ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 1 (2017). С. 89-97.

УДК 517.5, 517.9

# ТОЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ С ВЕСАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

**Р.Г. НАСИБУЛЛИН**

**Аннотация.** Доказываются точные неравенства типа Харди с весами, зависящими от функции Бесселя. Получены одномерные $L^p$-неравенства и приведен пример распространения этих неравенств на случай выпуклых областей с конечным внутренним радиусом. Доказанные утверждения являются обобщением на случай произвольного $p \geq 2$ соответствующего неравенства, доказанного Ф.Г. Авхадиевым и К.-Й. Вирцем для $p = 2$.

**Ключевые слова:** неравенства Харди, функции Бесселя, константа Лямба, функция расстояния, внутренний радиус, выпуклая область.

**Mathematics Subject Classification:** 26D15

## Введение

Неравенства типа Харди связывают функцию и ее производную в интегральном соотношении, и при этом являются инструментом решения некоторых задач математики и математической физики. Неравенства Харди с весами произвольного вида получили систематическое развитие в работах В. Левина [1], П.Р. Бисака [2], Дж. Таленти [3], Дж. Томаселли [4], Б. Макенхоупта [5], Дж. Синомона и В.Д. Степанова [6] и других математиков. Например, Дж. Таленти, Дж. Томаселли получили необходимые и достаточные условия на весовые функции, для которых выполнены соответствующие неравенства. Отметим также работу Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Вирца [7], в которой установлены неравенства типа Харди с весовыми функциями, зависящими от функции Бесселя порядка $\nu$:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+1+\nu)}, \quad x > 0, \nu \geq 0.$$

Приведем формулировку этого результата:

**Теорема A.** *Пусть $s \in (0, +\infty), \nu \in (0, +\infty), q > 0, \Phi_{\nu,q}(t) := \sqrt{x} J_\nu(\lambda(2/q) t^{q/2})$ и абсолютно непрерывная функция $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, такая что $u(0) = 0$ и $u'/t^{(s-1)(1+q\nu)/4} \in L^2[0,1]$. Тогда*

$$\int_0^1 u'^2 \frac{dt}{\Phi_{q,\nu}^{s-1}(t)} \geq s \int_0^1 \frac{u^2(t)}{t^2} \left( \frac{1-\nu^2 q^2}{4} + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2/q)}{4t^{-q}} \right) \frac{dt}{\Phi_{q,\nu}^{s-1}(t)}. \tag{1}$$

*Неравенство является строгим, если $f \not\equiv 0$ и $s \leqslant \frac{1-\nu q}{1+\nu q}$. Если $s > \frac{1-\nu q}{1+\nu q}$, то равенство в неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $u(t) = C\Phi_{\nu,q}^s(t)$, где $C$ — некоторая константа.*

Отметим, что в статье [7] также получены аналоги неравенства (1) в произвольных выпуклых областях с конечным внутренним радиусом.

---

R.G. Nasibullin, Sharp Hardy type inequalities with weights depending on Bessel function.



Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00351-а) и при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта №15-41-02433.

*Поступила 8 декабря 2015 г.*

Величину $\lambda_\nu(r)$, которая определяется как положительный корень уравнения:

$$rJ_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0,$$

$r > 0, \nu \geq 0$, следуя статьям [7] и [8], будем называть константой Лямба.

Неравенство (1) является логическим развитием, с одной стороны неравенств типа Харди с весами, а с другой — неравенств с дополнительным слагаемым. Постановка задачи получения неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми принадлежит Х. Брезису и М. Маркусу [9]. Неравенства Брезиса и Маркуса получили широкое развитие, например, в таких работах как [7], [8], [10] – [16].

Данная статья посвящена получению $L^p$-аналога неравенства (1). Особенностью полученных неравенств являются точные константы (см., например, [7], [8], [10]–[13], [17], [18]) и ядра, зависящие от функции Бесселя. Стоит отметить, что с помощью подхода Ф.Г. Авхадиева (см., например, [17], [22]–[24]) каждое полученное в данной статье одномерное интегральное неравенство типа Харди можно распространить на произвольную выпуклую область $\Omega$ с конечным внутренним радиусом

$$\delta_0 = \delta_0(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} \delta,$$

где $\delta = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$. Чтобы подтвердить эту возможность, мы приводим в статье следующее неравенство в пространственном случае, которое можно рассматривать как один из основных результатов данной статьи.

Пусть $C_0^1(\Omega)$ — семейство непрерывно-дифференцируемой функции $f$ с компактным носителем в $\Omega$. Справедлива

**Теорема 1.** *Пусть $\Omega$ — $n$-мерная выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $\delta_0 = \delta_0(\Omega) < \infty$. Если $s \in (0, +\infty), \nu \in (0, +\infty), p \in [2, +\infty)$, то для произвольной функции $f \in C_0^1(\Omega)$ выполнено следующее неравенство типа Харди:*

$$\int\limits_\Omega \frac{|\nabla f(x)|^p}{\sin^{s-1}(\frac{\pi\delta}{2\delta_0})} dx \geq \frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}} \frac{\pi^2}{(2\delta_0)^p} \int\limits_\Omega \frac{|f(x)|^p}{\sin^{s-1}(\frac{\pi\delta}{2\delta_0})} \left(\mathrm{ctg}\,\frac{\pi\delta}{2\delta_0}\right)^{p-2} dx,$$

*где $j_{\nu-1}$ — первый положительный нуль функции Бесселя $J_{\nu-1}(x)$.*

Частные случаи этого результата связаны с неравенствами Пуанкаре, доказанных Дж. Херчем в [19] и Л. Пейном и И. Стакгольдем в [20].

## Вспомогательные результаты

Нам потребуются некоторые свойства функции Бесселя. В статье [7] ввели функцию

$$F_{\nu,r,q}(t) = t^{r/2} J_\nu\left(\lambda_\nu(2r/q)t^{q/2}\right),\ t \in [0,1],$$

где через $J_\nu$ обозначена функция Бесселя.

Известно (см. [8]), что константа Лямба $\lambda_\nu$ связана с первым положительным корнем $j_\nu$ функции Бесселя $J_\nu$ порядка $\nu$ следующим образом

$$\lambda_\nu(2\nu) = j_{\nu-1}. \qquad (2)$$

Отметим, что функция $y = F_{\nu,r,q}(t)$ является решением следующего дифференциального уравнения:

$$t^2 y'' + (1-r)ty' + \left(\frac{r^2 - \nu^2 q^2}{4} + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2r/q)}{4t^{-q}}\right) y = 0. \qquad (3)$$

Пусть теперь

$$F_\nu(t) := F_{\nu,1,q}(t),\ \text{при}\ \nu = 1/q.$$

Используя связь (2) и поведение функции Бесселя вблизи нуля, а именно,

$$J_\nu(t) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{t}{2}\right)^\nu + o(t), \text{ при } t \to 0,$$

легко получаем

$$F_\nu(t) = \sqrt{t} J_\nu\left(j_{\nu-1} t^{1/(2\nu)}\right) = \frac{j_{\nu-1}^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)} t + o(t), \quad t \to 0+. \tag{4}$$

В статье [10] также приведены следующие свойства функции $F_\nu$:

$$F'_\nu(1) = 0, F_\nu(t) > 0, x \in (0,1] \text{ и } F'_\nu(t) > 0, t \in (0,1).$$

Для абсолютно непрерывной функции $u$ такой, что $u(0) = 0$ и $t^{(1-s)/p}u' \in L^p(0,1)$, пользуясь соотношением $|u(x)| \leqslant \int\limits_0^x |u(t)|dt$ и неравенством Гельдера, имеем

$$|u(x)|^p \leqslant \left(\int\limits_0^x |u'(t)|dt\right)^p = \left(\int\limits_0^x t^{\frac{s-1}{p-1}} dt\right)^{p-1} \int\limits_0^x \frac{|u'(t)|^p}{t^{s-1}} dt =$$

$$= \left(\frac{p-1}{s+p-2}\right)^{p-1} x^{s+p-2} \int\limits_0^x \frac{|u'(t)|^p}{t^{s-1}} dt.$$

Легко показать, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{u^p(t) F'^{p-1}_\nu(t)}{F_\nu^{s+p-2}(t)} = 0 = \frac{u^p(1) F'^{p-1}_\nu(1)}{F_\nu^{s+p-2}(1)}.$$

Одномерные неравенства мы получим как следствия леммы Д.Т. Шама из статьи [21], которая формулируется следующим образом:

**Лемма B.** *Пусть $u(t)$ — абсолютно непрерывная функция на $[a,b]$, такая что $u'(t) \geq 0$ почти всюду. Также, будем полагать, что $Q(t)$ — положительная и непрерывная на $(a,b)$, и $G(u,t)$ — непрерывно дифференцируемая по $t$ в $[a,b]$ и $u$ в пределах функции $u(t)$, $G_u(u,t)>0$. Тогда, если интеграл существует, то*

$$\int\limits_a^b \left(Qu'^p + \left(\frac{c}{p}\right)^{p/(p-1)} (p-1) G_u^{p/(p-1)} Q^{-1/(p-1)} + cG_t\right) dt \geq c\{G(u(b),b) - G(u(a),a)\},$$

*где $c$ — произвольное положительное число, $p > 1$ и*

$$G_u = (\partial/\partial u)G(u,x), G_x = (\partial/\partial x)G(u,x).$$

*В неравенстве будет равенство тогда и только тогда, когда выполнено следующее дифференциальное уравнение*

$$u' = \left(\frac{c}{p}\right)^{1/(p-1)} \left(\frac{G_u}{Q}\right)^{1/(p-1)}.$$

**Замечание 1.** Стоит отметить, что утверждение **леммы B** напрямую даст неравенства лишь для монотонных функций. Следующие рассуждения показывают, что из соответствующего неравенства Харди для монотонных функций, следует результат для произвольных функций.

Пусть для монотонной положительной функции $g$ и положительных весовых функций $w$ и $v$ выполнено следующее неравенство:

$$\int\limits_a^b g^p(x) w(x) dx \leqslant C_1 \int\limits_a^b g'^p(x) v(x) dx. \tag{5}$$

Положим, что

$$g(x)=\int_0^x |f'(t)|dt \text{ и } f(x)=\int_0^x f'(t)dt.$$

Тогда

$$|f(x)|\leqslant \int_0^x |f'(t)|dt = g(x), g'(x)=|f'(x)|.$$

Откуда следует, что

$$\int\limits_a^b |f(x)|^p w(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g^p(x)w(x)dx \leqslant C_1\int\limits_a^b g'^p(x)v(x)dx = C_1\int\limits_a^b |f'(x)|^p v(x)dx.$$

Таким образом, получаем неравенство для произвольной абсолютно непрерывной функции.

Ясно, также что если в неравенстве (5) достигается равенство на некоторой функции $g_0$, то в классе произвольных абсолютно непрерывных функций константа в неравенстве является неулучшаемой.

## Основные результаты, относящиеся к одномерным интегралам

Нам удалось найти такие частные случаи функций $G$ и $Q$, при которых, используя свойства функции Бесселя, из **леммы B** можно получить следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть $s\in(0,+\infty), \nu\in(0,+\infty), p\in[2,+\infty)$ и $F_\nu(t)=\sqrt{t}J_\nu(j_{\nu-1}t^{1/(2\nu)})$. Если функция $u:[0,1]\to\mathbb{R}$ абсолютно непрерывна, $u(0)=0$ и $u'/t^{(s-1)/p}\in L^p(0,1)$, то*

$$\int\limits_0^1 |u'(t)|^p\frac{dt}{F_\nu^{s-1}(t)} \geq \frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}}\frac{j_{\nu-1}^2}{4\nu^2}\int\limits_0^1 \frac{|u(t)|^p}{t^{2-\frac{1}{\nu}}}\left(\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu(t)}\right)^{p-2}\frac{dt}{F_\nu^{s-1}(t)}. \tag{6}$$

*В неравенстве будет равенство тогда и только тогда, когда функция*

$$u(t)=CF_\nu^{\frac{p+s-2}{p-1}}(t),$$

*где $C$ — некоторая константа.*

**Доказательство теоремы 2.** Не ограничивая общности, нам достаточно доказать утверждения для положительных и монотонных функций, так как для произвольных функций наши неравенства получаются как следствия.

Пусть в **лемме B** величина $a=\varepsilon, b=1$ и

$$c=\left(\frac{p+s-2}{p-1}\right)^{p-1}, G(u,t)=\frac{u^p}{F_\nu^{s-1}(t)}\left(\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu(t)}\right)^{p-1},\ Q(t)=\frac{1}{F_\nu^{s-1}(t)}.$$

Элементарными выкладками несложно получить, что

$$\left(\frac{c}{p}\right)^{p/(p-1)}(p-1)G_u^{p/(p-1)}Q^{-1/(p-1)} = c^{p/(p-1)}(p-1)\frac{u^p(t)}{F_\nu^{s-1}(t)}\left(\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu(t)}\right)^p$$

и

$$cG_t = cu^p(t)\left(\frac{p-s}{F_\nu^{s-1}(t)}\left(\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu(t)}\right)^p+\frac{(p-1)F_\nu''(t)}{F_\nu^s(t)}\left(\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu(t)}\right)^{p-2}\right).$$

Имеем

$$\left(\frac{c}{p}\right)^{p/(p-1)}(p-1)G_u^{p/(p-1)}Q^{-1/(p-1)}+cG=$$

$$=\frac{u^p(t)}{F_\nu^{s-1}(t)}\left(\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu(t)}\right)^p\big((p-1)c^{p/(p-1)}+c(2-p-s)\big)+c(p-1)u^p(t)\frac{F_\nu''(t)}{F_\nu^s(t)}\left(\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu(t)}\right)^{p-2}=$$

$$= \left(\frac{p+s-2}{p-1}\right)^{p-1}(p-1)u^p(t)\frac{F''_\nu(t)}{F^s_\nu(t)}\left(\frac{F'_\nu(t)}{F_\nu(t)}\right)^{p-2}.$$

Таким образом, из **леммы B** следует

$$\int\limits_\varepsilon^1\left(\frac{u'^p(t)}{F^{s-1}_\nu(t)}+\left(\frac{p+s-2}{p-1}\right)^{p-1}(p-1)u^p(t)\frac{F''_\nu(t)}{F^s_\nu(t)}\left(\frac{F'_\nu(t)}{F_\nu(t)}\right)^{p-2}\right)dt\geq$$

$$\geq\left(\frac{p+s-2}{p-1}\right)^{p-1}\left\{\frac{u^p(1)}{F^{s-1}_\nu(1)}\left(\frac{F'_\nu(1)}{F_\nu(1)}\right)^{p-1}-\frac{u^p(\varepsilon)}{F^{s-1}_\nu(\varepsilon)}\left(\frac{F'_\nu(\varepsilon)}{F_\nu(\varepsilon)}\right)^{p-1}\right\}.$$

В последнем неравенстве воспользуемся уравнением

$$F''_\nu(t)+\frac{j^2_{\nu-1}}{4\nu^2}F_\nu(t)t^{-2+\frac{1}{\nu}}=0 \tag{7}$$

и перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$. Получим

$$\int\limits_0^1 u'^p(t)\frac{dt}{F^{s-1}_\nu(t)}\geq\frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}}\frac{j^2_{\nu-1}}{4\nu^2}\int\limits_0^1\frac{u^p(t)}{t^{2-\frac{1}{\nu}}}\left(\frac{F'_\nu(t)}{F_\nu(t)}\right)^{p-2}\frac{dt}{F^{s-1}_\nu(t)}.$$

Уравнение (7) является частным случаем (3) при $\nu=r/q$.

Из **леммы B** также следует, что константы будут точными, если

$$\frac{u'(t)}{u(t)}=\frac{p+s-2}{p-1}\frac{F'_\nu(t)}{F_\nu(t)}.$$

То есть при $u(t)=CF_\nu^{\frac{p+s-2}{p-1}}(t)$ вместо неравенства будет равенство. Легко проверить, что функция $CF_\nu^{\frac{p+s-2}{p-1}}(t)$ удовлетворяет условиям теоремы.

Далее приведем два следствия теоремы 2. Используя, что

$$J_{1/2}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin t}{\sqrt{t}},\quad J_{-1/2}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos t}{\sqrt{t}},$$

и как следствие, $j_{-1/2}=\pi/2$, $j_{1/2}=\pi$ (см. подробнее [8]), получим

**Следствие 1.** *Пусть $s\in(0,+\infty), p\in[2,+\infty)$ и абсолютно непрерывная функция $u$ на $[0,1]$, такая что $u(0)=0$ и $u'^p(t)\sin^{1-s}(t)$ интегрируемая на $[0,1]$. Тогда*

$$\int\limits_0^1\frac{|u'(t)|^p}{\sin^{s-1}(\pi t/2)}dt\geq\frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^p\int\limits_0^1|u(t)|^p\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2}\right)^{p-2}\frac{dt}{\sin^{s-1}(\pi t/2)}. \tag{8}$$

*Равенство в неравенстве достигается при $u(t)=C\sin^{\frac{p+s-2}{p-1}}(\pi t/2)$, где $C$ — некоторая константа.*

При $s=1$ и $p=2$ имеем результат из [8].

**Следствие 2.** *Пусть $\nu\in(0,+\infty), p\in[2,+\infty)$ и абсолютно непрерывная функция $u$ на $[0,1]$, такая что $u(0)=0$ и $u'^2(t)$ интегрируемая на $[a,b]$. Тогда*

$$\int\limits_0^1|u'(t)|^2\geq\frac{j^2_{\nu-1}}{4\nu^2}\int\limits_0^1\frac{|u(t)|^2}{t^{2-\frac{1}{\nu}}}dt. \tag{9}$$

*Равенство в неравенстве достигается при $u(t)=C\sqrt{t}J_\nu(j_{\nu-1}t^{\frac{1}{2\nu}})$, где $C$ — некоторая константа.*

Второй основной результат данной статьи также связан с частным случаем функции $F_{\nu,r,q}$. Положим, что $\Phi_q(t) = F_{0,1,q}(t)$, т.е.

$$\Phi_q(t) = \sqrt{t} J_0(\lambda_0(2/q)t^{q/2}).$$

Верна следующая теорема.

**Теорема 3.** *Пусть $s \in (0, +\infty), \nu \in (0, +\infty), p \in [2, +\infty)$ и абсолютно непрерывная функция $u$ на $[0, 1]$, такая что $u(0) = 0$ и $u'/t^{(s-1)/(2p)} \in L^p[0, 1]$. Тогда*

$$\int_0^1 |u'(t)|^p \frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)} \geq \frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}} \int_0^1 |u(t)|^p \left(\frac{1}{4t^2} + \frac{q^2\lambda_0^2(2/q)}{4t^{2-q}}\right) \left(\frac{\Phi_q'(t)}{\Phi_q(t)}\right)^{p-2} \frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)}. \quad (10)$$

*Равенство при $s > p - 1$ достигается тогда и только тогда, когда функция $u(t) = C(\Phi_q(t))^{\frac{p+s-2}{p-1}}$, где $C$ — некоторая константа.*

**Доказательство теоремы 3.** Положим, что в **лемме B** величина $a = \varepsilon, b = 1$ и

$$c = \left(\frac{p+s-2}{p-1}\right)^{p-1}, G(u,t) = \frac{u^p}{\Phi_q^{s-1}} \left(\frac{\Phi_q'(t)}{\Phi_q(t)}\right)^{p-1}, \ Q(t) = \frac{1}{\Phi_q^{s-1}(t)}.$$

Аналогично доказательству теоремы 1 получим:

$$\int_\varepsilon^1 \left( \frac{u'^p}{\Phi_q^{s-1}(t)} + \left(\frac{p+s-2}{p-1}\right)^{p-1} (p-1)u^p(t)\frac{\Phi_q''(t)}{\Phi_q^s(t)} \left(\frac{\Phi_q'(t)}{\Phi_q(t)}\right)^{p-2} \right) dt \geq$$

$$\geq c \left( \frac{u^p(1)}{\Phi_q^{s-1}(1)} \left(\frac{\Phi_q'(1)}{\Phi_q(1)}\right)^{p-1} - \frac{u^p(\varepsilon)}{\Phi_q^{s-1}(\varepsilon)} \left(\frac{\Phi_q'(\varepsilon)}{\Phi_q(\varepsilon)}\right)^{p-1} \right).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и используя уравнение (3) при $\nu = 0$, а именно,

$$\Phi_q''(t) + \left(\frac{1}{4t^2} + \frac{q^2\lambda_0^2(2/q)}{4t^{2-q}}\right) \Phi_q(t) = 0,$$

имеем

$$\int_0^1 u'^p(t) \frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)} \geq \frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}} \int_0^1 u^p(t) \left(\frac{1}{4t^2} + \frac{q^2\lambda_0^2(2/q)}{4t^{2-q}}\right) \left(\frac{\Phi_q'(t)}{\Phi_q(t)}\right)^{p-2} \frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)}.$$

Выше мы воспользовались тем, что

$$|u(x)|^p \leqslant \left(\frac{s+2p-3}{2(p-1)}\right)^{p-1} x^{(s+2p-3)/2} \int_0^x \frac{|u'(t)|^p}{t^{(s-1)/2}} dt,$$

и что при малых $t$ функция $\Phi_q(t) = O(\sqrt{t})$.

Из **леммы B** также следует, что константы будут точными, если

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = \frac{p+s-2}{p-1} \frac{\Phi_q(t)}{\Phi_q'(t)}.$$

То есть при $u(t) = C\Phi_q^{\frac{p+s-2}{p-1}}(t)$ вместо неравенства будет равенство. Легко проверить, что при $s > p - 1$ функция $\Phi_q$ удовлетворяет условиям теоремы. В данный момент неясно о точности в случае $s < p - 1$.

Последний результат этой статьи связан также с частным случаем функции $F_{\nu,r,q}$. Пусть $\Phi_{\nu,q}(t) = F_{\nu,1,q}(t)$. Тогда для функции

$$\Phi_{\nu,q}(t) = \sqrt{t} J_\nu(\lambda_\nu(2/q)t^{q/2})$$

выполнено следующее дифференциальное уравнение:

$$t^2y'' + \left(\frac{1-\nu^2q^2}{4} + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2/q)}{4t^{-q}}\right)y = 0. \tag{11}$$

Используя рассуждения при доказательстве теоремы 1, имеем

$$\int_\varepsilon^1 \left(\frac{u'^p(t)}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}(t)} + \left(\frac{p+s-2}{p-1}\right)^{p-1}(p-1)u^p(t)\frac{\Phi''_{\nu,q}(x)(t)}{\Phi_{\nu,q}^s(t)}\left(\frac{\Phi'_{\nu,q}(t)}{\Phi_{\nu,q}(t)}\right)^{p-2}\right)dt \geq$$

$$\geq c\left(\frac{u^p(1)}{\Phi_q^{s-1}(1)}\left(\frac{\Phi'_{\nu,q}(1)}{\Phi_q(1)}\right)^{p-1} - \frac{u^p(\varepsilon)}{\Phi_{q,\nu}^{s-1}(\varepsilon)}\left(\frac{\Phi'_{\nu,q}(\varepsilon)}{\Phi_{\nu,q}(\varepsilon)}\right)^{p-1}\right).$$

Переход к пределу и уравнение (11) приведут к следующей теореме.

**Теорема 4.** *Пусть $s \in (0,+\infty), \nu \in (0,+\infty), p \in [2,+\infty)$ и абсолютно непрерывная функция $u$ на $[0,1]$, такая что $u(0)=0$ и $u'/t^{(s-1)(1+q\nu)/(2p)} \in L^p[0,1]$. Тогда*

$$\int_0^1 \frac{|u'(t)|^p}{\Phi_{q,\nu}^{s-1}(t)}dt \geq \frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}}\int_0^1 \frac{|u(t)|^p}{t^2}\left(\frac{1-\nu^2q^2}{4} + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2/q)}{4t^{-q}}\right)\left(\frac{\Phi'_{q,\nu}(t)}{\Phi_{q,\nu}(t)}\right)^{p-2}\frac{dt}{\Phi_{q,\nu}^{s-1}(t)}.$$

*Равенство при $s > (p-1)\left(\frac{2(p-1)}{1+\nu} - p\right) + 1$ достигается тогда и только тогда, когда функция $u(t) = C(\Phi_{q,\nu}(t))^{\frac{p+s-2}{p-1}}$, где $C$ — некоторая константа.*

## Неравенства в выпуклых областях

Пусть $\Omega$ — $n$-мерное собственное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $\delta = \delta(x) = \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$ и

$$\delta_0 = \delta_0(\Omega) = \sup_{x\in\Omega}\delta(x) < \infty.$$

Перейдем к обоснованию основного результата, а именно, теоремы 1. Для этого воспользуемся подходом Ф.Г. Авхадиева (см., например, [17], [22]-[24]). Рассмотрим два случая изменения параметра $n$: $n=1$ и $n \geq 2$. При $n=1$, т.е. при $\Omega=(a,b)$, для любой непрерывно-дифференцируемой функции такой, что $f(a)=f(b)=0$ нам требуется доказать неравенство вида:

$$\int_a^b \frac{|f'(x)|^p}{\sin^{s-1}\left(\frac{\pi\delta}{2\delta_0}\right)}dx \geq \frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}}\frac{\pi^p}{(2\delta_0)^p}\int_a^b |f(x)|^p\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\pi\delta}{2\delta_0}\right)^{p-2}\frac{dx}{\sin^{s-1}\left(\frac{\pi\delta}{2\delta_0}\right)},$$

где

$$\delta = \delta(x) = \min\{x-a, b-x\}, \delta_0 = \frac{b-a}{2}.$$

Замена переменной $\tau = \rho t$ в (9), при произвольном $\rho > 0$, приведет к следующему соотношению

$$\int_0^\rho \frac{|u'(\tau)|^p}{\sin^{s-1}\left(\frac{\pi\tau}{2\rho}\right)}d\tau \geq \frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}}\frac{\pi^p}{(2\rho)^p}\int_0^\rho |u(\tau)|^p\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\pi\tau}{2\rho}\right)^{p-2}\frac{d\tau}{\sin^{s-1}\left(\frac{\pi\tau}{2\rho}\right)}.$$

Теперь применяем последнее неравенство к функциям $u(\tau) = f(\tau+a)$ и $u(\tau) = f(b-\tau)$ с $\rho = \delta_0 = \frac{b-a}{2}$. Имеем

$$\int_a^{(a+b)/2} \frac{|f'(x)|^p}{\sin^{s-1}\left(\frac{\pi(x-a)}{2\rho}\right)}dx \geq$$

$$\geq \frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}} \frac{\pi^p}{(2\delta_0)^p} \int\limits_a^{(a+b)/2} |f(x)|^p \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(x-a)}{2\delta_0}\right)^{p-2} \frac{dx}{\sin^{s-1}\left(\frac{\pi(x-a)}{2\rho}\right)}$$

и

$$\int\limits_{(a+b)/2}^{b} \frac{|f'(x)|^p}{\sin^{s-1}\left(\frac{\pi(b-x)}{2\rho}\right)} dx \geq$$

$$\geq \frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}} \frac{\pi^p}{(2\delta_0)^p} \int\limits_{(a+b)/2}^{b} |f(x)|^p \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(b-x)}{2\delta_0}\right)^{p-2} \frac{dx}{\sin^{s-1}\left(\frac{\pi(b-x)}{2\rho}\right)}.$$

Суммирование этих двух неравенств дает требуемое утверждение.

Перейдем к случаю $n \geq 2$. Отметим, что с помощью метода Ф.Г. Авхадиева из соответствующих одномерных неравенств можно получить неравенства в произвольных, даже невыпуклых областях (см., например, [17], [22]-[24]). Приведем краткое описание этого метода. Пусть $\Lambda$ — произвольная открытая область, в которой требуется доказать неравенство типа Харди. Аппроксимируя область $\Lambda$ кубами, Ф.Г. Авхадиев показал, что неравенство достаточно показать на множествах специального вида:

$$K(S) = \{x \in \Lambda_1 : \text{ существует точка } y \in S \text{ такая, что } \delta(x,\Lambda) = |x-y|\},$$

где $\Lambda_1$ — некоторое разбиения области $\Lambda$ и для $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $S$ является $(n-k)$-мерной гранью куба.

При вычислении интегралов по множеству $K(S)$ приходится пользоваться либо сферическими, либо цилиндрическими, либо декартовыми координатами, что позволяет перейти к соответствующим повторным интегралам и доказывать лишь одномерные неравенства. В случае выпуклых областей ситуация упрощается, и одномерные неравенства напрямую переносятся на пространственный случай.

Этим заканчивается доказательство теоремы 1.

Автор благодарит профессора Ф.Г. Авхадиева за ценные советы, рекомендации и всякую помощь на всех стадиях написания этой работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. Levin *Notes on inequalities. II. On a class of integral inequalities.* Rec. Math., Moscou, N.s.4, 309 (1938).
2. P.R. Beesack *Hardy's inequality and its extensions.* Pacific J.Math. 11, 39 (1961).
3. G. Talenti O*sservazioni sopra una classe di disuguaglianze.* Rend. Sem. Mat. Fiz. Milano 39, 171 (1969).
4. G. Tomaselli *A class of inequalities.* Boll. Un.Mat. Ital. 2, 622 (1969).
5. B. Muckenhoupt *Hardy's inequality with weights.* Studia Mathematica XLIV, 31 (1972).
6. G. Sinnamon and V.D. Stepanov *The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$* // J. London Math. Soc. 54 (2), 89 (1996).
7. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths *Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants* // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 18(2011). P. 723–736.
8. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths *Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains* // Z. Angew. Math. Mech. 87(8)(2007). P. 632–642.
9. H. Brezis, M. Marcus *Hardy's inequality revisited* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 25:1-2 (1997). P. 217–237.
10. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths *Weighted Hardy inequalities with sharp constants* // Lobachevskii J. Math., 31(2010). P. 1–7.
11. F.G. Avkhadiev and K.-J. Wirths *On the best constants for the Brezis-Marcus inequalities in balls* // J. Math. Analysis and Applications, 396: 2 (2012). P. 473–480.

12. M. Marcus, V.J. Mizel, Y. Pinchover *On the best constants for Hardy's inequality in* $R^n$ // Trans. Amer. Math. Soc., 350 (1998). 3237–3250.
13. M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, A. Laptev *A geometrical version of Hardy's inequality*, J. Funct. Anal., 189:2 (2002). P. 539–548.
14. J. Tidblom *A geometrical version of Hardy's inequality for* $W_0^{1,p}(\Omega)$ // Proc. Amer. Math. Soc., 132 (2004). P. 2265–2271.
15. S. Filippas, V.G. Maz'ya, A. Tertikas *On a question of Brezis and Marcus* // Calc. Var. Partial Differential Equations., 25:4 (2006). P. 491–501.
16. Насибуллин Р.Г., Тухватуллина А.М. *Неравенства типа Харди с логарифмическими и степенными весами для специального семейства невыпуклых областей* // Уфимск. матем. журн. 2013. Т. 5. № 2. С. 43–55.
17. Авхадиев Ф.Г., Насибуллин Р.Г. *Неравенства типа Харди в произвольных областях с конечным внутренним радиусом* // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55. № 2. С. 239–250.
18. Насибуллин Р.Г. *Точность констант логарифмических неравенств типа Харди в открытых многомерных областях* // Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2013. Т. 5. № 3. С. 111–125.
19. J. Hersch S*ur la fréquence fondamentale d'unemembrande vibrante; évaluation par défaut et principe de maximum*, J.Math. Phys. Appl. 11, 387 (1960).
20. L.E. Payne and I. Stakgold *On the mean value of the fundamental mode in the fixed membrane problem*, Applicable Anal. 3, 295 (1973).
21. D.T. Shum *On integral inequalities related to Hardy's* // Canada. Math. Bull. Vol., 14(2) (1971), P. 225–230.
22. Авхадиев Ф.Г. *Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах* // Тр. МИАН. 2006. 255. С. 8–18.
23. F.G. Avkhadiev *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants* // Lobachevskii J. Math. 2006. 21. P. 3–31.
24. Авхадиев Ф.Г., Насибуллин Р.Г., Шафигуллин И.К. *Неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими весами в областях евклидова пространства* // Известия вузов. Матем. 2011. № 9. С. 90–94.

Рамиль Гайсаевич Насибуллин,
Казанский федеральный университет,
Институт математики и механики
им. Н. И. Лобачевского,
ул. Кремлевская, 35,
420008, Казань, Россия
E-mail: nasibullinramil@gmail.com