УДК 517.956

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ В ТЕЛЕГРАФНОМ УРАВНЕНИИ

А.И. КОЖАНОВ, Р.Р. САФИУЛЛОВА

Аннотация. Исследуется разрешимость обратных задач определения вместе с решением $u(x,t)$ телеграфного уравнения

$$u_{tt} - \Delta u + cu = f(x,t)$$

также неизвестного коэффициента c. Доказываются теоремы существования регулярных решений. Отличительной особенностью изучаемых задач является наличие в них новых для рассматриваемого класса уравнений условий переопределения.

Ключевые слова: телеграфное уравнение, неизвестный коэффициент, обратные задачи, интегральное переопределение специального вида, регулярные решения, существование.

Mathematics Subject Classification: 35R30, 35L20

Введение

Математическое моделирование колебательных процессов (распространение электромагнитных волн [1], [2], акустических волн [3], [4] и т.д.) приводит к необходимости исследования разрешимости тех или иных краевых задач, изучения свойств их решений для уравнения

$$u_{tt} - a^2\Delta u + cu = f(x,t),$$

называемого телеграфным. Коэффициенты a и c здесь положительны, их величина определяется свойствами среды. В случае среды с заранее неизвестными свойствами эти коэффициенты, оба или один из них, являются неизвестными, и именно их определение позволит в дальнейшем провести анализ того или иного физического процесса, используя телеграфное уравнение со всеми известными данными.

В настоящей работе будет изучаться случай неизвестного коэффициента c, для простоты далее будем считать $a = 1$.

Задачи, в которых вместе с решением того или иного дифференциального уравнения требуется определить также коэффициент (коэффициенты) самого уравнения, или же правую часть уравнения, в математике и в математическом моделировании называют обратными задачами. В подобных задачах, как правило, наряду с краевыми и начальными условиями, характерными для того или иного класса дифференциальных уравнений, задаются также некоторые другие условия, называемые условиями переопределения. Теория обратных задач для дифференциальных уравнений представляет собой активно развивающееся направление современной математики. В частности, разрешимость обратных задач в тех или иных постановках, с теми или иными условиями переопределения для гиперболических уравнений была предметом исследования во многих работах – монографиях [4]–[9], статьях [10]–[23] и в ряде других. Вместе с тем заметим, что обратные задачи для телеграфного уравнения с условиями переопределения настоящей статьи ранее не изучались.

A.I. Kozhanov, R.R. Safiullova, Determination of parameters in telegraph equation.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-06582).

Поступила 14 февраля 2016 г.

1. Постановка задач

Пусть Ω есть ограниченная область пространства R^n с гладкой (бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q – цилиндр $\Omega \times (0,T)$ конечной высоты T, $S = \Gamma \times (0,T)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ – заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$ и при $t \in [0,T]$, A – заданное положительное число.

Обратная задача I: найти функцию $u(x,t)$ и число c такие, что для них в цилиндре Q выполняется уравнение

$$u_{tt} - \Delta u + cu = f(x,t), \tag{1}$$

и при этом для функции $u(x,t)$ выполняются условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{3}$$

$$\int\limits_\Omega u^2(x,T)dx = A. \tag{4}$$

Обратная задача II: найти функцию $u(x,t)$ и число c такие, что для них в цилиндре Q выполняется уравнение (1), и при этом для функции $u(x,t)$ выполняются условия (2) и (4), а также условие

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_x}|_S = 0, \tag{5}$$

($\nu_x = (\nu_1, ..., \nu_n)$ – вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке x).

В обратных задачах I – II условия (2) и (3), (2) и (5) есть условия первой или второй начально-краевых задач для гиперболического уравнения второго порядка, условие же (4) есть условие переопределения. Обратные задачи для гиперболических уравнений с подобным условием переопределения ранее не изучались. Вместе с тем заметим, что в работах [24]–[26] изучались близкие по постановке обратные задачи для параболических уравнений, но при этом методы этих работ напрямую на обратные задачи I – II не переносятся.

И ещё одно замечание перед содержательной частью работы. Формально существование решения обратных задач I и II можно установить с помощью метода Фурье. Именно, считая коэффициент c известным, представляя решение первой или второй начально-краевых задач для уравнения (1) рядом Фурье и затем используя условие переопределения (4), получим для коэффициента c алгебраическое уравнение. Но очевидно, что это уравнение будет иметь весьма сложную структуру, и дать достаточно простые условия его разрешимости будет нелегко. Предложенный же ниже метод даст легко проверяемые в конкретных задачах условия, и этот метод можно будет использовать и в более общих, чем изученные ниже, ситуациях.

2. Разрешимость обратной задачи I

Доказательство разрешимости обратной задачи I будет основано на исследовании разрешимости первой начально-краевой задачи для некоторого вспомогательного нелинейного интегро-дифференциального («нагруженного» [27], [28]) уравнения. В свою очередь, доказательство разрешимости первой начально-краевой (прямой) задачи для вспомогательного уравнения будет основано на методе срезок, методе регуляризации и методе неподвижной точки.

Обозначим для краткости

$$A_0 = \int\limits_\Omega u_0^2(x)dx,$$

всюду ниже будем считать, что выполняется условие

$$A_0 < A. \tag{6}$$

Введем еще обозначения:

$$B_0 = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} u_{0x_i}^2(x)dx, \quad B_1 = \int_{\Omega} u_1^2(x)dx,$$

$$b_0 = \frac{B_0 + B_1}{A - A_0}, \quad b_1 = \frac{1}{A - A_0}, \quad \beta = \frac{b_0}{b_1}.$$

Далее, для фиксированного положительного числа N определим срезывающую функцию $G_N(\xi)$:

$$G_N(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant N, \\ N, & \text{если} \quad \xi > N, \\ 0, & \text{если} \quad \xi < 0. \end{cases}$$

Для фиксированной функции $v(x,t)$ из пространства $W_2^2(Q)$ обозначим через $\Phi(v)$ число

$$\Phi(v) = \int_{\Omega} v_t^2(x,T)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} v_{x_i}^2(x,T)dx - 2\int_{Q} f v_t dxdt.$$

Рассмотрим задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} - \Delta u + [b_0 - b_1 G_\beta(\Phi(u))]u = f(x,t), \tag{7}$$

и такую, что для неё выполняются условия (2) и (3).

Именно задача (7), (2), (3) и является вспомогательной; разрешимость этой задачи и позволит установить разрешимость обратной задачи I.

Теорема 1. *Пусть функции $f(x,t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ таковы, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $u_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $u_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Кроме того, пусть выполняется условие (6). Тогда краевая задача (7), (2), (3) имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $u_t(x,t) \in L_\infty(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $u_{tt}(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$.*

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации и методом неподвижной точки.

Пусть ε есть положительное число. Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} - \Delta u + [b_0 - b_1 G_\beta(\Phi(u))]u - \varepsilon \Delta u_t = f(x,t), \tag{7_ε}$$

и такую, что для неё выполняются условия (2) и (3).

Определим линейное пространство V:

$$V = \{v(x,t) : v(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)), v_t(x,t) \in L_\infty(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),$$
$$v_{tt}(x,t) \in L_2(Q), \Delta v_t(x,t) \in L_2(Q)\}.$$

Снабдим пространство V нормой:

$$||v||_V = \left[||v||^2_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))} + ||v_t||^2_{L_\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))} + ||v_{tt}||^2_{L_2(Q)} + ||\Delta v_t||^2_{L_2(Q)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что пространство V с этой нормой является банаховым пространством.

Покажем, используя метод неподвижной точки, что краевая задача (7_ε), (2), (3) будет разрешима в пространстве V при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$.

Пусть $w(x,t)$ есть функция из пространства V.

Рассмотрим задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} - \Delta u + [b_0 - b_1 G_\beta(\Phi(w))]u - \varepsilon \Delta u_t = f(x,t), \tag{$7_{\varepsilon,w}$}$$

и такую, что для неё выполняются условия (2) и (3).

Краевая задача $(7_{\varepsilon,w})$, (2), (3) является первой начально-краевой задачей для линейного псевдогиперболического уравнения с постоянными коэффициентами, ее разрешимость в пространстве V при принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ известна – см. [29], [30]. Следовательно, эта задача порождает оператор $\Re$, переводящий пространство V в себя: $\Re(w)=u$. Покажем, что оператор $\Re$ имеет в пространстве V неподвижные точки.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \{u_{\tau\tau}-\Delta u+[b_0-b_1G_\beta(\Phi(w))]u-\varepsilon\Delta u_\tau\}u_\tau dxd\tau=\int\limits_0^t\int\limits_\Omega fu_\tau dxd\tau.$$

Интегрируя по частям, нетрудно от этого равенства перейти к следующему

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_t^2(x,t)dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,t)dx+\varepsilon\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_i\tau}^2dxd\tau+$$

$$+\frac{1}{2}[b_0-b_1G_\beta(\Phi(w))]\int\limits_\Omega u^2(x,t)dx=\frac{1}{2}(B_0+B_1+b_0A_0)-\frac{1}{2}b_1A_0G_\beta(\Phi(w))+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega fu_\tau dxd\tau. \quad (8)$$

Заметим, что имеют место неравенства

$$0\leqslant b_0-b_1G_\beta(\Phi(w))\leqslant b_0. \quad (9)$$

Обозначим

$$N_0=B_0+B_1+b_0A_0+\int\limits_Q f^2dxdt.$$

Используя неравенства (9) и применяя лемму Гронуолла, получим, что следствием (8) будут оценки

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2dxd\tau\leqslant N_0(e^t-1), \quad (10)$$

$$\int\limits_\Omega u_t^2(x,t)dx+\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,t)dx+\varepsilon\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_i\tau}^2dxd\tau\leqslant N_0e^t, \quad (11)$$

справедливые для всех t из отрезка $[0,T]$.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \{u_{\tau\tau}-\Delta u+[b_0-b_1G_\beta(\Phi(w))]u-\varepsilon\Delta u_\tau\}(u_{\tau\tau}-\Delta u_\tau)dxd\tau=\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f(u_{\tau\tau}-\Delta u_\tau)dxd\tau. \quad (12)$$

Интегрируя по частям, используя оценки (10) и (11), применяя неравенство Юнга, получим, что для всевозможных решений $u(x,t)$ задачи $(7_{\varepsilon,w})$, (2), (3) будет выполняться оценка

$$||u||_V\leqslant R_0, \quad (13)$$

в которой число R_0 определяется лишь функциями $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, числами ε, A, T.

Оценка (13) означает, что оператор $\Re$ переводит замкнутый шар радиуса R_0 пространства V в себя.

Покажем, что оператор $\Re$ непрерывен на пространстве V.

Пусть $\{w_m(x,t)\}_{m=1}^\infty$ есть последовательность функций из пространства V, сходящаяся в V к функции $w_0(x,t)$, $\{v_m(x,t)\}_{m=1}^\infty$ есть последовательность образов функций $w_m(x,t)$

при действии оператора $\Re$, $v_0(x,t)$ есть образ функции $w_0(x,t)$ при действии оператора $\Re$. Обозначим $\overline{w}_m(x,t) = w_m(x,t) - w_0(x,t)$, $\overline{v}_m(x,t) = v_m(x,t) - v_0(x,t)$. Имеют место равенства

$$\overline{v}_{mtt} - \Delta\overline{v}_m + [b_0 - b_1 G_\beta(\Phi(w_m))]\overline{v}_m - \varepsilon\Delta\overline{v}_{mt} = b_1[G_\beta(\Phi(w_m)) - G_\beta(\Phi(w_0))]v_0, \quad (x,t) \in Q,$$
$$\overline{v}_m(x,0) = \overline{v}_{mt}(x,0) = 0, \quad x \in \Omega,$$
$$\overline{v}_m(x,t)|_S = 0.$$

Следствием этих равенств является оценка

$$\int\limits_\Omega \overline{v}^2_{mt}(x,t)dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \overline{v}^2_{mx_i}(x,t)dx + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \overline{v}^2_{mx_i\tau} dx d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^t \int\limits_\Omega v^2_{m\tau} dx d\tau + b_1^2 [G_\beta(\Phi(w_m)) - G_\beta(\Phi(w_0))]^2 \int\limits_Q v_0^2 dx dt. \tag{14}$$

Заметим, что для функции $G_\beta(\xi)$ выполнено условие Липшица, и что имеет место сходимость $\Phi(w_m) - \Phi(w_0) \to 0$ при $m \to \infty$ (последнее следует из свойства непрерывности нормы и из того, что из сильной сходимости следует слабая). Учитывая эти факты и применяя лемму Гроноулла, получим, что следствием (14) при $m \to \infty$ будет сходимость

$$||\overline{v}_m||_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))} \to 0.$$

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega \overline{v}_{m\tau\tau} - \Delta\overline{v}_m + [b_0 - b_1 G_\beta(\Phi(w_m))]\overline{v}_m - \varepsilon\Delta\overline{v}_{m\tau}\}(\overline{v}_{m\tau\tau} - \Delta\overline{v}_{m\tau}) dx d\tau =$$
$$= b_1 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega [G_\beta(\Phi(w_m)) - G_\beta(\Phi(w_0))](\overline{v}_{m\tau\tau} - \Delta\overline{v}_{m\tau}) dx d\tau.$$

Интегрируя по частям, вновь учитывая липшицевость функции $G_\beta(\xi)$, учитывая также уже установленную сходимость, нетрудно показать, что следствием данного равенства будет априорная оценка семейства $\{\overline{v}_m(x,t)\}_{m=1}^\infty$ в пространстве V и соответствующая сходимость

$$||\overline{v}_m||_V \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Эта сходимость и означает, что оператор $\Re$ непрерывен в пространстве V.

Покажем теперь, что оператор $\Re$ компактен.

Пусть $\{w_m(x,t)\}_{m=1}^\infty$ есть ограниченное семейство функций из пространства V. Поскольку семейства $\{w_{mt}(x,t)\}_{m=1}^\infty$, $\{w_{mx_i}(x,t)\}_{m=1}^\infty$, $i = 1,...,n$, ограничены в пространстве $W_2^1(Q)$, и поскольку вложения $W_2^1(Q) \subset L_2(Q)$, $W_2^1(Q) \subset L_2(\partial Q)$ компактны (см. [31], [32]), то существует подпоследовательность $\{w_{m_k}(x,t)\}_{m=1}^\infty$ и функция $w_0(x,t)$ из пространства V такие, что при $k \to \infty$ выполняется

$$w_{m_k}(x,t) \to w_0(x,t) \quad \text{слабо в} \quad W_2^2(Q),$$
$$\Delta w_{m_k t}(x,t) \to \Delta w_{0t}(x,t) \quad \text{слабо в} \quad L_2(Q),$$
$$w_{m_k t}(x,T) \to w_{0t}(x,T) \quad \text{сильно в} \quad L_2(\Omega),$$
$$w_{m_k x_i}(x,T) \to w_{0x_i}(x,T) \quad \text{сильно в} \quad L_2(\Omega) \quad \text{для} \quad i = 1,...,n.$$

Вновь определим функции $v_m(x,t)$, $v_0(x,t)$ как образы функций $w_m(x,t)$, $w_0(x,t)$ при действии оператора $\Re$. Повторяя доказательство непрерывности оператора $\Re$, получим, что имеет место сходимость

$$||\overline{v}_{m_k}||_V \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Другими словами, из любой ограниченной последовательности $\{w_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ элементов пространства V можно извлечь такую подпоследовательность $\{w_{m_k}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$, что последовательность $\{\Re(w_{m_k})\}_{k=1}^{\infty}$ есть сильно сходящаяся в V последовательность.

А это и означает, что оператор $\Re$ компактен.

Итак, оператор $\Re$ переводит замкнутый шар радиуса R_0 пространства V в себя, непрерывен и компактен в пространстве V. Согласно теореме Шаудера [33] у оператора $\Re$ имеется в указанном шаре по крайней мере одна неподвижная точка. Для этой неподвижной точки выполняется уравнение (7_ε) и выполняются условия (2) и (3); обозначим искомую неподвижную точку $u^\varepsilon(x,t)$. Покажем, что при выполнении дополнительного включения $f_t(x,t)\in L_2(Q)$ из семейства функций $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ можно извлечь последовательность, сходящуюся к решению краевой задачи (7), (2), (3).

Выберем последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ положительных чисел так, чтобы выполнялось $\varepsilon_m\to 0$ при $m\to\infty$.

Повторяя доказательство оценок (10), (11) и (13), но только в слагаемом правой части (12) с произведением $f\Delta u_\tau^{\varepsilon_m}$ выполняя интегрирование по частям (по переменной τ), нетрудно получить оценку

$$\varepsilon_m\int\limits_Q(\Delta u_\tau^{\varepsilon_m})^2dxd\tau+||\Delta u^{\varepsilon_m}||^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}+||u_{tt}^{\varepsilon_m}||^2_{L_2(Q)}\leqslant M_1$$

с постоянной M_1, не зависящей от ε. Вновь используя компактность вложений $W_2^1(Q)\subset L_2(Q)$, $W_2^1(Q)\subset L_2(\partial Q)$, получим, что существуют последовательность $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел и функция $u(x,t)$ такие, что при $k\to\infty$ имеют место сходимости

$$\begin{gathered}\varepsilon_{m_k}\to 0,\\ u^{\varepsilon_{m_k}}(x,t)\to u(x,t)\quad\text{слабо в}\quad W_2^2(Q),\\ \varepsilon_{m_k}\Delta u_t^{\varepsilon_{m_k}}(x,t)\to 0\quad\text{слабо в}\quad L_2(Q),\\ u_t^{\varepsilon_{m_k}}(x,T)\to u_t(x,T)\quad\text{сильно в}\quad L_2(\Omega),\\ u_{x_i}^{\varepsilon_{m_k}}(x,T)\to u_{x_i}(x,T)\quad\text{сильно в}\quad L_2(\Omega)\quad\text{для}\quad i=1,...,n,\\ \Phi(u^{\varepsilon_{m_k}})\to\Phi(u).\end{gathered}$$

Из этих сходимостей следует, что для предельной функции $u(x,t)$ выполняется уравнение (7) и выполняются условия (2) и (3). Далее, для предельной функции $u(x,t)$ будет выполняться включение $u(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$. Из этого включения и из принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ следует, что функция $u_{tt}(x,t)$ будет принадлежать этому же пространству. Другими словами, предельная функция $u(x,t)$ будет принадлежать требуемому классу и тем самым будет представлять собой искомое решение краевой задачи (7), (2), (3).

Теорема доказана. □

Перейдем к исследованию разрешимости обратной задачи I.

Наиболее простой представляется ситуация, когда в задаче I выполняется $f(x,t)\equiv 0$.

Теорема 2. *Пусть функции $f(x,t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ таковы, что $f(x,t)\equiv 0$, $u_0(x)\in W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $u_1(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, и пусть выполняется условие (6). Тогда обратная задача I имеет решение $\{u(x,t),c\}$ такое, что $u(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $u_t(x,t)\in L_\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $u_{tt}(x,t)\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, $c\geq 0$.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы краевая задача (7), (2), (3) имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее указанному в теореме классу. Заметим, что в случае

$f(x,t) \equiv 0$ выполняется $\Phi(u) \geq 0$. Умножим уравнение (7) на функцию $u_t(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Получим равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u_t^2(x,T)dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{x_i}^2(x,T)dx + \frac{b_0 - b_1 G_\beta(\Phi(u))}{2}\int\limits_{\Omega} u^2(x,T)dx =$$

$$= \frac{1}{2}(B_0 + B_1 + b_0 A_0) - \frac{b_1 A_0 G_\beta(\Phi(u))}{2}. \tag{15}$$

Из этого равенства следует оценка

$$\Phi(u) + b_1 A_0 G_\beta(\Phi(u)) \leqslant B_0 + B_1 + b_0 A_0$$

(здесь использовалось левое неравенство (9)). Далее, имеет место неравенство $G_\beta(\Phi(u)) \leqslant \Phi(u)$. Отсюда

$$(1 + b_1 A_0) G_\beta(\Phi(u)) \leqslant B_0 + B_1 + b_0 A_0,$$

или

$$G_\beta(\Phi(u)) \leqslant B_0 + B_1.$$

Но тогда выполняется $G_\beta(\Phi(u)) = \Phi(u)$. Данное равенство означает, что решение $u(x,t)$ краевой задачи (7), (2), (3) будет решением уравнения

$$u_{tt} - \Delta u + [b_0 - b_1\Phi(u)]u = 0. \tag{16}$$

Обозначим $c = b_0 - b_1\Phi(u)$. Тогда функция $u(x,t)$ и число c будут связаны в цилиндре Q уравнением (1), для функции $u(x,t)$ будут выполняться нужные включения и будут выполняться условия (2) и (3), число c будет неотрицательным. Покажем, что для функции $u(x,t)$ будет выполняться условие (4).

Обозначим

$$\alpha = \int\limits_{\Omega} u^2(x,T)dx.$$

Имеют место равенства

$$c(A - A_0) = b_0 - b_1\Phi(u), \quad c(\alpha - A_0) = b_0 - b_1\Phi(u).$$

Отсюда

$$c(\alpha - A) = 0. \tag{17}$$

Обозначим через $U_0(x,t)$ решение краевой задачи (1) – (3) в случае $c = 0$. Если имеет место равенство

$$A = \int\limits_{\Omega} U_0^2(x,T)dx, \tag{18}$$

то решением обратной задачи I будет пара $\{U_0(x,t), 0\}$, и тем самым автоматически для этого решения будет выполняться условие (4). Если же равенство (18) не имеет место, то тогда число c не равно нулю, и, значит, из (17) следует $\alpha = A$. А это и означает, что для решения $u(x,t)$ краевой задачи (7), (2), (3) выполняются все требуемые включения и выполняются условия (2) – (4). Тем самым пара $\{u(x,t), b_0 - b_1\Phi(u)\}$ будет требуемым решением обратной задачи I.

Теорема доказана. □

При исследовании разрешимости обратной задачи I с ненулевой функцией $f(x,t)$ важную роль будет играть неравенство $\Phi(u) \geq 0$ для решений $u(x,t)$ краевой задачи (7), (2). (3). Приведем простое утверждение, дающее достаточные условия выполнения этого неравенства.

Пусть $\psi(x)$ есть функция из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Имеет место неравенство

$$\int\limits_\Omega \psi^2(x)dx \leqslant m_0 \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \psi_{x_i}^2(x)dx \tag{19}$$

с некоторым числом m_0, определяющимся лишь областью Ω.

Положим

$$N_1 = [m_0 N_0(e^T - 1)]^{\frac{1}{2}}, \quad N_2 = (T^2 N_0 e^T + 2TA_0)^{\frac{1}{2}}$$

(число N_0 определено при доказательстве априорных оценок (10) и (11) решений краевой задачи $(7_{\varepsilon,w})$), (2), (3).

Утверждение 1. *Пусть выполняются условия теоремы 1, а также условие*

$$2\left(\int\limits_Q f_t^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \min(N_1, N_2) \leqslant 2\int\limits_\Omega f(x,0)u_0(x)dx - m_0 \int\limits_\Omega f^2(x,T)dx. \tag{20}$$

Тогда для решений $u(x,t)$ краевой задачи (7), (2), (3) выполняется неравенство

$$\Phi(u) \geq 0. \tag{21}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что решение $u(x,t)$ краевой задачи (7), (2), (3) из указанного в теореме 1 класса существует. Обозначим для краткости

$$I(u) = \int\limits_\Omega u_t^2(x,T)dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,T)dx.$$

Имеет место равенство

$$\Phi(u) = I(u) + 2\int\limits_\Omega f(x,0)u_0(x)dx - 2\int\limits_\Omega f(x,T)u(x,T)dx + 2\int\limits_Q f_t u dxdt. \tag{22}$$

Далее, имеют место неравенства

$$2\left|\int\limits_\Omega f(x,T)u(x,T)dx\right| \leqslant \delta^2 \int\limits_\Omega u^2(x,T)dx + \frac{1}{\delta^2}\int\limits_\Omega f^2(x,T)dx \leqslant$$

$$\leqslant \delta^2 m_0 \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,T)dx + \frac{1}{\delta^2}\int\limits_\Omega f^2(x,T)dx \leqslant \delta^2 m_0 I + \frac{1}{\delta^2}\int\limits_\Omega f^2(x,T)dx, \tag{23}$$

$$2\left|\int\limits_Q f_t u dxdt\right| \leqslant 2\left(\int\limits_Q f_t^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_Q u^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\int\limits_Q f_t^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(m_0 \sum_{i=1}^n \int\limits_Q u_{x_i}^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2N_1 \left(\int\limits_Q f_t^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{24}$$

$$2\left|\int\limits_Q f_t u dxdt\right| \leqslant 2\left(\int\limits_Q f_t^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_Q u^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\int\limits_Q f_t^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left[T^2 \int\limits_Q u_t^2 dxdt + 2A_0 T\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant 2N_2 \left(\int\limits_Q f_t^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

В неравенстве (23) зафиксируем число δ так, чтобы выполнялось $\delta^2 m_0 = 1$. Тогда из представления (22), неравенств (23)–(25) и условия (20) и будет вытекать требуемое неравенство (21).

Утверждение доказано. $\square$

Теорема 3. *Пусть функции $f(x,t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ таковы, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t \in L_2(Q)$, $u_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $u_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, и пусть выполняются условия (6) и (20). Тогда обратная задача I имеет решение $\{u(x,t), c\}$ такое, что $u(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $u_t(x,t) \in L_\infty(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $u_{tt}(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$, $c \geq 0$.*

Доказательство этой теоремы, как и теоремы 2, основано на получении оценки $G_\beta(\Phi(u)) \leqslant B_0 + B_1$ (при этом используется неравенство $\Phi(u) \geq 0$). Уточним лишь, что вместо функции $U_0(x,t)$ необходимо использовать функцию $U_1(x,t)$, являющуюся решением начально-краевой задачи (1)–(3) в случае $c = 0$.

3. Разрешимость обратной задачи II

Исследование разрешимости обратной задачи II проводится в целом вполне аналогично исследованию разрешимости обратной задачи I. Вначале устанавливается разрешимость вспомогательной задачи (7), (2), (5), и делается это полностью аналогично доказательству разрешимости задачи (7), (2), (3). Далее доказывается разрешимость обратной задачи II в случае $f(x,t) \equiv 0$, что также делается аналогично доказательству теоремы 2. На следующем шаге доказывается утверждение о справедливости неравенства $\Phi(u) \geq 0$ для решений $u(x,t)$ краевой задачи (7), (2), (5). Наконец, на последнем шаге устанавливается разрешимость обратной задачи II в случае ненулевой функции $f(x,t)$. Какие-либо отличия всей этой схемы от схемы исследования разрешимости обратной задачи I имеются лишь в условиях, определяющих неравенство $\Phi(u) \geq 0$ для решений краевой задачи (7), (2), (5), поэтому приведем соответствующее утверждение полностью.

Положим

$$N_3 = \left(2TN_0(e^T - 1) + 2A_0\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Утверждение 2. *Пусть функции $f(x,t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ таковы, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $u_0(x) \in W_2^2(\Omega)$, $\frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = 0$ при $x \in \Gamma$, $u_1(x) \in W_2^1(\Omega)$. Кроме того, пусть выполняются условия (6), а также условие*

$$N_3 \left(\int\limits_\Omega f^2(x,T)dx \right)^{\frac{1}{2}} + N_2 \left(\int\limits_Q f_t^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \int\limits_\Omega f(x,0)u_0(x)dx. \tag{26}$$

Тогда для решений $u(x,t)$ краевой задачи (7), (2), (5) выполняется неравенство (21).

Доказательство. При выполнении указанных в формулировке утверждения включений для функций $f(x,t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ и при выполнении условия (6) краевая задача (7), (2), (5) имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega))$, $u_t(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega))$, $u_{tt}(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$ (как уже говорилось выше, соответствующая теорема доказывается полностью аналогично тому, как доказывалась теорема 1). Далее, для $\Phi(u)$ имеет место представление (22), для функции $u(x,t)$ имеют место неравенства

$$2\left| \int\limits_\Omega f(x,T)u(x,T)dx \right| \leqslant 2 \left(\int\limits_\Omega f^2(x,T)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_\Omega u^2(x,T)dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\int\limits_{\Omega} f^2(x,T)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left[2T\int\limits_{Q} u_t^2 dxdt + 2A_0\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant 2N_3\left(\int\limits_{\Omega} f^2(x,T)dx\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (27)$$

Используя теперь (27), (25), условие (26) и представление (22), получим, что для функции $u(x,t)$ выполняется неравенство (21).

Утверждение доказано. □

В заключение сформулируем теоремы существования решения обратной задачи II.

Теорема 4. *Пусть функции $f(x,t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ таковы, что $f(x,t) \equiv 0$, $u_0(x) \in W_2^2(\Omega)$, $\frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = 0$ при $x \in \Gamma$, $u_1(x) \in W_2^1(\Omega)$, и пусть выполняется условие (6). Тогда обратная задача II имеет решение $\{u(x,t), c\}$ такое, что $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $u_t(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))$, $u_{tt}(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, $c \geq 0$.*

Теорема 5. *Пусть функции $f(x,t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ таковы, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $u_0(x) \in W_2^2(\Omega)$, $\frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = 0$ при $x \in \Gamma$, $u_1(x) \in W_2^1(\Omega)$, и пусть выполняются условия (6) и (26). Тогда обратная задача II имеет решение $\{u(x,t), c\}$ такое, что $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $u_t(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))$, $u_{tt}(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, $c \geq 0$.*

Доказательство этих теорем теперь очевидно.

4. Комментарии и дополнения

1. Технику, использованную в настоящей работе, можно применять во многих других ситуациях. Так, с помощью этой техники можно исследовать разрешимость обратных задач с условием переопределения (4), с неизвестным решением $u(x,t)$ и с неизвестным постоянным коэффициентом c

а) для уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной [34]

$$u_t - a\Delta u - b\Delta u_t + cu = f(x,t) \qquad (28)$$

($a > 0$, $b > 0$);

б) для псевдогиперболических уравнений

$$u_{tt} - a\Delta u - b\Delta u_t + cu = f(x,t) \qquad (29)$$

($a > 0$, $b > 0$);

в) для нестационарных уравнений высокого порядка

$$u_{tt} + (-1)^m \Delta^m u + cu = f(x,t) \qquad (30)$$

($m > 0$ – целое).

Наряду с обратными задачами для уравнений (28)–(30), имеющими постоянные коэффициенты, нетрудно исследовать и подобные изученным обратные задачи для некоторых нестационарных уравнений с переменными коэффициентами. Например, используя технику настоящей работы, нетрудно исследовать разрешимость обратной задачи с условиями (2)–(4) для уравнений

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x,t)u_{x_j}\right) + b(x,t)u_t + cu = f(x,t),$$

при выполнении условий

$$a^{ij}(x,t) \in C^2(\overline{Q}), \quad a^{ij}(x,t) = a^{ji}(x,t), \quad i,j = 1,...,n, \quad (x,t) \in \overline{Q};$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2, \quad a_0 > 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}, \quad \xi \in R^n;$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_t^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant 0, \quad (x,t)\in\overline{Q}, \quad \xi\in R^n;$$

$$b(x,t)\in C(\overline{Q}), \quad b(x,t)\geq b_0>0, \quad (x,t)\in\overline{Q}.$$

Нетрудно привести и другие примеры уравнений с переменными коэффициентами, для которых обратные задачи I и II можно изучить с помощью техники настоящей работы.

2. Очевидно, что условия (20) и (26) выполняются для тождественно нулевой функции $f(x,t)$, при этом функция $u_0(x)$ может быть как нулевой, так и не нулевой. Если же функция $f(x,t)$ не тождественно нулевая, то и функция $u_0(x)$ не может быть тождественно нулевой. Более того, число

$$\int\limits_{\Omega} f(x,0)u_0(x)dx$$

должно быть положительным; для выполнения же условий (20) или (26) достаточно, например, чтобы число T было малым.

3. В настоящей работе не изучается вопрос о единственности решений обратных задач I и II.

4. Представляется, что результаты о разрешимости краевых задач (7), (2), (3) и (7), (2), (5) могут иметь и самостоятельное значение для теории "нагруженных"уравнений. Заметим, что в уравнении (7) функцию $\Phi(u)$ можно заменить функцией $\widetilde{\Phi}(u)$, имеющей вид

$$\widetilde{\Phi}(u)=\int\limits_{\Omega} u_t^2(x,T)dx+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{x_i}^2(x,T)dx-2\int\limits_{Q} gu_t dxdt$$

с функцией $g(x,t)$ такой, что $g(x,t)\in L_2(Q)$, $g_t(x,t)\in L_2(Q)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курант Р. *Уравнения с частными производными.* М.: Мир. 1964.
2. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука. 1976.
3. Алексеев Г.В. *Классические модели и методы математической физики.* Владивосток: Дальнаука. 2011.
4. Кабанихин С.И. *Обратные и некорректные задачи.* Новосибирск: Сибирское книжное издательство. 2009.
5. A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. Monograth and Textbooks in Pure and Applied Mathematics.* Vol.222, Marcel Dekker Inc. New York. 2000.
6. Романов В.Г. *Устойчивость в обратных задачах.* М.: Научный мир. 2005.
7. V. Isakov *Inverse Problem for Partial Differential Equations.* Springer-Verlag: 2009.
8. M.V. Klibanov, A. Timonov *Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications.* Utrecht: VSP. 2004.
9. A. Lorenzi *An Introduction to Identification Problems via Funcional Analysis.* Utrecht: VSP. 2001.
10. Амиров А.Х. *К вопросу о разрешимости обратных задач* // Сиб. мат. журн. Т.28, № 6. 1987. С. 3–11.
11. Бубнов Б.А. *О корректости краевых и обратных задач для некоторых классов эволюционных уравнений. Автореф. дисс...д. ф-м. н.* Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1989.
12. Колтуновский О.А. *Обратные задачи для гиперболических уравнений с неизвестным коэффициентом в случае интегрального переопределения* // Математические заметки СВФУ. Т.15, вып 1. 2008. С. 55–74.
13. Колтуновский О.А. *Обратная коэффициентная задача для многомерного гиперболического уравнения в случае интегрального переопределения* // Математические заметки СВФУ. Т.20, вып 2. 2013. С. 79–97.
14. Кулиев М.А. *Многомерная обратная краевая задача для линейного гиперболического уравнения в ограниченной области* // Дифференц. уравнения. Т.38, № 1. 2002. С. 98–101.

15. D. Orlovsky, S. Piskarev, R. Spigler *On approximation of inverse problems for abstract hyperbolic equations* // Taiwanese J. of Mathematics. V.14, № 33. 2010. P. 1145–1167.
16. Валитов И.Р., Кожанов А.И. *Обратные задачи для гиперболических уравнений: случай неизвестных коэффициентов, зависящих от времени* // Вестник НГУ. Серия Математика, механика, информатика. Т.6, вып 1. 2006. С. 3–18.
17. Сафиуллова Р.Р. *О разрешимости линейной обратной задачи нахождения правой части составного вида в гиперболическом уравнении* // Вестник ЮрГУ. Серия Математическое моделирование и программирование. № 37 (170), вып 4. 2009. С. 93–105.
18. A.I. Kozhanov, R.R. Safiullova *Linear inverse problems for parabolic and hyperbolic equations* // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. V.18, № 1. 2010. P. 1–18.
19. Павлов С.С. *Обратная задача восстановления внешнего воздействия в многомерном волновом уравнении с интегральным переопределением* // Математические заметки ЯГУ. Т.18, вып 1. 2011. С. 81–93.
20. V.I. Priimenko, M.P. Vishnevskii *An identification problem related to the Biot system* // J. of Inverse and Ill-Posed Problem. V.23, № 3. 2015. P. 219–230.
21. C. Cavaterra, A. Lorenzi, M. Yamamoto *A stability result via Carleman estimates for an inverse source problem related to a hyperbolic integro-differential equation* // Comput. Appl. Math. V.25, 2006. P. 229–250.
22. A. Lorenzi, E. Paparoni *Identifications of two unknown coefficients in an integro-differential hyperbolic equation* // J. Inv. Ill-Posed Problems V.1, №4. 1993. P. 331–348.
23. L. Seliga, M. Slodicka *An inverse source problem for a damped wave equation with memory* // J. Inv. Ill-Posed Problems V.24, №2. 2015. P. 111–122.
24. A. Lorenzi, G. Mola *Identification of a real constant in linear evolution equation in a Hilbert spaces* // Inverse Problems Imaging. V.5, № 3. 2011. P. 695–714.
25. G. Mola *Identification of the Diffusion Coefficient in Linear Evolution Equations in Hilbert Spaces* // J. Abstr. Diff. Equat. Appl. V.2. 2011. P. 18–28.
26. A. Lorenzi, G. Mola *Recovering the reaction and the diffusion coefficients in a linear parabolic equation* // Inverse Problems. V.28, № 7. 2012.
27. Дженалиев М.Т. *К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений.* Алматы: Институт теоретической и прикладной математики. 1995.
28. Нахушев А.М. *Нагруженные уравнения и их применение.* М.: Наука. 2012.
29. Кожанов А.И. *К теории уравнений составного типа.* Автореферат дисс... д. ф-м. н. Новосибирск. 1993.
30. A.I. Kozhanov *Composite Type Equations and Inverse Problems.* Utrecht: VSP. 1999.
31. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* М.: Наука. 1988.
32. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука. 1973.
33. Треногин В.А. *Функциональный анализ.* М.: Наука. 1980.
34. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. *Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах* // Прикладная математика и механика. Т.24, № 5. 1960. С. 58–75.

Александр Иванович Кожанов,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090, г. Новосибирск, Россия
E-mail: Kozhanov@math.nsc.ru

Регина Рафаиловна Сафиуллова,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090, г. Новосибирск, Россия
E-mail: regina-saf@yandex.ru