ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. т 2 (2017). С. 25-39.

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА И ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ

Ж.А. БАЛКИЗОВ

Аннотация. В работе исследован аналог задачи Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего слагаемые с младшими производными. При определенных условиях на заданные функции и параметры, входящие в рассматриваемое уравнение, доказана теорема о существовании и единственности решения исследуемой задачи. Единственность решения задачи доказана с использованием обобщенного метода Трикоми, существование – методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: Вырождающееся гиперболическое уравнение, уравнение с кратными характеристиками, уравнение параболо-гиперболического типа третьего порядка, первая краевая задача, аналог задачи Трикоми, метод Трикоми, интегральное уравнение Вольтерра второго рода, интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

Mathematics Subject Classification: 35M12

1. Введение

На евклидовой плоскости независимых переменных x и y рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases}(-y)^m\,u_{xx}-u_{yy}+a(-y)^{(m-2)/2}u_x, & y<0,\\ u_{xxx}-u_y+\sum\limits_{i=0}^{2}a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i}, & y>0,\end{cases} \tag{1.1}$$

где $a_i(x,y)$, $i=\overline{0,2}$ – заданные функции; a, m – заданные числа, причем $m>0$, $|a|\le m/2$; $u=u(x,y)$ – искомая функция.

Через Ω обозначим область, ограниченную при $y<0$ характеристиками $AC: x-\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=0$ и $CB: x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=r$ уравнения (1.1), выходящими из точек $A=(0,0)$, $B=(r,0)$, пересекающимися в точке $C=(r/2,y_c)$, $y_c<0$, а также прямоугольником с вершинами в точках A, B, $A_0=(0,h)$ и $B_0=(r,h)$, $h>0$, при $y>0$; $\Omega_1=\Omega\cap\{y<0\}$, $\Omega_2=\Omega\cap\{y>0\}$, $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup J$, где $J=\{(x,0):0<x<r\}$ – интервал AB прямой $y=0$.

Уравнение (1.1) при $y<0$ совпадает с вырождающимся гиперболическим уравнением

$$(-y)^m\,u_{xx}-u_{yy}+a\;(-y)^{(m-2)/2}\;u_x=0, \tag{1.2}$$

а при $y>0$ является уравнением третьего порядка вида

$$u_{xxx}-u_y+\sum_{i=0}^{2}a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i}=0. \tag{1.3}$$

Zh.A. Balkizov, Dirichlet boundary value problem for a third order parabolic-hyperbolic equation with degenerating type and order in the hyperbolicity domain.

Поступила 7 июля 2016 г.

Уравнение (1.2) является уравнением гиперболического типа с параболическим вырождением вдоль прямой $y = 0$. При $m = 2$ уравнение (1.2) переходит в уравнение Бицадзе-Лыкова [1, с. 37], [2], [3, с. 234], а при $a = 0$ из уравнения (1.2) приходим к уравнению Геллерстедта, которое, как показано в монографии [4, с. 234], находит применение в задаче определения формы прорези плотины. Частным случаем уравнения (1.2) также является уравнение Трикоми, являющееся теоретической основой околозвуковой газовой динамики [5, с. 38], [6, с. 280]. Исследованию первой и второй задач Дарбу для уравнения (1.2) посвящены работы [7]–[8]. В работе [9] исследован критерий непрерывности решения задачи Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения вида (1.2). Достаточно полная библиография по исследованию различных краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений имеется в монографиях [10]–[13].

Уравнение (1.3), которое в [14, с. 132] названо уравнением третьего порядка с кратными характеристиками, относится к уравнениям параболического типа [3, с. 72]. Изучение краевых задач для уравнения вида (1.3) началось с результатов работы [15], где методами теории потенциалов и интегрального преобразования Лапласа была изучена краевая задача, которая в настоящее время называется задачей Каттабрига. С помощью фундаментальных решений уравнения (1.3), полученных в [15], в [14, с. 132] построена функция Грина задачи Каттабрига для уравнения (1.3) и получены оценки фундаментальных решений и их производных различных порядков. Также с помощью функции Грина в [14, с. 135] построено решение задачи Каттабрига для уравнения (1.3) в замкнутом виде. Исследованию различных локальных и нелокальных краевых задач для уравнения (1.3) посвящены работы [16–18].

Уравнение (1) относится к классу уравнений параболо-гиперболического типа третьего порядка с вырождением порядка вдоль линии $y = 0$ изменения типа. На необходимость рассмотрения задачи сопряжения уравнений параболического и гиперболического типов впервые было указано в работе [19]. К задаче сопряжения уравнений параболического и гиперболического типов приводит изучение электрических колебаний в проводах. Такого рода задачи встречаются также при изучении движения жидкости в канале, окруженной пористой средой, в теории распространения электромагнитных полей и в ряде других областей физики.

На важность исследования краевых задач для уравнений смешанного типа высших порядков было указано в работе [20, с. 117], а в работе [21] отмечено, что наличие вырождения порядка вдоль линии изменения типа вносит новый аспект в теорию уравнений смешанного типа. Об актуальности исследования корректных краевых задач для уравнений смешанного типа высшего порядка говорят и многочисленные публикации отечественных и зарубежных авторов по данному направлению. Так, для модельного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка с оператором Геллерстедта в области гиперболичности в работе [22] исследована нелокальная внутреннекраевая задача со смещением с операторами Сайго в граничных условиях, а в работе [23] исследована аналогичная задача для уравнения вида (1.1) с коэффициентом $a_2(x, y) \equiv 0$. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа третьего порядка с различными вырождающимися операторами в области гиперболичности изучены в работах [24]–[28].

В связи с выше изложенным возникает необходимость поиска корректно поставленных краевых задач, сформулированных одновременно для вырождающихся гиперболических уравнений и уравнений высших порядков с кратными характеристиками. В данной работе исследован аналог задачи Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка с вырождением типа и порядка в области его гиперболичности. Среди ранних работ, тесно примыкающих по тематике к данной статье, особо отметим работы [29, 30], где на корректность исследованы задачи сопряжения модельных и общих уравнений параболического и гиперболического типов по временной переменной и изучены структурные и качественные свойства их решений.

2. Постановка задачи и основные результаты

Регулярным в области Ω *решением* уравнения (1.1) назовем функцию $u = u(x, y)$ из класса $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1) \cap C_x^3(\Omega_2)$, $u_x(x, 0), u_y(x, 0) \in L_1(0, r)$, при подстановке которой уравнение (1.1) обращается в тождество.

В работе исследуется следующая

Задача 1. *Найти регулярное в области* Ω *решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям*

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \;\; u_x(0, y) = \varphi_2(y), \;\; u(r, y) = \varphi_3(y), \;\; 0 \le y < h \tag{2.1}$$

$$u\,|_{CB} = \psi(x), \;\; r/2 \le x \le r, \tag{2.2}$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y) \in C[0, h]$, $\psi(x) \in C^1[r/2, r]$ *– заданные функции.*

Основная цель настоящей работы – доказательство теорем о единственности и существовании регулярного решения задачи 1.

3. Теорема единственности

Обозначим

$$\alpha = \frac{m - 2a}{2(m + 2)}, \;\; \beta = \frac{m + 2a}{2(m + 2)}, \;\; \gamma_1 = \frac{2\,\Gamma(1 - \beta)\,\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1 - \alpha - \beta)\;[2(1 - \alpha - \beta)]^{\alpha + \beta}}.$$

Справедлива следующая

Теорема 3.1. *Пусть относительно коэффициентов* $a_i(x, y)$, $i = \overline{0, 2}$ *уравнения (1.1) выполнены следующие условия:*

$$a_i(x, y) \in C^i\left(\overline{\Omega}_2\right), \qquad i = \overline{0, 2}; \tag{3.1}$$

$$a_2(x, 0) \ge 0, \quad 0 \le x \le r; \tag{3.2}$$

$$x^{1 - \alpha - \beta}\left[a_2^{''}(x, 0) - a_1^{'}(x, 0) + 2a_0(x, 0)\right] \le \frac{\gamma_1}{\Gamma(\alpha + \beta)}, \quad 0 < x < r, \tag{3.3}$$

$$a_2^2(x, 0) + \left[a_2^{''}(x, 0) - a_1^{'}(x, 0) + 2a_0(x, 0) - \frac{\gamma_1}{\Gamma(\alpha + \beta)}\,x^{\alpha + \beta - 1}\right]^2 > 0, \quad 0 < x < r. \tag{3.4}$$

Тогда решение задачи 1 в области Ω *единственно.*

Доказательство. Для доказательства **теоремы 3.1** введем обозначения

$$u(x, 0) = \tau(x), \qquad 0 \le x \le r, \tag{3.5}$$

$$u_y(x, 0) = \nu(x), \qquad 0 < x < r. \tag{3.6}$$

Считая функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ заданными, запишем решение задачи Коши (3.5)–(3.6) для уравнения (1.2).

Пусть вначале $|a| < \frac{m}{2}$. Решение задачи (3.5)–(3.6) для уравнения (1.2) в этом случае выписывается по формуле [10, с. 14]

$$u(x, y) = \frac{1}{B(\alpha,\, \beta)}\int\limits_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{m + 2}(-y)^{(m+2)/2}(2t - 1)\right]\, t^{\beta - 1}\,(1 - t)^{\alpha - 1}\,dt +$$

$$+ \frac{y}{B(1 - \alpha,\, 1 - \beta)}\int\limits_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m + 2}(-y)^{(m+2)/2}(2t - 1)\right]\, t^{-\alpha}\,(1 - t)^{-\beta}\,dt, \tag{3.7}$$

где $B(p,q)-$ интеграл Эйлера первого рода (бета-функция).

Удовлетворяя (3.7) условию (2.2), находим

$$u(x,y)\,|_{CB} = \frac{1}{B(\alpha,\,\beta)} \int\limits_0^1 \tau\left[x+(r-x)(2t-1)\right]\, t^{\beta-1}\,(1-t)^{\alpha-1}\,dt-$$

$$-\frac{(1-\alpha-\beta)^{\alpha+\beta-1}}{B(1-\alpha,\,1-\beta)}\,(r-x)^{1-\alpha-\beta} \int\limits_0^1 \nu\left[x+(r-x)(2t-1)\right]\, t^{-\alpha}\,(1-t)^{-\beta}\,dt=\psi(x).$$

Произведя сначала замену переменной интегрирования $s=2x-r+2rt-2xt$, а затем поменяв в полученном равенстве $2x-r$ на x, последнее соотношение перепишется в следующем виде

$$\frac{(r-x)^{1-\alpha-\beta}}{B(\alpha,\,\beta)} \int\limits_x^r \tau(t)\,(r-t)^{\alpha-1}\,(t-x)^{\beta-1}\,dt-$$

$$-\frac{\left[2(1-\alpha-\beta)\right]^{\alpha+\beta-1}}{B(1-\alpha,\,1-\beta)} \int\limits_x^r \nu(t)\,(r-t)^{-\beta}\,(t-x)^{-\alpha}\,dt=\psi\left(\frac{r+x}{2}\right). \tag{3.8}$$

Воспользуемся далее следующим определением оператора дробного интегро-дифференцирования [3, с.28]: оператором дробного (в смысле Римана–Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка $|\alpha|$ с началом в точке $c\in[a,b]$ называется оператор D^{α}_{cx}, который действует на абсолютно интегрируемую функцию $\varphi(t)\in L_1\,(a,b)$ по формуле:

$$D^{\alpha}_{cx}\varphi(t)=\frac{\operatorname{sgn}(x-c)}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_c^x |x-t|^{-(\alpha+1)}\,\varphi(t)\,dt, \quad \alpha<0,$$

$$D^{\alpha}_{cx}\varphi(t)=\operatorname{sgn}^{[\alpha]+1}(x-c)\frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}}D^{\alpha-[\alpha]-1}_{cx}\varphi(t), \quad \alpha>0,$$

где символ $\operatorname{sgn}(z)$ определяется как знак числа z; $\Gamma(x)-$ интеграл Эйлера второго рода (Гамма-функция). Подробное исследование свойств оператора $D^{\alpha}_{cx}\varphi(t)$ приведены в монографиях [3], [4], [31].

С учетом приведенного определения оператора D^{α}_{cx} соотношение (3.8) перепишется в следующей форме

$$\frac{\Gamma(\beta)}{B(\alpha,\,\beta)}\,(r-x)^{1-\alpha-\beta}\,D^{-\beta}_{rx}\left[\tau(t)\,(r-t)^{\alpha-1}\right]-$$

$$-\frac{\Gamma(1-\alpha)\,\left[2(1-\alpha-\beta)\right]^{\alpha+\beta-1}}{B(1-\alpha,\,1-\beta)}\,D^{\alpha-1}_{rx}\left[(r-t)^{-\beta}\nu(t)\right]=\psi\left(\frac{r+x}{2}\right). \tag{3.9}$$

Обращая уравнение (3.9) относительно функции $\nu(x)$, находим

$$\nu(x) = \gamma_1 D_{rx}^{1-\alpha-\beta}\tau(t) - \gamma_2 (r-x)^\beta D_{rx}^{1-\alpha}\left[\psi\left(\frac{t+r}{2}\right)\right], \tag{3.10}$$

где $\gamma_2 = \frac{2\,\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)\,[2(1-\alpha-\beta)]^{\alpha+\beta}}$.

Так как $\tau(x), \psi\left(\frac{r+x}{2}\right) \in C[0,r]$, а $\tau'(x), \psi'\left(\frac{r+x}{2}\right) \in L_1(0,r)$, то, пользуясь следующим свойством оператора дробного дифференцирования порядка $0 < \alpha \le 1$ [31, с. 43]

$$D_{rx}^{\alpha}\varphi(t) = \frac{\varphi(r)}{\Gamma(1-\alpha)}(r-x)^{-\alpha} - D_{rx}^{\alpha-1}\varphi'(t), \tag{3.11}$$

выражение (3.10) можно переписать в следующей форме

$$\nu(x) = -\gamma_1\, D_{rx}^{-(\alpha+\beta)}\tau'(t) + \frac{\gamma_2}{2}\,(r-x)^\beta\, D_{rx}^{-\alpha}\psi'\left(\frac{r+t}{2}\right). \tag{3.12}$$

Соотношение (3.12) есть основное фундаментальное соотношение между искомыми функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_1 на линию $y = 0$ в случае, когда $|a| < \frac{m}{2}$.

Если $a = -\frac{m}{2}$, то коэффициенты $\alpha = \frac{m}{m+2}$, $\beta = 0$, и решение задачи (3.5)–(3.6) для уравнения (1.2) имеет вид [10, с. 15]:

$$u(x,y) = \tau\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right] +$$

$$+\frac{2y}{m+2}\int\limits_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\,(2t-1)\right]\,(1-t)^{-\alpha}\,dt. \tag{3.13}$$

Из представления (3.13) с учетом условия (2.2) приходим к фундаментальному соотношению между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ следующего вида

$$\nu(x) = -\frac{\gamma_1}{2}\left[2D_{rx}^{-\alpha}\tau'(t) - D_{rx}^{-\alpha}\psi'\left(\frac{r+t}{2}\right)\right]. \tag{3.14}$$

Если же $a = \frac{m}{2}$, то $\alpha = 0$, $\beta = \frac{m}{m+2}$. Решение задачи (3.5)–(3.6) для уравнения (1.2) в этом случае имеет вид [10, с. 15]:

$$u(x,y) = \tau\left[x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right] +$$

$$+\frac{2y}{m+2}\int\limits_0^1 \nu\left[x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\,(2t-1)\right]\,(1-t)^{-\beta}\,dt. \tag{3.15}$$

Удовлетворяя (3.15) граничному условию (2.2) на характеристике CB, приходим к равенству

$$\nu(x) = (2-2\beta)^{-\beta}\,(r-x)^\beta\,\psi'\left(\frac{r+x}{2}\right). \tag{3.16}$$

Перейдем к доказательству единственности решения *задачи 1*. Для однородной задачи, соответствующей *задаче 1*, рассмотрим интеграл

$$J^* = \int\limits_0^r \tau(x)\nu(x)dx.$$

При $\psi(x) \equiv 0$ $(\tau(r) = \psi(r) = 0)$ из соотношений (3.12), (3.14), (3.16) для различных значений a получаем соответствующие равенства

$$\nu(x) = -\gamma_1\, D_{rx}^{-(\alpha+\beta)}\tau'(t) = \gamma_1\, D_{rx}^{1-\alpha-\beta}\tau(t), \qquad |a| < \frac{m}{2}; \tag{3.17}$$

$$\nu(x) = -\gamma_1 D_{rx}^{-\alpha}\tau'(t) = \gamma_1\, D_{rx}^{1-\alpha}\tau(t), \qquad a = -\frac{m}{2}; \tag{3.18}$$

$$\nu(x) \equiv 0, \qquad a = \frac{m}{2}. \tag{3.19}$$

Воспользуемся следующим свойством оператора $D_{rx}^{\alpha}\varphi(t)$ дробного интегро-дифференцирования (в смысле Римана–Лиувилля)

Лемма 3.1. *Для любой абсолютно непрерывной на сегменте $[0,r]$ функции $\varphi = \varphi(x)$, удовлетворяющей условию $\varphi(r) = 0$ справедливо неравенство*

$$\varphi(x)\, D_{rx}^{\alpha}\varphi(t) \geq \frac{1}{2}\, D_{rx}^{\alpha}\varphi^2(t), \quad 0 < \alpha \leq 1. \tag{3.20}$$

Доказательство. Действительно, если $\varphi(r) = 0$, то из формулы (3.11) находим

$$D_{rx}^{\alpha}\varphi(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_x^r \frac{\varphi'(t)}{(t-x)^{\alpha}}\, dt.$$

Аналогично,

$$D_{rx}^{\alpha}\varphi^2(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_x^r \frac{2\,\varphi(t)\,\varphi'(t)}{(t-x)^{\alpha}}\, dt.$$

Пользуясь приведенными равенствами, находим

$$\varphi(x)\, D_{rx}^{\alpha}\varphi(t) - \frac{1}{2}D_{rx}^{\alpha}\varphi^2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_x^r \frac{\varphi'(t)[\varphi(t)-\varphi(x)]}{(t-x)^{\alpha}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_x^r \frac{\varphi'(t)}{(t-x)^{\alpha}}\left(\int\limits_x^t \varphi'(s)ds\right)dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_x^r \left(\int\limits_s^r \frac{\varphi'(t)\,\varphi'(s)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right)ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_x^r (s-x)^{\alpha}\,\frac{\varphi'(s)}{(s-x)^{\alpha}}\left(\int\limits_s^r \frac{\varphi'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right)ds =$$

$$= -\frac{1}{2\,\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_x^r (s-x)^{\alpha}\,\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\int\limits_s^r \frac{\varphi'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right)^2\right]ds =$$

$$= \frac{\alpha}{2\,\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_x^r (s-x)^{\alpha-1}\left(\int\limits_s^r \frac{\varphi'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right)^2 ds \geq 0,$$

откуда вытекает неравенство (3.20). Лемма доказана. □

Отметим, что доказанная лемма 3.1 является аналогом леммы 1, приведенной в работе [32].

При $|a| < \frac{m}{2}$ из (3.17) и (3.20) приходим к неравенству

$$J^* = \gamma_1 \int\limits_0^r \tau(x) D_{rx}^{1-\alpha-\beta}\tau(t)\,dx \geq \frac{\gamma_1}{2\,\Gamma(\alpha+\beta)} \int\limits_0^r t^{\alpha+\beta-1}\tau^2(t)\,dt. \tag{3.21}$$

К аналогичному неравенству мы приходим и при $a = -\frac{m}{2}$ $(\alpha = \frac{m}{m+2},\ \beta = 0)$, а при $a = \frac{m}{2}$ из равенства (3.19) получаем, что $J^* \equiv 0$.

Переходя далее в уравнении (1.1) к пределу при $y \to +0$, с учетом граничных условий (2.1), получим фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из параболической части Ω_2 области Ω на линию $y = 0$:

$$\nu(x) = \tau'''(x) + a_2(x,0)\tau''(x) + a_1(x,0)\tau'(x) + a_0(x,0)\tau(x), \quad 0 < x < r, \tag{3.22}$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau'(0) = \varphi_2(0), \quad \tau(r) = \varphi_3(0). \tag{3.23}$$

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия (3.1). Тогда из (3.22)–(3.23) следует равенство*

$$J^* = -\frac{\tau'^2(r)}{2} - \int\limits_0^r a_2(x,0)\tau'^2(x)dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^r \left[a_2^{''}(x,0) - a_1^{'}(x,0) + 2a_0(x,0)\right]\tau^2(x)dx. \tag{3.24}$$

Равенство (3.24), при однородных граничных условиях, соответствующих условиям (3.23) $(\varphi_j(0) = 0,\ j = \overline{1,3})$, легко получается путем умножения обеих частей соотношения (3.22) на функцию $\tau(x)$ с последующим интегрированием полученного равенства по x от 0 до r.

С учетом (3.24) неравенство (3.21) перепишется в следующей форме

$$\tau'^2(r) + 2\int\limits_0^r a_2(x,0)\tau'^2(x)dx -$$

$$-\int\limits_0^r \left[a_2^{''}(x,0) - a_1^{'}(x,0) + 2a_0(x,0) - \frac{\gamma_1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\, x^{\alpha+\beta-1}\right]\tau^2(x)dx \leq 0. \tag{3.25}$$

Легко заметить, что при выполнении условий (3.2)–(3.4) **теоремы 3.1** на коэффициенты $a_i(x,y),\ i = \overline{0,2}$ уравнения (1.1) неравенство (3.25) может иметь место в том и только в том случае, когда $\tau(x) \equiv 0$. Тогда из соотношений (3.17), (3.18), (3.19) находим, что и $\nu(x) \equiv 0$ для всех $|a| \leq \frac{m}{2}$. При этом из формул (3.7), (3.13), (3.15) сразу следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega_1}$.

Покажем далее, что и задача нахождения регулярного в области Ω_2 решения уравнения (1.3), удовлетворяющего однородным граничным условиям, соответствующим условиям (2.1) и однородному начальному условию $u\,(x,0) = 0$ при условиях **теоремы 3.1**, не может иметь решений, отличных от тривиального.

Действительно, допустим, что однородная задача

$$u_{xxx} - u_y + \sum_{i=0}^{2} a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} = 0, \quad (x,y) \in \Omega_2, \tag{3.26}$$

$$u\,(0,y) = 0,\ u_x\,(0,y) = 0,\ u\,(r,y) = 0, \quad 0 < y < h, \tag{3.27}$$

$$u\,(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq r \tag{3.28}$$

имеет нетривиальное решение $u = u(x,y) \not\equiv 0$. Следуя работам [16], [33], положим в уравнении (3.26)

$$u(x,y) = \upsilon(x,y)\,\exp(\mu_1 x + \mu_2 y)\,. \tag{3.29}$$

При этом относительно функции $\upsilon = \upsilon(x,y)$ получаем уравнение

$$L_{\mu_1,\mu_2}\upsilon = \upsilon_{xxx} - \upsilon_y + [3\mu_1 + a_2(x,y)]\,\upsilon_{xx} +$$

$$+\left[3\,\mu_1^2 + 2\,\mu_1\,a_2(x,y) + a_1(x,y)\right]\,\upsilon_x +$$

$$+\left[\mu_1^3 + \mu_1^2\,a_2(x,y) + \mu_1\,a_1(x,y) + a_0(x,y) - \mu_2\right]\upsilon = 0, \tag{3.30}$$

с начальным и краевыми условиями

$$\upsilon(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le r \tag{3.31}$$

$$\upsilon(0,y) = 0,\ \ \upsilon_x(0,y) = 0,\ \ \upsilon(r,y) = 0, \quad 0 < y < h. \tag{3.32}$$

Так как, по предположению, функция $u(x,y)$ является нетривиальным решением задачи (3.26)–(3.28), то как следует из (3.29), задача (3.30)–(3.32) тоже будет иметь ненулевое решение $\upsilon = \upsilon(x,y) \neq 0$.

Введем далее вспомогательную область $\Omega_{2\varepsilon}$, определенную неравенствами $\Omega_{2\varepsilon} = \{(x,y):\ \varepsilon < x < r-\varepsilon,\ \ \varepsilon < y < h-\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$. В области $\Omega_{2\varepsilon}$ справедливо тождество

$$2\,(\upsilon, L_{\mu_1,\mu_2}\upsilon)_0 = \int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}} 2\,\upsilon\,L_{\mu_1,\mu_2}\upsilon\,d\Omega_{2\varepsilon} =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}} \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[2\,\upsilon\,\upsilon_{xx} - \upsilon_x^2 + 2\,\left(3\mu_1 + a_2(x,y)\right)\upsilon\,\upsilon_x\,+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,\left(3\,\mu_1^2 + 2\,\mu_1\,a_2(x,y) - a_{2x}(x,y) + a_1(x,y)\right)\,\upsilon^2\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\upsilon^2\right]\right\}\,d\Omega_{2\varepsilon} +$$

$$+\int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}} \left[2\,\mu_1^3 + 2\,\mu_1^2\,a_2(x,y) + 2\,\mu_1\,a_1(x,y) + a_{2xx}(x,y) - a_{1x}(x,y)\,+\right.$$

$$\left.+\,2\,a_0(x,y) - 2\mu_2\right]\,\upsilon^2\,d\Omega_{2\varepsilon} - 2\int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}} \left[3\,\mu_1 + a_2(x,y)\right]\upsilon_x^2\,d\Omega_{2\varepsilon} = 0. \tag{3.33}$$

Применяя к равенству (3.33) формулу Грина, получим

$$2\,(\upsilon, L_{\mu_1,\mu_2}\upsilon)_0 = \int\limits_{\Gamma_{2\varepsilon}} \upsilon^2 dx + \left[2\upsilon\,\upsilon_{xx} - \upsilon_x^2 + 2\,(3\mu_1 + a_2(x,y))\,\upsilon\,\upsilon_x\,+\right.$$

$$\left.+\,\left(3\,\mu_1^2 + 2\,\mu_1\,a_2(x,y) - a_{2x}(x,y) + a_1(x,y)\right)\,\upsilon^2\right]\,dy +$$

$$+\int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}} \left[2\,\mu_1^3 + 2\,\mu_1^2 a_2(x,y) + 2\,\mu_1\,a_1(x,y) + a_{2xx}(x,y) - a_{1x}(x,y)\,+\right.$$

$$\left.+\,2\,a_0(x,y) - 2\mu_2\right]\upsilon^2 d\Omega_{2\varepsilon} - 2\int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}} \left[3\,\mu_1 + a_2(x,y)\right]\upsilon_x^2\,d\Omega_{2\varepsilon} = 0, \tag{3.34}$$

где $\Gamma_{2\varepsilon}$ – это граница вспомогательной области $\Omega_{2\varepsilon}$. Переходя в равенстве (3.34) к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом однородных начально-краевых условий (3.31)–(3.32), приходим к равенству

$$\int\limits_0^h \upsilon_x^2(r,y)dy + \int\limits_0^r \upsilon^2(x,h)\,dx + 2\int\limits_{\Omega_2} \left[3\,\mu_1 + a_2(x,y)\right]\, \upsilon_x^2\, d\Omega_2 -$$

$$-\int\limits_{\Omega_2} \left[2\,\mu_1^3 + 2\,\mu_1^2 a_2(x,y) - 2\,\mu_1\,\left(a_{2x}(x,y) - a_1(x,y)\right) + \right.$$

$$\left. + \,a_{2xx}(x,y) - a_{1x}(x,y) + 2\,a_0(x,y) - 2\mu_2\right]\, \upsilon^2\, d\Omega_2 = 0. \qquad (3.35)$$

С учетом условий (3.1) выберем значения параметров μ_1 и μ_2 в равенстве (3.35) так, чтобы

$$\mu_1 > \frac{1}{3} \max_{(x,y)\in\bar{\Omega}_2} (|a_2(x,y)|),$$

$$\mu_2 > \frac{1}{2} \max_{(x,y)\in\bar{\Omega}_2} \left[2\,\mu_1^3 + 2\,\mu_1^2\,|a_2(x,y)| + \right.$$

$$\left. + \,2\,\mu_1\,\left(|a_{2x}(x,y)| + |a_1(x,y)|\right) + |a_{2xx}(x,y)| + |a_{1x}(x,y)| + 2|a_0(x,y)|\right].$$

Легко заметить, что при таком выборе параметров μ_1 и μ_2 равенство (3.35) может иметь место в том и только в том случае, когда $\upsilon\,(x,y) \equiv 0$ в каждой точке замыкания $\bar{\Omega}_2$, что противоречит предположению о том, что $\upsilon\,(x,y) \neq 0$. Полученное противоречие показывает, что $u\,(x,y) \equiv 0$ всюду в $\bar{\Omega}_2$. То есть при условиях (3.1) - (3.4) решение *задачи 1* для уравнения (1.1) единственно в требуемом классе. Теорема доказана.

$\square$

4. Теорема о существовании решения задачи 1

Теорема 4.1. *При условиях (3.1)–(3.4) решение задачи 1 существует.*

Доказательство. Действительно, из полученных выше фундаментальных соотношений (3.10) и (3.22), относительно функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$ приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \nu(x) = \gamma_1\, D_{rx}^{1-(\alpha+\beta)}\tau(t) - \gamma_2\,(r-x)^\beta\, D_{rx}^{1-\alpha}\psi\left(\frac{r+t}{2}\right), \\ \nu(x) = \tau^{'''}(x) + a_2(x,0)\tau^{''}(x) + a_1(x,0)\tau^{'}(x) + a_0(x,0)\tau(x), \end{cases} \qquad (4.1)$$

откуда относительно функции $\tau(x)$ приходим к задаче нахождения регулярного решения уравнения

$$\tau^{'''}(x) + a_2(x,0)\tau^{''}(x) + a_1(x,0)\tau^{'}(x) -$$

$$-\,\gamma_1\, D_{rx}^{1-\alpha-\beta}\tau(t) + a_0(x,0)\tau(x) = -\gamma_2\,(r-x)^\beta\, D_{rx}^{1-\alpha}\psi\left(\frac{r+t}{2}\right), \qquad (4.2)$$

удовлетворяющего условиям (3.23).

Решение задачи (3.23) для уравнения (4.2) эквивалентно решению интегрального уравнения

$$\tau(x) = -\frac{1}{2r^2}\left\{2\int\limits_0^r K(x,t)\tau(t)\,dt - 2\,(r-x)\,[r + x + r\,x\,a_2(0,0)]\varphi_1(0) - \right.$$

$$-2\,r\,x\,(r-x)\varphi_2(0) - 2\,x^2\,\varphi_3(0) + x^2\int\limits_x^r (r-t)^2 f(t)dt -$$

$$\left. -\,(r-x)\int\limits_0^x t\,\left(rt + xt - 2rx\right) f(t)dt \right\}, \qquad (4.3)$$

где

$$K(x,t)=\begin{cases}(r-x)[(r+x)L(0,t)+r\,x\,L_x(0,t)]-r^2\,L(x,t), & 0\le x<t,\\ (r-x)[(r+x)L(0,t)+r\,x\,L_x(0,t)], & t<x\le r,\end{cases}$$

$$L(x,t)=a_2(t,0)+(t-x)\left[2a_2^{'}(t,0)-a_1(t,0)\right]+$$

$$+\frac{(t-x)^2}{2}\left[a_2^{''}(t,0)-a_1^{'}(t,0)+a_0(t,0)\right]-\frac{\gamma_1}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}(t-x)^{\alpha+\beta+2}.$$

На основании свойств (3.1) заданных коэффициентов $a_i(x,y),\ i=\overline{0,2}$ уравнения (1.1), а также свойств заданных функций $\varphi_1(y),\varphi_2(y),\varphi_3(y),\psi(x)$ заключаем, что уравнение (4.3) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ядром $K(x,t)\in L_2([0,r]\times[0,r])$ и с правой частью из класса $C^1[0,r]$. Однозначная и безусловная разрешимость уравнения (4.3) вытекает из единственности решения *задачи 1*. Решение $\tau=\tau(x)$ уравнения (4.3), согласно общей теории интегральных уравнений Фредгольма, выписывается с помощью резольвенты $R(x,t)$ ядра $K(x,t)$, причем резольвента $R(x,t)$, так же как и ядро $K(x,t)$, будет принадлежать классу $L_2([0,r]\times[0,r])$. Решение $\tau=\tau(x)$ уравнения (4.3), в силу того что правая часть уравнения (4.3) принадлежит $C^1[0,r]$, будет принадлежать классу $\tau(x)\in C[0,r]\cup C^3]0,r[$. По найденному значению $\tau(x)$ можно найти и функцию $\nu(x)$ из фундаментальных соотношений (3.12), (3.14), (3.16), (3.22).

Когда коэффициенты $a_i(x,0),\ i=\overline{0,2}$ уравнения (4.2) являются постоянными действительными числами, решение задачи (3.23), (4.2), а, значит, и решение интегрального уравнения (4.3) выписывается в явном виде.

Действительно, найдем решение задачи (3.23) для уравнения (4.2) в случае, когда $a_i(x,0)=a_i=\text{const},\ i=\overline{0,2}$. С этой целью, заменим в уравнении (4.2) переменную x на $r-x$. При этом относительно функции $\tau(r-x)$ получаем задачу:

$$-\tau^{'''}(r-x)+a_2\tau^{''}(r-x)-a_1\tau^{'}(r-x)-$$

$$-\gamma_1\,D_{0x}^{1-\alpha-\beta}\tau(r-t)+a_0\tau(r-x)=-\gamma_2\,x^\beta\,D_{0x}^{1-\alpha}\psi\left(\frac{2r-t}{2}\right), \tag{4.4}$$

$$\tau(r-x)\,|_{x=r}=\varphi_1(0),\ \ \tau^{'}(r-x)\,|_{x=r}=-\varphi_2(0),\ \ \tau(r-x)\,|_{x=0}=\varphi_3(0). \tag{4.5}$$

Обозначив $\tau(r-x)=g(x)$, относительно $g(x)$ из (4.4) приходим к уравнению

$$g^{'''}(x)-a_2g^{''}(x)+a_1g^{'}(x)+\gamma_1\,D_{0x}^{1-\alpha-\beta}g(t)-a_0g(x)=f(x), \tag{4.6}$$

где $f(x)=\gamma_2\,x^\beta\,D_{0x}^{1-\alpha}\psi\left(\frac{2r-t}{2}\right)$.

Применяя оператор D_{0x}^{-3} к обеим частям уравнения (4.6), приходим к эквивалентному уравнению (4.6) интегральному уравнению

$$g(x)-\int\limits_0^x\left[a_2-a_1(x-t)+\frac{a_0}{2}(x-t)^2-\frac{\gamma_1}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}(x-t)^{\alpha+\beta+1}\right]g(t)dt=$$

$$=c_1x^2+c_2x+c_3+\frac{1}{2}\int\limits_0^x(x-t)^2f(t)dt, \tag{4.7}$$

где c_1, c_2, c_3— пока неизвестные постоянные.

Уравнение (4.7) относится к классу интегральных уравнений Вольтерра второго рода типа свертки. Используя определение свертки двух функций, уравнение (4.7) перепишем в следующем виде

$$g(x)-a_2(1*g(x))+a_1(x*g(x))-\frac{a_0}{2}(x^2*g(x))+\frac{\gamma_1}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}(x^{\alpha+\beta+1}*g(x))=$$

$$=\frac{\gamma_2}{2}\,(x^2*f(x))+c_1x^2+c_2x+c_3, \tag{4.8}$$

где $g_1(x) * g_2(x) = \int\limits_0^x g_1(x-t)g_2(t)dt = \int\limits_0^x g_1(t)g_2(x-t)dt$– свертка функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$.

Пусть $G(p)$ и $F(p)$ в уравнении (4.8) являются изображениями функций $g(x)$ и $f(x)$, соответственно, то есть

$$g(x) \risingdotseq G(p), \quad f(x) \risingdotseq F(p).$$

Тогда, применяя к уравнению (4.8) преобразование Лапласа, используя свойство линейности и теорему умножения, придем к следующему уравнению относительно $G(p)$

$$G(p)\left[1 - \frac{a_2}{p} + \frac{a_1}{p^2} - \frac{a_0}{p^3} + \frac{\gamma_1}{p^{\alpha+\beta+2}}\right] = \frac{F(p)}{p^3} + \frac{2c_1}{p^3} + \frac{c_2}{p^2} + \frac{c_3}{p},$$

откуда

$$G(p) = \frac{F(p) + 2c_1 + c_2 p + c_3 p^2}{p^3\,\Delta(p)}, \tag{4.9}$$

где $\Delta(p) = 1 - a_2p^{-1} + a_1p^{-2} + \gamma_1 p^{-\alpha-\beta-2} - a_0p^{-3}$.

Для достаточно больших значений параметра p имеет место равенство:

$$\int\limits_0^\infty e^{-\Delta(p)s}ds = \frac{1}{\Delta(p)}.$$

С учетом этого, равенство (4.9) перепишется в следующей форме

$$G(p) = \int\limits_0^\infty e^{-\Delta(p)s}\left[F(p)\,p^{-3} + 2c_1\,p^{-3} + c_2\,p^{-2} + c_3\,p^{-1}\right]ds. \tag{4.10}$$

Найдем теперь обратное преобразование Лапласа. Прежде всего заметим, что $p^{-\mu}e^{zp^{-\beta}} \fallingdotseq x^{\mu-1}\phi(\beta,\mu; zx^{\beta})$, где $\phi(\xi,\eta;z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(n\xi+\eta)}$– функция Райта [34].

Пользуясь формулой $g_1(p)g_2(p) \fallingdotseq q_1(x) * q_2(x)$, из (4.10) находим

$$\begin{gathered} g(x) = \int\limits_0^\infty e^{-s}\left\{f(x) * \left[x^{-1/4}\phi(1,3/4;\,a_2xs)\right] * \left[x^{-1/4}\phi(2,3/4;\,-a_1x^2s)\right] *\right. \\ \left. * \left[x^{-1/4}\phi(\alpha+\beta+2,3/4;\,-\gamma_1x^{\alpha+\beta+2}s)\right] * \left[x^{-1/4}\phi(3,3/4;\,a_0x^3s)\right]\right\}ds+ \\ +2c_1\int\limits_0^\infty e^{-s}\left\{\left[x^{-1/4}\phi(1,3/4;\,a_2xs)\right] * \left[x^{-1/4}\phi(2,3/4;\,-a_1x^2s)\right] *\right. \\ \left. * \left[x^{-1/4}\phi(\alpha+\beta+2,3/4;\,-\gamma_1x^{\alpha+\beta+2}s)\right] * \left[x^{-1/4}\phi(3,3/4;\,a_0x^3s)\right]\right\}ds+ \\ +c_2\int\limits_0^\infty e^{-s}\left\{\left[x^{-1/2}\phi(1,1/2;\,a_2xs)\right] * \left[x^{-1/2}\phi(2,1/2;\,-a_1x^2s)\right] *\right. \\ \left. * \left[x^{-1/2}\phi(\alpha+\beta+2,1/2;\,-\gamma_1x^{\alpha+\beta+2}s)\right] * \left[x^{-1/2}\phi(3,1/2;\,a_0x^3s)\right]\right\}ds+ \\ +c_3\int\limits_0^\infty e^{-s}\left\{\left[x^{-3/4}\phi(1,1/4;\,a_2xs)\right] * \left[x^{-3/4}\phi(2,1/4;\,-a_1x^2s)\right] *\right. \\ \left. * \left[x^{-3/4}\phi(\alpha+\beta+2,1/4;\,-\gamma_1x^{\alpha+\beta+2}s)\right] * \left[x^{-3/4}\phi(3,1/4;\,a_0x^3s)\right]\right\}ds. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Воспользуемся следующими обозначениями [35]:

$$S_m^{\mu}(x;\,z_1,...,z_m;\,\beta_1,...,\beta_m) = h_1(x) * h_2(x) * ... * h_m(x)$$

$$G_m^\mu(x;\lambda;\beta)\equiv G_m^\mu(x;\,\lambda_1,...,\lambda_m;\,\beta_1,...,\beta_m)=\int\limits_0^\infty e^{-s}S_m^\mu(x;\,\lambda_1 s,...,\lambda_m s;\,\beta_1,...,\beta_m)ds,$$

где $h_k(x)=x^{\mu_k-1}\phi\left(\beta_k,\mu_k;\,z_k x^{\beta_k}\right),\ k=\overline{1,m};\quad \mu=\sum\limits_{k=1}^m\mu_k.$

В терминах приведенных выше обозначений представление (4.11) перепишется в следующей форме

$$g(x)=\int\limits_0^\infty e^{-s}\left[f(x)*S_4^3(x;\,a_2s,-a_1s,-\gamma_1s,a_0s;\,1,2,\alpha+\beta+2,3)\right]ds+$$

$$+2c_1\int\limits_0^\infty e^{-s}S_4^3(x;\,a_2s,-a_1s,-\gamma_1s,a_0s;\,1,2,\alpha+\beta+2,3)ds+$$

$$+c_2\int\limits_0^\infty e^{-s}S_4^2(x;\,a_2s,-a_1s,-\gamma_1s,a_0s;\,1,2,\alpha+\beta+2,3)ds+$$

$$+c_3\int\limits_0^\infty e^{-s}S_4^1(x;\,a_2s,-a_1s,-\gamma_1s,a_0s;\,1,2,\alpha+\beta+2,3)ds,$$

откуда

$$g(x)=2\,c_1\;G_4^3(x;\,a_2,-a_1,-\gamma_1,a_0;\,1,\,2,\,\alpha+\beta+2,\,3)+$$

$$+\,c_2\;G_4^2(x;\,a_2,-a_1,-\gamma_1,a_0;\,1,\,2,\,\alpha+\beta+2,\,3)\,+$$

$$+c_3\;G_4^1(x;\,a_2,-a_1,-\gamma_1,a_0;\,1,\,2,\,\alpha+\beta+2,\,3)\,+$$

$$+\int\limits_0^x f(t)\,G_4^3(x-t;\,a_2,-a_1,-\gamma_1,a_0;\,1,\,2,\,\alpha+\beta+2,\,3)\,dt.$$

Таким образом,

$$\tau(r-x)=2\,c_1\,G_4^3(x;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\,+\,c_2\,G_4^2(x;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\,+\,c_3\,G_4^1(x;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\,+\,\int\limits_0^x f(t)\,G_4^3(x-t;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\,dt,$$

где $\mathbf{a}=(a_2,-a_1,-\gamma_1,a_0),\ \mathbf{b}=(1,\,2,\,\alpha+\beta+2,\,3).$

Переобозначив в последнем равенстве $r-x$ через x, и, выполнив затем подстановку $s=r-t$ под знаком интеграла, получим

$$\tau(x)=2\,c_1\,G_4^3(r-x;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})+c_2\,G_4^2(r-x;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})+$$

$$+\,c_3\,G_4^1(r-x;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})+\int\limits_x^r f(r-s)\,G_4^3(s-x;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\,ds. \tag{4.12}$$

Функция $G_m^\mu(x)$ обладает свойствами [35]:

$$D_{0x}^\nu G_m^\mu(t;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})=G_m^{\mu-\nu}(t;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}),\quad \mu>\nu; \tag{4.13}$$

$$G_m^\mu(x;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})=\frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}+\sum_{i=1}^{mj}\lambda_i D_{0x}^{-\beta_i}G_m^\mu(t;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}). \tag{4.14}$$

Пользуясь свойствами (4.13)–(4.14) функции $G^{\mu}_{m}(x;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})$, из представления (4.12) находим

$$\tau'(x) = -c_3\left[a_2 G^1_4(r-x;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) - a_1 G^2_4(r-x;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) - \right.$$
$$\left. - \gamma_1 G^{\alpha+\beta+2}_4(r-x;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) + a_0 G^3_4(r-x;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\right] -$$
$$- 2c_1 G^2_4(r-x;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) - c_2 G^1_4(r-x;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) - \int\limits_x^r f(r-s)\,G^2_4(s-x;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\,ds. \tag{4.15}$$

Найдем значения неизвестных $c_1,\ c_2,\ c_3$, входящих в (4.12). Удовлетворяя (4.12) последнему из условий (3.23), сразу находим:

$$\tau(r) = c_3 = \varphi_3(0).$$

Удовлетворяя далее (4.12) первым двум условиям (3.23), приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2\,c_1\,G^3_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) + c_2\,G^2_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) = \\ = \varphi_1(0) - \varphi_3(0)\,G^1_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) - \int\limits_0^r f(r-s)\,G^3_4(s;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})ds, \\ 2\,c_1\,G^2_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) + c_2\,G^1_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) = \varphi_2(0) - \varphi_3(0)\left[a_2 G^1_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) - \right. \\ \left. -a_1 G^2_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) - \gamma_1 G^{\alpha+\beta+2}_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) + a_0 G^3_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\right] - \\ - \int\limits_0^r f(r-s)\,G^2_4(s;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\,ds. \end{cases} \tag{4.16}$$

Решая систему (4.16), находим

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{4.17}$$

где

$$\Delta = 2\left[G^1_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\,G^3_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) - \left(G^2_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\right)^2\right],$$

$$\Delta_1 = \int\limits_0^r f(r-s)\left[G^2_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})G^2_4(s;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) - G^1_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})G^3_4(s;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\right]ds +$$
$$+ G^1_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\left[\varphi_1(0) - \varphi_3(0)\,G^1_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\right] - G^2_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\cdot$$
$$\cdot\left[\varphi_2(0) - \varphi_3(0)\left(a_2 G^1_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) - a_1 G^2_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) - \gamma_1 G^{\alpha+\beta+2}_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) + a_0 G^3_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\right)\right],$$

$$\Delta_2 = 2\int\limits_0^r f(r-s)\left[G^3_4(s;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})G^3_4(s;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) - G^3_4(s;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})G^3_4(s;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\right]ds -$$
$$-2\,G^2_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\left[\varphi_1(0) - \varphi_3(0)\,G^1_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\right] + 2\,G^3_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\cdot$$
$$\cdot\left[\varphi_2(0) - \varphi_3(0)\left(a_2 G^1_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) - a_1 G^2_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) - \gamma_1 G^{\alpha+\beta+2}_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) + a_0 G^3_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\right)\right].$$

Из доказанной выше теоремы единственности решения *задачи 1* следует, что определитель $\Delta = 2\left[G^1_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b})\,G^3_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}) - (G^2_4(r;\,\mathbf{a};\,\mathbf{b}))^2\right]$ системы (4.16) будет отличен от нуля, а, следовательно, формула (4.12), где постоянные c_1, c_2 вычисляются по формулам (4.17), $c_3 = \varphi_3(0)$, дает представление единственного решения задачи (3.23) для уравнения (4.2) при постоянных коэффицентах a_0, a_1, a_2 уравнения (4.2) и $-m/2 \le a < m/2$.

Если $a = m/2$, то при постоянных коэффицентах a_0, a_1, a_2 из соотношений (3.16) и (3.22) относительно искомой функции $\tau = \tau(x)$ приходим к следующей задаче

$$\tau'''(x) + a_2\tau''(x) + a_1\tau'(x) + a_0\tau(x) = (2-2\beta)^{-\beta}\,(r-x)^{\beta}\,\psi'\left(\frac{r+x}{2}\right), \tag{4.18}$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau'(0) = \varphi_2(0), \quad \tau(r) = \varphi_3(0). \tag{4.19}$$

Решение задачи (4.18), (4.19) выписывается в явном виде по формуле

$$\tau(x) = \int\limits_0^r G(x,t)F(t)dt + \frac{x^2}{r^2}\left[\varphi_3(0) - r\varphi_2(0) - \varphi_1(0)\right] + \varphi_2(0)x + \varphi_1(0),$$

где

$$F(x) = (2-2\beta)^{-\beta}(r-x)^{\beta}\,\psi'\left(\frac{r+x}{2}\right) - a_0\varphi_1(0) - (a_0 x + a_1)\,\varphi_2(0) -$$
$$-\frac{\varphi_3(0) - r\varphi_2(0) - \varphi_1(0)}{r^2}\left(2a_2 + 2a_1 x + a_0\right),$$

$G(x,t)-$ функция Грина задачи (4.18), (4.19), построенная в работе [25].

После того как функции $\tau = \tau(x)$ и $\nu = \nu(x)$ найдены, решение *задачи 1* в области Ω_1 определяется как решение задачи Коши (3.5)-(3.6) для уравнения (1.2) и выписывается по одной из формул: (3.7), (3.13) или (3.15), а в области Ω_2 приходим к задаче нахождения регулярного решения уравнения (1.3), удовлетворяющего условиям (2.1) и $u(x,0) = \tau(x)$, которая исследована в работах [14, с. 132], [15].

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А.В. *Уравнения смешанного типа.* М.: Издательство АН СССР. 1949. 155 с.
2. Лыков А.В. *Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло и массообмена* // Инженерно-физический журнал. 1955. Т. 9, №3. С. 287–304.
3. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высшая школа. 301 с.
4. Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит. 2003. 272 с.
5. Берс Л. *Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики.* М.: Иностранная литература. 1951. 208 с.
6. Франкль Ф.И. *Избранные труды по газовой динамике.* М.: Наука. 1973. 711 с.
7. Кальменов Т.Ш. *Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения* // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, №1. С. 178–181.
8. Кальменов Т.Ш. *О задаче Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения* // Дифференц. уравнения. 1974. Т.10, №1. С. 59–68.
9. Кальменов Т.Ш. *Критерий непрерывности решения задачи Гурса для одного вырождающегося гиперболического уравнения* // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, №1. С. 41–55.
10. Смирнов М.М. *Вырождающиеся гиперболические уравнения.* Минск: Вышэйшая школа. 1977. 150 с.
11. Репин О.А. *Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов.* Саратов: издательство Саратовского университета. 1992. 161 с.
12. Нахушев А.М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных.* М.: Наука. 2006. 287 с.
13. Кальменов Т.Ш. *К теории начально-краевых задач для дифференциальных уравнений.* Цикл научных работ Т.Ш. Кальменова. Алматы: Институт математики и математического моделирования. 2013. 306 с.
14. Джураев Т. Д. *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.* Ташкент: ФАН. 1979. 238 с.
15. L. Cattabriga *Un Problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari* // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. 1959. V.13, №2. P. 163–203.
16. Иргашев Ю. *Некоторые краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками* // Сборник научных трудов «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения». Ташкент: ФАН. 1976. С. 17–31.
17. Джураев Т. Д, Абдиназаров С. *Краевые задачи типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками* // Известия АН Узбекской ССР. 1981. №1. С. 8–11.

18. Абдиназаров С. *Общие краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками* // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, №1. С. 3–12.
19. Гельфанд И. И. *Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений* // УМН. 1959. Т. 14, №3(87). С. 3–19.
20. Бицадзе А.В. *Уравнения смешанного типа.* М.: Издательство АН СССР. 1959. 164 с.
21. Бицадзе А.В. *К теории одного класса уравнений смешанного типа* // В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Л.: Наука. 1970. С. 112–119.
22. Репин О.А., Кумыкова С.К. *Задача со смещением для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами* // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки. 2012. №4 (29). С. 17–25.
23. Репин О.А., Кумыкова С.К. *Нелокальная задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с обобщенными операторами дробного интегро-дифференцирования произвольного порядка* // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки. 2011. №4(25). С. 25–36.
24. Елеев В.А., Кумыкова С.К. *Внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками* // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2010. №5. С. 5–14.
25. Балкизов Ж.А. *Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа третьего порядка с оператором Трикоми в гиперболической части* // Вестник Самарского государственного технического университета. 2008. №2(17). С. 21–28.
26. Балкизов Ж.А. *Краевые задачи для уравнения смешанного типа третьего порядка с оператором Геллерстедта в гиперболической части* // Известия Кабардино-Балкарского государственного университета. 2011. Т.1, №1. С. 21–33.
27. Балкизов Ж.А. *Аналог задачи Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка с оператором Геллерстедта в области гиперболичности* // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 2014. Т. 16, №2. С. 20–27.
28. Балкизов Ж.А. *Нелокальная краевая задача для модельного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка* // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 2015. Т. 17, №4. С. 9–20.
29. Золина Л.А. *О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966. Т. 6, №6. С. 991–1001.
30. Бжихатлов Х.Г., Нахушев А.М. *Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа* // Доклады Академии наук СССР. 1968. Т.183, №2. С. 261–264.
31. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: «Наука и техника». 1987. 588 с.
32. Алиханов А.А. *Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка* // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, №5. С. 658–664.
33. Нахушев А.М. *К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гиперболо-параболического типа* // Дифференц. уравнения. 1978. Т.14, №1. С. 56–73.
34. E.M. Wright *The generalized Bessel function of order greater than one* // Quart. J. Math. Oxford Ser. 1940. Vol. 11. P. 36–48.
35. Псху А.В. *Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка* // Математический сборник. 2011. Т.202, №4. С. 111–122.

Жираслан Анатольевич Балкизов,
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
ул. Шортанова, 89-а,
360005, г. Нальчик, Россия
E-mail: Giraslan@yandex.ru