы в категории D_2-объектов (причем параметр подгруппы принимает значения из D_2, хотя иногда можно ограничиться и одними только вещественными значениями параметра).

Если на D_2-многообразии задана D_2-гладкая однопараметрическая группа преобразований, то касательные векторы ее орбит дают нам D_2-векторное поле (поле скоростей). Докажем, что верно и обратное — векторному полю на D_2-многообразии M соответствует локальная однопараметрическая (над D_2 и двумерная над $\mathbf{R}$) группа преобразований этого многообразия M. Это даст нам аналог классической теоремы С. Ли:

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{X}(z)$ – гладкое D_2-векторное поле, заданное в некотором открытом подмножестве $U \subset D_2^n$. Тогда существует локальная однопараметрическая группа преобразований некоторого открытого подмножества $W \subset D_2^n$, для которой соответствующее касательное векторное поле совпадает с $\mathcal{X}$.*

Если же $\mathcal{X}$ – векторное поле на компактном D_2-многообразии M, то ему соответствует однопараметрическая группа преобразований многообразия M.

Доказательство получается стандартным процессом интегрирования соответствующего дифференциального уравнения (отметим, что параметр в этом уравнении пробегает алгебру D_2 или некоторое открытое подмножество в ней). Основой в локальном случае является теорема о существовании и единственности решения задачи Коши (см.§5 выше). Что касается глобального случая, то здесь с учетом уже рассмотренного локального случая применимы стандартные рассуждения, используемые в классической теории Ли.

Далее, стандартными рассуждением можно доказать, что, как и в классическом случае, в категории D_2-групп и алгебр Ли имеет место соответствие D_2-подалгебр Ли и D_2-подгрупп Ли (локальных). Мы не будем стараться описать в данной статье все множество возможностей, которые возникают при рассмотрении категории D_2-групп Ли и связанных с ними объектов. Поэтому мы ограничиваемся только перечислением некоторых важных шагов на пути изучения этих довольно новых объектов.

Естественно рассматриваются замкнутые D_2-подгруппы Ли $H \subset G$ и соответствующие им однородные пространства. Но фактор-пространство G/H далеко не всегда обладает естественной D_2-структурой, Точнее, оно обладает некоторой ϵ-структурой (которая переносится с помощью экспоненциального отображения), которая индуцируется естественной D_2-структуры на фактор-пространстве соответствующих алгебр Ли, индуцированной оператором $\mathcal{E}$. При этом получается не обязательно невырожденная D_2-структура, именно поэтому нам приходится рассматривать и вырожденные D_2-структуры на многообразиях. Например, пусть H — связная подгруппа Ли некоторой D_2-группы Ли, соответствующая абелевой подалгебре Ли $Im\mathcal{E}$ (подробнее об этой подалгебре Ли говорится в другой статье автора), и пусть эта подгруппа замкнута (так будет, например, если G — односвязная нильпотентная группа Ли). Тогда на фактор-пространстве G/H индуцируется тривиальная D_2-структура (для которой оператор $\mathcal{E}$ нулевой). При этом на самой подгруппе Ли H тоже D_2-структура тривиальна. Но если на некоторой замкнутой подгруппе Ли F индуцируется невырожденная D_2-структура (что бывает не очень часто), то на фактор-пространстве G/F мы все же получаем полноценную невырожденную D_2-структуру.

7. О приближенных дифференциальных уравнениях

Данные выше определения позволят нам переформулировать, следуя указанному выше принципу А. Гротендика, методику анализа дифференциальных уравнений с параметром в терминах приближенности и $o(\epsilon)$ в новом, более естественном, геометрическом оформлении. Более того, мы получаем обоснование принципа соответствия, сформулированного в самом начале статьи. Конкретизируем теперь эту методику.

Пусть задано некоторое дифференциальное уравнение, зависящее от параметра:

$$\frac{du}{dx} = f(x, u, \epsilon)$$

и некоторое начальное условие:

$u|_{x=x_0} = u^0(\epsilon)$

В принципе, даже независимую переменную можно было бы предполагать зависящей от того же параметра ϵ (см. ниже). Мы не будем вдаваться здесь в другие возможные обобщения.

Будем функцию f и решение u рассматривать с точностью до $o(\epsilon)$. В [1] и последующих работах был изложен метод вычисление приближенных решений и групп симметрии соответствующих дифференциальных уравнений.

Рассмотрим этот метод для указанного выше уравнения. Положим $u(x, \epsilon) \approx u_0(x) + \epsilon u_1(x)$— это будет приближенная неизвестная функция. Далее, имеем:

$$f(x, u, \epsilon) \approx f_0(x, u_0(x) + \epsilon u_1(x)) + \epsilon f_1(x, u_0(x) + \epsilon u_1(x)).$$

Преобразуя это выражение по модулю $o(\epsilon)$, получим приближенное дифференциальное уравнение:

$$u_0'(x) + \epsilon u_1'(x) = f_0(x, u_0(x)) + \epsilon (f_0)_u'(x, u_0(x)) u_1(x) + \epsilon f_1(x, u_0(x)) + 0.$$

Приравнивая подобные члены (относительно ϵ), получаем систему уравнений:

$$u_0' = f_0(x, u_0(x))$$

$$u_1'(x) = (f_0)_u'(x, u_0(x)))u_1(x) + f_1(x, u_0(x)).$$

Первое уравнение — это исходное точное уравнение (соответствующее параметру $\epsilon = 0$).

Второе уравнение решается уже в предположении, что из первого уравнения функция $u_0(x)$ найдена. В результате получаем приближенное решение

$$u(x) \approx u_0(x) + \epsilon u_1(x).$$

Учет начального условия в задаче Коши делается стандартным способом, и потому мы на этом останавливаться не будем.

Далее находятся симметрии рассматриваемого нами дифференциального уравнения с параметром ϵ. Для этого используются «приближенные» векторные поля

$$\mathcal{X}(x,\epsilon) \approx \mathcal{X}_0(x) + \epsilon \mathcal{X}_1(x).$$

Условие приближенной инвариантности дифференциального уравнения имеет вид

$$\mathcal{X}(x,\epsilon) \cdot f(x, u(x)) \approx 0.$$

Применяя тот же метод, что при решении выше дифференциального уравнения, можно получить метод последовательного нахождения векторных полей (точнее, их компонент) $\mathcal{X}_0$ и $\mathcal{X}_1$. Этим мы вкратце изложили метод, впервые предложенный в [1].

А вот теперь мы рассмотрим модификацию этого метода, используя изложенные выше геометрические конструкции. Мы получим более короткий, концептуальный подход.

От уравнения $u' = f(x, u, \epsilon)$ перейдем к его дуальному продолжению:

$$\tilde{u}' = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{u}).$$

Начальное условие запишем в виде

$$\tilde{u}|_{x=x_0} = \tilde{u}^0 = u_0^0 + \epsilon u_1^0.$$

Объекты с тильдой можно рассматривать как точные на многообразии над алгеброй D_2. Здесь «приближенное» дифференциальное уравнение уже записывается как точное. То же касается и задачи Коши. Поэтому, применяя к многообразию над D_2 классические результаты о дифференциальных уравнениях, приходим к концептуальному доказательству основных общих результатов теории приближенных решений дифференциальных уравнений. В частности, доказана:

Теорема 3. *(о существовании и единственности решения задачи Коши)*
Для любой гладкой функции $f(x, u, \epsilon)$ и гладкой функции $u_0(\epsilon)$ задача Коши

$$u' = f(x, u, \epsilon)$$

$$u|_{x=x_0} = u_0(\epsilon)$$

всегда имеет в некоторой окрестности точки x_0 приближенное решение, причем единственное.

Напомним, что приближенное решение – это такая функция, которая с точностью до $o(\epsilon)$ дает решение исходного дифференциального уравнения с малым параметром.

Точно так же получаем и другие утверждения о приближенных решениях дифференциальных уравнений. В [1] и подобных статьях соответствующие утверждения сопровождались доказательства (копирующими классические, но все равно необходимыми). При нашем же подходе нужда проводить такие доказательства часто отпадает. Результаты сразу следуют их стандартных (не приближенных) утверждений, хотя и примененных к отличным от исходных многообразиям и другим D_2-объектам.

До сих пор мы находились в пределах уже подробно разработанной ранее теории работы с приближенными решениями и симметриями. Нами была только дана их геометрическая интерпретация. Выйдем теперь за эти пределы и переместимся в намного менее разработанную область. При изучении дифференциальных уравнений предлагается перейти к дуальным (в нашей терминологии) значениям не только для уравнения и неизвестной функции, но и для независимой переменной. Другими словами, полностью перейти в категории объектов над дуальными числами.

Отметим, что идея варьировать и зависимую переменную встречалась и раньше, но в другой ситуации. Например, в [9] дается обобщение метода из [1], в котором по параметру раскладывают и зависимую и независимую переменные. Мы рассматриваем еще одно обобщение метода из [1].

Мы опишем построенный на основе введенных выше геометрических конструкции некоторый новый метод.

Здесь линеаризации подвергаются не только уравнение (при нахождении приближенных его решений) и дифференциальный оператор — инфинитезимальный оператор симметрии уравнения, но и все остальные величины, входящие в уравнение — независимые и зависимые переменные. При этом возникают дополнительные функциональные параметры, которые можно использовать для упрощения процесса вычислений (обращая с их помощью в нуль некоторые слагаемые).

Рассмотрим этот обобщенный метод на простом примере. Пусть дана задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, зависящая от малого параметра ϵ:

$$\frac{du}{dx} = f(x, u, \epsilon),$$

$$u|_{x=x_0} = u^0(\epsilon).$$

Рассмотрения будем вести с точностью до $o(\epsilon)$.

Используя ϵ-продолжение гладких функций, уже упоминавшееся выше, исходное дифференциальное уравнение перепишем в виде уравнения для D_2-функции относительно D_2-переменной с D_2-аналитической правой частью:

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}} = f(\tilde{x}, \tilde{u}),$$

$$\tilde{u}|_{\tilde{x}=\tilde{x}_0} = \tilde{u}^0.$$

Применяя к этому D_2-уравнению известные методы теории дифференциальных уравнений, разработанные для вещественной и комплексной областей, мы будем получать новые результаты, касающиеся приближенных решений. Однако нужно отметить, что при этом мы фактически вводим две независимые переменные x, y ($\tilde{x} = x + \epsilon y$) и нужно (подробнее см. ниже) указать связь между ними (заметим, например, что в выражение для $\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}}$ входит $\frac{dy}{dx}$). Выбор указанной связи – это отдельный шаг описанного метода.

Покажем, как можно вычислять производную $\frac{du}{dz}$ функции дуального аргумента $z = x + \epsilon y$. Здесь нам понадобится формула для деления дуальных чисел. Отметим, что деление это удается провести не всегда.

Имеем $\frac{1}{a+\epsilon b} = \frac{1}{a}(1 - \epsilon\frac{b}{a})$ (проверяется, например, прямым вычислением). При $a \neq 0$ такое деление возможно и однозначно. Рассмотрим теперь производную $\frac{du}{dz} = \frac{du}{dx+\epsilon dy}$. Используя приведенную выше формулу для обратного числа, получим $\frac{du}{dz} = \frac{du}{dx}(1 - \epsilon\frac{dy}{dx})$. Если мы зададим $y = p(x)$ как функцию x, то получим формулу $u' = u' - \epsilon p' u'$, где штрих означает производную по x. Развитие и использование указанного нового метода мы предоставляем специалистам в этой области.

В заключение отметим, что переход к дуальным числам при решении и исследовании уравнений с малым параметром заметно упрощает даже самые рутинные вычисления. Например, пусть нам нужно решить такую задачу Коши для линейного ОДУ второго порядка:

$$u'' = (1 + \epsilon)u - 2\epsilon$$

$$u|_{x=0} = 1 - 2\epsilon, u'|_{x=0} = \epsilon$$

Будем решать его в D_2-области. На самом деле нечто подобное можно делать и с использованием символа $o(\epsilon)$, но при этом приходится постоянно следить за корректностью проводимых упрощений формул. В дуальной области корректность достигается автоматически. Нужно только использовать несколько простых формул: $e^{a+\epsilon b} = e^a(1+\epsilon b)$, $\sin(a+\epsilon b) = \sin(a) + \epsilon b \cdot \cos(a), (1+\epsilon)^d = 1+\epsilon d$ и т.п. В частности, решая приведенную выше задачу, для характеристических корней соответствующего однородного уравнения получим выражения $\lambda_{1,2} = \pm(1+\epsilon/2)$. Далее, для общего решения однородного уравнения получим (используя приведенную выше формулу для экспоненты):

$$U_0 = C_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{\epsilon}{2}(C_1 e^x - C_2 e^{-x}).$$

Методом подбора частного решения для нашей простой правой части находим частное решение $u^* = 2\epsilon$, а затем и общее решение нашего дифференциального уравнения. Все вычисления — чисто арифметические. Наконец, два начальных условия дают "точные"в дуальной области, но приближенные в содержательной интерпретации выражения для решения поставленной задачи Коши ($C_1 = \frac{1-\epsilon}{2}, C_2 = \frac{1-3\epsilon}{2}$). По аналогичной схеме можно рассмотреть и множество других примеров, в том числе и тех, которые были рассмотрены в многочисленных статьях, посвященных решению приближенных дифференциальных уравнений. Также подобными вычислениями решаются многие задачи по вычислению симметрий дифференциальных уравнений. При этом, рассматривая случаи $\epsilon = 0$ и $\epsilon \to 0$, выделяются симметрии, которые разрушаются при ненулевых значениях параметра ϵ. Но мы не будем входить здесь в соответствующие подробности, так как целью данной статьи было не проведение новых вычислений, а выработка нового, геометрического подхода к таким вычислениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. *Приближенные симметрии* // Мат. сборник. Т. 136. 1988. С. 436–450.
2. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. *Методы возмущений в групповом анализе* Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. Т. 34. 1989. С. 85–147.
3. N.H. Ibragimov *CRC handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol.3:New trends in theoretical development and computational methods*, CRC Press, FL. 1996.
4. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. *Приближенные группы преобразований* // Дифференциальные уравнения. Т. 29. 1993. С. 1712–1732.
5. Дименберг В.Ф. *Винтовое исчисление.* М.: Наука. 1965.
6. M. Pakdemirli, M. Yurusoi, I.T. Dolarci *Comparison of Approximate Symmetry Methods for Differential Equations* // Acta Appl. Math. V. 80. 2004. C. 243–271.
7. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. *Пространства над алгебрами.* Казань : Изд-во КГУ. 1985.
8. Арнольд В.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Ред. журнала «Регулярная и хаотическая механика». 2000.
9. Z.-Y. Zhang, X.-L. Yong, Y.-F. Chen *A new method to obtain approximate symmetry of nonlinear evolution equation from perturbations* // Chinese Phisics, B. V. V. 18. 2009. P. 2629–2633.

Владимир Витальевич Горбацевич,
И-626 Проспект Мира, д. 116А, кв. 68,
129626, Москва, Россия
E-mail: vgorvich@yandex.ru