

УДК 517.958

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН СЖАТИЯ С БОЛЬШИМ НАЧАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ В ГИДРОДИНАМИКЕ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА

С.В. ЗАХАРОВ, А.Е. ЭЛЬБЕРТ

Аннотация. Рассматривается задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) с малым параметром при старшей производной и большим градиентом начальной функции. Численными и аналитическими методами показано, что полученная с помощью ренормализации формальная асимптотика, соответствующая волнам сжатия, является асимптотическим решением уравнения КдФ. Получены графики асимптотического решения, в том числе в случаях немонотонных начальных данных.

Ключевые слова: Уравнение Кортевега–де Фриза, задача Коши, асимптотика, волна сжатия.

Mathematics Subject Classification: 35Q53

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Кортевега–де Фриза:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad t \geq 0, \quad \varepsilon > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0, \varepsilon, \rho) = \Lambda \left(\frac{x}{\rho} \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \rho > 0, \quad (2)$$

с ограниченной начальной функцией Λ , которая имеет конечные пределы $\Lambda_0^\pm = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \Lambda(s)$, $\Lambda_0^+ < \Lambda_0^-$, и обладает производной, достаточно быстро стремящейся к нулю на бесконечности. Это классическая модель распространения нелинейных волн в среде с малой дисперсией. Для случая разрывной начальной функции исследование асимптотики было проведено А.В. Гуревичем и Л.П. Питаевским [1]. Асимптотические формулы для эволюции волн сжатия найдены также в работах [2, 3] методом Уизема и в работе [4] методом обратной задачи рассеяния. Для начальных данных типа ступеньки асимптотические формулы получены методом обратной задачи рассеяния [5]–[7]. В случае сглаженной ступеньки асимптотические разложения были построены также методом согласования в работе [8].

Будем считать, что гладкая начальная функция $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечные пределы $\Lambda_0^\pm = \lim_{\sigma \rightarrow \pm\infty} \Lambda(\sigma)$, и справедливы асимптотические разложения

$$\Lambda(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_n^\pm}{\sigma^n}, \quad \sigma \rightarrow \pm\infty. \quad (3)$$

S.V. ZAKHAROV, A.E. ELBERT, MODELLING COMPRESSION WAVES WITH A LARGE INITIAL GRADIENT IN THE KORTEWEG–DE VRIES HYDRODYNAMICS.

© ЗАХАРОВ С.В., ЭЛЬБЕРТ А.Е. 2017.

Работа выполнена при поддержке комплексной программы ФНИ УрО РАН (проект «Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов»).

Поступила 04 декабря 2015 г.

Существование классического гладкого решения задачи (1)–(2) гарантируется теоремой Капеллера [9], если

$$\int_{-\infty}^0 |\Lambda(x) - \Lambda_0^-|(1 - x^3)dx < \infty, \quad \int_0^{\infty} |\Lambda(x) - \Lambda_0^+|(1 + x^3)dx < \infty.$$

Однако в данной работе можно и не предполагать выполнение этих ограничений, а рассматривать только формальное асимптотическое решение; тем более, что в специальном классе функции существование решения доказано и для неограниченных начальных данных [10].

В настоящей статье показано, что приближение, построенное в работе [11], является асимптотическим решением задачи (1)–(2) при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$ и соотношении параметров $\rho^2/\varepsilon \rightarrow 0$, а также проводится численный анализ этого решения. Представленная статья как раз и ставит цель понять и определить точный математический смысл формальных “решений” уравнения КдФ, в частности, в процессе исследования возник вопрос, в каком именно смысле следует понимать решение Гуревича–Питаевского [1], поскольку математически точной формулировки авторам не удалось найти ни в их оригинальной работе, ни у специалистов. Ниже в Теореме 1 из п. 3 дается строгое определение асимптотического решения внутри зоны осцилляций. Поскольку в аналогичной задаче для параболического уравнения удалось доказать близость асимптотики, полученной методом ренормализации, к точному решению [15], есть некоторые основания предполагать, что и для уравнения КдФ формальное асимптотическое решение, найденное тем же методом, будет также приближать точное решение.

Ясно, что структура асимптотики должна существенно зависеть от соотношения параметров ε и ρ . Здесь предполагается выполнение следующего условия:

$$\mu = \frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow 0.$$

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Известно, что в ряде случаев поведение решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной становится в некотором смысле самоподобным. Тогда оказывается эффективным анализ решения с помощью метода ренорм-группы [12]. Этот подход имеет то преимущество, что сразу же получается равномерное приближение задачи, избавляющее от необходимости строить асимптотические анзацы в отдельных областях. Например, составная асимптотика решения задачи Коши с условием (2) была получена методом согласования [13] для квазилинейного параболического уравнения [14], а в работе [15] показано, что ренормализационное приближение решения асимптотически близко к составному асимптотическому решению.

Построим асимптотическое решение задачи (1)–(2), используя технику, сходную с методом ренормгруппы, в наиболее простом ее варианте. Перейдем к внутренним переменным

$$x = \sqrt{\varepsilon} \eta, \quad t = \sqrt{\varepsilon} \theta, \quad (4)$$

поскольку это позволит учесть все члены уравнения (1). В качестве “затравочной” функции возьмем решение уравнения

$$\frac{\partial Z}{\partial \theta} + Z \frac{\partial Z}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 Z}{\partial \eta^3} = 0, \quad (5)$$

с начальным условием

$$Z(\eta, 0) = \begin{cases} \Lambda_0^-, & \eta < 0, \\ \Lambda_0^+, & \eta > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Будем искать разложение решения в следующем виде

$$u(x, t, \varepsilon, \rho) = Z(\eta, \theta) + \mu W(\eta, \theta, \mu) + \dots, \quad (7)$$

где добавка $\mu W(\eta, \theta, \mu)$ должна устранить особенность затравочной функции в начальный момент времени. Из уравнений (1) и (5) вытекает, что функция W удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{\partial(ZW)}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} = 0. \quad (8)$$

Дифференцируя уравнение (5) по переменной η , убеждаемся, что выражение

$$G(\eta, \theta) = \frac{1}{\Lambda_0^+ - \Lambda_0^-} \frac{\partial Z(\eta, \theta)}{\partial \eta}$$

удовлетворяет уравнению (8). Более того, G представляет собой функцию Грина, поскольку

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} G(\eta, \theta) f(\eta) d\eta = -\frac{1}{\Lambda_0^+ - \Lambda_0^-} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\eta, 0) f'(\eta) d\eta = f(0)$$

для любой финитной функции f .

Подберем решение W в виде свертки с функцией Грина G таким образом, чтобы асимптотическое приближение удовлетворяло начальному условию (2). Тогда

$$W = \frac{1}{\Lambda_0^+ - \Lambda_0^-} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial Z(\eta - \mu s, \theta)}{\partial \eta} [\Lambda(s) - Z(s, 0)] ds.$$

После интегрирования по частям и подстановки в разложение (7) получаем искомое выражение

$$u(x, t, \varepsilon, \rho) \approx \frac{1}{\Lambda_0^+ - \Lambda_0^-} \int_{-\infty}^{\infty} Z\left(\frac{x - \rho s}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \Lambda'(s) ds, \quad (9)$$

которое проясняет структуру асимптотического решения по параметрам ε и ρ в главном приближении. Несмотря на то, что функции Z и W не зависят явно от $\sqrt{\varepsilon}$, результат зависит от μ и $\sqrt{\varepsilon}$ в силу замены (4), поскольку асимптотическое решение (9) рассматривается и при конечных значениях времени t .

В качестве примера положим $\Lambda_0^+ = 0$ и $\Lambda_0^- = a > 0$. А в правую часть (9) подставим вместо $Z(\eta, \theta)$ асимптотическое решение Гуревича–Питаевского: $Z_{\text{ГП}}(\eta, \theta) = a$ при $\eta < -a\theta$, $Z_{\text{ГП}}(\eta, \theta) = 0$ при $\eta > 2a\theta/3$,

$$Z_{\text{ГП}}(\eta, \theta) = a \left[2 \operatorname{dn}^2 \left(\frac{a^{3/2} \theta}{\sqrt{6}} \left(\zeta - \frac{1 + \sigma^2(\zeta)}{3} \right), \sigma(\zeta) \right) - 1 + \sigma^2(\zeta) \right],$$

при $-a\theta \leq \eta \leq 2a\theta/3$, где $\zeta = \frac{\eta}{a\theta}$, $\operatorname{dn}(v, \sigma)$ — эллиптическая функция Якоби, а функция $\sigma(\zeta)$ определяется из соотношения

$$1 + \sigma^2 - \frac{2\sigma^2(1 - \sigma^2)K(\sigma)}{E(\sigma) - (1 - \sigma^2)K(\sigma)} = 3\zeta, \quad (10)$$

$K(\sigma)$ и $E(\sigma)$ — полные эллиптические интегралы (первого и второго рода). В результате получаем

$$u(x, t, \varepsilon, \rho) \approx 2\Lambda\left(\frac{x + at}{\rho}\right) - \Lambda\left(\frac{x - 2at/3}{\rho}\right) -$$

$$- \int_{(x-2at/3)/\rho}^{(x+at)/\rho} \Lambda'(s) \left[2 \operatorname{dn}^2 \left(\sqrt{\frac{a}{6\varepsilon}} q(x, t, s, \rho), \sigma \left(\frac{x - \rho s}{at} \right) \right) + \sigma^2 \left(\frac{x - \rho s}{at} \right) \right] ds,$$

где

$$q(x, t, s, \rho) = x - \rho s - \frac{at}{3} \left[1 + \sigma^2 \left(\frac{x - \rho s}{at} \right) \right].$$

После замены $x - \rho s = aty$ приходим к следующей формуле:

$$u(x, t, \varepsilon, \rho) \approx u_0(x, t, \varepsilon, \rho) = 2\Lambda \left(\frac{x + at}{\rho} \right) - \Lambda \left(\frac{x - 2at/3}{\rho} \right) - \frac{at}{\rho} \int_{-1}^{2/3} \Lambda' \left(\frac{x - aty}{\rho} \right) \left[2 \operatorname{dn}^2 \left(\frac{a^{3/2}t\omega(y)}{\sqrt{\varepsilon}}, \sigma(y) \right) + \sigma^2(y) \right] dy, \quad (11)$$

где

$$\omega(y) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ y - \frac{1}{3} [1 + \sigma^2(y)] \right\}.$$

Таким образом, главное асимптотическое приближение в данном случае представляет собой функцию трех внутренних переменных, $x\rho^{-1}$, $t\rho^{-1}$ и $t\varepsilon^{-1/2}$, которая при $t = 0$ совпадает с начальной функцией $\Lambda(x\rho^{-1})$.

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА КДФ ВНУТРИ ОБЛАСТИ ОСЦИЛЛЯЦИЙ

Лемма 1. Пусть

$$\Lambda(s) = a + O(|s|^{-1}), \quad s \rightarrow -\infty, \quad \Lambda(s) = O(s^{-1}), \quad s \rightarrow +\infty,$$

и эти соотношения можно дифференцировать нужное число раз. Тогда для ограниченной функции $\varphi(z) \in C^\infty$ справедливо

$$\frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda' \left(\frac{z}{\rho} \right) \varphi(z) dz = -a\varphi(0) + O(\sqrt{\rho}), \quad \rho \rightarrow 0.$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\varphi(z) = \varphi(0) + O(\sqrt{\rho})$ при $-\sqrt{\rho} \leq z \leq \sqrt{\rho}$. Имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda' \left(\frac{z}{\rho} \right) \varphi(z) dz + a\varphi(0) = \\ &= \frac{1}{\rho} \int_{-\sqrt{\rho}}^{\sqrt{\rho}} \Lambda' \left(\frac{z}{\rho} \right) \varphi(z) dz + a\varphi(0) + \frac{1}{\rho} \int_{\sqrt{\rho}}^{\infty} \Lambda' \left(\frac{z}{\rho} \right) \varphi(z) dz + \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{-\sqrt{\rho}} \Lambda' \left(\frac{z}{\rho} \right) \varphi(z) dz = \\ &= \varphi(0) \left[\frac{1}{\rho} \int_{-\sqrt{\rho}}^{\sqrt{\rho}} \Lambda' \left(\frac{z}{\rho} \right) dz + a \right] + O(\sqrt{\rho}) = O(\sqrt{\rho}), \end{aligned}$$

где были использованы асимптотики Λ и Λ' при $s \rightarrow \pm\infty$. Лемма доказана.

Следствие 1. Справедливы следующие соотношения:

$$\left(\frac{at}{\rho} \right) \int_{-1}^{2/3} \Lambda' \left(\frac{x - aty}{\rho} \right) \varphi(y) dy = -a\varphi \left(\frac{x}{at} \right) + O(\sqrt{\rho}), \quad \rho \rightarrow 0,$$

$$\left(\frac{at}{\rho}\right)^2 \int_{-1}^{2/3} \Lambda''\left(\frac{x-aty}{\rho}\right) \varphi(y) dy = -a\varphi'\left(\frac{x}{at}\right) + O(\sqrt{\rho} + \rho/\varepsilon), \quad \rho \rightarrow 0.$$

Теорема 1. Для любой функции Λ , удовлетворяющей условиям в Лемме 1, в области

$$D_0 = \left\{ (x, t) \mid -at + \sqrt{\varepsilon} \leq x \leq \frac{2at}{3} - \sqrt{\varepsilon} \right\}$$

функция u_0 , заданная формулой (11), является асимптотическим решением уравнения (1) в следующем смысле:

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}u_0| &\leq \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}} + \sqrt{\rho\varepsilon} \right), \\ \frac{m(x, t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} &\leq \left| \frac{\partial u_0}{\partial t} \right| + \left| u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right| + \varepsilon \left| \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right| \leq \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}}, \end{aligned} \quad \frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}} = \mu \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (12)$$

где $\mathcal{L}u_0 = \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}$, $m(x, t, \varepsilon) = \frac{4\sqrt{6}a^{5/2}\sigma^2}{3} \operatorname{dn}^3(b, \sigma) \operatorname{cn}(b, \sigma) \operatorname{sn}(b, \sigma)$, b и σ определяются формулой (13), функция $m(x, t, \varepsilon)$ вместе с $\mathcal{L}u_0$ может обращаться в нуль в конечном числе точек $(x, t) = (x_k(\varepsilon), t_k(\varepsilon))$, $k = 1..K$, $K \in \mathbb{N}$.

Таким образом, из оценок (12) вытекает, что соотношение $\mathcal{L}u_0$ и суммы модулей производных имеют порядок $\rho/\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\rho\varepsilon}$, поскольку важно именно это соотношение, а не величина $\mathcal{L}u_0$ сама по себе, которая, вообще говоря, может быть и большой. Это в точности соответствует соотношению параметров ρ, ε , которое предполагалось в п. 1. Заметим, что используемое нами понятие асимптотического решения отличается от стандартного определения формального асимптотического решения в виде бесконечного ряда, дающего сколь угодно малую невязку при подстановке его в уравнение.

В случае когда асимптотическое решение строится в виде функции (а не ряда), даже малость невязки (при подстановке этой функции в уравнение) сама по себе не может служить критерием ее пригодности, поскольку производные могут оказаться того же порядка малости; следовательно, величину невязки необходимо с чем-то сравнивать. Наиболее естественно в качестве сравнения взять абсолютную величину отдельных членов, входящих в уравнение.

Д о к а з а т е л ь с т в о Теоремы 1. Обозначим через $\Lambda_{1,2}^{\pm}$ коэффициенты асимптотики функции $\Lambda \in C^{\infty}(\mathbb{R})$:

$$\Lambda(s) = a + \frac{\Lambda_1^-}{s} + \frac{\Lambda_2^-}{s^2} + O\left(\frac{1}{s^3}\right), \quad s \rightarrow -\infty,$$

$$\Lambda(s) = \frac{\Lambda_1^+}{s} + \frac{\Lambda_2^+}{s^2} + O\left(\frac{1}{s^3}\right), \quad s \rightarrow +\infty.$$

Пользуясь (11), Леммой 1 и асимптотикой функции $\Lambda(s)$, $s \rightarrow \pm\infty$, получаем

$$u_0 = G(x, t, \xi, \varepsilon) + \frac{2\Lambda_1^+ \rho}{x + at} - \frac{\Lambda_1^- \rho}{x - 2at/3} + O(\sqrt{\rho}),$$

где

$$G = a [2\operatorname{dn}^2(b, \sigma) + \sigma^2 - 1], \quad b = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{6\varepsilon}} \left(\frac{x}{a} - \frac{t(1 + \sigma^2)}{3} \right), \quad \sigma = \sigma\left(\frac{x}{at}\right). \quad (13)$$

Дифференцируя (11) по t, x и аналогично применяя Лемму 1, получаем:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = G_t + O\left(\frac{\rho}{\varepsilon} + \sqrt{\rho}\right), \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} = G_x + O\left(\frac{\rho}{\varepsilon} + \sqrt{\rho}\right),$$

$$\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} = G_{xxx} + O\left(\frac{\rho}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\rho}\right).$$

Подставим теперь в G линейное приращение $\sigma_0 + \sigma'(\tilde{\zeta})(\zeta - \zeta_0)$ вместо σ , где $\sigma_0 = \sigma(\zeta_0)$, и продифференцируем по t, x . Имеем при $\zeta = \frac{x}{at} \rightarrow \zeta_0 = \frac{x_0}{at_0}$ равномерно по всем $\zeta_0, \zeta \in (-1 + \mu, 2/3 - \mu)$ при $\mu > 0$:

$$\begin{aligned} G_t &= \frac{2\sqrt{6} a^{5/2} \sigma_0^2 (1 + \sigma_0^2) \operatorname{dn}(b_0, \sigma_0) \operatorname{cn}(b_0, \sigma_0) \operatorname{sn}(b_0, \sigma_0)}{9\sqrt{\varepsilon}} + O\left(\frac{t(\zeta - \zeta_0)}{\varepsilon}\right), \\ G_x &= -\frac{2\sqrt{6} a^{3/2} \sigma^2 \operatorname{dn}(b_0, \sigma_0) \operatorname{cn}(b_0, \sigma_0) \operatorname{sn}(b_0, \sigma_0)}{3\sqrt{\varepsilon}} + O\left(\frac{t(\zeta - \zeta_0)}{\varepsilon}\right), \\ G_{xxx} &= \frac{4\sqrt{6} a^{5/2} \sigma^2 \operatorname{dn}(b_0, \sigma_0) \operatorname{cn}(b_0, \sigma_0) \operatorname{sn}(b_0, \sigma_0) (\sigma_0^2 + 1 - 3\sigma_0^2 \operatorname{sn}^2(b_0, \sigma_0))}{9\varepsilon^{3/2}} + \\ &\quad + O\left(\frac{t(\zeta - \zeta_0)}{\varepsilon^2}\right), \end{aligned}$$

где $b_0 = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{6\varepsilon}} \left(\frac{x_0}{a} - \frac{t_0(1 + \sigma_0^2)}{3} \right)$, $\sigma_0 = \sigma\left(\frac{x_0}{at_0}\right)$ и $\operatorname{cn}(b, \sigma)$, $\operatorname{sn}(b, \sigma)$, так же, как и $\operatorname{dn}(b, \sigma)$ — стандартные эллиптические функции Якоби. Отсюда вытекает вторая оценка в (12). Функция $m(x, t, \varepsilon)$ с некоторым коэффициентом равна функции $\operatorname{dn}(b, \sigma) \operatorname{cn}(b, \sigma) \operatorname{sn}(b, \sigma)$, которая при замороженном σ осциллирует по x и t , и в некоторых точках обращается в нуль:

$$m(x, t, \varepsilon) = \frac{4\sqrt{6} a^{5/2} \sigma^2}{3} \operatorname{dn}^3(b, \sigma) \operatorname{cn}(b, \sigma) \operatorname{sn}(b, \sigma).$$

Кроме того,

$$G_t + GG_x + \varepsilon G_{xxx} = O\left(\frac{t(\zeta - \zeta_0)}{\varepsilon}\right)$$

равномерно по всем $\zeta_0, \zeta \in (-1 + \mu, 2/3 - \mu)$ при $\mu > 0$. Для каждого луча $\zeta = \frac{x}{at}$ можно выбрать сколько угодно близкое значение ζ_0 . Следовательно,

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} = G_t + GG_x + \varepsilon G_{xxx} + O\left(\frac{\rho}{\varepsilon} + \sqrt{\rho}\right),$$

получаем первую оценку в (12).

Тем самым Теорема 1 доказана.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

В настоящем разделе приводятся графики асимптотических решений рассматриваемой задачи. Для этого использовалась система символьных вычислений Maple. Функция $\sigma(y)$ (10) приближалась соответствующими рядами Тейлора в четырех областях. Для построения подынтегральной функции в (11) использовались кубические сплайны с узлами в ее точках экстремума и приблизительно 200 сегментами. Поскольку решение Гуревича–Питаевского имеет особенности производных на фронтах волны, мы не включили в рис. 4, 5 те части графиков, которые содержат эти особенности.

1. Начальная функция $\Lambda = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{\rho}$.

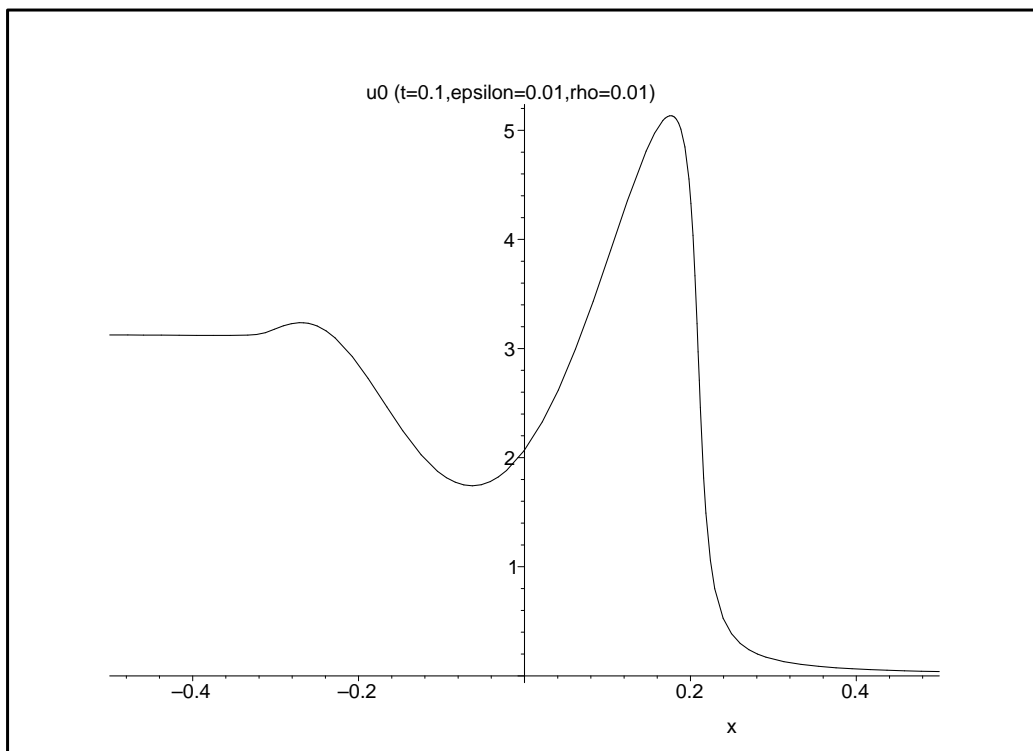


Рис. 1. $t = 0.1$

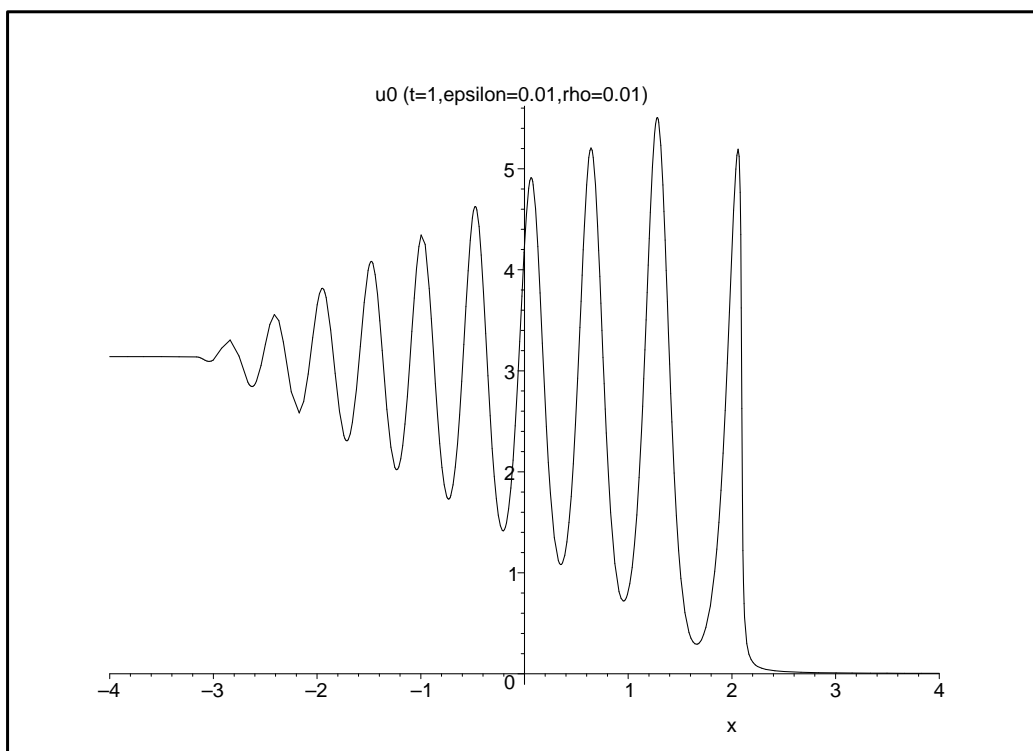
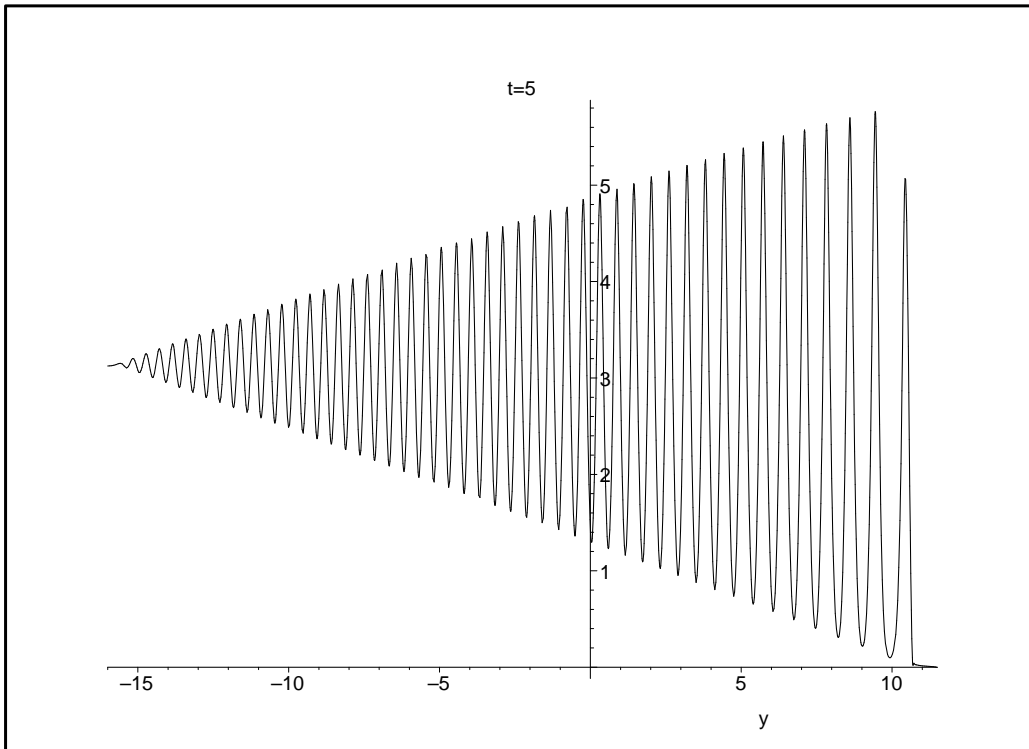


Рис. 2. $t = 1$

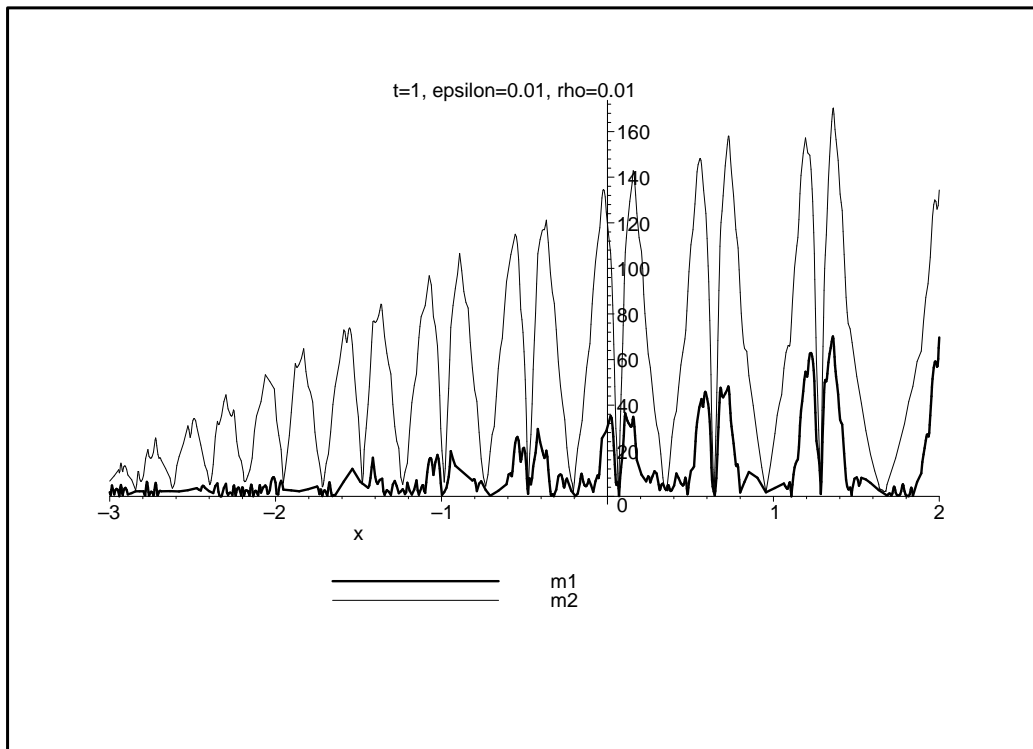
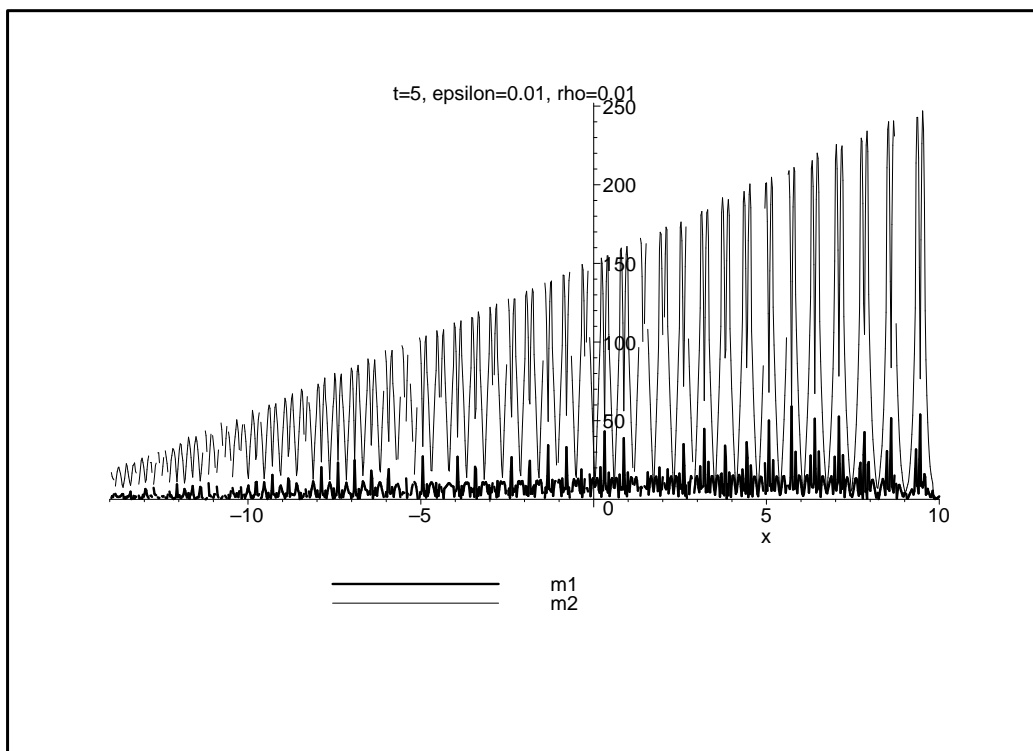
Рис. 3. $t = 5$

2. Численная оценка значения оператора КдФ.

Для приближённого решения u_0 обозначим

$$m_1(x) = \left| \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right|, \quad m_2(x) = \left| \frac{\partial u_0}{\partial t} \right| + \left| u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right| + \varepsilon \left| \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right|.$$

Как видно по рис. 4, 5, величина m_1 оказывается значительно меньше величины m_2 . Ещё раз подчеркнём, что важна малость именно соотношения m_1 и m_2 , а сама величина m_1 вовсе не обязана быть малой.

Рис. 4. $t = 1$ Рис. 5. $t = 5$

3. Начальная функция $\Lambda_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{\rho} \right) \left(1 - 3e^{-(x/\rho)^2} \right)$.

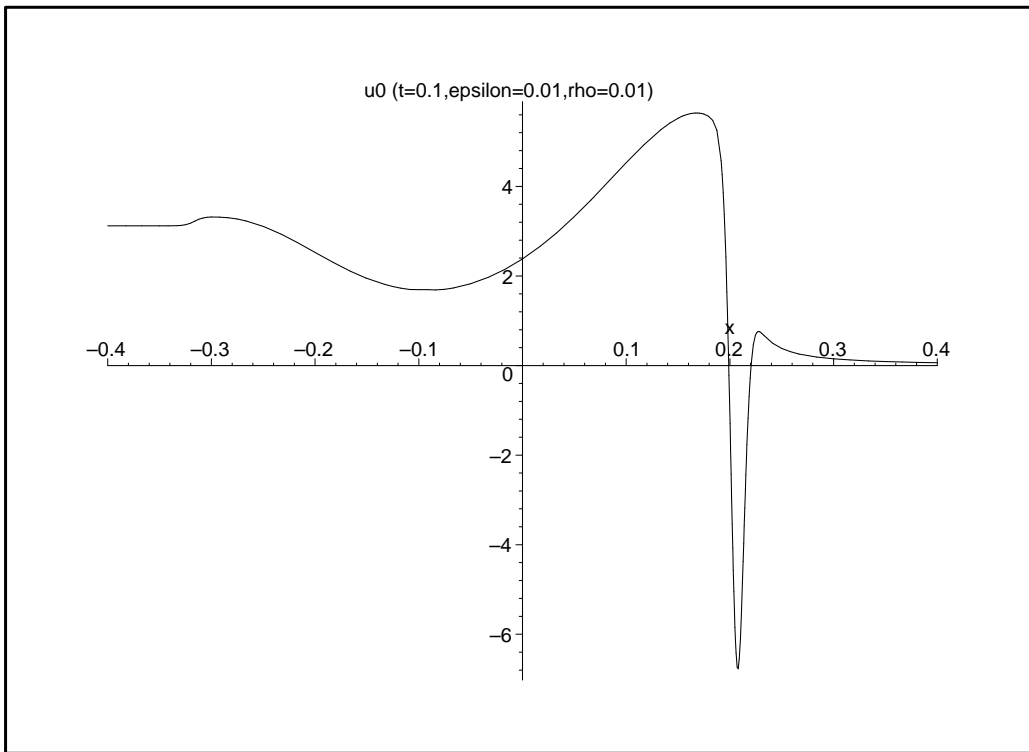


Рис. 6. $\Lambda_1 : t = 0.1$

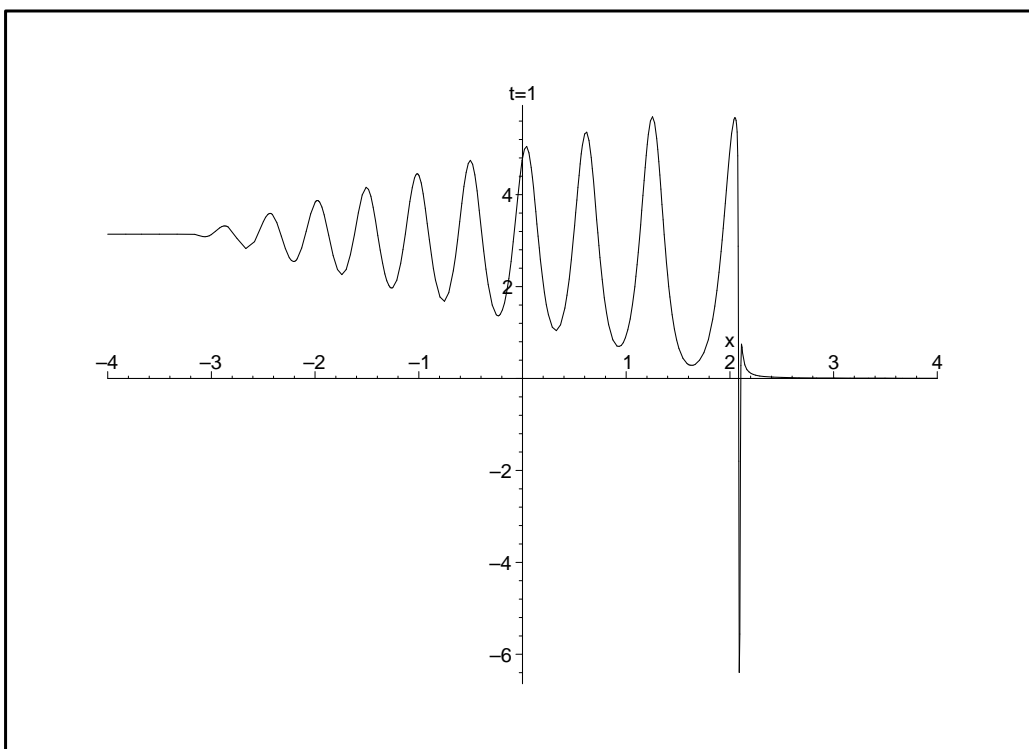
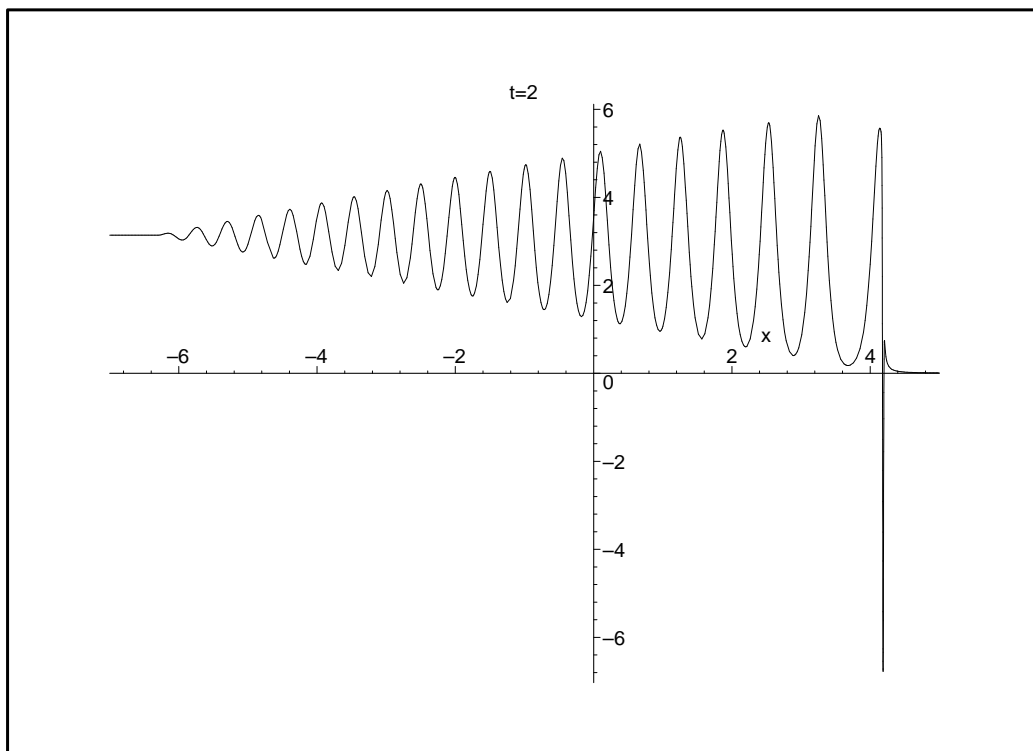
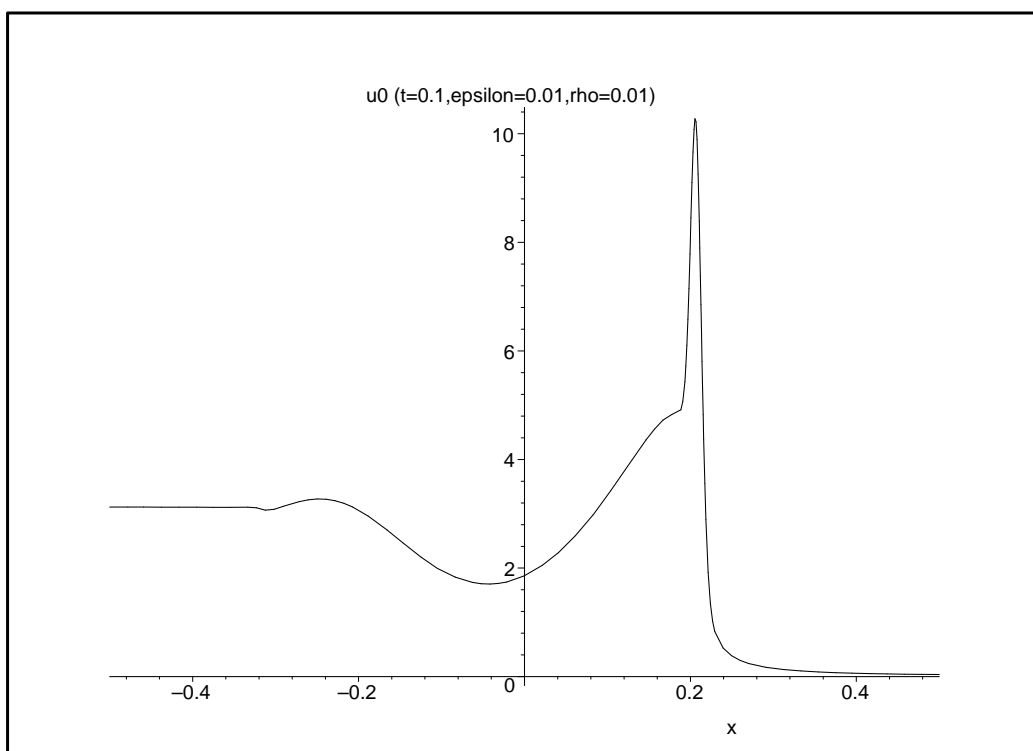


Рис. 7. $\Lambda_1 : t = 1$

Рис. 8. $\Lambda_1 : t = 2$

4. Начальная функция $\Lambda_2 = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{\rho} \right) \left(1 + 3e^{-(x/\rho)^2} \right)$.

Рис. 9. $\Lambda_2 : t = 0.1$

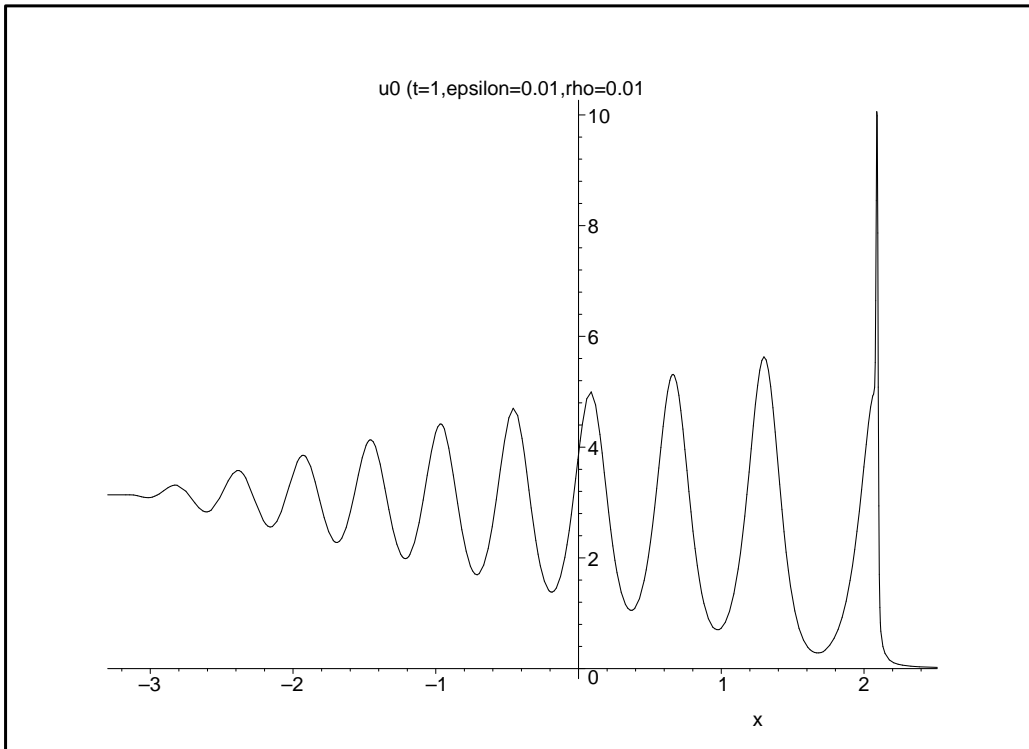


Рис. 10. $\Lambda_2 : t = 1$

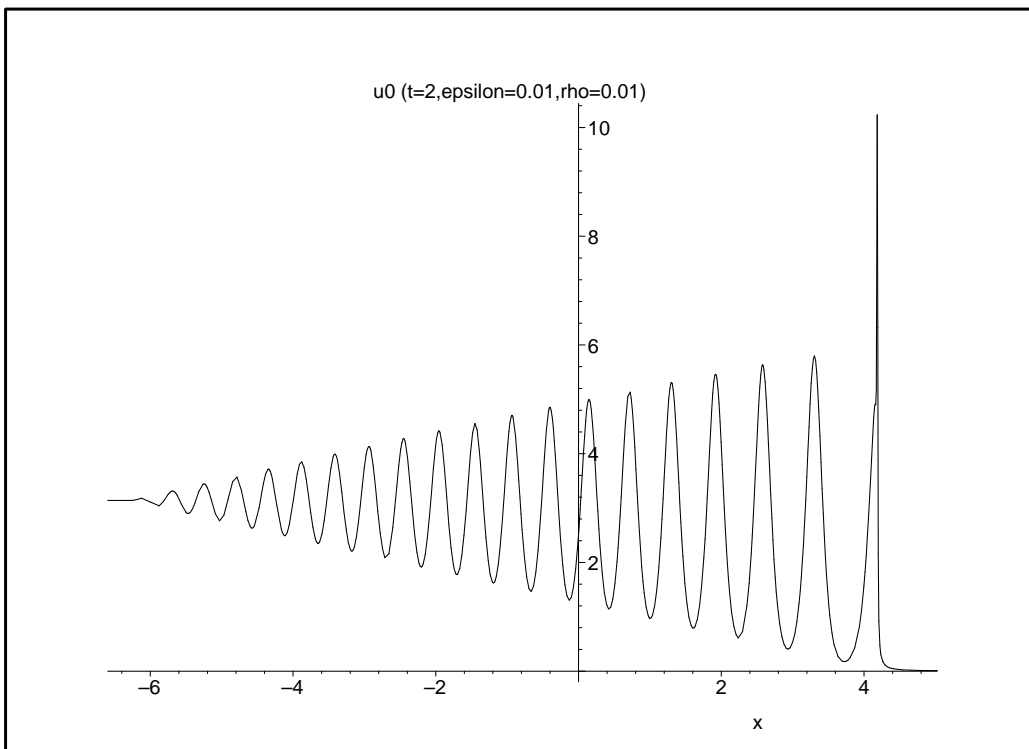


Рис. 11. $\Lambda_2 : t = 2$

Авторы признательны Б.И. Сулейманову за обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуревич А.В., Питаевский Л.П. *Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны* // ЖЭТФ. 1973. Т. 65, Вып. 2. С. 590–604.
2. Гуревич А.В., Крылов А.Л., Эль Г.А. *Опрокидывание волны Римана в дисперсионной гидродинамике* // Письма в ЖЭТФ. 1991. Т. 54, Вып. 2. С. 104–109.
3. Крылов А.Л., Ходоровский В.В., Эль Г.А. *Эволюция немонотонного возмущения в гидродинамике Кортевега-де Фриза* // Письма в ЖЭТФ. 1992. Т. 56, Вып. 6. С. 325–329.
4. Мазур Н.Г. *Квазиклассическая асимптотика в методе обратной задачи рассеяния для уравнения КдФ и решение модуляционных уравнений Уизема* // Теор. и матем. физ. **106**:1 (1996). С. 44–61.
5. Хруслов Е.Я. *Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза с начальными данными типа ступеньки* // Матем. сб. 1976. Т. 99. № 2. С. 261–281.
6. A. Cohen *Solutions of the Korteweg-de Vries equation with steplike initial profile* // Comm. Partial Diff. Eq., **9**:8. 1984. P. 751–806.
7. S. Venakides, *Long time asymptotics of the Korteweg-de Vries equation* // Transactions of AMS, **293**:1. 1986. P. 411–419.
8. Сулейманов Б.И. *О решении уравнения Кортевега-де Фриза, возникающего вблизи точки опрокидывания в задачах с малой дисперсией* // Письма в ЖЭТФ. **58**:11. 1993. P. 906–910.
9. T. Kappeler *Solutions of the Korteweg-de Vries equation with steplike initial data* // J. Diff. Eq. **63**:3. 1986. P. 306–331.
10. Бондарева И.Н. *Уравнение Кортевега-де Фриза в классах растущих функций с заданной асимптотикой при $|x| \rightarrow \infty$* // Матем. сб.. **122(164)**:2(10). 1983. С. 131–141.
11. Захаров С.В. *Ренормализация в задаче Коши для уравнения Кортевега-де Фриза* // Теор. и матем. физ. **175**:2. 2013. P. 173–177.
12. Теодорович Э.В. *Метод ренормализационной группы в задачах механики* // Прикл. Матем. Мех. 2004. Т. 68. Вып. 2. С. 335–367.
13. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*. М.: Наука, 1989.
14. Захаров С.В. *Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с двумя малыми параметрами* // Докл. Акад. Наук. 2008. Т. 422. № 6. С. 733–734.
15. Захаров С.В. *Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с большим начальным градиентом и малой вязкостью* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2010. Т.50. № 4. С. 699–706.

Захаров Сергей Викторович
 Институт математики и механики УрО РАН,
 ул. Софьи Ковалевской, д. 16
 620990, г. Екатеринбург, Россия
 E-mail: svz@imm.uran.ru

Эльберт Александр Евгеньевич
 Институт математики и механики УрО РАН,
 ул. Софьи Ковалевской, д. 16
 620990, г. Екатеринбург, Россия
 E-mail: aee@imm.uran.ru