ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. т 2 (2017). С. 17-24.

УДК 517.957

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Б.А. БАБАЖАНОВ, А.Б. ХАСАНОВ

Аннотация. В этой работе метод обратной спектральной задачи применяется к интегрированию уравнения типа периодической цепочки Тоды. Для однозонного случая выписаны явные формулы для решения аналога системы уравнений Дубровина, и тем самым, для рассматриваемой нами задачи. Эти решения выражаются в терминах эллиптических функций Якоби.

Ключевые слова: Цепочка Тоды, дискретный оператор Хилла, обратная спектральная задача, формулы следов.

Mathematics Subject Classification: 34K29, 37K15, 39A10

1. Введение

Цепочка Тоды [1]

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \exp(u_{n-1} - u_n) - \exp(u_n - u_{n+1}), \quad n \in Z,$$

описывающая динамику частиц на прямой с экспоненциальным взаимодействием в переменных Флашке [2], имеет вид

$$\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(b_n - b_{n+1}), \\ \dot{b}_n = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2), \quad n \in Z. \end{cases}$$

В работах [2]–[4] показана интегрируемость цепочки Тоды методом обратной задачи рассеяния в быстроубывающем случае. Периодическая цепочка Тоды рассматривалась в работах [5]–[13].

В данной работе рассматривается N-периодическое уравнение типа цепочки Тоды

$$\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2) + a_n(b_{n+1}^2 - b_n^2) \\ \dot{b}_n = 2a_n^2(b_{n+1} + b_n) - 2a_{n-1}^2(b_n + b_{n-1}) \\ a_{n+N} = a_n, \quad b_{n+N} = b_n, \quad a_n > 0, \quad n \in Z, \end{cases} \tag{1}$$

при начальных условиях

$$a_n(0) = a_n^0, \quad b_n(0) = b_n^0, \quad n \in Z, \tag{2}$$

с заданными N-периодическими последовательностями a_n^0, b_n^0, $n \in Z$. В системе (1) $\{a_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{b_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ – неизвестные функции.

Непосредственным вычислением можно проверить, что система уравнений (1) эквивалентна следующему операторному уравнению

$$\frac{dL}{dt} = BL - LB,$$

где

$$(L(t)y)_n \equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1},$$

B.A. Babajanov, A.B. Khasanov, Integration of equation of Toda's periodic chain kind.

Поступила 12 мая 2016 г.

$$(B(t)y)_n \equiv a_n a_{n+1} y_{n+2} + a_n(b_n + b_{n+1}) y_{n+1} - a_{n-1}(b_n + b_{n-1}) y_{n-1} - a_{n-1} a_{n-2} y_{n-2},$$

т.е. L и B являются парами Лакса для системы (1). Следовательно, система уравнений (1) является интегрируемой, и следовательно, имеет бесконечное число симметрий [14], [15]. Например, цепочка Тоды является симметрией системы (1):

$$\begin{cases} \frac{\partial a_n}{\partial \tau} = a_n(b_n - b_{n+1}) \,, \\ \frac{\partial b_n}{\partial \tau} = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2), \quad n \in Z, \end{cases}$$

где $a_n = a_n(t,\tau), b_n = b_n(t,\tau)$.

Отметим, что рассматриваемая система (1), подобно [16], [17], может быть использована в некоторых моделях специальных типов линий электропередач.

В этой работе получено представление для решений задачи (1)–(2), в рамках обратной спектральной задачи для дискретного уравнения Хилла

$$(L(t)y)_n \equiv a_{n-1} y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \tag{3}$$

а именно, найден аналог системы уравнений Дубровина для спектральных параметров дискретного оператора $L(t)$.

Хорошо известно, что разрешимость системы уравнений Дубровина в терминах тета-функций в случае периодической цепочки Тоды изучена в работах [6], [7]. Основная часть этих работ заключается в том, что решение обратной задачи по спектральным данным уравнения (3) было сведено к проблеме обращения Якоби абелевых интегралов и выведены явные формулы в терминах тета-функций для коэффициентов дискретного оператора $L(t)$ и, тем самым, найдено решение цепочки Тоды. Аналогичные результаты имеют место и для рассматриваемой в данной работе задаче. Это видно из примера применения основной теоремы представляемой работы, в частном, однозонном случае, который приведен в конце статьи. Для однозонного случая выписаны явные формулы для решения аналога системы уравнений Дубровина, и тем самым задачи (1)–(2), которые выражаются в терминах эллиптических функций Якоби.

2. Необходимые сведения о прямой и обратной спектральной задаче для дискретного уравнения Хилла

В данном параграфе будут приведены необходимые для дальнейшего сведения о прямой и обратной спектральной задаче для уравнения Хилла [2, 9].

Рассмотрим уравнение Хилла

$$(Ly)_n \equiv a_{n-1} y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \tag{4}$$
$$a_{n+N} = a_n, \quad b_{n+N} = b_n, \quad n \in Z \,,$$

со спектральным параметром λ и периодом $N > 0$. Обозначим через $\theta_n(\lambda)$, $n \in Z$ и $\varphi_n(\lambda)$, $n \in Z$ решения уравнения (4) при начальных условиях

$$\theta_0(\lambda) = 1, \quad \theta_1(\lambda) = 0, \qquad \varphi_0(\lambda) = 0, \quad \varphi_1(\lambda) = 1.$$

Обозначим через $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_{2N}$ корни уравнения

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = 0,$$

а через $\mu_1,\ \mu_2,\ ...,\ \mu_{N-1}$ корни уравнения

$$\theta_{N+1}(\lambda) = 0,$$

где $\Delta(\lambda) = \theta_N(\lambda) + \varphi_{N+1}(\lambda)$. Как известно (см. [2]), все λ_i, $i = 1,\ 2,\ ...,\ 2N$ и μ_j, $j = 1,\ 2,\ ...,\ N-1$ являются действительными, корни μ_j простые, а среди корней λ_i могут встречаться двухкратные. Нетрудно видеть, что

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = \left(\prod_{j=1}^{N} a_j\right)^{-2} \prod_{j=1}^{2N} (\lambda - \lambda_j), \tag{5}$$

$$\theta_{N+1}(\lambda) = -a_0 \left(\prod_{j=1}^{N} a_j\right)^{-1} \prod_{j=1}^{N-1} (\lambda - \mu_j). \tag{6}$$

Введем обозначение

$$\sigma_j = sign[\theta_N(\mu_j) - \varphi_{N+1}(\mu_j)], \quad j = 1,\ 2,\ ...,\ N-1.$$

Определение 1. Набор чисел μ_j, $j = 1,\ 2,\ ...,\ N-1$ и последовательности знаков σ_j, $j = 1,\ 2,\ ...,\ N-1$ называются спектральными параметрами уравнения Хилла (4).

Определение 2. Набор, состоящий из спектральных параметров $\{\mu_j, \sigma_j\}_{j=1}^{N-1}$ и чисел λ_i, $i = 1,\ 2,\ ...,\ 2N$, называется спектральными данными уравнения Хилла (4).

Нахождение спектральных данных и изучение их свойств называется прямой спектральной задачей для дискретного уравнения Хилла. Восстановление коэффициентов a_n, b_n уравнения Хилла по его спектральным данным называется обратной спектральной задачей для уравнения (4).

Справедлива следующая лемма

Лемма. Имеют место равенства:

$$b_{k+1} = \frac{\lambda_1 + \lambda_{2N}}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1} (\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1} - 2\mu_{j,k}), \tag{7}$$

$$a_k^2 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_{2N}^2}{8} + \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{N-1} \left(\lambda_{2j}^2 + \lambda_{2j+1}^2 - 2\mu_{j,k}^2\right) -$$

$$- \frac{1}{4}\left[\frac{\lambda_1 + \lambda_{2N}}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1} (\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1} - 2\mu_{j,k})\right]^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\sigma_{j,k}\sqrt{\prod\limits_{i=1}^{2N} (\mu_{j,k} - \lambda_i)}}{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-1} (\mu_{j,k} - \mu_{i,k})}\quad, \tag{8}$$

где $\mu_{j,k}$, $j = 1,\ 2,\ ...,\ N-1$ корни уравнения $\theta_{N+1,k}(\lambda) = 0$. Здесь $\theta_{n,k}(\lambda)$, $n \in Z$ решение уравнения

$$a_{n+k-1}y_{n-1} + b_{n+k}y_n + a_{n+k}y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in Z,$$

удовлетворяющее начальным условиям $\theta_{0,k}(\lambda) = 1$, $\theta_{1,k}(\lambda) = 0$.

Доказательство равенств (7) и (8) имеется в работе [11].

3. Эволюция спектральных параметров

В этой части статьи будет доказан основной результат данной работы.

Теорема. Если функции $a_n(t)$, $b_n(t)$, $n \in Z$, являются решением задачи (1)–(3), то спектр оператора Хилла (3) не зависит от t, а спектральные параметры $\mu_j(t)$, $j = 1,\ 2,\ ...,\ N-1$ удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\dot{\mu}_j(t) = 2\frac{\sigma_j(t)\cdot\sqrt{\prod\limits_{k=1}^{2N}(\mu_j(t)-\lambda_k)}}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N-1}(\mu_j(t)-\mu_k(t))}\cdot[\mu_j(t)+b_1(t)],$$

где

$$b_1(t) = \frac{\lambda_1+\lambda_{2N}}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}(\lambda_{2k}+\lambda_{2k+1}-2\mu_k(t)).$$

Доказательство. Обозначим через $y^j(t) = (y_0^j(t),\ y_1^j(t),\ ...,\ y_N^j(t))^T$, $j = 1,\ 2,\ ...,\ N-1$, нормированные собственные вектор-функции, соответствующие собственным значениям $\lambda = \mu_j(t)$, $j = 1,\ 2,\ ...,\ N-1$, следующей граничной задачи

$$\begin{cases} (L(t)y)_n \equiv a_{n-1}y_{n-1}+b_ny_n+a_ny_{n+1} = \lambda y_n, & 1\le n\le N\\ y_1 = 0, \quad y_{N+1} = 0. \end{cases}$$

В работе [11] было показано, что

$$\dot{\mu}_j(t) = \sum_{n=1}^{N}(2\dot{a}_n(t)y_n^jy_{n+1}^j+\dot{b}_n(t)(y_n^j)^2). \tag{9}$$

На основании (1), равенство (9) можно переписать в виде

$$\dot{\mu}_j(t) = \sum_{n=1}^{N}2[a_n(a_{n+1}^2-a_{n-1}^2)+a_n(b_{n+1}^2-b_n^2)]y_n^jy_{n+1}^j+$$

$$+\sum_{n=1}^{N}[2a_n^2(b_{n+1}+b_n)-2a_{n-1}^2(b_n+b_{n-1})](y_n^j)^2. \tag{10}$$

В равенстве (10) введем следующее обозначение

$$F_n = 2[a_n(a_{n+1}^2-a_{n-1}^2)+a_n(b_{n+1}^2-b_n^2)]y_n^jy_{n+1}^j+$$

$$+[2a_n^2(b_{n+1}+b_n)-2a_{n-1}^2(b_n+b_{n-1})](y_n^j)^2. \tag{11}$$

Найдем последовательность u_n, такое, что $u_{n+1}-u_n = F_n$. Ищем u_n в виде

$$u_n = A_n(y_n^j)^2+2B_ny_n^jy_{n+1}^j+C_n(y_{n+1}^j)^2, \tag{12}$$

где $A_n = A_n(t,\ \mu_j)$, $B_n = B_n(t,\ \mu_j)$ и $C_n = C_n(t,\ \mu_j)$ пока неизвестные коэффициенты.

Учитывая равенсво

$$y_{n+2}^j = \frac{1}{a_{n+1}}[(\mu_j-b_{n+1})y_{n+1}^j-a_ny_n^j],$$

имеем

$$(A_{n+1}-C_n)(y_{n+1}^j)^2-A_n(y_n^j)^2-2B_ny_n^jy_{n+1}^j+$$

$$+\frac{2B_{n+1}}{a_{n+1}}y_{n+1}^j[(\mu_j-b_{n+1})y_{n+1}^j-a_ny_n^j]+\frac{C_{n+1}}{a_{n+1}^2}(\mu_j-b_{n+1})^2(y_{n+1}^j)^2-$$

$$-\frac{2C_{n+1}}{a_{n+1}^2}a_n(\mu_j-b_{n+1})y_n^jy_{n+1}^j+\frac{C_{n+1}}{a_{n+1}^2}a_n^2(y_n^j)^2 = F_n. \tag{13}$$

Из (13) получим

$$-B_n-\frac{a_n}{a_{n+1}}B_{n+1}-\frac{a_n(\mu_j-b_{n+1})}{a_{n+1}^2}C_{n+1}=a_n(a_{n+1}^2-a_{n-1}^2)+a_n(b_{n+1}^2-b_n^2), \tag{14}$$

$$-C_{n-1}+\frac{2}{a_n}(\mu_j-b_n)B_n+\frac{1}{a_n^2}(\mu_j-b_n)^2C_n+\frac{a_n^2}{a_{n+1}^2}C_{n+1}=$$
$$=2a_n^2(b_{n+1}+b_n)-2a_{n-1}^2(b_n+b_{n-1}). \tag{15}$$

Нетрудно видеть, что

$$C_n=2a_n^2(\mu_j+b_n),$$

$$B_n=a_n(a_{n-1}^2-a_n^2+b_n^2-\mu_j^2),$$

являются решениями системы (14) и (15). В силу (12) имеем

$$\dot\mu_j(t)=\sum_{n=1}^{N}\{2[a_n(a_{n+1}^2-a_{n-1}^2)+a_n(b_{n+1}^2-b_n^2)]y_n^jy_{n+1}^j\}+$$
$$+\sum_{n=1}^{N}\{[2a_n^2(b_{n+1}+b_n)-2a_{n-1}^2(b_n+b_{n-1})](y_n^j)^2\}=$$
$$=C_{N+1}(y_{N+2}^j)^2-C_1(y_2^j)^2=2a_0^2(\mu_j+b_1)[(y_N^j)^2-(y_0^j)^2]. \tag{16}$$

Учитывая равенства

$$\left\|\theta^j\right\|^2=\sum_{n=1}^{N}(\theta_n^j)^2=a_N\theta_N^j(\theta_{N+1}^j)'\big|_{\lambda=\mu_j},\quad (\theta^j)'=\frac{d\theta^j}{d\lambda},$$

$$(y_0^j)^2=\frac{(\theta_0^j)^2}{\|\theta^j\|^2},\quad (y_N^j)^2=\frac{(\theta_N^j)^2}{\|\theta^j\|^2},$$

уравнение (16) можно переписать в виде

$$\dot\mu_j(t)=2a_0\left(\theta_N^j(\mu_j(t),t)-\frac{1}{\theta_N^j(\mu_j(t),t)}\right)\frac{1}{(\theta_{N+1}^j)'\big|_{\lambda=\mu_j(t)}}\cdot[\mu_j(t)+b_1]. \tag{17}$$

Используя равенство

$$\theta_N(\lambda,t)\varphi_{N+1}(\lambda,t)-\theta_{N+1}(\lambda,t)\varphi_N(\lambda,t)=1$$

имеем

$$\Delta^2(\mu_j(t))-4=[\theta_N^j(\mu_j(t),t)-\varphi_{N+1}^j(\mu_j(t),t)]^2+4\theta_N^j(\mu_j(t),t)\varphi_{N+1}^j(\mu_j(t),t)-4=$$

$$=[\theta_N^j(\mu_j(t),t)-\varphi_{N+1}^j(\mu_j(t),t)]^2=\left(\theta_N^j(\mu_j(t),t)-\frac{1}{\theta_N^j(\mu_j(t),t)}\right)^2.$$

Отсюда находим

$$\theta_N^j(\mu_j(t),t)-\frac{1}{\theta_N^j(\mu_j(t),t)}=\sigma_j(t)\sqrt{\Delta^2(\mu_j(t))-4}, \tag{18}$$

где

$$\sigma_j(t)=sign\left(\theta_N^j(\mu_j(t),t)-\frac{1}{\theta_N^j(\mu_j(t),t)}\right),\quad j=1,\ 2,\ ...,\ N-1.$$

Из разложений (5) и (6) следует, что

$$\Delta^2(\lambda)-4=\left(\prod_{k=1}^{N}a_k\right)^{-2}\prod_{k=1}^{2N}(\lambda-\lambda_k), \tag{19}$$

$$\theta_{N+1}(\lambda,t)=-a_0\left(\prod_{j=1}^{N}a_j\right)^{-1}\prod_{k=1}^{N-1}(\lambda-\mu_k(t)). \tag{20}$$

Дифференцируя разложение (20) по λ и полагая $\lambda=\mu_j(t)$, имеем

$$\theta'_{N+1}(\lambda)\big|_{\lambda=\mu_j(t)}=-a_0\left(\prod_{k=1}^{N}a_k\right)^{-1}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N-1}(\mu_j(t)-\mu_k(t)). \tag{21}$$

Подставляя (18), (19) и (21) в (17) и учытивая равенство (7), получим равенство (9).

Теперь покажем, что $\lambda_k(t)$ не зависит от t. Пусть $\left\{g_n^k(t)\right\}$ – нормированная собственная функция оператора $L(t)$, соответствующая собственному значению $\lambda_k(t)$, $k=1,\ 2,\ ...,\ 2N$, т.е.

$$a_{n-1}g_{n-1}^k+b_ng_n^k+a_ng_{n+1}^k=\lambda_kg_n^k.$$

Дифференцируя это равенство по t, умножая на g_n^k и суммируя по n, получим

$$\frac{d\lambda_k}{dt}=\sum_{n=1}^{N}\Big(2\dot a_n(t)g_n^kg_{n+1}^k+\dot b_n(t)\left(g_n^k\right)^2\Big). \tag{22}$$

Используя уравнения (1), равенство (22) можно переписать в виде

$$\dot\lambda_k(t)=\sum_{n=1}^{N}\{2[a_n(a_{n+1}^2-a_{n-1}^2)+a_n(b_{n+1}^2-b_n^2)]g_n^kg_{n+1}^k\}+$$
$$+\sum_{n=1}^{N}\{[2a_n^2(b_{n+1}+b_n)-2a_{n-1}^2(b_n+b_{n-1})](g_n^k)^2\}. \tag{23}$$

Аналогично (16), из (23)выводим $\dot\lambda_k(t)=0$. Таким образом, из равенства (21) и независимости от t собственных значений $\lambda_k(t)$ следует доказательство теоремы. **Теорема доказана.**

Замечание. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(3). Для этого сначала найдем спектральные данные λ_i, $\mu_j(0)$, $\sigma_j(0)$ по заданным последовательностям $\{a_n^0\}$ и $\{b_n^0\}$. Затем, используя приведенный в работе [12] алгоритм решения обратной задачи, определим $\mu_{j,k}(0)$, $\sigma_{j,k}(0)$. Применяя доказанную теорему, вычислим $\mu_{j,k}(t)$, $\sigma_{j,k}(t)$. С учётом независимости от k и t собственных значений $\lambda_{i,k}$, используя равенства (7), (8), находим $a_k(t)$, $b_k(t)$.

Следствие. Если $N=2p$ и число p является периодом для начальных последовательностей $\{a_n^0\}$ и $\{b_n^0\}$, то все корни уравнения $\Delta(\lambda)+2=0$ являются двухкратными. Так как функция Ляпунова, соответствующая коэффициентам $a_n(t)$ и $b_n(t)$, совпадает с $\Delta(\lambda)$, то по аналогу обратной теоремы Борга для дискретного уравнения Хилла (см. [18]), число p является также периодом для решения $a_n(t)$, $b_n(t)$ по переменной n.

Проиллюстрируем, применение основной теоремы для решения задачи (1)–(2) при начальных условиях

$$(a_n^0)^2 = \frac{5}{8} - (-1)^n \cdot \frac{3}{8}, \quad b_n^0 = \frac{1}{2}, \quad n \in Z.$$

В этом случае

$$N = 2, \ \ \lambda_1 = -1, \ \ \lambda_2 = 0, \ \ \lambda_3 = 1, \ \ \lambda_4 = 2, \ \ \mu(0) = \frac{1}{2}, \ \ \sigma(0) = 1.$$

Используя вышеприведенное замечание, получим

$$a_n^2(t) = \frac{1}{2}\big(1 + \mu(t) - \mu^2(t)\big) - (-1)^n \frac{1}{2}\sqrt{\mu(t)(\mu(t)-2)(\mu^2(t)-1)},$$

$$b_n(t) = \frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2}(1 - 2\mu(t)), \quad n \in Z,$$

где $\mu(t)$ определяется из уравнения

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \sqrt{\mu(t)(2-\mu(t))(1-\mu^2(t))},$$

с начальными условиями $\mu(0) = \frac{1}{2}$.

Решая это уравнение при начальном данном $\mu(0) = \frac{1}{2}$ (см. [19]), находим, что

$$\mu(t) = \frac{sn^2\left(t - t_0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1 + cn^2\left(t - t_0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)},$$

где $sn\left(t_0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{\frac{2}{3}}$. Таким образом,

$$a_n^2(t) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}\left(\frac{1 - 3cn^2\left(t - t_0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1 + cn^2\left(t - t_0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right)^2 -$$

$$-(-1)^n \frac{2sn\left(t - t_0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) cn\left(t - t_0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) dn\left(t - t_0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(1 + cn^2\left(t - t_0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2},$$

$$b_n(t) = \frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{3cn^2\left(t - t_0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1}{1 + cn^2\left(t - t_0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right), \quad n \in Z,$$

где sn, cn и dn суть эллиптические функции Якоби.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Toda *Waves in nonlinear lattice.* // Suppl., Progress Thoer. Physics, 1970. 45. P. 174–200.
2. H. Flaschka *On the Toda lattice. II.* // Progress Theor. Physics. 1974. 51. № 3. P. 703–716.
3. M. Toda *Theory of Nonlinear Lattices.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1981.
4. Манаков С.В.*О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах* // Журн. эксп. и теорет. физики. 1974. 67, № 2. С. 543–555.
5. Дубровин Б. А., Матвеев В.Б., Новиков С.П. *Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия* // Успехи мат. наук. 1976. 31. № 1. С. 55–136.
6. Date E., Tanaka S. *Analog of inverse scattering theory for discrete Hill's equation and exact solutions for the periodic Toda lattice* // Progress Theor. Physics. 1976. 55. № 2. P. 217–222.
7. Кричевер И.М. *Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения* // Успехи мат. наук, 1978. 33, № 4. С. 215–216.
8. Самойленко В.Г., Прикарпатский А.К. *Периодическая задача для цепочки Тода* // Украинский мат. журнал. 1982. Т. 34, № 4. С. 469–475.
9. G. Teschl *Jacobi Operators and Completely Integrable Lattices.* Mathematical Surveys and Monographs, vol.72, AMS, 2000.
10. P.G. Grinevich, I.A. Taimanov *Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type* // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 2008. V. 224. P. 125–138.
11. B.A. Babajanov, M. Feckan, G.U. Urazbaev *On the periodic Toda Lattice with self-consistent source* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. V. 20, Issue 3, 2014.
12. Бабажанов Б.А., Хасанов А.Б. *О периодической цепочке Тоды с нтеграль-ным источником* // ТМФ, 2015. Т. 184, № 2. С. 253–268.
13. Бабажанов Б.А. *Об одном методе интегрирования периодической цепочки Тоды* // УзМЖ. 2015. № 2. С. 16–24.
14. Ямилов Р.И. *Условия интегрируемости для аналогов релятивистской цепочки Тоды* // Теор. и мат. физ. 151:1. 2007. С. 66–80.
15. R. Yamilov *Symmetries as integrability criteria for differential difference equations* // J. Phys. A: Math. Gen. 39 (2006) R541-R623.
16. C. David, G.-J. Niels, A.R. Bishop, A.T. Findikoglu and D. Reago *A perturbed Toda lattice model for low loss nonlinear transmission lines* // Phys. D: Nonlinear Phenom. 1998. 123. P.291–300.
17. J. Garnier and F.Kh. Abdullaev *Soliton dynamics in a random Toda* chain Phys. 2003. Rev. E 67 026609-1
18. H. Hochstadt *On the theory of Hill's matrices and related inverse spectral problems* // Linear algebra and its applications. 1975. V. 11. P. 41–52.
19. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* М., Физико-математическая литература, 1963.

Базар Атажанович Бабажанов,
Ургенчский государственный университет,
ул. Хамид Алимджон, 14,
220100, г. Ургенч, Узбекистон
E-mail: `a.murod@mail.ru`

Акназар Бекдурдиевич Хасанов,
Ургенчский государственный университет,
ул. Хамид Алимджон, 14,
220100, г. Ургенч, Узбекистон
E-mail: `ahasanov2002@mail.ru`