ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. т 2 (2017). С. 3-16.

УДК 517.98+517.9:532,

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПОВЕРХНОСТНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ

О.А. АНДРОНОВА, В.И. ВОЙТИЦКИЙ

Аннотация. Изучается спектральная задача в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, зависящая от ограниченного операторного коэффициента $S > 0$ и параметра диссипации $\alpha > 0$. В общем случае установлены достаточные условия, при которых задача имеет дискретный спектр, состоящий из счетного числа изолированных конечнократных собственных значений с предельной точкой на бесконечности, а также условия при которых из системы корневых элементов можно выделить базис Абеля-Лидского в пространстве $L_2(\Omega)$. В модельной одномерной и двумерной задаче установлена локализация собственных значений и найдены критические значения α.

Ключевые слова: спектральный параметр, квадратичный операторный пучок, локализация собственных значений, компактный оператор, классы Неймана-Шаттена S_p, базисность по Абелю-Лидскому.

Mathematics Subject Classification: 35P05, 35P10

Памяти Томаса Яковлевича Азизова, чьи результаты и лекции помогли авторам в написании данной работы.

1. Введение

В данной работе изучаются спектральные свойства одной линейной задачи математической физики в зависимости от размерности m области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ (с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$), ограниченного в $L_2(\Omega)$ операторного коэффициента $Q > 0$ и параметра $\alpha > 0$, моделирующего интенсивность диссипации энергии на части границы Γ. Итак, будем изучать задачу

$$-\Delta u = -\lambda^2 Qu \quad (\text{в } \Omega), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha\lambda u \quad (\text{на } \Gamma), \tag{2}$$

$$u = 0 \quad (\text{на } S := \partial\Omega \setminus \Gamma), \tag{3}$$

для неизвестного поля $u = u(x)$ $(x \in \Omega)$ и спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$.

Данная спектральная постановка порождается начально-краевой задачей, получающейся после линеаризации нелинейной задачи, изучавшейся ранее в работах И.Д. Чуешова [1]–[3]. Похожие нелинейные постановки можно найти также в статье J. Lagnese [4], где исследован вопрос затухания решений волнового уравнения в ограниченной области при наличии диссипации на границе, а также в работе I. Lasiecka и D. Tataru [5], посвященной изучению равномерной стабилизации решений на границе области для полулинейного волнового уравнения с нелинейной диссипацией на границе.

O.A. Andronova, V.I. Voytitskiy, On spectral properties of one boundary value problem with a surface energy dissipation.

Поступила 1 февраля 2016 г.

Следует отметить, что в одномерном случае аналогичный вид имеет известная спектральная задача Редже. Такая задача возникает в теории рассеяния. В статье А.А. Шкаликова [6] задача Редже сведена к квадратичному пучку с неограниченными операторными коэффициентами, установлена локализация спектра, получены оценки резольвенты, полнота и минимальность подсистем корневых функций, отвечающих «половине» собственных значений. По-видимому, подобный подход применим для исследования задачи (1)–(3). Например, он применялся в работе А.А. Шкаликова и А.В. Шкреда [7] для исследования одной трехмерной задачи из теории упругости.

В данной работе с помощью метода вспомогательных краевых задач типа С.Г. Крейна задача (1)–(3) сводится к некоторому квадратичному операторному пучку, который попадает в общий класс, описанный в пионерской работе М.Г. Крейна и Х. Лангера [8] (см. также [9], с. 353–369). Однако, общие свойства операторных коэффициентов в данной задаче не позволяют применить к ней известные результаты о свойствах сильно демпфированных или слабо демпфированных пучков.

В случае $Q = I$ (единичный оператор) данная спектральная, а также начально-краевая задачи, изучались ранее О.А. Андроновой и Н.Д. Копачевским в [10], где была доказана дискретность спектра, а также рассмотрены некоторые модельные примеры. В данной работе получены более общие спектральные результаты о существовании счетного числа изолированных конечнократных собственных значений и базисности по Абелю-Лидскому на основе теорем Т.Я. Азизова, М.Г. Крейна–Х. Лангера, А.Г. Костюченко–М.Б. Оразова, а также М.В. Келдыша и В.Б. Лидского. Кроме этого, в работе более точно описываются свойства модельной двумерной задачи, устанавливается динамика изменения собственных значений в зависимости от параметра $\alpha > 0$. Оказывается, каждое собственное значение проходит путь вдоль соответствующей непрерывной кривой в правой комплексной полуплоскости, стартуя при $\alpha = 0$ с мнимой оси и возвращаясь на нее в пределе при $\alpha \to +\infty$. Для части собственных значений численно найдены критические значения α, соответствующее началу их движения в сторону мнимой оси.

Отметим еще, что задачи с параметром в краевых условиях изучались ранее многими авторами. В работах Е.М. Руссаковского и А.А. Шкаликова (см. [11] и [12]) построена общая теория обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка со спектральным параметром в уравнении и краевом условии, установлены достаточные условия существования цепочек из собственных и присоединенных элементов, образующих базис либо полную и минимальную систему в пространствах гладких функций. Достаточно общие постановки эллиптических краевых задач с линейным вхождением параметра в краевые условия рассмотрены в работах J. Ercolano, M. Schechter, В.В. Барковского, А.Н. Комаренко (см. [13]–[15]). Асимптотика собственных значений подобных задач изучалась в работах А.Н. Кожевникова (см. [16], [17]). В приложениях такие задачи возникают при исследовании гидродинамических систем со свободными границами (см. работы С.Г. Крейна и Н.Д. Копачевского), в теории дифракции (см. работы М.С. Аграновича и соавторов) и др. В данной работе используется абстрактный подход к изучению краевых задач и задач сопряжения в липшицевых областях для эллиптических дифференциальных выражений, разработанный С.Г. Крейном и Н.Д. Копачевским. Он основан на использовании абстрактной и обобщенных формул Грина, приспособленных к конкретной задаче, а также на рассмотрении вспомогательных краевых задач и отвечающих им операторов (см. работы [18]–[23]). Такой подход, в-частности, использовался в работах второго автора статьи (см. [21], [24], [25]) при исследовании некоторых задач с линейным вхождением параметра в уравнения и краевые условия.

2. Сведение задачи к исследованию квадратичного операторного пучка

Для того чтобы сформулировать задачу (1)–(3) в операторной форме, воспользуемся обобщенной формулой Грина для оператора Лапласа и смешанных краевых задач, которая получается как частный случай абстрактной формулы Грина, доказанной в работах Н.Д. Копачевского с соавторами [21]–[23]. В последней работе на с. 97 приведен следующий результат.

Теорема 2.1. *Пусть липшицева граница* $\partial\Omega$ *области* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *разбита на куски* Γ_k *с липшицевыми границами* $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1,q}$. *Тогда имеет место следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач:*

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall\, \eta, u \in \widehat{H}^1(\Omega),$$

здесь косыми скобками обозначены значения функционалов, определяющихся элементами $u - \Delta u \in (\widehat{H}^1(\Omega))^*$ *и* $\partial_k u := \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$, *при этом операторы следа* $\gamma_k \eta := \eta\,|_{\Gamma_k}$ *переводят ограниченным образом* $H^1(\Omega)$ *в* $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$.

Замечание 2.1. Через $\widehat{H}^1(\Omega)$ обозначается подпространство таких функций из $H^1(\Omega)$, что каждый из операторов следа γ_k ограниченно переводит их в соответствующее пространство $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ функций, заданных на Γ_k и продолжимых нулем в классе $H^{1/2}(\Gamma)$ (см. [23]).

Если теперь в пространстве С.Л. Соболева $H^1(\Omega)$ ввести эквивалентную стандартной норму

$$\|u\|_S^2 := \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\Omega + \int\limits_{S} |u|^2 \, dS,$$

и полагать, что $u \in H^1_{0,S}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \ u|_S = 0\}$, то след такой функции на $\Gamma = \partial\Omega \backslash S$ будет продолжен нулем в классе $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Отсюда с учетом теоремы 2.1 получаем такой результат.

Следствие 2.1. *Пусть липшицева граница* $\partial\Omega$ *области* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *разбита на две части* Γ *и* S *с липшицевыми границами. Тогда имеет место обобщенная формула Грина:*

$$(\eta, u)_{H^1_{0,S}(\Omega)} = \langle \eta, -\Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall\, \eta, u \in H^1_{0,S}(\Omega), \tag{4}$$

где $\gamma\eta := \eta\,|_\Gamma$: $H^1_{0,S}(\Omega) \to \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ *— оператор следа на* Γ.

Будем теперь искать решения вспомогательных краевых задач С.Г. Крейна, основываясь на формуле (4).

Первая вспомогательная задача (задача Ньютона для уравнения Пуассона): по функции f, заданной в Ω, найти решение $v \in H^1_{0,S}(\Omega)$ задачи

$$-\Delta v = f \ (\text{в}\,\Omega), \qquad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \ (\text{на}\,\Gamma), \qquad v = 0 \ (\text{на}\,S). \tag{5}$$

Согласно формуле (4) классическое решение должно удовлетворять тождеству

$$(\eta, v)_{H^1_{0,S}(\Omega)} = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1_{0,S}(\Omega).$$

Будем называть слабым решением задачи (4) любой элемент $v \in H^1_{0,S}(\Omega)$, удовлетворяющий этому тождеству для фиксированной функции f.

Определение 2.1. Говорят (см., например, [18], с. 32–40), что два гильбертовых пространства F и E образуют гильбертову пару (будем использовать обозначение $(F; E)$), если F является плотным линейным подмножеством в E и существует ограниченный оператор вложения F в E, т.е. существует $a > 0$:

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F, \quad \forall u \in F.$$

При этом порождающим оператором гильбертовой пары $(F; E)$ называется оператор $A: \ F \to F^*$, единственным образом определяющийся из тождества

$$\langle \eta, Av \rangle_E = (\eta, v)_F, \quad \forall \eta, v \in F.$$

Он имеет самосопряженное сужение $A: \ \mathcal{D}(A) \subset E \to E = \mathcal{R}(A)$, которое является положительно определенным оператором.

Поскольку пространства $H^1_{0,S}(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ образуют гильбертову пару пространств, причем $H^1_{0,S}(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega)$, то справедливо утверждение.

Лемма 2.1. *При любом $f \in \left(H^1_{0,S}(\Omega)\right)^*$ существует единственное слабое решение $v = A^{-1}f$ задачи* (5). *При этом оператор A является оператором гильбертовой пары $(H^1_{0,S}(\Omega); L_2(\Omega))$. Сужение этого оператора, обладающее свойством $\mathcal{R}(A) = L_2(\Omega)$, является неограниченным положительно определенным оператором в $L_2(\Omega)$, при этом $\mathcal{D}(A^{1/2}) = H^1_{0,S}(\Omega)$ и справедливо тождество*

$$\langle \eta, Av \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, v)_{H^1_{0,S}(\Omega)} = \left(A^{1/2}\eta, A^{1/2}v\right)_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta, v \in H^1_{0,S}(\Omega).$$

Оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ имеет дискретный положительный спектр $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $\lambda = +\infty$ и асимптотическим поведением (см. [26]*)*

$$\lambda_k(A) = c_A k^{2/m}[1 + o(1)], \ (k \to \infty), \ c_A > 0, \ m \geq 2. \tag{6}$$

Обратный к нему оператор $A^{-1} : L_2(\Omega) \to \ L_2(\Omega)$ является компактным положительным оператором.

Вторая вспомогательная задача (задача Ньютона для уравнения Лапласа): по функции ψ, заданной на Γ, найти решение $w \in H^1_{0,S}(\Omega)$ задачи

$$-\Delta w = 0 \ (\text{в}\,\Omega), \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi \ (\text{на}\,\Gamma), \qquad w = 0 \ (\text{на}\,S). \tag{7}$$

Согласно формуле (4) классическое решение этой задачи должно удовлетворять тождеству

$$(\eta, w)_{H^1_{0,S}(\Omega)} = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta \in H^1_{0,S}(\Omega).$$

Будем называть слабым решением задачи (7) любой элемент $w \in H^1_{0,S}(\Omega)$, удовлетворяющий этому тождеству для фиксированной функции ψ.

В силу ограниченности оператора следа $\gamma : \ H^1_{0,S}(\Omega) \to \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ (см. [27]) для фиксированного $\psi \in (\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma)$ выражение $\langle \gamma\eta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)}$ является ограниченным функционалом на пространстве $H^1_{0,S}(\Omega)$. Следовательно по теореме Рисса существует единственный элемент $w = T\psi \in H^1_{0,S}(\Omega)$ такой, что

$$\langle \gamma\eta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = (\eta, T\psi)_{H^1_{0,S}(\Omega)}, \quad \eta \in H^1_{0,S}(\Omega), \ \psi \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{8}$$

Таким образом, определен ограниченный оператор $T : \ H^{-1/2}(\Gamma) \to H^1_{0,S}(\Omega)$, сопряженный к оператору γ в смысле тождества (8). Причем $\mathcal{R}(T) = H^1_{0,S,h}(\Omega)$ — подпространство гармонических функций из $H^1_{0,S}(\Omega)$. Отсюда приходим к такому результату.

Лемма 2.2. *При любой $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ существует единственное слабое решение $w = \ T\psi \ \in \ H^1_{0,S,h}(\Omega)$ задачи* (7).

Сумма $u = v + w \in H^1_{0,S}(\Omega)$ решений первой и второй вспомогательных задач является слабым решением задачи

$$-\Delta u = f \ (\text{в}\,\Omega), \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \psi \ (\text{на}\,\Gamma), \qquad u = 0 \ (\text{на}\,S). \tag{9}$$

При этом решение является обобщенным, если $f \in L_2(\Omega)$, $\psi \in L_2(\Gamma)$. Верно и обратное утверждение (см. абстрактный результат в [19]).

Лемма 2.3. *Любой элемент $u \in H^1_{0,S}(\Omega)$ может быть единственным образом представлен в виде суммы решений первой и второй вспомогательных краевых задач, т.е. в виде*

$$u = v + w = A^{-1}f + T\psi, \tag{10}$$

где $f = -\Delta u \in \left(H^1_{0,S}(\Omega)\right)^*$, $\psi = \partial u/\partial n \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Отсюда следует, что обобщенные собственные значения и собственные функции исходной задачи (1)–(3) удовлетворяют операторному соотношению

$$u = -\lambda^2 A^{-1}Qu + \alpha T\gamma u, \quad u \in H^1_{0,S}(\Omega). \tag{11}$$

Осуществляя замену $\eta = A^{1/2}u \in L_2(\Omega)$ и действуя на обе части (11) оператором $A^{1/2}$, получаем эквивалентную исходной спектральную задачу для пучка

$$L_\alpha(\lambda)\eta := \lambda^2 A^{-1/2}QA^{-1/2}\eta - \lambda\alpha(A^{1/2}T)(\gamma A^{-1/2})\eta + \eta = 0, \quad \eta \in L_2(\Omega). \tag{12}$$

В силу тождества (8) и компактности вложения $H^{1/2}(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$ несложно доказать, что операторы $\gamma A^{-1/2} : \ L_2(\Omega) \to L_2(\Gamma)$ и $A^{1/2}T : \ L_2(\Gamma) \to L_2(\Omega)$ являются взаимно сопряженными и компактными. Отсюда оператор $\mathcal{B} := (A^{1/2}T)(\gamma A^{-1/2})$ является неотрицательным компактным оператором в $L_2(\Omega)$, при этом он имеет бесконечномерное ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{B} := \{\eta \in L_2(\Omega) : \ \eta = A^{1/2}u, \ u \in H^1_0(\Omega)\}$. Если область кусочно-гладкая и ее размерность $m \geq 2$, то справедлива асимптотическая формула (см. [26])

$$\lambda_k(\mathcal{B}) = c_{\mathcal{B}}k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)], \ (k \to \infty), \ c_{\mathcal{B}} > 0. \tag{13}$$

Оператор $\mathcal{A} := A^{-1/2}QA^{-1/2}$ является, очевидно, компактным положительным оператором в $L_2(\Omega)$. Используя введенные обозначения, задачу (12) можно переписать в виде

$$L_\alpha(\lambda)\eta = \lambda^2\mathcal{A}\eta - \lambda\alpha\mathcal{B}\eta + \eta = 0, \quad \eta \in L_2(\Omega). \tag{14}$$

3. Простейшие свойства решений спектральной задачи

Самосопряженные квадратичные пучки вида (14) изучались ранее многими авторами, первые результаты исследований отражены в монографии [9], с. 353–369. Однако, пучок с конкретными операторами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ не попадает в классы задач, описанные в [9], для которых установлена локализация собственных значений и доказаны теоремы о полноте.

Общие свойства пучка (14) установлены ранее в работе [10]. Приведем здесь их без доказательства.

1^0. Число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи.

2^0. Все собственные значения расположены в правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси.

3^0. Спектр задачи может состоять лишь из конечнократных собственных значений $\{\lambda_k(\alpha)\}_{k=1}^\infty$ с единственной возможной предельной точкой $\lambda = \infty$ (это следует из теоремы И.Ц. Гохберга, справедливой для фредгольмовых операторных пучков, см. [9], с. 39). При этом в силу компактности оператора $\mathcal{B}$ спектр может содержать конечное число собственных значений или вовсе их не иметь (см. пример в [9], с. 357).

4^0. При $\alpha = 0$ спектр задачи находится на мнимой оси (гиперболический случай) и состоит из бесконечного числа собственных значений

$$\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty, \quad \lambda_k = \pm i\lambda_k^{-1/2}(\mathcal{A}), \ k = 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

5^0. Если α формально равно ∞, т.е. рассматривается предельная задача

$$-\Delta u = -\lambda^2 S u \ (\text{в } \Omega), \quad u = 0 \ (\text{на } \partial\Omega),$$

то спектр также находится на мнимой оси и состоит из бесконечного числа собственных значений

$$\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}, \qquad \lambda_k = \pm i \lambda_k^{-1/2}(\mathcal{A}_0), \ k = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

где $\mathcal{A}_0 := A_0^{-1/2} Q A_0^{-1/2}$ — компактный положительный в $L_2(\Omega)$ оператор, A_0 — положительно определенный в $L_2(\Omega)$ оператор задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

6^0. При возрастании α от нуля собственные значения $\lambda_k(\alpha)$, совпадающие с числами (15) при $\alpha = 0$, сдвигаются в правую комплексную полуплоскость перпендикулярно мнимой оси, а при $\alpha \to +\infty$ подходят к мнимой оси к предельным значениям (16) также по перпендикулярным траекториям. Отсюда следует, что для каждого k существует некоторое критическое значение $\alpha_k^* > 0$, после которого $\lambda_k(\alpha)$ начинает двигаться с ростом α не от мнимой оси, а к ней, попадая на нее в пределе при $\alpha = +\infty$. Рассмотренные ниже модельные примеры покажут, что критические значения могут либо не зависеть от собственных значений, либо зависеть от них, но при $k \to \infty$ сходиться к определенному числу. В общем случае этот факт не доказан.

4. Теорема о дискретности спектра

Осуществим в задаче (14) замену спектрального параметра по формуле $\lambda = \mu^{-1}$ и рассмотрим вместо нее задачу

$$M_\alpha(\mu)\eta := \mu^2 \eta - \mu\alpha\mathcal{B}\eta + \mathcal{A}\eta = 0. \tag{17}$$

В статье [10] (на стр. 25-27) приведено доказательство следующей теоремы, принадлежащей Т.Я. Азизову (ее доказательство существенным образом опирается на теорему В.И. Мацаева о свойствах несамосопряженного вольтеррового оператора, см. [9], с. 267).

Теорема 4.1. *Пусть*

$$\Phi(\mu) := \mu^2 I + \mu B + C, \quad B = B^* \in \mathfrak{S}_\infty, \ 0 \leqslant C = C^* \in \mathfrak{S}_\infty. \tag{18}$$

Если выполнено хотя бы одно из условий

$$B \in \mathfrak{S}_p, \ C^{1/2} \in \mathfrak{S}_q \backslash \mathfrak{S}_p \ (q > p > 1) \tag{19}$$

или

$$B \in \mathfrak{S}_p \backslash \mathfrak{S}_q, \ C^{1/2} \in \mathfrak{S}_q \quad (1 < q < p), \tag{20}$$

то пучок $\Phi(\mu)$ имеет счетное множество ненулевых конечнократных собственных значений с предельной точкой $\lambda = 0$.

Напомним (см. [9], с. 46, 120), что компактный (вполне непрерывный) оператор A принадлежит классу Неймана-Шаттена $\mathfrak{S}_p$ $(p > 0)$, если его s-числа, т.е. собственные значения оператора $(A^*A)^{1/2}$, суммируются со степенью p, т.е.

$$\sum_{j=1}^{\infty} (s_j(A))^p = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\lambda_j \left(A^*A\right)^{1/2}\right)^p < \infty.$$

Очевидно, что если $A \in \mathfrak{S}_p$, то $A \in \mathfrak{S}_{p'}$ для любого $p' > p$, поэтому целесообразно вводить число $p_* := \inf\{p \in \mathbb{R} : \ A \in \mathfrak{S}_p\}$.

Замечание 4.1. Так как $s-$числа компактного неотрицательного оператора A совпадают с его собственными значениями, то из асимптотической формулы $\lambda_k(A) = k^{-\beta}[1 + o(1)]$, $(k \to \infty)$ следует, что $A \in \mathfrak{S}_p, \ p > p_* = 1/\beta$, $A^{1/2} \in \mathfrak{S}_p, \ p > p_* = 2/\beta$.

Известно, что для любого ограниченного оператора B произведения $AB, BA \in \mathfrak{S}_p$ как только $A \in \mathfrak{S}_p$. В [28], с. 395, доказано, что при условии $T_i \in \mathfrak{S}_{p_i},\ 0 < p_i \leqslant \infty,\ i = 1, 2$, выполнено $T_1T_2 \in \mathfrak{S}_p$, где $p^{-1} = p_1^{-1} + p_2^{-1}$.

Замечание 4.2. По индукции устанавливается справедливость аналогичной формулы для произведения произвольного конечного числа операторов T_i, в частности $T_1T_2T_3 \in \mathfrak{S}_p$, где $p^{-1} = p_1^{-1} + p_2^{-1} + p_3^{-1}$.

Будем считать, что $m \geq 2$. На основе замечания 4.1 и асимптотической формулы (13) получаем, что $\mathcal{B} \in \mathfrak{S}_p,\ p > p_* = m - 1$.

Лемма 4.1. *Если оператор $Q > 0$ ограниченно обратим, то $\mathcal{A}^{1/2} \in \mathfrak{S}_p,\ p > p_* = m$.*

Доказательство. При выполнении условий леммы найдутся положительные константы c_* и c^* такие, что $c_*I \leqslant Q \leqslant c^*I$. Отсюда $c_*A^{-1} \leqslant A^{-1/2}QA^{-1/2} \leqslant c^*A^{-1}$, а значит $c_*\lambda_k(A^{-1}) \leqslant \lambda_k(\mathcal{A}) \leqslant c_*\lambda_k(A^{-1})$. В силу асимптотической формулы (6) получаем, что $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p,\ p > p_* = m/2$. Отсюда, используя признаки сравнения числовых рядов, заключаем, что $\mathcal{A} \in \mathfrak{S}_p,\ p > p_* = m/2$, а значит $\mathcal{A}^{1/2} \in \mathfrak{S}_p,\ p > p_* = m$. □

Замечание 4.3. Для произвольного ограниченного $Q > 0$ справедливо, что $\mathcal{A}^{1/2} \in \mathfrak{S}_p,\ p > m$.

Лемма 4.2. *Если оператор $Q \in \mathfrak{S}_r,\ r > 0$, то $\mathcal{A}^{1/2} \in \mathfrak{S}_p$, где $p \in \left(\dfrac{2rm}{2r+m}; 2r\right)$.*

Доказательство. Из формулы (6) имеем $A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_{p'},\ p' > p_* = m$. Согласно замечанию 4.2 отсюда получаем, что $\mathcal{A} = A^{-1/2}QA^{-1/2} \in \mathfrak{S}_p$ для

$$p = ((p')^{-1} + r^{-1} + (p')^{-1})^{-1} = \left(\frac{2r + p'}{rp'}\right)^{-1} = \frac{rp'}{2r + p'}.$$

Следовательно, при любом $p' > m$ имеем $\mathcal{A}^{1/2} \in \mathfrak{S}_p$ для $p = (2rp')/(2r + p')$. Образом функции $f(p') := (2rp')/(2r + p')$ на множестве $(m; +\infty)$ является интервал $((2rm)/(2r + m); 2r)$. □

Лемма 4.3. *Если оператор $Q \in \mathfrak{S}_r$ для некоторого $\dfrac{m-1}{2} < r < \dfrac{(m-1)m}{2}$, то $\mathcal{A}^{1/2} \in \mathfrak{S}_{m-1}$.*

Доказательство. Следует непосредственно из леммы 4.2, поскольку условия леммы равносильны тому, что $m - 1 \in \left(\dfrac{2rm}{2r+m}; 2r\right)$. □

Теорема 4.2. *Если оператор Q ограниченно обратим и $m \geq 2$ либо $m = 3$ и $S \in \mathfrak{S}_r$ для некоторого $r \in (1; 3)$, то операторный пучок (17) имеет счетное множество ненулевых конечнократных собственных значений с предельной точкой $\mu = 0$.*

Доказательство. Применим к пучку (17) теорему 4.1 при $B = -\alpha\mathcal{B}$, $C = \mathcal{A}$.

Если оператор Q ограниченно обратим, то согласно лемме 4.1 имеем $\mathcal{A}^{1/2} \in \mathfrak{S}_p,\ p > p_* = m$. Так как ранее было установлено, что $\mathcal{B} \in \mathfrak{S}_p,\ p > p_* = m - 1$, то для любого числа $q \in (m-1; m)$ имеем $\mathcal{B} \in \mathfrak{S}_q$, при этом $\mathcal{A}^{1/2} \notin \mathfrak{S}_q$.

Если $m = 3$ и $S \in \mathfrak{S}_r,\ r \in (1; 3)$, то выполнены условия леммы 4.3, согласно которой $\mathcal{A}^{1/2} \in \mathfrak{S}_{m-1}$. Однако, в силу свойства $\mathcal{B} \in \mathfrak{S}_p,\ p > p_* = m-1$, получаем, что $\mathcal{B} \notin \mathfrak{S}_{m-1}$. □

Следствие 4.1. *При выполнении условий теоремы исходный пучок (14) (и вместе с ним (12)) имеет счетное множество конечнократных собственных значений с предельной точкой $\lambda = \infty$.*

5. Теоремы о полноте корневых функций

Обратимся теперь к известным результатам по теории самосопряженных квадратичных операторных пучков. Одним из первых результатов этой теории является следующая теорема М.Г. Крейна и Х. Лангера, см. [8].

Теорема 5.1. *Пусть имеется оператор-функция* $L(\mu) := \mu^2 I + \mu D + C$, *действующая в гильбертовом пространстве* H, *где* $D = D^* \in \mathcal{L}(H)$, $C \geq 0$, $C \in \mathfrak{S}_\infty(H)$. *Пусть ее невещественный спектр (который состоит из нормальных собственных значений, симметричных относительно вещественной оси) разбит на две части* $\sigma_0(L) = \Lambda \cup \overline{\Lambda}$ $(\Lambda \cap \overline{\Lambda} = \emptyset)$ *тогда операторное уравнение* $L(Z) := Z^2 + ZD + C = 0$ *имеет решение* $Z_\Lambda = KC^{1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$, *где* $K \in \mathcal{L}(H)$ — *угловой оператор. При этом выполнены свойства:*
1) $Z_\Lambda^* Z_\Lambda \leqslant C$;
2) $\sigma_0(Z_\Lambda) = \Lambda$;
3) для любого $\mu \in \Lambda$ *оператор* Z_Λ *и пучок* $L(\mu)$ *имеют одинаковые жордановые цепочки.*

Ее доказательство основано на применении теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой. Аналогичным методом в работе А.Г. Костюченко и М.Б. Оразова [29] установлена связь между жордановыми цепочками пучка и операторного корня в случае вещественных собственных значений. Там доказано, что весь дискретный спектр пучка $L(\mu)$ распадается в общем случае на четыре части

$$\sigma_d(L) = F_1 \cup \Lambda \cup F_2 \cup \overline{\Lambda}, \tag{21}$$

где множества $F_i \subset \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ могут иметь непустое пересечение, при этом

$$\sigma_d(Z_\Lambda) = F_1 \cup \Lambda, \quad \sigma_d(Z_{\overline{\Lambda}}^*) = F_2 \cup \overline{\Lambda} \tag{22}$$

и $L(\mu) = (\mu I - Z_\Lambda)(\mu I - Z_{\overline{\Lambda}}^*)$. Также описана процедура, позволяющая выделить из жордановых цепочек пучка, отвечающих $\mu \in F_1$, те части, которые являются корневыми функциями для оператора Z_Λ. Эти результаты позволяют в полной мере по свойствам операторов Z_Λ и $Z_{\overline{\Lambda}}^*$ описать спектральные свойства пучка $L(\mu)$, в частности, из полноты системы корневых функций оператора Z_Λ следует полнота собственных и присоединенных элементов пучка $L(\mu)$. Отметим, что полноту и минимальность подсистем корневых элементов пучка $L(\mu)$ можно доказывать, основываясь на порядке и оценках роста на лучах мероморфной функции $L^{-1}(\mu)$, см. статью А.Г. Костюченко и А.А. Шкаликова [30], однако, в данной работе такой метод не используется.

Будем использовать далее теорему М.В. Келдыша и В.Б. Лидского, доказанную в [31], см. также [9], с. 302. Пусть Z — некоторый линейный оператор, $\widetilde{W}(Z)$ — замыкание множества $\{(Zu, u) : \ u \in H\}$. Оно либо совпадает с углом в комплексной плоскости раствора $\theta_Z \leqslant \pi$ (с вершиной в начале координат) либо $\widetilde{W}(Z) = \mathbb{C}$.

Теорема 5.2. *Если для компактного оператора* Z *множество* $\widetilde{W}(Z)$ *является углом раствора* $\theta_Z = \pi/p$, *где* $p \geq 1$, *и* $Z \in \mathfrak{S}_p(H)$ *(можно требовать более слабое условие* $s_n(Z) = o(n^{-1/p})$ $(n \to \infty)$*), то система корневых элементов оператора* Z *является полной в гильбертовом пространстве* H.

В работе [32] (см. также [33] и [34], гл. 5) установлен следующий результат.

Теорема 5.3. *Если в условиях теоремы 5.2 множество* $\widetilde{W}(Z)$ *является углом раствора* $\theta_Z < \pi/p$, *где* $p \geq 1$ *и* $Z \in \mathfrak{S}_p(H)$, *то система корневых элементов оператора* Z *образует в* H *ряд Фурье, суммируемый методом Абеля (далее будем использовать термин базис Абеля-Лидского порядка* $\beta > p$*).*

Замечание 5.1. Определение данного метода суммирования впервые дано В.Б. Лидским в статье [32], пояснения можно найти в недавних работах М.С. Аграновича. В [34], например, можно найти такое определение. Для компактного оператора A с нулевым ядром и образом $\widetilde{W}(A)$, симметричным относительно числа $\lambda_0 : \ |\lambda_0| = 1$, базисность по Абелю-Лидскому порядка $\beta > 0$ означает, что существует полная и минимальная в пространстве H система корневых элементов $\{f_j\}$ оператора A такая, что формальный ряд

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_j \oint_{\gamma_j} e^{-t\lambda_0^{-\beta}\lambda^\beta} A(I-\lambda A)^{-1} f\, d\lambda$$

(контур γ_j окружает одно изолированное характеристическое число оператора A) сходится после некоторой расстановки скобок (не зависящей от выбора элемента $f \in H$) к некоторой функции $f(t)$, сходящейся к f при $t \to 0$.

Очевидно, пучок $M_\alpha(\mu)$ удовлетворяет условиям теоремы 5.1, при этом $Z = K\mathcal{A}^{1/2}$ (где K — угловой оператор) содержится в том же классе Неймана-Шаттена, что и оператор $\mathcal{A}^{1/2}$. В общем случае в силу спектральных свойств задачи множество $\widetilde{W}(Z)$ является углом раствора $\theta_0 \leqslant \pi$. Предположим, что множество $\widetilde{W}(Z)$ является более узким.

Теорема 5.4. *Система корневых функций пучка $M_\alpha(\mu)$, отвечающих собственным значениям из верхней (либо нижней) комплексной полуплоскости, а также часть корневых функций, отвечающих вещественным собственным значениям, образуют полную систему в $L_2(\Omega)$, как только $\theta_0 < \dfrac{\pi}{m}$ либо $\theta_0 < \dfrac{\pi}{m} + \dfrac{\pi}{2r}$ и $Q \in \mathfrak{S}_r,\ r > 0$. При этом данная система образует в пространстве $L_2(\Omega)$ базис Абеля-Лидского порядка $\beta > m$ либо $\beta > \beta_0 := \dfrac{2rm}{2r+m}$ соответственно в первом или втором случае.*

Доказательство. Очевидно, для любого $\theta_0 < \pi/m$ можно подобрать такое малое $\varepsilon > 0$, что $\theta_0 < \pi/(m+\varepsilon)$. При этом из замечания 4.3 следует, что при любом ограниченном $Q > 0$ и любом $\varepsilon > 0$ имеем $Z, \mathcal{A}^{1/2} \in \mathfrak{S}_p,\ p = m + \varepsilon$. Тогда по теореме 5.3 корневые элементы оператора Z образуют базис Абеля-Лидского порядка $\beta > m + \varepsilon$. Поскольку в рассуждениях ε можно сделать сколь угодно малым, то достаточно полагать, что $\beta > m$.

Если $Q \in \mathfrak{S}_r,\ r > 0$, то согласно лемме 4.2 имеем $Z, \mathcal{A}^{1/2} \in \mathfrak{S}_p$, где $p \in (\beta_0; 2r)$. Из условия $\theta_0 < \pi/m + \pi/(2r) = \pi/\beta_0$ следует, что можно подобрать такое малое $\varepsilon > 0$, что $\theta_0 < \pi/(\beta_0 + \varepsilon)$. Тогда по теореме 5.3 корневые элементы оператора Z образуют базис Абеля-Лидского порядка $\beta > \beta_0 + \varepsilon$. Поскольку в рассуждениях ε можно сделать сколь угодно малым, то достаточно полагать, что $\beta > \beta_0$.

Так как каждый собственный и присоединенный элемент оператора Z является таковым для пучка $M_\alpha(\mu)$, то теорема доказана. □

Следствие 5.1. *Если дополнительно известно, что* $\operatorname{Re} Z \geq 0$, *а также* $\operatorname{Im} Z \geq 0$ *или* $\operatorname{Im} Z \leqslant 0$, *то* $\theta_0 \leqslant \pi/2$. *Отсюда полнота имеет место как только $m = 2$ и $Q \in \mathfrak{S}_r,\ r > 0$, либо $m = 3$ и $Q \in \mathfrak{S}_r,\ r < 3$. По-видимому, данное свойство для пучка $M_\alpha(\mu)$ выполняется, однако, доказать его строго авторам работы не удалось.*

Замечание 5.2. В теореме 5.4 условия на расположение образа $\widetilde{W}(Z)$ в угле раствора θ_0 можно заменить на условие существования конечного числа лучей, исходящих из начала координат и делящих комплексную плоскость на секторы, растворов менее θ_0, на которых модифицированная резольвента оператора Z имеет оценку (см. [33])

$$\|Z(I-\lambda Z)^{-1}\| = O(|\lambda|^{-1}), \quad \lambda \to \infty.$$

На основании теоремы 5.4 и того факта, что преобразование $\lambda = 1/\mu$ переводит угол раствора θ в верхней полуплоскости в угол того же раствора из нижней полуплоскости (и наоборот), получаем такой результат.

Теорема 5.5 (основная теорема о свойствах задачи [1]–[3]). *В условиях теоремы 5.4 пучок $L_\alpha(\lambda)$, а вместе с ним исходная задача* [1]–[3] *имеет счетное множество* $\sigma = \Lambda \cup \overline{\Lambda} \cup F$ ($F \subset \mathbb{R}$ *может быть пустым,* $\Lambda \cap \mathbb{R} = \emptyset$) *собственных значений с единственной предельной точкой на бесконечности, при этом из корневых функций, отвечающих собственным значениям из верхней (нижней) полуплоскости, а также из части корневых функций, отвечающих некоторому подмножеству* $F_1 \subset F$ *(либо* $F_2 \subset F$*), можно составить полную систему в* $L_2(\Omega)$*, образующую в этом пространстве базис Абеля-Лидского.*

Замечание 5.3. Основываясь на результатах Аграновича М.С. из [26] (см. также [35]) можно установить, что теорема останется верной, если в задаче (1)–(3) оператор $-\Delta$ заменить на сильно эллиптическую формально-самосопряженную дифференциальную систему второго порядка $L\vec{u} := -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}\right) + c(x)\vec{u}$, а нормальную производную на производную вдоль конормали $\partial_\nu \vec{u} := \sum_{i,j=1}^{m} \nu_i(x) a_{ij}(x)\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}$.

Здесь $\vec{u} = (u_1(x), \dots, u_n(x))$ $(x \in \Omega)$ — искомая вектор-функция; $a_{ij}(x)$ — $n \times n$ матрицы, элементы которых подчинены условию симметрии: $a_{ij}^{rs}(x) = a_{ji}^{sr}(x)$; $c(x)$ — симметрическая положительно определенная матрица; $\nu = (\nu_1(x), \dots, \nu_m(x))$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$; главный символ уравнений $a(x,\xi) := \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$ $(\xi \in \mathbb{R}^m, |\xi| = 1)$ является положительно определенной матрицей равномерно по $x \in \overline{\Omega}$. Кроме этого, $\sum a_{ij}^{rs}(x)\xi_j^s\xi_i^r \geq c\sum |\xi_j^s|^2$ $(x \in \Gamma,\ \xi_j^s \in \mathbb{R},\ c > 0)$.

6. Модельные примеры

Установим локализацию собственных значений задачи при $S = I$ в случае $m = 1$ либо $m = 2$ и $\Omega = (0;\pi) \times (0;1)$.

Рассмотрим сначала одномерную задачу

$$u''(y) - \lambda^2 u(y) = 0,\ 0 < y < 1, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = \alpha\lambda u(1). \tag{23}$$

Она была ранее изучена в [10], приведем сейчас кратко ее свойства.

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\operatorname{cth}\lambda = \alpha, \quad 0 \leqslant \alpha < \infty. \tag{24}$$

Несложно убедиться, что при $\alpha = 1$, уравнение не имеет конечных решений, т.е. точечный спектр является пустым множеством. Если $\alpha \in (0;1)$, то мы приходим к последовательности

$$\lambda_p^-(\alpha) := c_-(\alpha) + i\pi(p - 1/2), \quad c_-(\alpha) := \frac{1}{2}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}, \quad p = \pm 1, \pm 2, \dots. \tag{25}$$

При $\alpha > 1$ имеем

$$\lambda = \lambda_p^+(\alpha) := c_+(\alpha) + i\pi p, \quad c_+(\alpha) := \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha+1}{\alpha-1}, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \tag{26}$$

При фиксированном $\alpha \neq 1$ собственные значения расположены на прямой $\operatorname{Re}\lambda = c_-(\alpha)$ или $\operatorname{Re}\lambda = c_+(\alpha)$, параллельной мнимой оси. При изменении α каждое собственное значение двигается по прямым траекториям параллельно вещественной оси, причем

$$\lambda_p^- \to \infty\ (\alpha \to 1-0), \quad \lambda_p^+(\alpha) \to \infty\ (\alpha \to 1+0). \tag{27}$$

Таким образом, $\alpha = 1$ является критическим значением параметра для всех собственных значений. При $0 < \alpha < 1$ все собственные значения задачи (23) невещественные, при $\alpha > 1$ имеется одно положительное собственное значение $\lambda_0^+(\alpha)$, которое при возрастании α движется влево и при $\alpha \to +\infty$ стремится к нулю. Для $p \neq 0$ собственные значения

$\lambda_p^+(\alpha)$ при $\alpha \to +\infty$ стремятся к числам $\lambda_p^+(+\infty) = i\pi p$, которые являются решениями предельной спектральной задачи Дирихле:

$$u''(y) - \lambda^2 u(y) = 0,\ 0 < y < 1, \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{28}$$

Рассмотрим теперь в области $\Omega = (0;\pi) \times (0;1)$ двумерную спектральную задачу

$$\Delta u - \lambda^2 u = 0 \text{ (в } \Omega), \quad u = 0 \text{ (на } S), \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda \alpha u = 0 \text{ (на } \Gamma), \tag{29}$$

где $\Gamma := \{(x;1):\ x \in (0;1)\}$.

Отыскивая решения в виде

$$u(x,y) = u_n(x,y) = \sin(nx) Y_n(y),\ n = 0,1,2,\ldots, \tag{30}$$

для каждого n получаем одномерную задачу

$$Y_n'' - (\lambda^2 + n^2) Y_n = 0,\ 0 < y < 1, \quad Y_n(0) = 0, \quad Y_n'(1) = \lambda \alpha Y_n(1). \tag{31}$$

Она имеет решение

$$Y_n(y) = \operatorname{sh}\left(y\sqrt{\lambda^2 + n^2}\right), \tag{32}$$

из которого с учетом последнего краевого условия получаем серию характеристических уравнений

$$\operatorname{cth}\sqrt{\lambda^2 + n^2} = \frac{\alpha\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + n^2}}, \quad n = 1,2,\ldots, \quad \operatorname{Re}\sqrt{\lambda^2 + n^2} \geqslant 0. \tag{33}$$

Заметим, что при $n = 0$ отсюда получаем характеристическое уравнение (24) одномерной спектральной задачи, однако для $n > 0$ его свойства существенно отличаются.

Если осуществить замену $z = \lambda^2 + n^2$, то, используя формулы для гиперболических функций, получаем равносильное уравнение

$$f(z) := \operatorname{ch}(2\sqrt{z})[(\alpha^2 - 1)z - \alpha^2 n^2] - [(\alpha^2 + 1)z - \alpha^2 n^2] = 0. \tag{34}$$

Функция $f(z)$ является целой, отсюда согласно малой теореме Пикара (см., например, [36], с. 565) уравнение $f(z) = A$ всегда имеет бесконечно много корней с предельной точкой на бесконечности, кроме быть может одного исключительного значения константы A. Так как порядок функции $\operatorname{ch}(2\sqrt{z})$ равен $1/2$, то тот же порядок будет у функции $f(z)$, если только $(\alpha^2 - 1)z - \alpha^2 n^2 \not\equiv 0$. Последнее возможно лишь при $\alpha = 1,\ n = 0$. Таким образом, при $n > 0$ функция $f(z)$ имеет дробный порядок, следовательно, исключительных значений A нет, и уравнение (33) имеет бесконечно много решений λ_{nk}. Это подтверждается теоремой 5.4.

При фиксированном $n > 0$ и $\alpha \neq 1$ функция $\dfrac{(\alpha^2+1)z - \alpha^2 n^2}{(\alpha^2-1)z - \alpha^2 n^2} \to \dfrac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$ как только $z \to \infty$. Следовательно, корни уравнения (33) сходятся при $z \to \infty$ к корням того же уравнения при $n = 0$, т.е. к числам (25) или (26). Несложный анализ показывает, что при $\alpha < 1$ уравнение (33) не имеет действительных корней, для $\alpha > 1$ уравнение имеет единственный положительный корень, сходящийся к нулю при $\alpha \to \infty$. Отсюда согласно теореме 5.5 при $\alpha < 1$ система корневых функций, отвечающих собственным значениям из верхней либо нижней полуплоскости, будет полной в пространстве $L_2(\Omega)$, если справедливо, что $\theta_0 < \pi/2$. При $\alpha = 1$, по-видимому, полнота теряется, так как для $n = 0$ бесконечное число собственных значений λ_{0k} уходят на бесконечность (в этом случае, очевидно, $\theta_0 \geq \pi/2$.).

Если $\alpha = 1,\ n > 0$, то из уравнения (33) после замены $\zeta = \sqrt{z}$ получаем

$$\operatorname{sh}\zeta = \pm i\frac{\zeta}{n}. \tag{35}$$

Это уравнение для каждого фиксированного $n > 0$ имеет бесконечно много решений $\zeta_{nk} = v_{nk} \pm i w_{nk} \to \infty$ $(k \to \infty)$. Несложно убедиться, что в этом случае обязательно $v_{nk} \to +\infty$. Отсюда данное уравнение при больших k близко к уравнению $e^{\zeta} = \pm 2i\frac{\zeta}{n}$.

Следовательно $e^{2v} = \dfrac{4}{n^2}(v^2 + w^2)$, и при $v \to +\infty$ получаем, что $|w| \to \frac{n}{2}e^v$. Несложно доказать, что $w_{nk} = \pm\pi k + o(1)$ $(k \to \infty)$, отсюда $v_{nk} = \ln\dfrac{2\pi k}{n} + o(1)$. Так как при $k \to \infty$ собственные значения $\lambda_{nk} = \sqrt{\zeta_{nk}^2 - n^2} \to \zeta_{nk}$, то $\lambda_{nk} \to \ln\dfrac{2\pi k}{n} \pm i\pi k$. Следовательно, в отличие от случая $\alpha \neq 1$ при $\alpha = 1$ и $k \to \infty$ корни сходятся не к прямым, параллельным мнимой оси, а к экспоненциальным кривым $f_{\pm}(x) = \pm\frac{n}{2}e^x$.

При фиксированном n с возрастанием α собственные значения $\lambda_{nk} = x + iy$ двигаются в комплексной плоскости по счетному числу непрерывных кривых, каждая из которых описывается неявной функцией

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\sqrt{(x+iy)^2+n^2}}{(x+iy)}\operatorname{cth}\sqrt{(x+iy)^2+n^2}\right) = \operatorname{Im}\alpha = 0. \tag{36}$$

Каждая из этих кривых начинается и заканчивается на мнимой оси, достигая при некотором $\alpha_{nk}^* > 0$ максимального значения x_{nk}^{max}. Результаты численных расчетов (с точностью до 10^{-4}) представлены в таблице.

$n = 1$					$n = 2$			
k	α_{nk}^*	x_{nk}^{max}	y_{nk}		k	α_{nk}^*	x_{nk}^{max}	y_{nk}
1	0.9984	1.7545	2.6480		1	0.9360	1.0270	3.2199
2	0.9952	2.6051	5.7417		2	0.9689	1.9301	5.9614
3	0.9962	3.1242	8.7794		3	0.9829	2.4716	8.9615
...	...	...	...		...	...	...	...
10	0.9995	4.7222	30.6147		10	0.9980	4.0925	30.7085

$n = 3$					$n = 10$			
k	α_{nk}^*	x_{nk}^{max}	y_{nk}		k	α_{nk}^*	x_{nk}^{max}	y_{nk}
1	0.8102	0.7154	3.9163		1	0.3271	0.2228	10.3107
2	0.9198	1.5447	6.3354		2	0.5378	0.6095	11.4494
3	0.9570	2.0817	9.1860		3	0.6839	0.9967	13.2420
...	...	...	...		...	...	...	...
10	0.9955	3.7235	30.8129		10	0.9520	2.5985	32.2284

Из таблицы видно, что критические значения α_{nk}^* существенно зависят от номеров n и k. При фиксированном $n > 0$ и $k \to \infty$, по-видимому, $\alpha_{nk}^* \to 1 - 0$, а значит $x_{nk}^{max} \to \ln\dfrac{2\pi k}{n}$, $y_{nk} \to \pi k$. При фиксированном k с ростом n значения α_{nk}^* и соответствующие им x_{nk}^{max} монотонно убывают, при этом y_{nk} монотонно возрастают. При фиксированном α и k собственные значения λ_{nk} ведут себя аналогичным образом. Это связано с тем, что функции (36) с ростом n все ближе прижимаются к мнимой оси, отдаляясь при этом от вещественной оси.

Авторы благодарят Н. Д. Копачевского за полезные обсуждения и советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуешов И.Д. *Введение в теорию бесконечномерных диссипативных систем.* Харьков: Акта, 2006. 433 с.
2. I. Chueshov, M. Eller, I. Lasiecka *Finite Dimensionality of the Attractor for a Semilinear Wave Equation with Nonlinear Boundary Dissipation* // Comm. Partial Differential Equations. 2004. 29, № 11–12. С. 1847–1876.
3. I. Chueshov, I. Lasiecka *Global Attractors for von Karman Evolutions with a Nonliner Boundary Dissipations* // J. Differential Equations. 2004. Vol. 198. P. 196–231.
4. J. Lagnese *Decay of the Solution of the Wave Equation in a Bounded Region with Boundary Dissipation* // J. Diff. Equations. 1983. Vol. 50. P. 163–182.
5. I. Lasiecka, D. Tataru *Uniform Boundary Stabilization of Semilinear Wave Equation with Nonlinear Boundary Dissipation* // Diff. Integral Equations. 1993. Vol. 6. P. 507–533.
6. A.A. Shkalikov *Spectral analysis of the Regge problem* // Russ. J. Math. Phys. Vol. 8 (2001), No. 3. P. 356–364.
7. Шкаликов А.А., Шкред А.В. *Задача об установившихся колеба- ниях трансверсально-изотропного полуцилиндра* // Матем. сборник. Т. 182, № 8 (1991). с. 1222–1246.
8. Крейн М.Г., Лангер Г.К. *О некоторых математических принципах теории демпфированных колебаний континуумов* // Труды Междунар. симпозиума по применению ТФКП в механике сплошной среды. М.: Наука, 1965. С. 283–322.
9. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука, 1965. 448 с.
10. Андронова О.А., Копачевский Н.Д. *О линейных задачах с поверхностной диссипацией энергии* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Том 29. С. 11–28.
11. Руссаковский Е.М. *Операторная трактовка граничной задачи со спектральным параметром, полиномиально входящим в граничные условия* // Функциоальный анализ и его приложения. 1975. Т. 9, № 4. С. 91–92.
12. Шкаликов А.А. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях* // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 1983. Т. 9. С. 140–166.
13. J. Ercolano, M. Schechter *Spectral Theory for Operators Generated by Elliptic Boundary Problems with Eigenvalue Parameter in Boundary Conditions I-II* // Comm. Pure and Appl. Math. 1965. Vol. 18. P. 83–105.
14. Барковский В.В. *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, соответствующих общим эллиптическим задачам с собственным значением в граничных условиях* // УМЖ. 1967. Т. 19, № 1. С. 9–24.
15. Комаренко О.Н. *Розвинення за власними векторами самоспряжених операторів, породжених загальною задачею трансмісії* // Збірник праць Інституту математики НАН України. 2005. Т. 2, № 1. С. 127–157. (на укр. яз.)
16. Кожевников А.Н. *Об асимптотике собственных значений и полноте корневых векторов оператора, порожденного краевой задачей с параметром в краевом условии* // ДАН СССР. 1971. Т. 200, № 6. С. 1273–1276.
17. Кожевников А.Н. *Спектральные задачи для псевдодифференциальных систем эллиптических по Дуглису-Ниренбергу и их приложения* // Матем. Сборник. 1973. Т. 92(134), № 1(9). С. 60–88.
18. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи.* М.: Наука, 1989. 416 с.
19. Копачевский Н.Д. *Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса* // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). № 2. 2004. С. 52–80.
20. Копачевский Н.Д. *Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач* // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Серия “Математика. Механика. Информатика и Кибернетика”. 2007. Т.20(59), № 2. С. 3–12.
21. Войтицкий В.И., Копачевский Н.Д., Старков П.А. *Вспомогательные абстрактные краевые задачи и задачи сопряжения* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2009. Т. 34. С. 5–44.

22. Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. *Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения* // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Серия «Математика. Механика. Информатика и Кибернетика». 2014. Т. 27(66), № 1. С. 58–64.
23. Копачевский Н.Д. *Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2015. Т. 57. С. 71–107.
24. Войтицкий В.И. *О спектральных задачах, порожденных линеаризованной задачей Стефана с условием Гиббса-Томпсона* // Нелинейные граничные задачи. 2007. Т. 17. С. 31–49.
25. V. Voytitsky *On Some Class of Self-adjoint Boundary Value Problems with the Spectral Parameter in the Equations and the Boundary Conditions* // Spectral Theory, Mathematical System Theory, Evolution Equations, Differential and Difference Equations (21st International Workshop on Operator Theory and Applications, Berlin, July 2010). Operator Theory: Advances and Applications (Basel AG): Springer. 2012. Vol. 221. P. 635–651.
26. Агранович М.С. *Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей / М.С. Агранович* // Успехи математических наук. 2002. Т. 57, вып. 5(347). С. 3–78.
27. E. Gagliardo *Caratterizzazioni Delle Trace Sulla Frontiera Relative ad Alaine Classi di Funzioni in n Variabili* // Rendiconti del Seminare Matematico della Universita di Padova. 1957. Vol.27. P. 284–305. (In Italian)
28. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Санкт-Петербург: Лань, 2010. 464 с.
29. Костюченко А.Г., Оразов М.Б. *О некоторых свойствах корней самосопряженного квадратичного пучка* // Функц. анализ и его приложения. 1975. Т. 9, выпуск 4. С. 28–40.
30. Костюченко А.Г., Шкаликов А.А. *Самосопряженные квадратичные пучки операторов и эллиптические задачи* // Функц. анализ и его приложения. 1983. Т. 17, выпуск 2. С. 38–61.
31. Келдыш М.В., Лидский В.Б. *Вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов* // Труды IV Всесоюзного матем. съезда. 1963. Т. 1. С. 101–120.
32. Лидский В.Б. *О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов* // Труды Моск. матем. об-ва. 1962. С. 3–35.
33. Маркус А.С. *Некоторые признаки полноты системы корневых векторов линейного оператора в банаховом пространстве* // Матем. сборник. 1966. Т.70 (112), № 4. С. 526–561.
34. M.S. Agranovich, B.Z. Katsenelenbaum, A.N. Sivov, N.N. Voitovich *Generalized Method of Egenoscillations in Difraction Theory.* Berlin: Viley–VCH, 1999. 380 p.
35. Агранович М.С. *Спектральные задачи в липшицевых областях* // СМФН. 2011. Т. 39. С. 11–35.
36. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций.* Том 2. М.: Наука, 1968. 624 с.

Ольга Андреевна Андронова,
Академия строительства и архитектуры
Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского
ул.Киевская, 181,
295493, г. Симферополь, Республика Крым, Россия
E-mail: o.andronova@list.ru

Виктор Иванович Войтицкий,
Таврическая академия
Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского,
Просп. акад. В.И. Вернадского, 4,
295007, г. Симферополь, Республика Крым, Россия
E-mail: victor.voytitsky@gmail.com