ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 1 (2017). С. 55-62.

УДК 517.948

О КОЭРЦИТИВНЫХ СВОЙСТВАХ И РАЗДЕЛИМОСТИ БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С МАТРИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

О.Х. КАРИМОВ

Аннотация. В работе исследованы коэрцитивные свойства нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом в пространстве $L_2(R^n)^l$ и доказана его разделимость в этом пространстве. Рассмотренные нелинейные операторы не являются слабым возмущением линейных операторов. Случай линейного бигармонического оператора рассматривается отдельно.

Ключевые слова: бигармонический дифференциальный оператор, матричный потенциал, коэрцитивные неравенства, нелинейность – разделимость.

Mathematics Subject Classification: 35Q40, 35J10

1. Введение

В настоящей работе исследуется разделимость нелинейного бигармонического оператора

$$L[u] = \Delta^2 u(x) + V(x, u(x))u(x)$$

с матричным потенциалом, который не является слабым возмущением линейного оператора. Получены достаточные условия разделимости этого оператора в пространстве $L_2(R^n)^l$ и установлены соответствующие неравенства коэрцитивности.

Фундаментальные результаты по теории разделимости дифференциальных операторов принадлежат В.Н. Эверитту и М. Гирцу. В работах [1]–[4] они получили ряд важных результатов относительно проблемы разделимости оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. Ими был рассмотрен также многомерный случай оператора Шредингера. Существенный вклад в дальнейшее развитие этой теории внесли К.Х. Бойматов, М. Отелбаев и их ученики (см.[5]–[8] и имеющиеся там ссылки). Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шредингера и Дирака рассмотрены в [6]. Разделимость нелинейного оператора Шредингера изучена в работе [8].

Разделимость дифференциальных выражений с частными производными впервые исследовалась в работе К.Х. Бойматова [5]. Разделимость линейного бигармонического оператора $L[u] = \Delta^2 u(x) + V(x)u(x)$ ранее исследовалась в работах [9], [10]. Разделимость нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с переменными матричными коэффициентами во всем n-мерном евклидовом пространстве ранее изучалась в работе [11]. Данная работа обобщает работу [9] в нелинейном случае.

Следует отметить, что разделимость нелинейных дифференциальных операторов, в основном, исследовалась в случае, когда исследуемый оператор является слабым возмущением линейного оператора. В отличие от этого, рассматриваемые ниже нелинейные дифференциальные операторы могут не являться слабым возмущением линейного оператора.

O.Kh. Karimov, On coercive properties and separability of the biharmonic operator with matrix potential.

Поступила 10 февраля 2016 г.

2. Формулировка основного результата

В пространстве $L_2(R^n)^l$, где l – натуральное число, рассматривается дифференциальное уравнение

$$\Delta^2 u(x) + V(x, u(x))u(x) = f(x), \quad u(x) \in W^4_{2,loc}(R^n)^l, \tag{2.1}$$

где значения $V(x,\omega)$, $x \in R^n$, $\omega \in C^l$ являются квадратными положительно определенными эрмитовыми матрицами из $\operatorname{End} C^l$. Здесь и далее через B^l, (B – линейное пространство) обозначим пространство элементов $(y_1, y_2, \dots, y_l)$ с компонентами y_j из B.

Определение 2.1. *Уравнение (2.1) (и соответствующий ему дифференциальный оператор) называется разделимым в $L_2(R^n)^l$, если $\Delta^2 u(x)$, $V(x,u(x))u(x) \in L_2(R^n)^l$ для всех $u(x) \in L_2(R^n)^l \cap W^4_{2,loc}(R^n)^l$ таких, что $f(x) \in L_2(R^n)^l$.*

Для $z^{(i)} = (z_1^{(i)}, \cdots, z_l^{(i)})$ $(i = 1,2)$ положим $\langle z^{(1)}, z^{(2)} \rangle = \sum\limits_{j=1}^{l} z_j^{(1)} \overline{z_j^{(2)}}$. Далее обозначим $(u,v) = \int\limits_{R^n} \langle u(x), v(x) \rangle dx$, если интеграл в правой части абсолютно сходится.

В дальнейшем предположим, что $V(x,\omega) \in C^2(R^n \times C^l; \operatorname{End} C^l)$.

Введем новые матрицы-функции

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_l, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_l) = V^{1/2}(x,\omega), \ (x_i \in R, \ \xi_j, \ \eta_j \in R),$$
$$Q(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_l, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_l) = F^2(x,\omega), \ (x_i \in R, \ \xi_j, \ \eta_j \in R),$$

где ω определяется равенством $\omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ \dots, \ \xi_l + i\eta_l)$.

Здесь $V^{\frac{1}{2}}(x,\omega)$ определяется как квадратный корень от положительно-определенной эрмитовой матрицы.

Предположим, что для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ \dots, \ \xi_l + i\eta_l)$, $\Omega = (\mu_1 + i\nu_1, \ \dots, \ \mu_l + i\nu_l)$, $(\xi_j, \ \eta_j, \ \mu_j, \ \nu_j \in R)$ и $u \in W_2^1(R^n)$ матрица-функция $F(x,\omega)$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} F^{-\frac{3}{2}}; C^l \right\|^2 \le \sigma_1, \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_2(R^n)^l \right\|^2 \le \sigma_2 \left\| F^{\frac{3}{2}} u; L_2(R^n)^l \right\|^2, \tag{2.3}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \xi_j} \omega + \nu_j F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \eta_j} \omega; C^l \right\| \leqslant \delta_1 \left\| F^{\frac{1}{2}} \Omega; C^l \right\|, \tag{2.4}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \omega + \nu_j F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F}{\partial \eta_j} \omega; C^l \right\| \leqslant \delta_2 \left\| F^{\frac{1}{2}} \Omega; C^l \right\|. \tag{2.5}$$

Также предполагается, что для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi_1 + i\eta_1, \dots, \xi_l + i\eta_l)$, $\Omega = (\mu_1 + i\nu_1, \dots, \mu_l + i\nu_l)$, $(\xi_j, \eta_j, \mu_j, \nu_j \in R)$ и $u \in W_2^1(R^n)$ выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| Q^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} Q^{-1}; C^l \right\|^2 \le \sigma_3, \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| Q^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial Q}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_2(R^n)^l \right\|^2 \le \sigma_4 \| V u; L_2(R^n)^l \|^2, \tag{2.7}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-1} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial \xi_j} \omega + \nu_j F^{-1} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial \eta_j} \omega; C^l \right\| \leqslant \delta_3 \left\| F \Omega; C^l \right\|, \tag{2.8}$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{l}\mu_j F^{-1}\frac{\partial Q}{\partial \xi_j}\omega+\nu_j F^{-1}\frac{\partial Q}{\partial \eta_j}\omega;C^l\right\|\leqslant \delta_4\left\|F\Omega;C^l\right\|. \tag{2.9}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия (2.2)–(2.9) и пусть числа σ_j, δ_j $(j=\overline{1,4})$ такие, что*

$$\sigma_1+2\sigma_2<4,\ \delta_1+2\delta_2<1,\ \sigma_3+2\sigma_4<4,\ \ \delta_3+2\delta_4<1. \tag{2.10}$$

Тогда уравнение (2.1) разделяется в $L_2(R^n)^l$ и для всех вектор-функций $u(x)\in L_2(R^n)^l\cap W^4_{2,loc}(R^n)^l$ таких, что $f(x)\in L_2(R^n)^l$ справедливы включения

$$\Delta^2 u,\quad V(x,u)u,\quad V^{\frac12}(x,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\in L_2(R^n)^l,\ i=1,2,...,n.$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\begin{gathered}\|\Delta^2 u(x);L_2(R^n)^l\|+\|V(x,u(x))u(x);L_2(R^n)^l\|+\sum_{i=1}^{n}\left\|V^{\frac12}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2};L_2(R^n)^l\right\|\leqslant\\ \leqslant M\|f(x);L_2(R^n)^l\|,\end{gathered} \tag{2.11}$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

Пример. Условия теоремы выполняются для уравнения (2.1) при $V(x,\,u(x))=(1+|u(x)|^2)^\rho, n=1$, то есть $Q(x,\xi,\eta)=(1+\xi^2+\eta^2)^\rho$, когда $\rho\leqslant min\{\frac{\delta_2}{2};\ \frac{\delta_4}{4}\}$.

3. Вспомогательные леммы

Лемма 3.1. *Пусть в уравнении (2.1) вектор-функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_2(R^n)^l$, и вектор-функция $u(x)$ принадлежит классу $L_2(R^n)^l\cap W^4_{2,loc}(R^n)^l$. Тогда вектор-функции $V^{1/2}(x,u(x))u(x)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ $(i=1,2,\dots,n)$ принадлежат пространству $L_2(R^n)^l$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x)\in C_0^\infty(R^n)$ – фиксированная неотрицательная функция, обращающаяся в единицу при $|x|<1$. Для любого положительного числа ε положим $\varphi_\varepsilon(x)=\varphi(\varepsilon x)$.

Используя равенства $\triangle u=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ и $(f,\varphi_\varepsilon u)=(\Delta^2 u,\varphi_\varepsilon u)+(V(x,u)u,\varphi_\varepsilon u)$, имеем

$$\begin{gathered}(f,\varphi_\varepsilon u)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^{n}\varphi_\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)+2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\\ +\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial x_i^2}u\right)+(Vu,\varphi_\varepsilon u),\end{gathered}$$

где $(,)$ – скалярное произведение в пространстве $L_2(R^n)^l$.

Так как функция φ_ε вещественнозначная, и

$$\left|\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\right|\leqslant M_1\varepsilon,\qquad\left|\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial x_k\partial x_i}\right|\leqslant M_0\varepsilon^2,\ \forall x\in R^n,$$

где

$$M_1=sup|\nabla\varphi_\varepsilon(x)|,\ \ M_0=sup|\Delta\varphi_\varepsilon(x)|,$$

то из равенства (3.1) переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, находим

$$\operatorname{Re}(f,u) \geq \sum_{k,i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) + (Vu, u),$$

что и доказывает лемму.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия (2.2)–(2.5), и пусть вектор-функция $u(x)$ из класса $L_2(R^n)^l \cap W_{2,loc}^4(R^n)^l$ является решением уравнения (2.1) с правой частью $f(x) \in L_2(R^n)^l$. Тогда вектор-функции $F^{\frac{3}{2}}(x,u(x))u(x)$, $F^{\frac{1}{2}}(x,u(x))\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$, $k = 1,...,n$, принадлежат пространству $L_2(R^n)^l$.*

Доказательство. Пусть функция $\varphi_\varepsilon(x)$ такая же, как в доказательстве леммы 3.1. Очевидно, что

$$(f, \varphi_\varepsilon Fu) = (\Delta^2 u, \varphi_\varepsilon Fu) + (V(x,u)u, \varphi_\varepsilon Fu).$$

Отсюда, учитывая равенство

$$\frac{\partial(\varphi_\varepsilon Fu)}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} Fu + \varphi_\varepsilon \frac{\partial F}{\partial x_i} u + \sum_{j=1}^{l} \varphi_\varepsilon \operatorname{Re} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} u + \sum_{j=1}^{l} \varphi_\varepsilon \operatorname{Im} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \eta_j} u + \varphi_\varepsilon F \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad (3.1)$$

после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} (f, \varphi_\varepsilon Fu) = {} & A_1^\varepsilon(u) + 2A_2^\varepsilon(u) + 2A_3^\varepsilon(u) + A_4^\varepsilon(u) + 2A_5^\varepsilon(u) + \\ & + A_6^\varepsilon(u) + 2A_7^\varepsilon(u) + 2A_8^\varepsilon(u) + 2A_9^\varepsilon(u) + 2A_{10}^\varepsilon(u) + (Vu, \varphi_\varepsilon Fu), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$A_1^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_i^2} Fu \right), \quad A_2^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} u \right),$$

$$A_3^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} F \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \quad A_4^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \varphi_\varepsilon \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} u \right),$$

$$A_5^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \varphi_\varepsilon \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \quad A_6^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \varphi_\varepsilon F \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right),$$

$$A_7^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{l} (\operatorname{Re} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} + \operatorname{Im} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \eta_j} u) \right),$$

$$A_8^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \varphi_\varepsilon \sum_{j=1}^{l} (\operatorname{Re} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \xi_j} + \operatorname{Im} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \eta_j}) u \right),$$

$$A_9^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \varphi_\varepsilon \sum_{j=1}^{l} (\operatorname{Re} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} + \operatorname{Im} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \frac{\partial F}{\partial \eta_j}) u \right),$$

$$A_{10}^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \varphi_\varepsilon \sum_{j=1}^{l} (\operatorname{Re} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} + \operatorname{Im} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \eta_j}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

Здесь и далее значения F, $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \xi_j}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \eta_j}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \xi_j}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \eta_j}$ взяты в точке $(x_1, \ldots, x_n, \operatorname{Re} u_1(x), \ldots, \operatorname{Re} u_l(x), \operatorname{Im} u_1(x), \ldots, \operatorname{Im} u_l(x))$.

Поочередно оценивая функционалы, находим, что в силу леммы 3.1 функционалы $A_1^\varepsilon(u)$, $A_2^\varepsilon(u)$, $A_3^\varepsilon(u)$, $A_7^\varepsilon(u)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Относительно функционалов $A_m^\varepsilon(u),\ m=4,5,6,8,9,10,$ получаем следующие оценки:

$$|A_4^\varepsilon(u)| \leqslant \frac{\beta_1}{2}\sum_{k=1}^n\left(F^{\frac12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2},\varphi_\varepsilon F^{\frac12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right)+\frac{\sigma_1}{2\beta_1}(Vu,\varphi_\varepsilon Fu),$$

$$|A_5^\varepsilon(u)| \leqslant \frac{\beta_2}{2}\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2},\varphi_\varepsilon F\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right)+\frac{\sigma_2}{2\beta_2}(Vu,\varphi_\varepsilon Fu),$$

$$|A_6^\varepsilon(u)| \leqslant \sum_{k=1}^n\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}F^{\frac12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2};L_2(R^n)^l\right\|^2,\ \ |A_8^\varepsilon(u)| \leqslant \delta_1\sum_{k=1}^n\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}F^{\frac12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2};L_2(R^n)^l\right\|^2,$$

$$|A_9^\varepsilon(u)| \leqslant \delta_2\sum_{k=1}^n\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}F^{\frac12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2};L_2(R^n)^l\right\|^2,\ \ |A_{10}^\varepsilon(u)| \leqslant \delta_2\sum_{k=1}^n\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}F^{\frac12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2};L_2(R^n)^l\|^2.$$

Здесь β_1, β_2 – произвольные положительные числа, а $\sigma_1,\sigma_2,\delta_1$ и δ_2 – константы из условий (2.2)–(2.5). При оценке функционалов $A_9^\varepsilon(u)$ и $A_{10}^\varepsilon(u)$ неравенство (2.5) используется дважды: в случаях, когда

$$\omega=(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_l)=u(x)=(u_1(x),u_2(x),\dots,u_l(x)),$$

и

$$\omega=(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_l)=\frac{\partial u}{\partial x_i}=\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i},\frac{\partial u_2}{\partial x_i},\dots,\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right).$$

На основе полученных оценок из равенства (3.2) имеем

$$|(f,\varphi_\varepsilon Fu)|\geq\left(1-\frac{\sigma_1}{2\beta_1}-\frac{\sigma_2}{\beta_2}\right)\cdot(Vu,\varphi_\varepsilon Fu)-|A_1^\varepsilon(u)|-|A_2^\varepsilon(u)|-|A_3^\varepsilon(u)|-|A_7^\varepsilon(u)|+$$
$$+\left(1-\frac{\beta_1}{2}-\beta_2-2\delta_1-2\delta_2-2\delta_2\right)\cdot\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2},\varphi_\varepsilon F\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right).$$

Далее применяем неравенство Коши-Буняковского и затем, переходя к пределу при $\varepsilon\to0$, получим неравенство

$$\begin{aligned}\|f;L_2(R^n)^l\|\|Fu;L_2(R^n)^l\|\geq|(f,Fu)|\geq\left(1-\frac{\sigma_1}{2\beta_1}-\frac{\sigma_2}{\beta_2}\right)\cdot(Vu,Fu)+\\+\left(1-\frac{\beta_1}{2}-\beta_2-2\delta_1-4\delta_2\right)\cdot\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2},F\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Теперь подбираем положительные числа β_1, β_2 так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\sigma_1}{2\beta_1}+\frac{\sigma_2}{\beta_2}<1,\quad \frac{\beta_1}{2}+\beta_2+2\delta_1+4\delta_2<1.$$

Так как по лемме 3.1 $Fu\in L_2(R^n)^l$, то из неравенства (3.3) следует, что вектор-функции $F^{\frac12}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$, $(k=1,2,...,n)$, $F^{\frac32}u$ принадлежат пространству $L_2(R^n)^l$.

Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 2.1

Переходим к непосредственному доказательству теоремы 2.1. Поступая так же, как и выше из равенства

$$(f,\varphi_\varepsilon Vu)=(\Delta^2u,\varphi_\varepsilon Vu)+(V(x,u)u,\varphi_\varepsilon Vu)$$

после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned}(f,\varphi_\varepsilon Vu)&=B_1^\varepsilon(u)+2B_2^\varepsilon(u)+2B_3^\varepsilon(u)+B_4^\varepsilon(u)+2B_5^\varepsilon(u)+\\&+B_6^\varepsilon(u)+2B_7^\varepsilon(u)+2B_8^\varepsilon(u)+2B_9^\varepsilon(u)+2B_{10}^\varepsilon(u)+(Vu,\varphi_\varepsilon Vu),\end{aligned}\tag{4.1}$$

где

$$B_1^\varepsilon(u)=\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial x_i^2}Qu\right),\quad B_2^\varepsilon(u)=\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^n\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial Q}{\partial x_i}u\right),$$

$$B_3^\varepsilon(u)=\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^n\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}Q\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),\quad B_4^\varepsilon(u)=\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^n\varphi_\varepsilon\frac{\partial^2Q}{\partial x_i^2}u\right),$$

$$B_5^\varepsilon(u)=\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^n\varphi_\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),\quad B_6^\varepsilon(u)=\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^n\varphi_\varepsilon Q\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}\right),$$

$$B_7^\varepsilon(u)=\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^n\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\sum_{j=1}^l(\operatorname{Re}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial Q}{\partial\xi_j}+\operatorname{Im}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial Q}{\partial\eta_j})u\right),$$

$$B_8^\varepsilon(u)=\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^n\varphi_\varepsilon\sum_{j=1}^l(\operatorname{Re}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2Q}{\partial x_i\partial\xi_j}+\operatorname{Im}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2Q}{\partial x_i\partial\eta_j})u\right),$$

$$B_9^\varepsilon(u)=\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^n\varphi_\varepsilon\sum_{j=1}^l(\operatorname{Re}\frac{\partial^2u_j}{\partial x_i^2}\frac{\partial Q}{\partial\xi_j}+\operatorname{Im}\frac{\partial^2u_j}{\partial x_i^2}\frac{\partial Q}{\partial\eta_j})u\right),$$

$$B_{10}^\varepsilon(u)=\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^n\varphi_\varepsilon\sum_{j=1}^l(\operatorname{Re}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial Q}{\partial\xi_j}+\operatorname{Im}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial Q}{\partial\eta_j})\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Здесь и далее значения Q, $\dfrac{\partial Q}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial\xi_j}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial\eta_j}$, $\dfrac{\partial^2Q}{\partial x_i\partial\xi_j}$, $\dfrac{\partial^2Q}{\partial x_i\partial\eta_j}$ взяты в точке $(x_1,\,\dots,\,x_n,\,\operatorname{Re}u_1(x),\,\dots,$ $\operatorname{Re}u_l(x),\,\operatorname{Im}u_1(x),\,\dots,\,\operatorname{Im}u_l(x))$.

Поочередно оценивая функционалы $B_j^\varepsilon(u)$, $j=\overline{1,\,10}$, находим, что функционалы $B_1^\varepsilon(u)$, $B_2^\varepsilon(u)$, $B_3^\varepsilon(u)$, $B_7^\varepsilon(u)$ стремятся к нулю при $\varepsilon\to0$.

Относительно функционалов $B_m^\varepsilon(u)$ $m=4,5,6,8,9,10$ получаем следующие оценки:

$$|B_4^\varepsilon(u)|\leqslant\frac{\beta_3}{2}\sum_{k=1}^n\left(F\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\varphi_\varepsilon F\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2}\right)+\frac{\sigma_3}{2\beta_3}(Vu,\varphi_\varepsilon Vu),$$

$$|B_5^\varepsilon(u)|\leqslant\frac{\beta_4}{2}\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\varphi_\varepsilon Q\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2}\right)+\frac{\sigma_4}{2\beta_4}(Vu,\varphi_\varepsilon Vu),$$

$$|B_6^\varepsilon(u)|\leqslant\sum_{k=1}^n\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}Q^{\frac12}\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2};L_2(R^n)^l\right\|^2,\ \ |B_8^\varepsilon(u)|\leqslant\delta_3\sum_{k=1}^n\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}F\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2};L_2(R^n)^l\right\|^2,$$

$$|B_9^\varepsilon(u)|\leqslant\delta_4\sum_{k=1}^n\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}F\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2};L_2(R^n)^l\right\|^2,\ \ |B_{10}^\varepsilon(u)|\leqslant\delta_4\sum_{k=1}^n\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}F\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2};L_2(R^n)^l\|^2.$$

Здесь β_3, β_4 – произвольные положительные числа, а $\sigma_3,\ \sigma_4,\ \delta_3$ и δ_4 – константы из условий (2.6)–(2.10). При оценке функционалов $B_9^\varepsilon(u)$ и $B_{10}^\varepsilon(u)$ неравенство (2.9) используется дважды: в случаях, когда

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l) = u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_l(x)),$$

и

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l) = \frac{\partial u}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}, \frac{\partial u_2}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right).$$

На основе полученных оценок из равенства (4.1) имеем

$$|(f, \varphi_\varepsilon V u)| \geq \left(1 - \frac{\sigma_3}{2\beta_3} - \frac{\sigma_4}{\beta_4}\right) \cdot (Vu, \varphi_\varepsilon V u) - |B_1^\varepsilon(u)| - |B_2^\varepsilon(u)| - |B_3^\varepsilon(u)| - |B_7^\varepsilon(u)| +$$
$$+ \left(1 - \frac{\beta_3}{2} - \beta_4 - 2\delta_3 - 2\delta_4 - 2\delta_4\right) \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi_\varepsilon V \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right).$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и затем перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство

$$\|f; L_2(R^n)^l\| \|Vu; L_2(R^n)^l\| \geq |(f, Vu)| \geq \left(1 - \frac{\sigma_3}{2\beta_3} - \frac{\sigma_4}{\beta_4}\right) \cdot (Vu, Vu) +$$
$$+ \left(1 - \frac{\beta_3}{2} - \beta_4 - 2\delta_3 - 4\delta_4\right) \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, V \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right).$$

Далее подбираем положительные числа β_3, β_4 так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\sigma_3}{2\beta_3} + \frac{\sigma_4}{\beta_4} < 1, \quad \frac{\beta_3}{2} + \beta_4 + 2\delta_3 + 4\delta_4 < 1.$$

Теперь из полученного неравенства после несложных преобразований получим коэрцитивное неравенство (2.11).

Разделимость нелинейного оператора (2.1) в пространстве $L_2(R^n)^l$ следует из коэрцитивного неравенства (2.11).

Теорема 2.1 доказана.

5. Линейный случай

Далее для наглядности сформулируем утверждения теоремы 2.1 в случае линейного бигармонического оператора. Предположим, что $V(x, \omega)$ не зависит от ω и имеет вид $V(x, \omega) = V(x)$, где $V(x) = V^*(x) \in C^2(R^n, EndC^l)$. Также предположим, что для всех $x \in R^n$, и $u \in W_2^1(R^n)$ выполнены условия

$$\sum_{i=1}^n \left\| F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} F^{-\frac{3}{2}}; C^l \right\|^2 \leq \sigma_1,$$

$$\sum_{i=1}^n \left\| F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_2(R^n)^l \right\|^2 \leq \sigma_2 \left\| F^{\frac{3}{2}} u;\ ;\ L_2(R^n)^l \right\|^2,$$

$$\sum_{i=1}^n \left\| V^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} V^{-1}; C^l \right\|^2 \leqslant \sigma_3,$$

$$\sum_{i=1}^n \left\| V^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i};\ L_2(R^n)^l \right\|^2 \leqslant \sigma_4 \|Vu;\ ;\ L_2(R^n)^l\|^2,$$

где σ_j, $j = \overline{1,\ 4}$, – некоторые положительные числа.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены сформулированные выше в этом разделе условия и пусть числа* σ_j, $j=\overline{1,4}$, *такие, что* $0<\sigma_1+2\sigma_2<4$, $0<\sigma_3+2\sigma_4<4$. *Тогда уравнение (2.1) разделяется в* $L_2(R^n)^l$ *и для всех вектор-функций* $u(x)\in L_2(R^n)^l\cap W^4_{2,loc}(R^n)^l$ *таких, что* $f(x)\in L_2(R^n)^l$ *справедливы включения* $\Delta^2 u, \quad Vu, \quad V^{\frac{1}{2}}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\in L_2(R^n)^l$, $i=1,2,...,n$.

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\left\|\Delta^2 u(x);L_2(R^n)^l\right\|+\left\|V(x)u(x);L_2(R^n)^l\right\|+\sum_{i=1}^{n}\left\|V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2};L_2(R^n)^l\right\|\leqslant$$
$$\leqslant M\left\|f(x);L_2(R^n)^l\right\|,$$

где положительное число M *не зависит от* $u(x)$, $f(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. W.N. Everitt, M. Gierz *Some properties of the domains of certain differential operators* // Proc.London Math.Soc. 1971. V. 23. P. 301–324.
2. W.N. Everitt, M. Gierz *On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions*// Proc.London Math.Soc. 1972. V. 24, P. 149–170.
3. W.N. Everitt, M. Gierz *Some inequallities associated with certain differential operarors* // Math.Z., 1972. V. 126. P. 308–326.
4. W.N. Everitt, M. Gierz *Inequalities and separation for Schrodinger -tupe operators in* $L_2(R^n)$// Proc.Roy.Soc.Edinburg Sect A. 1977. V. 79. P. 149–170.
5. Бойматов К.Х. *Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения*// Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. 1984. Т. 170. С. 37–76.
6. Бойматов К.Х., Шарипов А. *Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шредингера и Дирака* // Доклады Академии наук России, 1992. Т. 326, № 3. С. 393–398.
7. Отелбаев М. *Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в* R^n // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1983. Т. 161. С. 195–217.
8. Муратбеков М.Б., Отелбаев М. *Гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса нелинейных уравнений типа Шредингера* // Изв.вузов. Матем. 1989. № 3. С. 44–48.
9. E.M.E. Zayed *Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem* // J. Math.Anal.Appl. 337(2008). P.659–666.
10. Каримов О.Х. *Коэрцитивные свойства и разделимость бигармонического оператора с матричным потенциалом* // Материалы Международной конференции по функциональным пространствам и теории приближения функций, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского 25–29 мая 2015 г., МИАН, г. Москва. С. 153–154.
11. Каримов О.Х. *О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами* // Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2014. № 3(157). С. 42–50.

Олимжон Худойбердиевич Каримов,
Институт математики АН РТ,
ул. Айни, 299/4,
734063, г. Душанбе, Республика Таджикистан
E-mail: karimov_olim@mail.ru