ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 1 (2017). С. 29-41.

УДК 517.9

# СИММЕТРИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ОПЦИОНОВ

М.М. ДЫШАЕВ, В.Е. ФЁДОРОВ

**Аннотация.** Исследуется групповая структура уравнения Шенбухера–Уилмотта со свободным параметром, моделирующего ценообразование опционов. Найдена пятимерная группа преобразований эквивалентности такого уравнения. С ее помощью найдены четырехмерные алгебры Ли допускаемых операторов уравнения в случае двух спецификаций свободного элемента и трехмерная алгебра для остальных, не эквивалентных им случаев. Для каждой из алгебр найдены оптимальные системы подалгебр и соответствующие им инвариантные решения или инвариантные подмодели уравнения.

**Ключевые слова:** нелинейное уравнение в частных производных, нелинейное уравнение Блэка–Шоулса, модель Шенбухера–Уилмотта, ценообразование опционов, групповой анализ, инвариантное решение.

**Mathematics Subject Classification:** 58J70, 76M60, 91G99, 35A30

## 1. Введение

Традиционной моделью в теории финансовых рынков является модель Блэка–Шоулса [1, 2], описываемая обратным уравнением теплопроводности с переменными коэффициентами. Однако практические исследования показывают, что эта модель в силу сделанных допущений далека от адекватности реальным процессам, протекающим на финансовых рынках (см. [3]–[6]). Поэтому исследователи в последние десятилетия перешли к более сложным моделям динамики финансовых рынков, например, исследуются модели со стохастической волатильностью [7], модели, учитывающие наличие транзакционных издержек [8], а также другие модели [3, 4]. Все более популярными у исследователей становятся нелинейные модели, в том числе нелинейные модели типа Блэка–Шоулса. Например, модель с учетом транзакционных издержек (transaction-cost models) в работе [9] имеет вид

$$w_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 w_{xx}(1 + 2\rho x w_{xx}) = 0,$$

где $t$ — время; $x$ — цена акции; $w$ — цена опциона; $\sigma$ — волатильность акции; $\rho$ — транзакционные издержки.

Другим типом моделей являются модели с редуцированной формой стохастического дифференциального уравнения (reduced-form SDE models), имеющие вид

$$w_t + \frac{\sigma^2 x^2 w_{xx}}{2\left(1 - b x w_{xx}\right)^2} = 0,$$

M.M. Dyshaev, V.E. Fedorov, Symmetries and exact solutions of a nonlinear pricing options equation.



Работа второго автора выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление №211 от 16.03.2013 г.), соглашение №02.A03.21.0011, и Министерства образования и науки РФ, задание №1.6462.2017/БЧ).

*Поступила 28 декабря 2015 г.*

где $b$ — параметр ликвидности. Они рассмотрены, например, в работах [10]–[13].

Как показано в работах [11, 14, 15], модель стоимости хеджирующей стратегии на неликвидном рынке с учетом влияния операций крупных трейдеров может быть представлена в виде

$$w_t + \frac{\sigma^2 x^2 w_{xx}}{2\left(1 - \rho x \lambda(x) w_{xx}\right)^2} = 0. \tag{1}$$

В данном случае $\rho$ является параметром, определяющим влияние операций крупных трейдеров, а $\lambda(x)$ выбирается таким образом, чтобы получить необходимую форму выплаты. Значения $\rho$ и $\lambda(x)$ могут быть определены исходя из наблюдаемых на рынке цен опционов.

Еще одной моделью ценообразования опционов является так называемая модель равновесия (equilibrium model) или модель с функцией реакции (reaction-function model). Примеры использования данной модели приведены в работах [15, 16]. Рассмотрим соответствующее модели равновесия, называемой также моделью Шенбухера–Уилмотта [17], уравнение

$$w_t + \frac{\sigma^2 x^2 w_{xx}}{2\left(1 - \rho \frac{g'(\rho w_x)}{g(\rho w_x)} x w_{xx}\right)^2} = 0, \tag{2}$$

описывающее ценообразование опционов на неликвидном рынке с учетом влияния размеров открытых позиций трейдеров. В этом случае $x$ — цена базового актива, $\sigma$ — волатильность цены базового актива, $\rho \geq 0$ — показатель, характеризующий величину позиции трейдера относительно общего объема торгуемого базового актива. Модели, учитывающие влияние транзакционных издержек и хеджирующих сделок крупных трейдеров на базовый актив, могут быть применены для некоторых активов, которые торгуются на биржевых площадках развивающихся стран.

В рассматриваемой модели (2) в работах [14, 17, 18, 19] функция реакции $\psi = \psi(F_t, \rho\Phi_t)$ зависит от фундаментальной цены акции $F_t$ и нормализованного объема спроса крупных трейдеров $\rho\Phi_t$. По сути, функция $\psi$ является равновесной ценой. Она обеспечивает равновесие между ценой базового актива, величиной позиции крупных трейдеров по данному активу и фундаментальной ценой базового актива $F_t$. В работе [19] она имеет вид $\psi(f, \alpha) = fe^{\alpha}$, в работах [14, 17] взята в виде $\psi(f, \alpha) = f/(1 - \alpha)$. При выводе уравнения (2) в [18] предполагается, что $\psi(f, \alpha) = fg(\alpha)$ при некоторой возрастающей функции $g = g(\alpha)$. Предположение о возрастающем характере функции $g(\alpha)$, входящей в функцию $\psi$, впервые сделано в работе [16] и хорошо согласуется с практическими наблюдениями, когда цены растут при увеличении позиций крупных трейдеров.

Методы исследования перечисленных моделей весьма различны: численные методы, методы теории временных рядов, теории нейронных сетей и т. д. [20]–[23]. Как всегда, когда идет речь о процессах, моделируемых дифференциальными уравнениями, важно иметь точные решения таких уравнений. В случае нелинейных дифференциальных уравнений одними из самых эффективных методов, позволяющих осуществлять поиск решений, являются методы группового анализа [24, 25]. Первые исследования групповых свойств линейного уравнения Блэка–Шоуолса были проведены в работе Н.Х. Ибрагимова и Р.К. Газизова [26]. Помимо линейного уравнения, в последние годы методами симметрийного анализа нередко исследуются различные нелинейные модификации уравнения Блэка–Шоулса. Например, уравнение (1) таким образом подробно исследовано в работах L.A. Bordag с соавторами [18, 27, 28]. Кроме того, в работах L.A. Bordag и A. Mikaelyan [29, 30] получены интересные результаты о симметриях и инвариантных решениях уравнения (2).

Данная работа посвящена групповой классификации [24, 31] уравнения (2) и поиску его точных решений методами группового анализа. Для этого во втором разделе найдены группы преобразований эквивалентности этого уравнения. С их помощью в третьем разделе удалось показать, что для спецификаций функции $v(\alpha) = g'(\alpha)/g(\alpha) = \beta/\alpha$, соответствующей степенной функции $g(\alpha) = C\alpha^\beta$, и $v \equiv 1$ ($g = Ce^\alpha$) уравнение имеет четырехмерную основную алгебру Ли, а в случаях, не приводимых к указанным преобразованиями эквивалентности, основная алгебра Ли трехмерная. Этот результат корректирует результат работ [29, 30], в которых выделены три спецификации с дополнительными симметриями (используя полученные здесь преобразования эквивалентности, нетрудно показать эквивалентность двух из них). Четвертый, пятый и шестой разделы посвящены поиску инвариантных решений и подмоделей уравнения (2) с различными алгебрами Ли (при различных спецификациях функции $g$). В седьмом разделе подведены итоги исследования.

## 2. Преобразования эквивалентности уравнения Шенбухера–Уилмотта

Домножим уравнение (2) на константу $\rho$ и сделаем замену $\rho w = u$ и переобозначение $g'(\rho w_x)/g(\rho w_x) = v(u_x)$. Получим уравнение

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2\left(1 - xv(u_x)u_{xx}\right)^2} = 0. \tag{3}$$

Для нахождения спецификаций функции $v = v(u_x)$, при которых появляются дополнительные к задаваемым ядром главных алгебр Ли симметрии уравнения (3), необходимо найти непрерывную группу преобразований эквивалентности этого уравнения. Для этого запишем уравнение (3) в виде

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2\left(1 - xvu_{xx}\right)^2} = 0, \tag{4}$$

подразумевая, что $v$ — это дополнительная переменная, зависящая от переменных $t$, $x$, $u$, $u_t$, $u_x$. Генераторы непрерывной группы преобразований эквивалентности будем искать в виде $Y = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u + \mu\partial_v$, где функции $\tau, \xi, \eta$ зависят от $t, x, u$, а $\mu$ зависит от $t, x, u, u_t, u_x, v$. Здесь и далее для краткости используется запись $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \partial_t$ и т. п. Дополним уравнение (4) уравнениями

$$v_t = 0, \quad v_x = 0, \quad v_u = 0, \quad v_{u_t} = 0, \tag{5}$$

означающими, что в исходной постановке задачи $v$ зависит только от $u_x$.

Будем рассматривать систему (4), (5) как многообразие $\mathfrak{N}$ в расширенном пространстве соответствующих переменных. Подействуем на левую часть системы (4), (5) продолженным оператором

$$\widetilde{Y} = Y + \varphi^t\partial_{u_t} + \varphi^{xx}\partial_{u_{xx}} + \mu^t\partial_{v_t} + \mu^x\partial_{v_x} + \mu^u\partial_{v_u} + \mu^{u_t}\partial_{v_{u_t}},$$

сузим результат действия на многообразие $\mathfrak{N}$ и получим уравнения

$$\left.\varphi^t + \frac{\sigma^2 x u_{xx}\xi}{\left(1 - xvu_{xx}\right)^3} + \frac{\sigma^2 x^2 (1 + xvu_{xx})\varphi^{xx}}{2\left(1 - xvu_{xx}\right)^3} + \frac{\sigma^2 x^3 u_{xx}^2 \mu}{\left(1 - xvu_{xx}\right)^3}\right|_{\mathfrak{N}} = 0, \tag{6}$$

$$\mu^t|_{\mathfrak{N}} = 0, \quad \mu^x|_{\mathfrak{N}} = 0, \quad \mu^u|_{\mathfrak{N}} = 0, \quad \mu^{u_t}|_{\mathfrak{N}} = 0. \tag{7}$$

Коэффициенты оператора $\widetilde{Y}$ могут быть вычислены по формулам продолжения, например, $\mu^t = \widetilde{D}_t(\mu) - v_t\widetilde{D}_t(\tau) - v_x\widetilde{D}_t(\xi) - v_u\widetilde{D}_t(\eta) - v_{u_t}\widetilde{D}_t(\varphi^t) - v_{u_x}\widetilde{D}_t(\varphi^x)$, использующим операторы дифференцирования

$$\widetilde{D}_t = \partial_t + v_t\partial_v + v_{tt}\partial_{v_t} + v_{tx}\partial_{v_x} + v_{tu}\partial_{v_u} + v_{tu_t}\partial_{v_{u_t}} + v_{tu_x}\partial_{v_{u_x}}$$

и т. д. Тогда уравнения (7) примут вид

$$\mu_t - v'(u_x)\varphi^x_t = 0, \quad \mu_x - v'(u_x)\varphi^x_x = 0, \quad \mu_u - v'(u_x)\varphi^x_u = 0, \quad \mu_{u_t} - v'(u_x)\varphi^x_{u_t} = 0.$$

Поскольку
$$\varphi^x = \eta_x + u_x\eta_u - u_t\tau_x - u_tu_x\tau_u - u_x\xi_x - u_x^2\xi_u, \tag{8}$$
то эти уравнения можно расписать в виде:
$$\mu_t - v'(u_x)\left(\eta_{tx} + u_x\eta_{tu} - u_t\tau_{tx} - u_tu_x\tau_{tu} - u_x\xi_{tx} - u_x^2\xi_{tu}\right)|_{\mathfrak{N}} =$$
$$= \mu_t - v'(u_x)\left(\eta_{tx} + u_x\eta_{tu} - u_x\xi_{tx} - u_x^2\xi_{tu} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sigma^2x^2u_{xx}\tau_{tx}}{2\left(1-xvu_{xx}\right)^2} + \frac{\sigma^2x^2u_{xx}u_x\tau_{tu}}{2\left(1-xvu_{xx}\right)^2}\right) = 0, \tag{9}$$
$$\mu_x - v'(u_x)\left(\eta_{xx} + u_x\eta_{xu} - u_t\tau_{xx} - u_tu_x\tau_{xu} - u_x\xi_{xx} - u_x^2\xi_{xu}\right)|_{\mathfrak{N}} =$$
$$= \mu_x - v'(u_x)\left(\eta_{xx} + u_x\eta_{xu} - u_x\xi_{xx} - u_x^2\xi_{xu} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sigma^2x^2u_{xx}\tau_{xx}}{2\left(1-xvu_{xx}\right)^2} + \frac{\sigma^2x^2u_{xx}u_x\tau_{xu}}{2\left(1-xvu_{xx}\right)^2}\right) = 0, \tag{10}$$
$$\mu_u - v'(u_x)\left(\eta_{xu} + u_x\eta_{uu} - u_t\tau_{xu} - u_tu_x\tau_{uu} - u_x\xi_{xu} - u_x^2\xi_{uu}\right)|_{\mathfrak{N}} =$$
$$= \mu_u - v'(u_x)\left(\eta_{xu} + u_x\eta_{uu} - u_x\xi_{xu} - u_x^2\xi_{uu} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sigma^2x^2u_{xx}\tau_{xu}}{2\left(1-xvu_{xx}\right)^2} + \frac{\sigma^2x^2u_{xx}u_x\tau_{uu}}{2\left(1-xvu_{xx}\right)^2}\right) = 0, \tag{11}$$
$$\mu_{u_t} + v'(u_x)\left(\tau_x + u_x\tau_u\right) = 0. \tag{12}$$

Уравнение (6) в силу равенства
$$\varphi^{xx} = \eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + {u_x}^2\eta_{uu} + u_{xx}\eta_u - u_t\tau_{xx} - 2u_tu_x\tau_{xu} - 2u_{tx}\tau_x - u_t{u_x}^2\tau_{uu} -$$
$$-2u_xu_{tx}\tau_u - u_tu_{xx}\tau_u - u_x\xi_{xx} - 2{u_x}^2\xi_{xu} - 2u_{xx}\xi_x - {u_x}^3\xi_{uu} - 3u_xu_{xx}\xi_u$$
примет вид
$$\eta_t + u_t\eta_u - u_t\tau_t - u_t^2\tau_u - u_x\xi_t - u_tu_x\xi_u + \frac{\sigma^2x}{2\left(1-xvu_{xx}\right)^3}\left(2u_{xx}\xi + 2x^2u_{xx}^2\mu + \right.$$
$$+x(1+xvu_{xx})(\eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + {u_x}^2\eta_{uu} + u_{xx}\eta_u -$$
$$-u_t\tau_{xx} - 2u_tu_x\tau_{xu} - 2u_{tx}\tau_x - u_t{u_x}^2\tau_{uu} - 2u_xu_{tx}\tau_u -$$
$$\left. -u_tu_{xx}\tau_u - u_x\xi_{xx} - 2{u_x}^2\xi_{xu} - 2u_{xx}\xi_x - {u_x}^3\xi_{uu} - 3u_xu_{xx}\xi_u)\right)|_{\mathfrak{N}} =$$
$$= \eta_t - \frac{\sigma^2x^2u_{xx}\eta_u}{2\left(1-xvu_{xx}\right)^2} + \frac{\sigma^2x^2u_{xx}\tau_t}{2\left(1-xvu_{xx}\right)^2} - \frac{\sigma^4x^4u_{xx}^2\tau_u}{4\left(1-xvu_{xx}\right)^4} - u_x\xi_t +$$
$$+ \frac{\sigma^2x^2u_xu_{xx}\xi_u}{2\left(1-xvu_{xx}\right)^2} + \frac{\sigma^2x}{2\left(1-xvu_{xx}\right)^3}\left(2u_{xx}\xi + 2x^2u_{xx}^2\mu + \right.$$
$$+x(1+xvu_{xx})\left(\eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + {u_x}^2\eta_{uu} + u_{xx}\eta_u + \frac{\sigma^2x^2u_{xx}\tau_{xx}}{2\left(1-xvu_{xx}\right)^2} + \right.$$
$$+ \frac{\sigma^2x^2u_xu_{xx}\tau_{xu}}{\left(1-xvu_{xx}\right)^2} - 2u_{tx}\tau_x + \frac{\sigma^2x^2u_x^2u_{xx}\tau_{uu}}{2\left(1-xvu_{xx}\right)^2} - 2u_xu_{tx}\tau_u + \frac{\sigma^2x^2u_{xx}^2\tau_u}{2\left(1-xvu_{xx}\right)^2} -$$
$$\left.\left. -u_x\xi_{xx} - 2{u_x}^2\xi_{xu} - 2u_{xx}\xi_x - {u_x}^3\xi_{uu} - 3u_xu_{xx}\xi_u\right)\right) = 0. \tag{13}$$
Дифференцированием последнего уравнения по $u_{tx}$ получим
$$(1+xvu_{xx})(\tau_x + u_x\tau_u) = 0,$$
отсюда $\tau = \tau(t)$. Следовательно, уравнения (9)–(13) примут вид
$$\mu_t - v'(u_x)\left(\eta_{tx} + u_x\eta_{tu} - u_x\xi_{tx} - u_x^2\xi_{tu}\right) = 0, \tag{14}$$
$$\mu_x - v'(u_x)\left(\eta_{xx} + u_x\eta_{xu} - u_x\xi_{xx} - u_x^2\xi_{xu}\right) = 0, \tag{15}$$
$$\mu_u - v'(u_x)\left(\eta_{xu} + u_x\eta_{uu} - u_x\xi_{xu} - u_x^2\xi_{uu}\right) = 0, \tag{16}$$

$$\mu_{u_t} = 0, \tag{17}$$

$$\eta_t - \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}\eta_u}{2\,(1-xvu_{xx})^2} + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}\tau'(t)}{2\,(1-xvu_{xx})^2} - u_x\xi_t +$$
$$+\frac{\sigma^2 x^2 u_x u_{xx}\xi_u}{2\,(1-xvu_{xx})^2} + \frac{\sigma^2 x}{2\,(1-xvu_{xx})^3}\left(2u_{xx}\xi + 2x^2u_{xx}^2\mu + \right.$$
$$+x(1+xvu_{xx})\left(\eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + {u_x}^2\eta_{uu} + u_{xx}\eta_u - u_x\xi_{xx} - \right.$$
$$\left.\left. -2{u_x}^2\xi_{xu} - 2u_{xx}\xi_x - {u_x}^3\xi_{uu} - 3u_xu_{xx}\xi_u\right)\right) = 0. \tag{18}$$

Домножим уравнение (18) на $2(1-xvu_{xx})^3$ и получим

$$2(1-xvu_{xx})^3\eta_t + (1-xvu_{xx})\sigma^2x^2u_{xx}(\tau'(t)-\eta_u) - 2(1-xvu_{xx})^3u_x\xi_t +$$
$$+(1-xvu_{xx})\sigma^2x^2u_xu_{xx}\xi_u + \sigma^2 x\left(2u_{xx}\xi + 2x^2u_{xx}^2\mu + \right.$$
$$+x(1+xvu_{xx})\left(\eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + {u_x}^2\eta_{uu} + u_{xx}\eta_u - u_x\xi_{xx} - \right.$$
$$\left.\left. -2{u_x}^2\xi_{xu} - 2u_{xx}\xi_x - {u_x}^3\xi_{uu} - 3u_xu_{xx}\xi_u\right)\right) = 0. \tag{19}$$

Расщепляя уравнение (19) по переменной $u_{xx}$, получим при $u_{xx}^3$ множитель $\eta_t - u_x\xi_t$ при условии $v \neq 0$, поэтому $\xi = \xi(x,u)$, $\eta = \eta(x,u)$. Тогда из (14) получим, что $\mu_t = 0$, а уравнение (19) примет вид

$$(1-xvu_{xx})xu_{xx}(\tau'(t)-\eta_u) + (1-xvu_{xx})xu_xu_{xx}\xi_u +$$
$$+2u_{xx}\xi + 2x^2u_{xx}^2\mu + x(1+xvu_{xx})\left(\eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + {u_x}^2\eta_{uu} + u_{xx}\eta_u - u_x\xi_{xx} - \right.$$
$$\left. -2{u_x}^2\xi_{xu} - 2u_{xx}\xi_x - {u_x}^3\xi_{uu} - 3u_xu_{xx}\xi_u\right) = 0.$$

Продифференцируем это уравнение по $t$ и получим $\tau''(t) = 0$, $\tau(t) = At + B$, а уравнение теперь примет вид

$$(1-xvu_{xx})xu_{xx}(A-\eta_u) + (1-xvu_{xx})xu_xu_{xx}\xi_u +$$
$$+2u_{xx}\xi + 2x^2u_{xx}^2\mu + x(1+xvu_{xx})\left(\eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + {u_x}^2\eta_{uu} + u_{xx}\eta_u - u_x\xi_{xx} - \right.$$
$$\left. -2{u_x}^2\xi_{xu} - 2u_{xx}\xi_x - {u_x}^3\xi_{uu} - 3u_xu_{xx}\xi_u\right) = 0. \tag{20}$$

Расщепляя (20) по $u_{xx}$, получим коэффициент при $u_{xx}^0$:

$$x(\eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + u_x^2\eta_{uu} - u_x\xi_{xx} - 2u_x^2\xi_{xu} - u_x^3\xi_{uu}) = 0.$$

Из этого уравнения расщеплением по $u_x$ получим систему

$$\xi_{uu} = \eta_{xx} = 0, \tag{21}$$
$$2\eta_{xu} = \xi_{xx}, \tag{22}$$
$$\eta_{uu} = 2\xi_{xu}. \tag{23}$$

Из (21) следует, что $\xi = C(x)u + D(x)$, $\eta = E(u)x + F(u)$. Подставив эти выражения в (22), получим $2E'(u) = C''(x)u + D''(x)$. Тогда $C'''(x) = D'''(x) = 0$, $C(x) = Gx^2 + Hx + I$, $D(x) = Jx^2 + Kx + L$, $E'(u) = Gu + J$, $E(u) = \frac{1}{2}Gu^2 + Ju + M$. Таким образом,

$$\xi = Gx^2u + Hxu + Iu + Jx^2 + Kx + L, \quad \eta = \frac{1}{2}Gxu^2 + Jxu + Mx + F(u).$$

Подстановкой этих выражений в (23) получим уравнение $F''(u) = 3Gx + 2H$, откуда $G = 0$, $F(u) = Hu^2 + Nu + P$,

$$\xi = Hxu + Iu + Jx^2 + Kx + L, \quad \eta = Jxu + Mx + Hu^2 + Nu + P.$$

Теперь, приравнивая к нулю коэффициенты при $u_{xx}$ и при $u_{xx}^2$ из левой части уравнения (20), получим уравнения

$$\mu = \left[\frac{A}{2} - \eta_u + 2u_x\xi_u + \xi_x\right]v,$$

$$Ax + 2\xi - 2x\xi_x - 2xu_x\xi_u - x^2u_x\xi_{xx}v - 2x^2u_x^2\xi_{xu}v + 2x^2u_x\eta_{xu}v + x^2u_x^2\eta_{uu}v =$$
$$= Ax + 2Iu + 2L - 2Jx^2 - 2Hx^2u_x - 2Ixu_x = 0.$$

Из последнего равенства следует, что $A = H = I = J = L = 0$. Тогда

$$\tau = B, \quad \xi = Kx, \quad \eta = Mx + Nu + P, \quad \mu = (K - N)v. \tag{24}$$

При этом равенства (14)–(17) также выполняются.

Таким образом, решение системы уравнений, определяющей генераторы непрерывных групп преобразований эквивалентности, задается формулами (24). Отсюда получим утверждение.

**Теорема 1.** *Базис алгебры Ли инфинитезимальных операторов групп преобразований эквивалентности уравнения* (3) *при функции $v$, не равной тождественно нулю, образуют операторы*

$$Y_1 = \partial_t, \quad Y_2 = \partial_u, \quad Y_3 = x\partial_u, \quad Y_4 = x\partial_x + u\partial_u, \quad Y_5 = u\partial_u - v\partial_v.$$

Здесь элемент базиса, соответствующий решению при $K = 1$, $B = M = N = P = 0$ заменен на его сумму с элементом базиса, соответсвующим решению $N = 1$, $B = K = M = P = 0$ для того, чтобы минимизировать количество базисных операторов, содержащих дополнительную переменную $v$.

С учетом формулы (8) получим продолжения базисных операторов

$$\widetilde{Y}_1 = \partial_t, \quad \widetilde{Y}_2 = \partial_u, \quad \widetilde{Y}_3 = x\partial_u + \partial_{u_x}, \quad \widetilde{Y}_4 = x\partial_x + u\partial_u, \quad \widetilde{Y}_5 = u\partial_u - v\partial_v + u_x\partial_{u_x}. \tag{25}$$

Отсюда следует, что базис ядра основных алгебр Ли уравнения (3) составляют операторы $Y_1$, $Y_2$, $Y_4$, продолжения которых не содержат дополнительных переменных $v$, $u_x$.

**Следствие 1.** *Базис ядра основных алгебр Ли уравнения* (3) *при функции $v$, не равной тождественно нулю, образуют операторы $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_u$, $X_3 = x\partial_x + u\partial_u$.*

## 3. Групповая классификация уравнения

Рассмотрим алгебру Ли, полученную из проекций операторов (25) на подпространство переменных $v$, $u_x$, т. е. алгебру с базисом

$$Z_1 = \partial_{u_x}, \quad Z_2 = v\partial_v - u_x\partial_{u_x}. \tag{26}$$

Заметим сразу, что оператору $Z_1$ соответствует оператор $Y_3$, а оператору $Z_2$ — оператор $-Y_5$.

Ненулевыми структурными константами для данной алгебры Ли являются $c^1_{12} = -1$, $c^1_{21} = 1$. По формуле $E_\alpha = c^\gamma_{\alpha\beta}e^\beta\partial_{e^\gamma}$ найдем генераторы внутренних автоморфизмов алгебры Ли $E_1 = -e^2\partial_{e^1}$, $E_2 = e^1\partial_{e^1}$ и соответствующие им группы преобразований —

$$E_1 : \bar{e}^1 = e^1 - e^2a_1, \quad E_2 : \bar{e}^1 = e^1e^{a_2}.$$

Здесь $e^i$ — коэффициент при операторе $Z_i$ в разложении элемента рассматриваемой алгебры Ли по ее базису.

Пусть $e^2 \neq 0$, тогда $e^1 = 0$ в силу $E_1$. Получим подалгебру с базисом $Z_2$. Иначе имеем одномерную подалгебру с базисом $Z_1$. Таким образом, оптимальная система одномерных подалгебр алгебры $L_2$ с базисом (26) имеет вид $\Theta_1 = \{\langle Z_1\rangle, \langle Z_2\rangle\}$.

Для операторов $Z$ из оптимальной системы вычислим выражения $Z(V(u_x) - v)|_{v=V} = 0$. Получим:

$$Z_1(V(u_x) - v)|_{v=V} = V' = 0, \quad V \equiv \beta;$$
$$Z_2(V(u_x) - v)|_{v=V} = -V - u_xV' = 0, \quad V = \frac{\beta}{u_x}.$$

Первая из спецификаций преобразованием эквивалентности $Y_5$ сводится к $V \equiv 1$. Во втором случае преобразования эквивалентности, найденные в предыдущем разделе, не позволяют изменить константу $\beta$.

Для каждого базисного оператора из оптимальной системы вычислим проекцию соответствующего генератора группы преобразований эквивалентности ($Y_3$ или $-Y_5$) на подпространство переменных $t$, $x$, $u$. Получится соответствие (с точностью до множителя) $Z_1 : x\partial_u$, $Z_2 : u\partial_u$. Поэтому спецификации свободного элемента $v \equiv 1$ соответствует дополнительная симметрия $x\partial_u$, а спецификациям

$$v = \beta u_x^{-1}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{27}$$

соответствует симметрия $u\partial_u$.

**Теорема 2.** 1. *Базис основной алгебры Ли уравнения*

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2\left(1 - x u_{xx}\right)^2} = 0$$

*имеет вид* $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_u$, $X_3 = x\partial_x + u\partial_u$, $X_4 = x\partial_u$.

2. *Базис основной алгебры Ли уравнений*

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2\left(1 - \frac{\beta x u_{xx}}{u_x}\right)^2} = 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

*имеет вид* $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_u$, $X_3 = x\partial_x$, $X_4 = u\partial_u$.

3. *В случаях функции $v$, не приводимой к перечисленным выше преобразованиями эквивалентности, основная алгебра Ли уравнения*

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2\left(1 - x v(u_x) u_{xx}\right)^2} = 0$$

*совпадает с ядром основных алгебр Ли и имеет вид* $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_u$, $X_3 = x\partial_x + u\partial_u$.

Во втором пункте теоремы использована возможность линейного преобразования базиса с целью упрощения вида его элементов.

**Замечание 1.** В работе [29] помимо спецификаций функции $v$ из пунктов 2 и 3 теоремы 2 указаны еще спецификации

$$v = \beta(1 - u_x)^{-1}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

(см. п. 4 теоремы 4.2.1 [29]), имеющие дополнительную четвертую симметрию. Однако с помощью преобразования $v \to -v$, которое, очевидно, является внутренним автоморфизмом соответствующей группы преобразований эквивалентности алгебры $L_5$ из теоремы 1, а также используя порождаемое оператором $Y_3$ преобразование эквивалентности, осуществляющее сдвиг аргумента функции $v$, можно преобразовать эти спецификации к виду (27) из пункта 2 теоремы 2. Описанные преобразования соответствуют замене переменных $\overline{t} = t$, $\overline{x} = x$, $\overline{u} = x - u$, где черта над символом переменной обозначает новую переменную. Нетрудно проверить, что при таких преобразованиях алгебра Ли уравнения со спецификацией (28) преобразуется к алгебре Ли уравнения со спецификаей (27). Поэтому с точки зрения группового анализа спецификации (27) и (28) эквивалентны.

## 4. Инвариантные подмодели в общем случае

Рассмотрим уравнение

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2\left(1 - xv(u_x)u_{xx}\right)^2} = 0, \tag{29}$$

алгебра Ли $L_3$ которого имеет базис

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_u, \quad X_3 = x\partial_x + u\partial_u. \tag{30}$$

Ненулевые структурные константы ее — $c_{23}^2 = 1$, $c_{32}^2 = -1$, поэтому группы внутренних автоморфизмов имеют вид $E_2 : \bar{e}^2 = e^2 + a_1 e^3$, $E_3 : \bar{e}^2 = e^2 e^{-a_2}$. Используя их, осуществим поиск оптимальной системы одномерных подалгебр данной алгебры Ли $L_3$. Инфинитезимальные генераторы искомых базисных для этих подалгебр операторов будут иметь вид $X = \sum\limits_{k=1}^{3} e^k X_k = (e^1, e^2, e^3)$.

**1.** Пусть $e^3 \neq 0$, тогда с помощью $E_2$ получим $e^2 = 0$, поэтому базисный вектор подалгебры имеет вид $X = (a, 0, 1)$, $a \in \mathbb{R}$.

**2.1.** При $e^3 = 0$, $e^1 \neq 0$, $e^2 \neq 0$ получим $X = (1, 1, 0)$. При этом использованы внутренние автоморфизмы $E_3$ и $\bar{e}^2 = -e^2$.

**2.2.** Остались случаи $X = (1, 0, 0)$ и $X = (0, 1, 0)$.

**Лемма 1.** *Оптимальная система одномерных подалгебр алгебры $L_3$ с базисом* (30) *имеет вид* $\Theta_1 = \{\langle X_1\rangle, \langle X_2\rangle, \langle X_1 + X_2\rangle, \langle aX_1 + X_3\rangle, a \in \mathbb{R}\}$.

Используя операторы оптимальной системы, найдем инвариантные подмодели уравнения (29) и, по возможности, его инвариантные решения. Результаты исследования записаны в табл. 1, где во втором столбце записана одномерная подалгебра из оптимальной системы, в третьем — ее инварианты, а в четвертом — соответствующая инвариантная подмодель исходного уравнения или вид решения при условии, что ограничения, следующие из вида уравнения или области определения самой функции $v$, выполнены. Символами $A$, $B$ обозначены произвольные контанты интегрирования.

Таблица 1.

| | Подалгебра | Инварианты | Подмодель или решение |
|---|---|---|---|
| 1 | $\langle X_1\rangle$ | $x$, $u$ | $u = Ax + B$ |
| 2 | $\langle X_2\rangle$ | $t$, $x$ | нет |
| 3 | $\langle X_1 + X_2\rangle$ | $u - t$, $x$ | $\sigma^2 x^2 \psi' = -2(1 - xv(\psi)\psi')^2 \neq 0$,<br>$u = t + \varphi(x)$, $\varphi' = \psi$ |
| 4 | $\langle X_3\rangle$ | $t$, $x^{-1}u$ | $u = Ax$ |
| 5 | $\langle aX_1 + X_3\rangle$,<br>$a \neq 0$ | $a\ln\lvert x\rvert - t$,<br>$x^{-1}u$ | $u = Ax$ или $2(1 - (a\varphi' + a^2\varphi'')v(\varphi + a\varphi'))^2 =$<br>$\sigma^2(a\varphi' + a^2\varphi'')/\varphi' \neq 0$, $u = x\varphi(a\ln\lvert x\rvert - t)$ |

## 5. Инвариантные решения и подмодели в случае $v \equiv \beta$

Уравнение

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2\left(1 - \beta x u_{xx}\right)^2} = 0, \quad \beta \neq 0 \tag{31}$$

имеет алгебру Ли $L_4$ с базисом

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_u, \quad X_3 = x\partial_x + u\partial_u, \quad X_4 = x\partial_u. \tag{32}$$

Ненулевыми структурными константами этой алгебры являются $c_{23}^2 = 1$, $c_{32}^2 = -1$, поэтому ее группы внутренних автоморфизмов имеют вид $E_2 : \bar{e}^2 = e^2 + a_1 e^3$, $E_3 : \bar{e}^2 = e^2 e^{-a_2}$. Найдем оптимальную систему одномерных подалгебр данной алгебры Ли $L_4$.

**1.** Пусть $e^3 \neq 0$, тогда с помощью $E_2$ получим $e^2 = 0$, поэтому базисный вектор подалгебры имеет вид $X = (a, 0, 1, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

**2.1.** При $e^3 = 0$, $e^2 \neq 0$ получим следующее.

**2.1.1.** Если $e^1 \neq 0$, то $X = (1, 1, 0, a)$, $a \in \mathbb{R}$. При этом использованы внутренние автоморфизмы $E_3$ и $\bar{e}^2 = -e^2$.

**2.1.2.** Пусть $e^1 = 0$, тогда $X = (0, 1, 0, 1)$ или $X = (0, 1, 0, 0)$. В первом случае также использованы $E_3$ и $\bar{e}^2 = -e^2$.

**2.2.** Если $e^2 = e^3 = 0$, то $X = (1, 0, 0, a)$, $a \in \mathbb{R}$, или $X = (0, 0, 0, 1)$.

**Лемма 2.** *Оптимальная система одномерных подалгебр алгебры* $L_4$ *с базисом* (32) *имеет вид*

$$\Theta_1 = \{\langle X_2 \rangle, \langle X_4 \rangle, \langle X_2 + X_4 \rangle, \langle X_1 + aX_4 \rangle, \langle X_1 + X_2 + aX_4 \rangle, \langle aX_1 + X_3 + bX_4 \rangle, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Для одномерных подалгебр из оптимальной системы получим табл. 2.

Таблица 2.

| | Подалгебра | Инварианты | Подмодель, решение, ограничения |
|---|---|---|---|
| 1 | $\langle X_2 \rangle$ | $t$, $x$ | нет |
| 2 | $\langle X_4 \rangle$ | $t$, $x$ | нет |
| 3 | $\langle X_2 + X_4 \rangle$ | $t$, $x$ | нет |
| 4 | $\langle X_1 \rangle$ | $x$, $u$ | $u = Ax + B$ |
| 5 | $\langle X_1 + aX_4 \rangle$, $a \neq 0$ | $x$, $u - atx$ | $u = atx + A_{a\beta\sigma} x \ln \lvert x \rvert + Ax + B$, $A_{a\beta\sigma} = \frac{2\beta - \frac{\sigma^2}{2a} \pm \sqrt{\frac{\sigma^4}{4a^2} - \frac{2\beta\sigma^2}{a}}}{2\beta^2}$, $\sigma \neq 0$, $\frac{\sigma^4}{4a^2} - \frac{2\beta\sigma^2}{a} \geq 0$ |
| 6 | $\langle X_1 + X_2 + aX_4 \rangle$ | $x$, $u - (1 + ax)t$ | $\varphi'' = \frac{2\beta - \frac{\sigma^2 x}{2(1+ax)} \pm \sqrt{\frac{\sigma^4 x^2}{4(1+ax)^2} - \frac{2\beta\sigma^2 x}{1+ax}}}{2\beta^2 x}$, $\sigma \neq 0$, $u = (1 + ax)t + \varphi(x)$ |
| 7 | $\langle X_3 + bX_4 \rangle$, $b \neq 1/\beta$ | $t$, $\frac{u}{x} - b \ln \lvert x \rvert$ | $u = bx \ln \lvert x \rvert + Ax - \frac{b\sigma^2 tx}{2(1-\beta b)^2}$ |
| 8 | $\langle aX_1 + X_3 + bX_4 \rangle$, $a \neq 0$ | $a \ln \lvert x \rvert - t$, $\frac{u}{x} - b \ln \lvert x \rvert$ | $u = Ax$ при $b = 0$ или $\sigma^2(b + a\varphi' + a^2\varphi'')/\varphi' = 2(1 - \beta(b + a\varphi' + a^2\varphi''))^2 \neq 0$, $u = bx \ln \lvert x \rvert + x\varphi(a \ln \lvert x \rvert - t)$ |

## 6. Инвариантные решения и подмодели в случае $v = \beta u_x^{-1}$

Для уравнения

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2\left(1 - \frac{\beta x u_{xx}}{u_x}\right)^2} = 0, \quad \beta \neq 0, \tag{33}$$

базис алгебры Ли $L_4$ имеет вид

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_u, \quad X_3 = x\partial_x, \quad X_4 = u\partial_u. \tag{34}$$

Ненулевыми структурными константами этой алгебры являются $c_{24}^2 = 1$, $c_{42}^2 = -1$, поэтому структура данной алгебры Ли не отличается от алгебры из предыдущего параграфа с точностью до перенумерации операторов $X_3$, $X_4$. Из этого наблюдения и леммы 2 сразу получим следующее утверждение.

**Лемма 3.** *Оптимальная система одномерных подалгебр алгебры* $L_4$ *с базисом* (34) *имеет вид*

$$\Theta_1 = \{\langle X_2 \rangle, \langle X_3 \rangle, \langle X_2 + X_3 \rangle, \langle X_1 + aX_3 \rangle, \langle X_1 + X_2 + aX_3 \rangle, \langle aX_1 + bX_3 + X_4 \rangle, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Используя операторы оптимальной системы, найдем инвариантные подмодели уравнения (33) и по возможности его инвариантные решения (табл. 3).

Таблица 3.

| | Подалгебра | Инварианты | Подмодель, решение, ограничения |
|---|---|---|---|
| 1 | $\langle X_2\rangle$ | $t$, $x$ | нет |
| 2 | $\langle X_3\rangle$ | $t$, $u$ | нет |
| 3 | $\langle X_2+X_3\rangle$ | $t$, $u-\ln\|x\|$ | $u=\ln\|x\|+\frac{\sigma^2 t}{2(1+\beta)^2}+A$, $\beta\neq -1$ |
| 4 | $\langle X_1\rangle$ | $x$, $u$ | $u=Ax+B$, $A\neq 0$ |
| 5 | $\langle X_1+aX_3\rangle$, $a\neq 0$ | $\ln\|x\|-at$, $u$ | $u=Ae^{-aCt}\|x\|^C+B$, $A\neq 0$, $C=\frac{4a\beta(\beta+1)+\sigma^2\pm\sigma\sqrt{\sigma^2+8a\beta}}{4a\beta^2}\neq 0$, $\sigma\neq 0$, $\sigma^2+8a\beta\geq 0$ |
| 6 | $\langle X_1+X_2+aX_3\rangle$ | $\ln\|x\|-at$, $u-t$ | $2(a\varphi'-1)(\varphi'-\beta(\varphi''-\varphi'))^2=\sigma^2\varphi'^2(\varphi''-\varphi')$, $\varphi(z)\neq Ae^{(1+1/\beta)z}+B$, $u=t+\varphi(\ln\|x\|-at)$ |
| 7 | $\langle X_4\rangle$ | $t$, $x$ | нет |
| 8 | $\langle aX_1+X_4\rangle$, $a\neq 0$ | $x$, $e^{-t/a}u$ | $a\sigma^2x^2\varphi'^2\varphi''=2\varphi(\varphi'-\beta x\varphi'')^2\neq 0$, $u=e^{t/a}\varphi(x)$ |
| 9 | $\langle bX_3+X_4\rangle$, $b\neq 0$ | $t$, $\|x\|^{-1/b}u$ | $u=Ae^{\frac{\sigma^2(b-1)t}{2(b(\beta+1)-\beta)^2}}\|x\|^{1/b}+B$, $A\neq 0$, $b\neq\frac{\beta}{\beta+1}$ при $\beta\neq -1$ |
| 10 | $\langle aX_1+bX_3+X_4\rangle$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ | $a\ln\|x\|-bt$, $e^{-t/a}u$ | $a^2\sigma^2\varphi'^2(a\varphi''-\varphi')=2(ab\varphi'-\varphi)(\varphi'-\beta(a\varphi''-\varphi'))^2$, $\varphi(z)\neq Ae^{\frac{1}{a}(1+1/\beta)z}+B$, $u=e^{t/a}\varphi(a\ln\|x\|-bt)$ |

Оператор $X_2+X_3$ при $\beta=-1$ инвариантных решений не имеет.

У операторов $X_1+aX_3$ при $a\neq 0$ инвариантная подмодель имеет вид

$$\sigma^2\varphi'(\varphi''-\varphi')=2a(\varphi'-\beta(\varphi''-\varphi'))^2\neq 0.$$

Обозначим аргумент функции $\varphi$ через $z$. После подстановки $\zeta=e^z$ и понижения порядка уравнения получим $\sigma^2\zeta\psi\psi'=2a(\psi-\beta\zeta\psi')^2$, где $\psi(\zeta)=\frac{d}{d\zeta}\varphi(\ln\zeta)$. Сделав обратную замену $\xi(z)=\psi(e^z)$, получим квадратное уравнение для производной

$$\sigma^2\xi\xi'=2a(\xi-\beta\xi')^2.$$

При $a\geq-\frac{\sigma^2}{8\beta}$ в случае положительного $\beta$ и при $a\leq-\frac{\sigma^2}{8\beta}$ для $\beta$ отрицательного получим после интегрирования $\xi(z)=Ae^{C_1z}$, где

$$C_1=\frac{4a\beta+\sigma^2\pm\sigma\sqrt{\sigma^2+8a\beta}}{4a\beta^2}.$$

Следовательно, инвариантное решение имеет вид, указанный в пятой строке таблицы.

Инвариантное решение подалгебры $\langle bX_3+X_4\rangle$, $b\neq 0$, (в таблице строка 9) — это по сути решение с произвольной ненулевой степенью $|x|$ (чтобы не было $u_x=0$) и соответствующим этой степени множителем при $t$ в аргументе экспоненциальной функции в том же члене решения. Его частным случаем является инвариантное решение для $\langle X_1+aX_3\rangle$, $a\neq 0$, (строка 5).

## 7. Точные решения уравнения Шенбухера–Уилмотта

Проанализируем полученные результаты в терминах исходной задачи. Функции $v \equiv \beta$ соответствует модель

$$w_t + \frac{\sigma^2 x^2 w_{xx}}{2\left(1-\beta\rho x w_{xx}\right)^2} = 0$$

с функцией $g(\alpha) = Ge^{\beta\alpha}$ при константе интегрирования $G$. Ограничимся рассмотрением вычисленных точных решений. Возвращаясь от $u$ к функции $w$, получим, учитывая произвол в выборе некоторых констант, решения

$$w(t,x) = Ax + B;$$

$$w(t,x) = \frac{atx}{\rho} + \frac{2\beta - \frac{\sigma^2}{2a} \pm \sqrt{\frac{\sigma^4}{4a^2} - \frac{2\beta\sigma^2}{a}}}{2\beta^2\rho} x\ln|x| + Bx + C,$$

$$a \neq 0, \quad \sigma \neq 0, \quad \frac{\sigma^4}{4a^2} - \frac{2\beta\sigma^2}{a} \geq 0;$$

$$w(t,x) = \frac{b}{\rho}x\ln|x| - \frac{b\sigma^2 tx}{2\rho(1-\beta b)^2} + Ax + B, \quad b \neq 1/\beta.$$

В последнем случае семейство инвариантных решений операторов $X_3 + bX_4$, $b \neq 1/\beta$ расширено с помощью допускаемой группы сдвигов по переменной $u$, соответствующей оператору $X_2$.

Функции $v = \frac{\beta}{u_x}$ преобразованием эквивалентности, соответствующим оператору $Y_3$, могут быть приведены к эквивалентному виду $v = \frac{\beta}{u_x+\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Таким функциям соответствуют функции $g(\alpha) = G(\alpha+\gamma)^\beta$ и модель

$$w_t + \frac{\sigma^2 x^2 w_{xx}}{2\left(1 - \frac{\beta x w_{xx}}{w_x + \gamma/\rho}\right)^2} = 0. \tag{35}$$

Нетрудно заметить, что решения (35) связаны с решениями уравнения (33) равенством $w(t,x) = (u(t,x) - \gamma x)\rho^{-1}$. Поэтому согласно таблице из предыдущего параграфа уравнение (35) имеет точные решения

$$w(t,x) = Ax + B, \quad A \neq -\frac{\gamma}{\rho};$$

$$w(t,x) = A\ln|x| + \frac{A\sigma^2 t}{2(1+\beta)^2} + B - \frac{\gamma}{\rho}x, \quad A \neq 0, \quad \beta \neq -1;$$

$$w(t,x) = Ae^{-\frac{\sigma^2 C(C-1)t}{2(1-\beta(C-1))^2}} x^C + B - \frac{\gamma}{\rho}x, \quad AC \neq 0.$$

При этом сначала класс решений $u(t,x)$ уравнения (33), инвариантных оператору $X_2 + X_3$, расширен с помощью действия допускаемого оператора $X_4$, вследствие чего в них появился множитель $A$ в первых двух слагаемых.

Отметим, что в работе [29] симметрии модели (35) в случаях $\gamma = 0$ и $\gamma \neq 0$ исследуются отдельно. Этого можно было не делать, установив возможность перехода от одной из них к другой с помощью группы преобразований эквивалентности исследуемого класса уравнений (см. замечание 1).

Понятно, что если придерживаться требования монотонного возрастания функции $g(\alpha)$, то для рассмотренных спецификаций функции $g$ надо наложить условие $\beta > 0$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. F. Black, M. Scholes. *The pricing of options and corporate liabilities* // Journal of Political Economy. 1973. V. 81. P. 637–659.
2. F. Black. *The pricing of Commodity Contracts* // Journal of Financial Economics. 1976. V. 3. P. 167–179.
3. J. Cox, S. Ross, M. Rubinstein. *Option pricing: a simplified approach* // Journal of Financial Economics. 1979. V. 7. P. 229–263.
4. J. Duan. *The GARCH option pricing model* // Mathematical Finance. 1995. V. 5. P. 13–32.
5. E. Derman, N. Taleb. *The illusions of dynamic replication* // Quantitative Finance. 2005. V. 5, No. 4. P. 323–326.
6. E. G. Haug, N. N. Taleb. *Option traders use (very) sophisticated heuristics, never the Black–Scholes–Merton formula* // Journal of Economic Behavior and Organization. 2011. V. 77, No. 2. P. 97–106.
7. J. C. Hull, A. White. The pricing of options on assets with stochastic volatilities // The Journal of Finance. 1987. V. 42. P. 281–300.
8. H. E. Leland. *Option pricing and replication with transactions costs* // The Journal of Finance. 1985. V. 40. P. 1283–1301.
9. U. Cetin, R. Jarrow, P. Protter. *Liquidity risk and arbitrage pricing theory* // Finance and Stochastic. 2004. V. 8. P. 311–341.
10. R. Frey. *Market illiquidity as a source of model risk in dynamic hedging.* Model Risk, ed. R. Gibson. London: Risk Publications, 2000. P. 125–136.
11. R. Frey, P. Patie. *Risk Management for Derivatives in Illiquid Markets: a Simulation Study.* Advances in Finance and Stochastics, eds. K. Sandmann and P. Schönbucher. Berlin: Springer, 2002.
12. M. Jandaćka, D. Śevćović. *On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile* // Journal of Applied Mathematics. 2005. V. 3. P. 253–258.
13. H. Liu, J. Yong. *Option pricing with an illiquid underlying asset market* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2005. V. 29, No. 12. P. 2125–2156.
14. R. Frey, A. Stremme. *Market volatility and feedback effects from dynamic hedging* // Mathematical Finance. 1997. V. 7, No. 4. P. 351–374.
15. R. Frey. *Perfect option replication for a large trader* // Finance and Stochastics. 1998. V. 2. P. 115–148.
16. R. A. Jarrow. *Derivative securities markets, market manipulation and option pricing theory* // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1994. V. 29. P. 241–261.
17. P. Schonbucher, P. Wilmott. *The feedback-effect of hedging in illiquid markets* // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2000. V. 61. P. 232–272.
18. L. A. Bordag, R. Frey. *Pricing options in illiquid markets: symmetry reductions and exact solutions.* Chapter 3 in Nonlinear Models in Mathematical Finance: Research Trends in Option Pricing, ed. M. Ehrhardt. Nova Science Publishers, Inc., 2008. P. 83–109.
19. E. Platen, M. Schweizer. *On feedback effects from hedging derivatives* // Mathematical Finance. 1998. V. 8. P. 67–84.
20. P. Brandimarte. *Numerical Methods in Finance & Economics.* John Wiley & Sons Publications, 2004; Second edition, 2006. xxiv+669 p.
21. G. Bakshi, C. Cao, Z. Chen. *Empirical performance of alternative option pricing models* // Journal of Finance. 1997. V. 52. P. 2003–2049.
22. M. J. Morelli, G. Montagna, O. Nicrosini, M. Treccani, M. Farina, P. Amato. *Pricing financial derivatives with neural networks* // Physica A. 2004. V. 338. P. 160–165.
23. S. Kou. *A jump diffusion model for option pricing* // Management Science. 2002. V. 48. P. 1086–1101.
24. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1978. 400 с.
25. Ибрагимов Н. Х. *Группы преобразований в математической физике.* М.: Наука, 1983. 280 с.

26. R. K. Gazizov, N. H. Ibragimov. *Lie symmetry analysis of differential equations in finance* // Nonlinear Dynamics. 1998. V. 17. P. 387–407.
27. L. A. Bordag, A. Y. Chmakova. *Explicit solutions for a nonlinear model of financial derivatives* // International Journal of Theoretical and Applied Finance. 2007. V. 10, No. 1. P. 1–21.
28. L. A. Bordag. *On option-valuation in illiquid markets: invariant solutions to a nonlinear model.* Mathematical Control Theory and Finance, eds. A. Sarychev, A. Shiryaev, M. Guerra and M. R. Grossinho. Springer, 2008. P. 71–94.
29. A. Mikaelyan. *Analytical Study of the Schönbucher–Wilmott Model of the Feedback Effect in Illiquid Markets.* Master's thesis in financial mathematics, Halmstad: Halmstad University, 2009. viii+67 p.
30. L. A. Bordag, A. Mikaelyan. *Models of self-financing hedging strategies in illiquid markets: symmetry reductions and exact solutions* // Journal Letters in Mathematical Physics. 2011. V. 96, No. 1–3. 191–207.
31. Чиркунов Ю. А., Хабиров С. В. *Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды.* Новосибирск: НГТУ, 2012. 659 с.

Михаил Михайлович Дышаев,
ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет»,
ул. Братьев Кашириных, 129,
454001, г. Челябинск, Россия
E-mail: `Mikhail.Dyshaev@gmail.com`

Владимир Евгеньевич Фёдоров,
ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет»,
ул. Братьев Кашириных, 129,
454001, г. Челябинск, Россия
ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»,
пр. Ленина, 76,
454080, г. Челябинск, Россия
E-mail: `kar@csu.ru`