ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 1 (2017). С. 98-108.

УДК 517.952

О МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СО СТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ПО ПЕРВЫМ ПРОИЗВОДНЫМ

И.В. РАХМЕЛЕВИЧ

Аннотация. Рассмотрен класс многомерных дифференциальных уравнений в частных производных, содержащих линейный дифференциальный оператор произвольного порядка и степенные нелинейности по первым производным. При некоторых дополнительных предположениях относительно этого оператора изучаются решения типа многомерных бегущих волн, зависящие от некоторых линейных комбинаций исходных переменных. Исходное уравнение преобразовано к редуцированному, которое решается методом разделения переменных. Найдены решения редуцированного уравнения для случаев аддитивного, мультипликативного и комбинированного разделения переменных.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, редуцированное уравнение, метод разделения переменных, степенная нелинейность.

Mathematics Subject Classification: 335G20

Введение

Важнейшим направлением современной математической физики является исследование многомерных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и нахождение их точных решений [1–12]. Одним из наиболее эффективных и широко используемых методов решения таких уравнений остается метод разделения переменных (РП). Так, в известных справочниках и пособиях [1–3] описаны как классическая схема метода, так и его современные варианты (обобщенное и функциональное РП [4]). В работах [5–9] с помощью метода РП исследованы уравнения в частных производных со степенными нелинейностями по производным, а также уравнения, содержащие однородные и мультиоднородные функции от производных (такие уравнения сводятся к уравнениям со степенными нелинейностями для определенных классов решений). Данная работа посвящена продолжению этих исследований. Рассматривается многомерное уравнение в частных производных, содержащее линейный дифференциальный оператор произвольного порядка с постоянными коэффициентами и степенные нелинейности по первым производным. С помощью метода редукции и метода разделения переменных находятся решения этого уравнения типа многомерных бегущих волн.

I.V. Rakhmelevich, On multi-dimensional partial differential equations with power nonlinearities in first derivatives.

Поступила 30 октября 2015 г.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующий класс многомерных дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестной функции $u(x_1, x_2, ..., x_N)$, содержащих степенные нелинейности по первым производным:

$$\hat{L}u(x_1, x_2, ..., x_N) = b \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^{\beta_n}. \tag{1}$$

Здесь $\hat{L}$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами по переменным $x_1, x_2, ..., x_N$.

Представим множество значений $I = \{1, \ldots, N\}$ индекса n, нумерующего независимые переменные, в виде объединения K непересекающихся подмножеств I_k $(k = 1, \ldots, K)$. Тогда множество переменных $X = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$ может быть разбито на K непересекающихся подмножеств $X_k = \{x_n\}_{n \in I_k}$. Также здесь и далее будем обозначать $\Omega = \{1, \ldots, K\}$ – множество значений индекса k.

Далее будем предполагать, что оператор $\hat{L}$ может быть представлен в виде:

$$\hat{L} = \sum_{k=1}^{K} \hat{L}_{X_k}, \tag{2}$$

где $\hat{L}_{X_k}$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами по переменным X_k. Соотношение (2) означает, что оператор $\hat{L}$ не содержит смешанных производных по переменным, принадлежащим разным подмножествам X_k. В свою очередь, оператор $\hat{L}_{X_k}$ может быть представлен в виде суммы линейных однородных дифференциальных операторов различных порядков по переменным X_k:

$$\hat{L}_{X_k} = \sum_{m=1}^{M_k} \hat{L}^{(m)}_{X_k}. \tag{3}$$

В силу сказанного выше, оператор $\hat{L}^{(m)}_{X_k}$ может быть записан как

$$\hat{L}^{(m)}_{X_k} = \sum_{\sigma_k^{(m)}} a_{\sigma_k^{(m)}} \prod_{n \in I_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{m_n}. \tag{4}$$

Здесь введен мультииндекс $\sigma_k^{(m)} = \{m_n\}_{n \in I_k}$, причем $m_n \geqslant 0$ для всех $n \in I_k$ и $\sum\limits_{n \in I_k} m_n = m$.

В данной работе будем искать те решения уравнения (1), которые зависят от переменных z_k, являющихся линейными комбинациями исходных переменных x_n:

$$z_k = \sum_{n \in I_k} c_n x_n. \tag{5}$$

Для решений $u = U(z_1, \ldots, z_K)$ указанного типа с учетом соотношений (2), (3), (4), (5), уравнение (1) нетрудно преобразовать к виду:

$$\sum_{k=1}^{K} \hat{L}_k U(z_1, \ldots, z_K) = B \prod_{k=1}^{K} \left(\frac{\partial U}{\partial z_k} \right)^{r_k}. \tag{6}$$

Здесь $r_k = \sum\limits_{n \in I_k} \beta_n$, $B = b \prod\limits_{n=1}^{N} c_n^{\beta_n}$; линейный дифференциальный оператор $\hat{L}_k$ порядка M_k, действующий по переменной z_k, имеет вид:

$$\hat{L}_k = \sum_{m=1}^{M_k} A_k^{(m)} \frac{\partial^m}{\partial z_k^m}, \tag{7}$$

где коэффициенты оператора $A_k^{(m)} = \sum\limits_{\sigma_k^{(m)}} a_{\sigma_k^{(m)}} \prod\limits_{n \in I_k} c_n^{m_n}$.

Таким образом, исходное уравнение (1) сведено к редуцированному уравнению (6) для решений, зависящих от переменных z_k, определяемых выражением (5).

2. Вспомогательное функционально-дифференциальное уравнение

Для последующего анализа решений уравнения (6) рассмотрим вспомогательное функционально-дифференциальное уравнение (ФДУ) относительно неизвестных функций $U_k(z_k)$ $(k = 1, \dots, K)$:

$$\sum_{k=1}^{K} \hat{P}_k U_k(z_k) = B \prod_{k=1}^{K} \hat{N}_k U_k(z_k), \tag{8}$$

где $\hat{P}_k, \hat{N}_k$ – дифференциальные операторы по переменной z_k.

Лемма 1.

Уравнению (8) удовлетворяют функции $U_k(z_k)$, являющиеся решениями следующих обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

1) *При выполнении одного из условий $B = 0$ или $\hat{N}_l U_l(z_l) \equiv 0$ при некотором $l \in \Omega$*

$$\hat{P}_k U_k(z_k) = \mu_k, \tag{9}$$

для всех $k \in \Omega$; причем для постоянных μ_k должно быть выполнено условие:

$$\sum_{k=1}^{K} \mu_k = 0. \tag{10}$$

2) *При $B \neq 0$ для каждого фиксированного $l \in \Omega$*

$$\hat{P}_l U_l(z_l) + \tilde{\mu}_l = B \tilde{\nu}_l \hat{N}_l U_l(z_l), \tag{11}$$

причем для всех $k \in \Omega, k \neq l$ функции $U_k(z_k)$ являются решениями систем:

$$\hat{P}_k U_k(z_k) = \mu_k, \hat{N}_k U_k(z_k) = \nu_k. \tag{12}$$

Здесь

$$\tilde{\mu}_l = \sum_{k=1, k \neq l}^{K} \mu_k, \quad \tilde{\nu}_l = \prod_{k=1, k \neq l}^{K} \nu_k, \tag{13}$$

μ_k, ν_k – некоторые постоянные $(\nu_k \neq 0)$.

В частности, уравнению (8) удовлетворяют функции $U_k(z_k)$, являющиеся решениями уравнений (12) при всех $k \in \Omega$, если для постоянных μ_k, ν_k выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{K} \mu_k = B \prod_{k=1}^{K} \nu_k. \tag{14}$$

Доказательство.

1. Если выполнено одно из условий $B = 0$ или $\hat{N}_l U_l(z_l) \equiv 0$ при некотором $l \in \Omega$, то уравнение (8) сводится к следующему:

$$\sum_{k=1}^{K} \hat{P}_k U_k(z_k) = 0. \tag{15}$$

Так как левая часть уравнения (15) представляет собой сумму функций от разных аргументов z_k, то функции $U_k(z_k)$ должны удовлетворять уравнению (9), а постоянные μ_k –

условию (10).
2. Предположим теперь, что правая часть (8) тождественно не равна 0, и рассмотрим вначале случай, когда все сомножители в правой части (8) – ненулевые постоянные. В этом случае функции $U_k(z_k)$ удовлетворяют второму из уравнений (12), причем для всех $k \in \Omega$ $\nu_k \neq 0$, и уравнение (8) сводится к следующему:

$$\sum_{k=1}^{K} \hat{P}_k U_k(z_k) = B \prod_{k=1}^{K} \nu_k. \tag{16}$$

Проводя для уравнения (16) рассуждения, аналогичные предыдущему пункту, получаем, что функции $U_k(z_k)$ должны удовлетворять первому из уравнений (12), а постоянные μ_k, ν_k – условию (14). При этом уравнение (8) удовлетворяется только в том случае, если системы (12) являются совместными при всех $k \in \Omega$.
Пусть теперь $l \in \Omega$ – некоторое фиксированное значение k, для которого выполнено условие

$$\hat{N}_l U_l(z_l) \neq \mathrm{const}. \tag{17}$$

Продифференцируем почленно уравнение (8) по z_l и, с учетом (17), запишем его в виде:

$$\frac{(\partial/\partial z_l)\hat{P}_l U_l(z_l)}{(\partial/\partial z_l)\hat{N}_l U_l(z_l)} = B \prod_{k=1, k\neq l}^{K} \hat{N}_k U_k(z_k). \tag{18}$$

Левая часть соотношения (18) зависит только от z_l, а правая часть – только от $z_k \quad (k \neq l)$. Поэтому оно может быть удовлетворено только в том случае, если функции $U_k(z_k)$ удовлетворяют второму из уравнений (12) при всех $k \neq l$. Тогда уравнение (8) можно преобразовать к виду:

$$\sum_{k=1}^{K} \hat{P}_k U_k(z_k) = B \tilde{\nu}_l \hat{N}_l U_l(z_l), \tag{19}$$

где $\tilde{\nu}_l$ определяется вторым из соотношений (13). Так как правая часть (19) зависит только от z_l, то это уравнение может быть удовлетворено, если и левая часть зависит только от этой переменной, откуда следует, что для всех $k \neq l$ функции $U_k(z_k)$ должны удовлетворять первому из уравнений (12). Тогда уравнение (8) удовлетворяется, если $U_l(z_l)$ является решением уравнения (11), где постоянные $\tilde{\nu}_l, \quad \tilde{\mu}_l$ определяются выражениями (13).
Таким образом, для каждого значения $l \in \Omega$, для которого выполнено условие (17), функция $U_l(z_l)$ находится в результате решения уравнения (11), а функции $U_k(z_k)$ при $k \neq l$ являются решениями систем (12). Рассмотренное решение существует только в том случае, если эти системы при всех $k \neq l$ являются совместными. Лемма доказана.

3. Анализ редуцированного уравнения

В данном разделе проведем анализ решений уравнения (6). Рассмотрим вначале простейшие частные случаи.

I. Правая часть (6) тождественно равна 0.

1) $B = 0$. В этом случае (6) сводится к линейному однородному уравнению:

$$\sum_{k=1}^{K} \hat{L}_k U(z_1, \ldots, z_K) = 0. \tag{20}$$

В частности, если параметры задачи таковы, что одновременно с условием $B = 0$ выполняются условия $A_k^{(m)} = 0$ для всех $k \in \Omega$, $1 \leqslant m \leqslant M_k$, то уравнению (20), а следовательно, и уравнению (6) удовлетворяет любая произвольная функция $U(z_1, \ldots, z_K)$, дифференцируемая необходимое число раз по всем переменным.

2) Если при некотором $l \in \Omega$ выполнено условие $r_l > 0$, то уравнению (6) удовлетворяет любое решение следующего линейного однородного уравнения:

$$\sum_{k=1, k\neq l}^{K} \hat{L}_k U(z_1, \ldots, z_{l-1}, z_{l+1}, \ldots, z_K) = 0. \tag{21}$$

Аналогично случаю 1), если для всех $k \in \Omega$, $k \neq l$, $1 \leqslant m \leqslant M_k$ выполняются условия $A_k^{(m)} = 0$, то уравнению (21), а следовательно, и уравнению (6), удовлетворяет любая произвольная функция $U(z_1, \ldots, z_{l-1}, z_{l+1}, \ldots, z_K)$, дифференцируемая необходимое число раз по всем переменным.

II. Общий случай.

Теорема 1 (об аддитивном разделении переменных).

Уравнение (6) имеет следующее семейство решений, представимых в виде суммы функций одной из переменных $z_1, \ldots, z_K$:

$$U(z_1, \ldots, z_K) = U_l(z_l) + \sum_{k=1, k\neq l}^{K} \nu_k^{1/r_k} z_k + U_0, \tag{22}$$

причем функция $U_l(z_l)$ *является решением следующего ОДУ:*

$$\hat{L}_l U_l(z_l) + \tilde{\mu}_l = B\tilde{\nu}_l [U_l'(z_l)]^{r_l}. \tag{23}$$

Здесь U_0, ν_k – *произвольные постоянные;* $\tilde{\mu}_l$, $\tilde{\nu}_l$ *определяются выражениями:*

$$\tilde{\nu}_l = \prod_{k=1, k\neq l}^{K} \nu_k, \quad \tilde{\mu}_l = \sum_{k=1, k\neq l}^{K} \nu_k^{1/r_k} A_k^{(1)}. \tag{24}$$

Оператор $\hat{L}_l$ *здесь и всюду далее определяется выражением* (7).
Решение (22) существует при всех $l \in \Omega$.

Доказательство.

В соответствии с известной схемой аддитивного разделения переменных ([2], с. 49–51), решение уравнения (6) ищем в виде:

$$U(z_1, \ldots, z_K) = \sum_{k=1}^{K} U_k(z_k). \tag{25}$$

Подставляя (25) в уравнение (6), получаем следующее:

$$\sum_{k=1}^{K} \hat{L}_k U_k(z_k) = B \prod_{k=1}^{K} [U_k'(z_k)]^{r_k}. \tag{26}$$

Соотношение (26) представляет собой ФДУ вида (8); при этом

$$\hat{N}_k U_k(z_k) = [U_k'(z_k)]^{r_k}. \tag{27}$$

Согласно сказанному выше, в случаях, когда правая часть уравнения (6) тождественно равна 0, оно сводится к линейным уравнениям (20) или (21). Поэтому предполагаем, что правая часть (6) тождественно не равна 0. Далее, пусть задано некоторое $l \in \Omega$. Тогда, согласно лемме 1, уравнению (26) удовлетворяет функция $U_l(z_l)$, являющаяся решением уравнения (23), и функции $U_k(z_k)$ $(k \neq l)$, являющиеся решениями следующих систем:

$$\hat{L}_k U_k(z_k) = \mu_k, \quad [U_k'(z_k)]^{r_k} = \nu_k. \tag{28}$$

Решая систему (28) с учетом выражения (7), находим:

$$U_k(z_k) = \nu_k^{1/r_k} z_k + U_{k0}, \tag{29}$$

где U_{k0} – произвольная постоянная. При этом система (28) является совместной только в том случае, если постоянные μ_k, ν_k удовлетворяют соотношению:

$$\mu_k = \nu_k^{1/r_k} A_k^{(1)}, \tag{30}$$

где $A_k^{(1)}$ – коэффициент при первой производной в выражении (7). Из (30) и (13) следует выражение (24) для постоянной $\tilde{\mu}_l$. Далее, подставляя (29) в (25) и объединяя аддитивные постоянные U_{k0}, получаем решение (22). Теорема доказана.

Теорема 2 (о мультипликативном разделении переменных).
Уравнение (6) имеет следующие семейства решений, представимых в виде произведения функций одной из переменных $z_1, \ldots, z_K$:
1) *В случае $r_\Sigma \neq 1$:*

$$U(z_1, \ldots, z_K) = \tilde{\nu}_l^{\frac{1}{r_\Sigma - 1}} U_l(z_l) \prod_{k=1, k\neq l}^{K} \rho_k^{-\rho_k} (z_k - z_{k0})^{\rho_k}, \tag{31}$$

где ρ_k, r_Σ определяются выражениями:

$$\rho_k = \frac{r_k}{r_\Sigma - 1}, \quad r_\Sigma = \sum_{k=1}^{K} r_k, \tag{32}$$

а функция $U_l(z_l)$ является решением ОДУ:

$$\hat{L}_l U_l(z_l) = B\tilde{\nu}_l [U_l'(z_l)]^{r_l} [U_l(z_l)]^{r_\Sigma - r_l}. \tag{33}$$

Решение (31) существует, если при всех $k \neq l$, $k \in \Omega$ для каждого $1 \leqslant m \leqslant M_k$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$A_k^{(m)} = 0, \tag{34}$$

$$r_k = (r_\Sigma - 1)\tilde{m}_k, \tag{35}$$

для некоторого целого $\tilde{m}_k$ такого, что $1 \leqslant \tilde{m}_k \leqslant m - 1$.
2) *В случае $r_\Sigma = 1$:*

$$U(z_1, \ldots, z_K) = C_0 U_l(z_l) \exp\left(\sum_{k=1, k\neq l}^{K} \lambda_k z_k\right). \tag{36}$$

Здесь C_0, λ_k – произвольные постоянные, а функция $U_l(z_l)$ является решением ОДУ:

$$\hat{L}_l U_l(z_l) + \tilde{\mu}_l U_l(z_l) = B\tilde{\nu}_l [U_l'(z_l)]^{r_l} [U_l(z_l)]^{1 - r_l}. \tag{37}$$

Коэффициенты $\tilde{\mu}_l, \tilde{\nu}_l$, входящие в (37), определяются выражениями:

$$\tilde{\nu}_l = \prod_{k=1, k\neq l}^{K} \lambda_k^{r_k}, \quad \tilde{\mu}_l = \sum_{k=1, k\neq l}^{K} \sum_{m=1}^{M_k} \lambda_k^m A_k^{(m)}. \tag{38}$$

Доказательство.
Решение уравнения (6) ищем в виде:

$$U(z_1, \ldots, z_K) = \prod_{k=1}^{K} U_k(z_k). \tag{39}$$

Подставляя (39) в уравнение (6), после некоторых преобразований получаем:

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{\hat{L}_k U_k(z_k)}{U_k(z_k)} = B \prod_{k=1}^{K} \{[U_k'(z_k)]^{r_k} [U_k(z_k)]^{r_\Sigma - r_k - 1}\}. \tag{40}$$

Уравнение (40), так же как и рассмотренное выше (26), представляет собой ФДУ вида (8); при этом входящие в него операторы имеют вид:

$$\hat{P}_k U_k(z_k) = \frac{\hat{L}_k U_k(z_k)}{U_k(z_k)}; \quad \hat{N}_k U_k(z_k) = [U_k'(z_k)]^{r_k}[U_k(z_k)]^{r_\Sigma - r_k - 1}. \tag{41}$$

Далее рассмотрим случаи, перечисленные в условии теоремы.

1. Случай $r_\Sigma \neq 1$.

Если $l \in \Omega$ – некоторое фиксированное значение индекса k, то из второго уравнения системы (12) находим, что при всех $k \neq l \quad U_k(z_k)$ определяется выражением:

$$U_k(z_k) = U_{k0}(z_k - z_{k0})^{\rho_k}, \quad U_{k0} = \left(\frac{\lambda_k}{\rho_k}\right)^{\rho_k}, \tag{42}$$

где ρ_k определяется выражением (32), $\lambda_k = \nu_k^{1/r_k}$. Подставим (42) в первое уравнение системы (12) с учетом (41), тогда после элементарных преобразований получаем:

$$\sum_{m=1}^{M_k} Q_k^{(m)}(\rho_k) A_k^{(m)} (z_k - z_{k0})^{\rho_k - m} = \mu_k (z_k - z_{k0})^{\rho_k}, \tag{43}$$

где

$$Q_k^{(m)}(\rho_k) = \rho_k(\rho_k - 1)\dots(\rho_k - m + 1). \tag{44}$$

Уравнение (43) можно удовлетворить только в том случае, если выполняются условия:

$$Q_k^{(m)}(\rho_k) A_k^{(m)} = 0, \quad \mu_k = 0 \tag{45}$$

при каждом $k \neq l, k \in \Omega$ и всех $m = 1, \dots, M_k$. Учитывая выражение (44), очевидно, что при каждом заданном m первое из условий (45) выполняется либо если $A_k^{(m)} = 0$, либо если $\rho_k = \tilde{m}_k$ при некотором $1 \leqslant \tilde{m}_k \leqslant m - 1$. Отсюда следует, что рассматриваемое решение существует только в том случае, если выполняется хотя бы одно из условий (34), (35). Далее, используя лемму 1, из уравнения (11), с учетом (13) и второго из условий (45), приходим к уравнению (33) для функции $U_l(z_l)$. Подставляя выражение (42) в (39), получаем решение в виде (31).

2. Случай $r_\Sigma = 1$.

В этом случае второе уравнение системы (12) имеет вид:

$$\left(\frac{U_k'(z_k)}{U_k(z_k)}\right)^{r_k} = \nu_k,$$

откуда следует, что при всех $k \neq l$

$$U_k(z_k) = U_{k0} \exp(\lambda_k z_k), \tag{46}$$

где $\lambda_k = \nu_k^{1/r_k}$, так же как и в предыдущем случае.

Подставляя (46) в первое уравнение системы (12) с учетом первого из соотношений (41), получаем:

$$\sum_{m=1}^{M_k} A_k^{(m)} \lambda_k^m = \mu_k. \tag{47}$$

Тогда из уравнения (11) с учетом (47) и (13), находим, что функция $U_l(z_l)$ должна быть решением уравнения (37), в котором $\tilde{\nu}_l, \tilde{\mu}_l$ определяются выражениями (38). Подставляя выражение (46) в (39), получаем решение в виде (36). Теорема доказана.

Пусть множество Ω представлено в виде объединения S непересекающихся подмножеств $\Omega_s \quad (s = 1, \dots, S)$. Ниже будем использовать выражение:

$$r_{\Sigma s} = \sum_{k \in \Omega_s} r_k.$$

Также введем Λ_0 – множество значений индекса s, при котором $r_{\Sigma s} = 0$. Далее всюду будем предполагать, что l, t – некоторые фиксированные значения индексов k, s, причем $l \in \Omega_t$.

Теорема 3 (о комбинированном разделении переменных).

Для каждого способа разбиения множества Ω на подмножества $\Omega_s (s = 1, \ldots, S)$ уравнение (6) *имеет следующее семейство решений*:

а) при $r_{\Sigma t} = 1$:

$$U(z_1, \ldots, z_K) = \sum_{s \in \Lambda_0, s \neq t} D_s \exp\left(\sum_{k \in \Omega_s} \lambda_k z_k\right) +$$
$$+ \sum_{s \notin \Lambda_0, s \neq t} E_s \prod_{k \in \Omega_s} (z_k - z_{k0})^{\sigma_k} + D_t \exp\left(\sum_{k \in \Omega_t, k \neq l} \lambda_k z_k\right) U_l(z_l), \tag{48}$$

причем $U_l(z_l)$ является решением ОДУ:

$$\hat{L}_l U_l(z_l) + \mu_l U_l(z_l) = F_l [U_l'(z_l)]^{r_l} [U_l(z_l)]^{1-r_l}, \tag{49}$$

где

$$\mu_l = \sum_{k \in \Omega_t, k \neq l} \sum_{m=1}^{M_k} A_k^{(m)} \lambda_k^m,$$

$$F_l = B \cdot \prod_{k \in \Omega_t, k \neq l}^{K} \lambda_k^{r_k} \cdot \prod_{s \in \Lambda_0, s \neq t} \prod_{k \in \Omega_s} \lambda_k^{r_k} \cdot \prod_{s \notin \Lambda_0, s \neq t} \prod_{k \in \Omega_s} \sigma_k^{r_k} \cdot \prod_{s \notin \Lambda_0, s \neq t} E_s^{r_{\Sigma s}}.$$

Решение (48) *существует при выполнении следующих условий:*

$$\sum_{k \in \Omega_s} \sum_{m=1}^{M_k} A_k^{(m)} \lambda_k^m = 0 \tag{50}$$

при всех $s \in \Lambda_0, s \neq t$;

$$A_k^{(m)} Q_k^{(m)}(\sigma_k) = 0 \tag{51}$$

при всех $k \in \Omega_s, 1 \leqslant m \leqslant M_k, s \notin \Lambda_0, s \neq t$;

б) при $r_{\Sigma t} \neq 1$:

$$U(z_1, \ldots, z_K) = \sum_{s \in \Lambda_0, s \neq t} D_s \exp\left(\sum_{k \in \Omega_s} \lambda_k z_k\right) +$$
$$+ \sum_{s \notin \Lambda_0, s \neq t} E_s \prod_{k \in \Omega_s} (z_k - z_{k0})^{\sigma_k} + E_t U_l(z_l) \prod_{k \in \Omega_t, k \neq l} (z_k - z_{k0})^{\rho_k}, \tag{52}$$

причем $U_l(z_l)$ является решением ОДУ:

$$\hat{L}_l U_l(z_l) = G_l [U_l'(z_l)]^{r_l} [U_l(z_l)]^{r_{\Sigma t} - r_l}, \tag{53}$$

где

$$G_l = B E_t^{r_{\Sigma t} - 1} \cdot \prod_{k \in \Omega_t, k \neq l}^{K} \rho_k^{r_k} \cdot \prod_{s \in \Lambda_0, s \neq t} \prod_{k \in \Omega_s} \lambda_k^{r_k} \cdot \prod_{s \notin \Lambda_0, s \neq t} \prod_{k \in \Omega_s} \sigma_k^{r_k} \cdot \prod_{s \notin \Lambda_0, s \neq t} E_s^{r_{\Sigma s}}.$$

Решение (52) *существует при выполнении условий* (50), (51), *а также следующего дополнительного условия:*

$$A_k^{(m)} Q_k^{(m)}(\rho_k) = 0 \tag{54}$$

при всех $k \in \Omega_t, k \neq l, 1 \leqslant m \leqslant M_k$.
В формулах (48)–(54) $D_s, E_s, \lambda_k, z_{k0}$ – *произвольные постоянные, а* ρ_k, σ_k *определяются выражениями:*

$$\rho_k = \frac{r_k}{r_{\Sigma t} - 1} \quad (k \in \Omega_t), \tag{55}$$

$$\sigma_k = \frac{r_k}{r_{\Sigma s}} \quad (k \in \Omega_s). \tag{56}$$

Доказательство.
Решение уравнения (6) ищем в виде:

$$U(z_1, \dots, z_K) = \sum_{s=1}^{S} \prod_{k \in \Omega_s} U_k(z_k). \tag{57}$$

Подставив (57) в уравнение (6) и учитывая выражение (7), приводим уравнение (6) к виду:

$$\sum_{s=1}^{S} \sum_{k \in \Omega_s} \hat{P}_k U_k(z_k) \cdot \prod_{k \in \Omega_s} U_k(z_k) = B \prod_{s=1}^{S} \prod_{k \in \Omega_s} \{[U_k'(z_k)]^{r_k} [U_k(z_k)]^{r_{\Sigma s} - r_k}\}, \tag{58}$$

где $\hat{P}_k[U_k(z_k)]$ определяется первым из выражений (41). Продифференцируем уравнение (58) почленно по z_l, в результате чего получаем:

$$\frac{\partial}{\partial z_l}\{\sum_{k \in \Omega_t} \hat{P}_k U_k(z_k) \cdot \prod_{k \in \Omega_t} U_k(z_k)\} = B \prod_{k \in \Omega, k \neq l} \{[U_k'(z_k)]^{r_k} [U_k(z_k)]^{r_{\Sigma s} - r_k}\} \cdot \frac{\partial}{\partial z_l}\{[U_l'(z_l)]^{r_l} [U_l(z_l)]^{r_{\Sigma t} - r_l}\}. \tag{59}$$

Левая часть (59) зависит только от $z_k (k \in \Omega_t)$, поэтому при всех $k \in \Omega_s, s \neq t$ функции $U_k(z_k)$ должны удовлетворять уравнению:

$$[U_k'(z_k)]^{r_k} [U_k(z_k)]^{r_{\Sigma s} - r_k} = \lambda_k^{r_k}, \tag{60}$$

где λ_k – некоторые постоянные.
Рассмотрим частные случаи для уравнения (60).

1) $r_{\Sigma s} = 0$. В этом случае решением уравнения (60) является экспоненциальная функция:

$$U_k(z_k)] = U_{k0} \exp(\lambda_k z_k); \tag{61}$$

2) $r_{\Sigma s} \neq 0$. В этом случае решение уравнения (60) имеет вид:

$$U_k(z_k)] = \left(\frac{\lambda_k}{\sigma_k}\right)^{\sigma_k} (z_k - z_{k0})^{\sigma_k}, \tag{62}$$

где σ_k определяется выражением (56).
Используя выражения (61), (62), слагаемые в левой части уравнения (58), соответствующие отдельным значениям $s \neq t$, можно записать в виде:
1) При $r_{\Sigma s} = 0$:

$$\sum_{k \in \Omega_s} \hat{P}_k[U_k(z_k)] \cdot \prod_{k \in \Omega_s} U_k(z_k) = D_s \exp\left(\sum_{k \in \Omega_s} \lambda_k z_k\right) \sum_{k \in \Omega_s} \sum_{m=1}^{M_k} A_k^{(m)} \lambda_k^m, \tag{63}$$

где

$$D_s = \prod_{k \in \Omega_s} U_{k0};$$

2) При $r_{\Sigma s} \neq 0$:

$$\sum_{k \in \Omega_s} \hat{P}_k[U_k(z_k)] \cdot \prod_{k \in \Omega_s} U_k(z_k) = E_s \prod_{k \in \Omega_s} (z_k - z_{k0})^{\sigma_k} \sum_{k \in \Omega_s} \sum_{m=1}^{M_k} A_k^{(m)} Q_k^{(m)}(\sigma_k)(z_k - z_{k0})^{-m}, \tag{64}$$

где $Q_k^{(m)}$ определяется выражением (44),

$$E_s = \prod_{k\in\Omega_s}\left(\frac{\lambda_k}{\sigma_k}\right)^{\sigma_k}.$$

Как отмечалось выше, функции $U_k(z_k)$ удовлетворяют уравнению (60) при всех $k\in\Omega_s, s\neq t$. Поэтому как правая, так и левая части уравнения (58) могут зависеть только от переменных $z_k (k\in\Omega_t)$. С учетом выражений (63), (64), это возможно лишь при выполнении условий (50), (51). Тогда уравнение (58) принимает вид:

$$\sum_{k\in\Omega_t}\hat{P}_kU_k(z_k) = \tilde{B}_t\prod_{k\in\Omega_t}\{[U_k'(z_k)]^{r_k}[U_k(z_k)]^{r_{\Sigma t}-r_k-1}\}, \tag{65}$$

где

$$\tilde{B}_t = B\prod_{s=1,s\neq t}^{S}\prod_{k\in\Omega_s}\lambda_k^{r_k}.$$

Аналогично рассуждениям, проведенным при выводе (59), продифференцируем уравнение (65) почленно по z_l, в результате чего получаем:

$$\frac{\partial}{\partial z_l}\{\hat{P}_lU_l(z_l)\} = \tilde{B}_t\prod_{k\in\Omega_t,k\neq l}\{[U_k'(z_k)]^{r_k}[U_k(z_k)]^{r_{\Sigma s}-r_k-1}\}\cdot\frac{\partial}{\partial z_l}\{[U_l'(z_l)]^{r_l}[U_l(z_l)]^{r_{\Sigma t}-r_l-1}\}. \tag{66}$$

Так как левая часть уравнения (66) зависит только от z_l, то и правая часть может зависеть только от этой переменной, поэтому функции $U_k(z_k)$ при всех $k\in\Omega_t, k\neq l$ должны удовлетворять уравнению:

$$[U_k'(z_k)]^{r_k}[U_k(z_k)]^{r_{\Sigma t}-r_k-1} = \lambda_k^{r_k}. \tag{67}$$

Уравнение (67) имеет вид, аналогичный уравнению (60), с точностью до замены $r_{\Sigma s}\to r_{\Sigma t}-1$, поэтому, так же как при анализе уравнения (60), рассматриваем частные случаи:

1) $r_{\Sigma t}=1$.

В этом случае решением уравнения (67) является функция (61). Подставляя выражение (61) в уравнение (65), получаем, что функция $U_l(z_l)$ должна удовлетворять уравнению (49). Используя выражения (61), (62), (57), получаем решение в виде (48).

2) $r_{\Sigma t}\neq 1$.

В этом случае решение уравнения (67) имеет вид:

$$U_k(z_k) = \left(\frac{\lambda_k}{\rho_k}\right)^{\rho_k}(z_k-z_{k0})^{\rho_k}, \tag{68}$$

где ρ_k определяется выражением (55).

Подставляя выражение (68) в уравнение (65), получаем следующее:

$$\hat{P}_lU_l(z_l) + \sum_{k\in\Omega_t,k\neq l}\sum_{m=1}^{M_k}A_k^{(m)}Q_k^{(m)}(\rho_k)(z_k-z_{k0})^{-m} = G_l[U_l'(z_l)]^{r_l}[U_l(z_l)]^{r_{\Sigma t}-r_l-1}. \tag{69}$$

Если выполняется условие (54) при всех $k\in\Omega_t, k\neq l, 1\leqslant m\leqslant M_k$, то уравнение (69) сводится к ОДУ (53) относительно функции $U_l(z_l)$. Далее, подставляя в (57) выражения (61), (62), (68), получаем решение уравнения (6) в виде (52). Теорема доказана.

4. Заключение

Таким образом, в данной работе исследовано многомерное уравнение в частных производных (1), содержащее линейный дифференциальный оператор произвольного порядка и степенные нелинейности по первым производным. Для решений типа многомерных бегущих волн, зависящих от некоторых линейных комбинаций исходных переменных, уравнение (1) сведено к редуцированному уравнению (6). Для решения этого уравнения применяется метод разделения переменных. При этом предварительно выполнен анализ вспомогательного функционально-дифференциального уравнения, которое получается в ходе применения этого метода к редуцированному уравнению. Получены решения редуцированного уравнения для аддитивного, мультипликативного и комбинированного разделения переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. *Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения.* М.: Физматлит, 2002.
2. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики* М.: Физматлит, 2005.
3. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка.* М.: Физматлит, 2003.
4. Полянин А.Д., Журов А.И. *Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике* // Доклады РАН. 2002. Т. 382. №5. С.606-611.
5. Рахмелевич И.В. *О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелине йностью по производным.* // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 1. С. 12–19.
6. Рахмелевич И.В. *О некоторых новых решениях многомерного уравнения в частных производных первого порядка со степенными нелинейностями.* // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 3. С. 18–25.
7. Рахмелевич И.В. *О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных.* // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 3(23). С. 37–44.
8. Рахмелевич И.В. *Об уравнениях математической физики, содержащих мультиоднородные функции от производных.* // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 1. С. 42–50.
9. Рахмелевич И.В. *О решениях многомерного уравнения Клеро с мультиоднородной функцией от производных.* // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика, механика, информатика. 2014. Т. 14. № 4-1. С. 374–381.
10. J. Miller (Jr.), Rubel L.A. *Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions* // Journal of Physics A. 1993. V.26. P.1901–1913.
11. R.Z. Zhdanov *Separation of variables in the non-linear wave equation.* // Journal of Physics A. 1994. V.27. P. L291–L297.
12. A.M. Grundland, E. Infeld *A family of non-linear Klein - Gordon equations and their solutions* // Journal of Mathematical Physics. 1992. V. 33. No 7. P. 2498–2503.

Игорь Владимирович Рахмелевич,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
просп. Гагарина, 23,
603950, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru