ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 1 (2017). С. 3-17.

УДК 517.54

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КРУГОВЫХ ОБЛАСТЕЙ НА КОНЕЧНО-СВЯЗНЫЕ ОБЛАСТИ НЕСМИРНОВСКОГО ТИПА

Ф.Г. АВХАДИЕВ, П.Л. ШАБАЛИН

Аннотация. Рассматриваются каноническая факторизация и интегральные представления для производных конформных отображений круговых областей на конечно-связные области несмирновского типа. С использованием функций класса Зигмунда получены условия глобальной однолистности. Аналогичные результаты ранее были доказаны рядом авторов лишь для случая односвязных областей.

Ключевые слова: Несмирновская область, условие Зигмунда, условие однолистности, оператор Шварца.

Mathematics Subject Classification: 30C45, 30C55, 30C62, 31A20

1. Введение

Рассмотрим конформные отображения $f : D \to \Omega$ единичного круга $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на жордановы области Ω со спрямляемыми границами. Известно ([1] с. 89, 107), что f' принадлежит классу Харди $H^1(D)$ по теореме Рисса и имеет место каноническая факторизация В.И. Смирнова, определяемая формулами: $f' = e^{i\gamma}(f')^{ext}(f')^{int}$,

$$\ln(f')^{ext}(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}} \ln|f'(e^{i\theta})|d\theta, \quad \ln(f')^{int}(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}\, d\mu(\theta), \tag{1.1}$$

где $\gamma = const \in \mathbb{R}$, μ — непрерывная невозрастающая функция с производной, почти всюду равной нулю. В 1928 г. В.И. Смирновым [2] впервые был рассмотрен класс областей Ω, характеризуемых отсутствием сингулярного фактора, т.е. тем, что $(f')^{int}(z) \equiv 1$. М.В. Келдыш и М.А. Лаврентьев [3] геометрически построили пример области Ω, для которой $(f')^{ext}(z) \equiv 1$, доказав тем самым существование несмирновских областей. Более общий, аналитический подход построения несмирновских областей был предложен Дюреном, Шапиро и Шилдсом [4] в 1966 г. с применением ряда интересных фактов из различных областей теории функций. В частности, они пользуются функциями, удовлетворяющими условию Зигмунда [5] $|\nu(\theta+\tau)-2\nu(\theta)+\nu(\theta-\tau)| = O(\tau)$, для характеризации функций $\nu(\theta) = \mu(\theta) + \int_0^\theta \ln|f'(e^{it})|dt$ и условием Альфорса и Вейля [6]

$$\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)^2 \left|(f''(z)/f'(z))' - (1/2)\left(f''(z)/f'(z)\right)^2\right| < 2, \tag{1.2}$$

гарантирующим глобальную однолистность конформного отображения $f : D \to \mathbb{C}$ и квазиконформную продолжимость отображения f на всю плоскость. Развитие результатов [4] с применениями к теории общих и прикладных обратных краевых задач дано в работах авторов [7] и [8].

F.G. Avkhadiev, P.L. Shabalin, Conformal mappings of circular domains on finitely-connected non-Smirnov type domains.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ (проект N 14-01-00371-а).

Поступила 25 июля 2016 г.

Как отмечает Н.Г. Макаров [9] в 1989 г., вопрос о полной характеризации областей Смирнова остается открытым. Общего критерия нет до сих пор, хотя в этом направлении имеется ряд интересных результатов. Среди них можно выделить решение трудной задачи, полученное П.В. Джонсом и С.К. Смирновым [10] в 1999 году: несмирновость области Ω не влечет несмирновость ее дополнения $\Omega^- := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$. Отметим, что в [10] существенно используются результаты работ [11] и [12] по локальной характеризации границы области с помощью гармонических мер. Дальнейшее развитие этих результатов можно найти в статье В.Н. Дубинина [13].

Хорошо известны естественные обобщения классов Харди и теоремы факторизации В.И. Смирнова на случай конечно-связных областей. История проблем, оригинальные определения и результаты по факторизации и интегральным представлениям для случая многосвязных областей описаны в статьях Г.Ц. Тумаркина и С.Я. Хавинсона [14], [15], Г.Ц. Тумаркина [16] и Д. Хавинсона [17].

Целью этой работы является обобщение результатов Дюрена, Шапиро и Шилдса [4] на случай конечно-связных областей и распространение наших результатов из [7] и [8] на двусвязные области. Отметим попутно, что переход от односвязных к конечно-связным областям не представляет затруднений, если речь идет о локальных свойствах граничных кривых без явных оценок. Но нас будут интересовать критерии глобальной однолистности по граничным данным, и приходится иметь дело с усложненными интегральными представлениями и связанными с ними оценками. И, кроме того, необходимы подходящие обобщения приведенного выше условия Альфорса-Вейля (1.2) для глобальной однолистности. Для вывода условий однолистности мы будем существенно опираться на методы и результаты работ [18]–[23].

2. Предварительные сведения.

Введем некоторые обозначения и определения. Пусть D_n- круговая (т.е. каждая связная граничная компонента является окружностью) $n-$связная область с невырожденными граничными компонентами $\gamma_k = \{z : |z - a_k| = R_k\}$, $k = \overline{1,n}$, причем $a_n = 0$, $R_n = 1$ и окружность $\gamma_n = \{z : |z| = 1\}$ охватывает остальные.

Определение 1 (см. [14]). Класс Харди $H_1(D_n)$ – множество голоморфных в D_n функций g таких, что для заданных g и γ_k $(k = \overline{1,n})$ найдется последовательность окружностей $\gamma_k^j \subset D_n$ $(j = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющая условиям: $\gamma_k^j \to \gamma_k$ и

$$\sup_j \int\limits_{\gamma_k^j} |g(z)dz| < \infty. \tag{2.1}$$

Пусть f осуществляет однолистное отображение D_n на некоторую область Ω_n. Предполагается, что в D_n функция f голоморфна и непрерывно продолжима на границу $\partial D_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \gamma_k$, и это отображение продолжается до гомеоморфизма границ. Для случая $n > 1$ существует два различных определения класса В.И. Смирнова, эквивалентность которых доказана в [14].

Определение 2 [14]. Область Ω_n с жордановой спрямляемой границей называется областью класса В.И. Смирнова, если выполнено одно из следующих требований:

a) функция $\ln f'$ представима оператором Шварца от предельных значений $\ln f'(\zeta_k)$, $\zeta_k = a_k + R_k e^{i\theta}$, $k = \overline{1,n}$;

b) области Ω_{nk} принадлежат классу В.И. Смирнова, $k = \overline{1,n}$, где Ω_{nk} — односвязная область с границей $\Gamma_k = f(\gamma_k)$, причем $\Omega_{nk} \supset \Omega_n$, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \Omega_{nk} = \Omega_n$.

Представление (1.1) характеризует лишь то, что $f'(z) \neq 0$ и $f' \in H_1(D_1)$, поэтому функция f может быть неоднолистной в $D_1 \equiv D$ и в случае $\mu(\theta) \equiv 0$. Имеются многочисленные исследования, указывающие различные дополнительные ограничения на $\ln|f'(e^{i\theta})|$ при $\mu(\theta) \equiv 0$, гарантирующие однолистность f в D_1. Для случая $\mu(\theta) \not\equiv 0$ в статьях [4], [7] и [8] устанавливается связь глобальной однолистности f с принадлежностью ν классу Зигмунда $\Lambda(K)$ (т.е. $|\nu(\theta+h) - 2\nu(\theta) + \nu(\theta-h)| \leqslant Kh$) в виде ограничений константы $K > 0$.

Следуя Г.Ц. Тумаркину [16] и Д. Хавинсону [17], получим удобную для нас формулу, восстанавливающую значения функции $g = f'$ класса $H_1(D_n)$ по известному с точностью до множества меры нуль модулю граничных значений $\Phi_k(\theta) = |g(\zeta_k(\theta))|$, $\zeta_k(\theta) = a_k + R_k e^{i\theta}$, $k = \overline{1,n}$. Отметим, что доказательство структурной формулы класса H_1 в односвязном случае $n = 1$ предложено В.И. Смирновым и связано с построением наилучшей аналитической мажоранты некоторого семейства аналитических функций. Этот результат по построению мажорант обобщен Г.Ц. Тумаркиным [16]. Опишем вкратце основной результат. Пусть $H-$ семейство функций g, аналитических в конечно-связной области Ω_n, Ω_n^j- последовательность областей, сходящаяся при $j \to \infty$ к Ω, и такая, что

$$\int\limits_{\Gamma^j} \sup_{g\in H} \ln^+ |g(z)| \frac{\partial G_j(z,z_0)}{\partial n} ds \leqslant C < \infty, \ j = 1, 2, \ldots. \tag{2.2}$$

Здесь Γ^j- граница области Ω_n^j, $G_j(z,z_0)$ — функция Грина области Ω_n^j с полюсом в точке $z_0 \in \Omega_n^j$, $j = 1, 2, \ldots$. Обозначим через u наилучшую гармоническую мажоранту субгармонической функции $\sup\limits_{g\in H} \ln|g(z)|$. Пусть v — сопряженная гармоническая функция. Тогда, если $\tilde{g}(z) = \exp\{u(z) + iv(z)\}$ будет однозначной в Ω_n, она и будет наилучшей аналитической мажорантой семейства H. Если же построенная функция $\tilde{g}$ окажется неоднозначной, то наилучшей аналитической мажоранты не существует. Обратимся с этих позиций к классу $H_1(D_n)$. Условие (2.1) обеспечивает выполнение неравенства (2.2). Следовательно, существует наилучшая гармоническая мажоранта u, однако при этом построенная функция $\tilde{g}$ может оказаться неоднозначной. Рассмотрим неотрицательные функции $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, удовлетворяющие условиям

$$\Phi_k \in L^1[-\pi,\pi], \quad \ln\Phi_k \in L^1[-\pi,\pi],$$

$$\sum_{j\neq k} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(\theta) P_j(z_k, z_j(\theta)) d\theta = A, \ k = \overline{1,n}, \ A = const, \tag{2.3}$$

где $P_j(z,z_j) = \operatorname{Re} S_j(z,z_j)$, $\{S_j(z,z_j)\}_{j=1}^n-$ ядро Шварца для круговой области D_n, предложенное В.А. Зморовичем (см., например, [17]). Через $\Phi(D_n)$ обозначим подкласс $H_1(D_n)$ функций g с однозначным логарифмом, таких что почти всюду на γ выполняется неравенство $|g_k(z_k(\theta))| \leqslant \Phi_k(\theta)$, $k = \overline{1,n}$. Наилучшей гармонической мажорантой для $\sup\limits_{g\in\Phi(D_n)} \{\ln|g(z)|\}$ будет

$$u(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_k(\theta) P_k(z, z_k(\theta)) d\theta - A, \ z \in D_n.$$

В силу соотношения (2.3) будет однозначной в D_n аналитическая функция $\tilde{g}$, определяемая равенством

$$\tilde{g}(z) = \exp\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_k(\theta) S_k(z, z_k(\theta)) d\theta - A \right\}. \tag{2.4}$$

Однозначным является и ее логарифм $\ln \tilde{g}(\zeta)$. Пусть теперь $g \in H_1(D_n)$. Известно, что почти всюду на γ_k существуют угловые граничные значения $\Phi_k(\theta) = |g_k(z_k(\theta))|$, причем Φ_k и $\ln \Phi_k$ — суммируемые функции. Для приведения аналитической функции $\ln g$ к однозначному виду рассмотрим функцию, определяемую равенством

$$\Theta(z) = \prod_{k=1}^{n} [\Theta_k(z)]^{-\alpha_k}.$$

Здесь Θ_k конформно (но неоднолистно) отображает D_n на область $q_k < |w| < 1$, причем окружности $|w| = q_k$ соответствует взаимно-однозначно окружность γ_k. Как доказано в работе [15], имеется единственная возможность такого выбора чисел δ, α_k, что $\ln F$, $F(z) = z^{-\delta} g(z)\Theta(z)$, будет однозначной аналитической функцией. Функция F обладает почти везде на γ_k угловыми граничными значениями $|F(z_k(\theta))| = |z_k(\theta)|^{-\delta}\Phi_k(\theta) q_k^{-\alpha_k}$, удовлетворяющими условиям (2.3). Следовательно, F можно представить в виде $F(z) = e^{i\beta}\tilde{g}(z)\sigma(z)$, где $\tilde{g}$ — функция максимального модуля (2.4), голоморфная в D_n функция $\ln \sigma$ принадлежит классу Каратеодори и, следовательно, может быть представлена формулой

$$\sigma(z) = \exp\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_k(z, z_k(\theta)) d\nu_k(\theta) - B \right\}, \quad B = \sum_{j \neq k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_j(z_k, z_j(\theta)) d\nu_j(\theta), \qquad (2.5)$$

$k = \overline{1, n}$, $\nu_j(\theta)$ — невозрастающая сингулярная функция. Итак, справедливо утверждение: *каждую функцию $g = f'$ класса $H_1(D_n)$ можно представить в виде*

$$g(z) = e^{i\beta} z^{\delta} \Theta^{-1}(z) \tilde{g}(z) \sigma(z), \qquad (2.6)$$

где σ — голоморфная в D_n функция вида (2.5), $\tilde{g}$ — функция с представлением (2.4), максимальная для набора $|z_k(\theta)|^{-\delta}\Phi_k(\theta) q_k^{-\alpha_k}$, $k = \overline{1, n}$, $z^{\delta}\Theta^{-1}(z)$ выделяет неоднозначную часть $\ln g(z)$.

3. Условия однолистности для отображения кольца

Пусть функция f голоморфна в кольце $D_2 \equiv E(q, 1) = \{z \in \mathrm{C} : q < |z| < 1\}$ и непрерывно продолжима на окружность $|\zeta| = q \in (0, 1)$. Предположим, что $f' \in H_1(E(q, 1))$, $f'(z) \neq 0$ для любой точки $z \in E(q, 1)$. Тогда для любой точки $z \in E(q, 1)$

$$f(z) = \int \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\theta) S_q(q z^{-1} e^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_q(z e^{-i\theta}) d\mu(\theta) - A \right\} dz. \qquad (3.1)$$

Здесь S_q — ядро Вилля, т.е.

$$S_q(z) = \frac{1+z}{1-z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 + q^{2\nu} z}{1 - q^{2\nu} z} - \frac{1 + q^{2\nu} z^{-1}}{1 - q^{2\nu} z^{-1}},$$

считаем, что выполняется соотношение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\mu(\theta) = A = const,$$

где μ — невозрастающая сингулярная функция с производной, почти всюду равной нулю, а P — непрерывная 2π-периодическая функция, сингулярная функция μ продолжена на всю числовую прямую равенством: $\mu(\theta + 2\pi) = \mu(\theta) - 2\pi\beta$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, где $\beta = -(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\mu(\theta) \geq 0$.

Пусть $\alpha \in (0, 1)$, K — положительная постоянная. Рассмотрим следующие три класса вещественнозначных функций:

a) $\lambda(K)$ — класс всех 2π-периодических функций P, удовлетворяющих условию Липшица $|P(\theta+h)-P(\theta)|\leqslant K$, где $\theta,\ h\in\mathbb{R}$;

b) $\Lambda_{1+\alpha}(K)$ — класс всех 2π-периодических функций P, удовлетворяющих условию Зигмунда порядка $1+\alpha\in(1,2)$:

$$|P(\theta+h)-2P(\theta)+P(\theta-h)|\leqslant K\,h^{1+\alpha}\quad \forall\theta,\ h\in\mathbb{R};$$

c) $\Lambda(K)$ — класс всех сингулярных функций μ, удовлетворяющих условию Зигмунда порядка 1:

$$|\mu(\theta+h)-2\mu(\theta)+\mu(\theta-h)|\leqslant K\,h\quad \forall\theta,\ h\in\mathbb{R}.$$

Получим условия на положительные числа q,β и K, гарантирующие однолистность отображения (3.1). Нам потребуются неравенства

$$\frac{4\,q\beta}{(1-q)^2}+\frac{K}{1-q^2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}2q+(1+2q)B(\alpha)\right]<1, \tag{3.2}$$

$$\frac{4q\beta}{(1-q)^2}+K\left[1+\frac{(3-q^2)}{(1-q)^2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}q+B(\alpha)\right)+\left(6,6+\frac{17,3q}{1-q^2}\right)\frac{1+1,8q}{1-q^2}\right]<1, \tag{3.3}$$

где

$$B(\alpha)=\frac{1+\alpha}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{t^{\alpha}}{\sin t}dt.$$

Теорема 3.1. *Пусть α, q— числа, лежащие в интервале $(0,1)$. Пусть, далее, f — голоморфная функция, определенная в кольце $E(q,1)$ интегральным представлением (3.1), в котором $P\in\Lambda_{1+\alpha}(K)$ и $\mu\in\Lambda(K)$ для некоторого $K>0$. Функция f будет осуществлять однолистное конформное отображение $E(q,1)$, если числа $K>0$ и $q\beta>0$ достаточно малы, а именно, удовлетворяют неравенствам (3.2) и (3.3).*

Для доказательства основного результата этого раздела нам понадобится ряд вспомогательных оценок. Пусть

$$g_1(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P(\theta)S_q(qz^{-1}e^{i\theta})d\theta,\quad g_2(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}S_q(ze^{-i\theta})d\mu(\theta),\quad z\in E(q,1).$$

Лемма 3.1. *Пусть $z=re^{i\varphi}\in E(q,1)$. Если $P\in\lambda(K)$, то справедливо неравенство*

$$\left|\operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial\varphi}g_1(re^{i\varphi})\right|\leqslant K,$$

если $P\in\Lambda_{1+\alpha}(K)$, то

$$\left|\operatorname{Im}\frac{\partial}{\partial\varphi}g_1(re^{i\varphi})\right|\leqslant\frac{K(3-q^2)}{1-q^2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}q+B(\alpha)\right],\quad B(\alpha)=\frac{1+\alpha}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{t^{\alpha}}{\sin t}dt.$$

Доказательство. Полагая $S_q(re^{it})=P_q(r,t)+iQ_q(r,t)$,

$$P_q(r,t)=P(r,t)+P_q^0(r,t),\ P(r,t)=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t},\ P_q^0(r,t)=\sum_{j=1}^{\infty}[P(q^{2j}r,t)-P(q^{2j}/r,t)],$$

для гармонической в $E(q,1)$ функции $\frac{\partial}{\partial\varphi}\operatorname{Re}g_1(z)$, $z=re^{i\varphi}$, получим представление

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\operatorname{Re}g_1(z)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P(\varphi+t)\frac{\partial}{\partial t}P_q(q/r,t)dt,$$

в котором обозначено $t=\theta-\varphi$. Заменяя t на $-t$, с учетом нечетности функции $\frac{\partial}{\partial t}P_q(q/r,t)$ получим

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\operatorname{Re} g_1(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P(\varphi-t)\frac{\partial}{\partial t}P_q(q/r,t)dt,$$

следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\operatorname{Re} g_1(z)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[P(\varphi+t)-P(\varphi-t)]\frac{\partial}{\partial t}P_q(q/r,t)dt.$$

Оценивая под знаком интеграла по модулю с учетом неравенства $\frac{\partial}{\partial t}P_q(r,t)<0$ (см.[24]), получим

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\operatorname{Re} g_1(z)\right|\leqslant\frac{K}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}t\left|\frac{\partial}{\partial t}P_q(q/r,t)\right|dt=-K\,P_q(q/r,\pi)+\frac{K}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}P_q(q/r,t)dt.$$

Для доказательства первого утверждения леммы осталось заметить, что

$$\int\limits_{0}^{\pi}P_q(\rho,t)dt=\pi,\ \ q<\rho<1.$$

Пусть теперь $P\in\Lambda_{1+\alpha}(K)$. Легко проверяется равенство

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\operatorname{Im} g_1(z)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}Q_q(q/r,\theta-\varphi)d\theta,$$

где $Q_q(\rho,t)=Q(\rho,t)+Q_q^0(\rho,t)$,

$$Q(\rho,t)=\frac{2\rho\sin t}{1+\rho^2-2\rho\cos t},\quad Q_q^0(\rho,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}Q(q^{2\nu}\rho,t)+Q(q^{2\nu}/\rho,t).$$

Используя четность функции $\frac{\partial}{\partial t}Q_q(q/r,t)$ и равенство

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial}{\partial t}Q_q(\rho,t)dt=0,\ \ q<\rho<1,$$

формулу для $\frac{\partial}{\partial\varphi}\operatorname{Im} g_1(z)$ преобразуем к виду

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\operatorname{Im} g_1(z)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[P(\varphi+t)-2P(\varphi)+P(\varphi-t)]\frac{\partial}{\partial t}Q_q(q/r,t)dt.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\operatorname{Im} g_1(z)\right|\leqslant\frac{K}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}t^{1+\alpha}\left|\frac{\partial}{\partial t}Q_q(q/r,t)\right|dt,$$

которое представим следующим образом

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\operatorname{Im} g_1(z)\right|\leqslant\frac{K}{2\pi}[I_1(q/r,\alpha)+I_2(q/r,\alpha)],\tag{3.4}$$

$$I_1(\rho,\alpha)=\int\limits_{0}^{\pi}t^{1+\alpha}\left|\frac{\partial}{\partial t}Q(\rho,t)\right|dt,\quad I_2(\rho,\alpha)=\int\limits_{0}^{\pi}t^{1+\alpha}\left|\frac{\partial}{\partial t}Q_q^0(\rho,t)\right|dt,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(\rho,t)=\frac{(1+\rho^2)2\rho\cos t-4\rho^2}{(1+\rho^2-2\rho\cos t)^2},\ q<\rho<1,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_q^0(q/r,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(q^{2\nu}r,t)+\frac{\partial}{\partial t}Q(q^{2\nu}/r,t)\Big]. \tag{3.5}$$

Формулу для $I_1(\rho,\alpha)$ перепишем в виде

$$I_1(\rho,\alpha)=\int\limits_0^{\tau}t^{1+\alpha}\frac{\partial}{\partial t}Q(\rho,t)dt-\int\limits_{\tau}^{\pi}t^{1+\alpha}\frac{\partial}{\partial t}Q(\rho,t)dt,$$

где $\tau=\arcsin(1-\rho^2)/(1+\rho^2)$. После интегрирования по частям получим

$$I_1(\rho,\alpha)=2\tau^{1+\alpha}Q(\rho,\tau)+(1+\alpha)\int\limits_{\tau}^{\pi}t^{\alpha}Q(\rho,t)dt-(1+\alpha)\int\limits_0^{\tau}t^{\alpha}Q(\rho,t)dt.$$

В силу равенства $Q(\rho,\tau)=2\rho/(1-\rho^2)$ будем иметь

$$I_1(\rho,\alpha)\leqslant 2\rho\frac{\pi^{1+\alpha}(1-\rho^2)^{\alpha}}{2^{\alpha}(1+\rho^2)^{1+\alpha}}+(1+\alpha)\int\limits_0^{\pi}t^{\alpha}Q(\rho,t)dt. \tag{3.6}$$

Полагая в (3.6) $\rho=q/r$ и оценивая правую часть с учетом неравенства $Q(\rho,t)<2\rho/\sin t$, получим

$$I_1(q/r,\alpha)<2\pi\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}q+B(\alpha)\right]. \tag{3.7}$$

Для оценки $I_2(q/r,\alpha)$ отметим, что ряд (3.5) сходится абсолютно и равномерно, поэтому можем записать неравенство

$$I_2(q/r,\alpha)<\sum_{\nu=1}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}t^{1+\alpha}\left|\frac{\partial}{\partial t}Q(q^{2\nu}r,t)\right|dt+\sum_{\nu=1}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}t^{1+\alpha}\left|\frac{\partial}{\partial t}Q(q^{2\nu}/r,t)\right|dt,$$

из которого с использованием (3.6) получим оценку

$$I_2(q/r,\alpha)<\frac{\pi^{1+\alpha}}{2^{\alpha}}\sum_{\nu=1}^{\infty}q^{2\nu}\frac{(1-q^{4\nu+2})^{\alpha}}{(1+q^{4\nu+2})^{1+\alpha}}+\frac{\pi^{1+\alpha}}{2^{\alpha}}\sum_{\nu=1}^{\infty}q^{2\nu-1}\frac{(1-q^{4\nu})^{\alpha}}{(1+q^{4\nu})^{1+\alpha}}+$$

$$+(1+\alpha)\sum_{\nu=1}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}t^{\alpha}Q(q^{2\nu}r,t)dt+(1+\alpha)\sum_{\nu=1}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}t^{\alpha}Q(q^{2\nu}/r,t)dt.$$

Отсюда выводим соотношение

$$I_2(q/r,\alpha)<\frac{4\pi q}{1-q^2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}+B(\alpha)\right].$$

Подставляя последнее неравенство и неравенство (3.7), в (3.4), получим второе утверждение леммы 3.1.

Лемма 3.2. *Пусть $z=re^{i\varphi}\in E(q,1)$. Если $\mu\in\Lambda(K)$, то справедливо неравенство*

$$\left|\operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial\varphi}g_2(re^{i\varphi})\right|\leqslant K\frac{0,4(1+r)+2,1q/(1-q)}{1-r}.$$

Доказательство. От обеих частей равенства

$$\operatorname{Re} g_2(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mu(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}P_q(r,\theta-\varphi)d\theta, \quad z = re^{i\varphi}.$$

возьмем производную по φ, получим

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\operatorname{Re} g_2(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mu(\theta)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}P_q(r,\theta-\varphi)d\theta,\ z = re^{i\varphi}.$$

С использованием четности функции $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}P_q(r,\theta-\varphi)$ последнюю формулу представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\operatorname{Re} g_2(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[\mu(\varphi+t)-2\mu(\varphi)+\mu(\varphi-t)]\frac{\partial^2}{\partial t^2}P_q(r,t)dt,\ z = re^{i\varphi}.$$

В силу принадлежности функции μ классу $\Lambda(K)$ получаем неравенство

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\operatorname{Re} g_2(z)\right| \leqslant \frac{K}{2\pi}\int_{0}^{\pi} t\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}P_q(r,t)\right|dt.$$

С использованием разложения $\frac{\partial^2}{\partial t^2}P_q(r,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}P(r,t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}P_q^0(r,t)$ запишем

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\operatorname{Re} g_2(z)\right| \leqslant I_1(r)+I_2(r),\ z = re^{i\varphi},$$

где

$$I_1(r) = \frac{K}{2\pi}\int_{0}^{\pi} t\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}P(r,t)\right|dt, \quad I_2(r) = \frac{K}{2\pi}\int_{0}^{\pi} t\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}P_q^0(r,t)\right|dt.$$

Следуя работе [7], мы получаем неравенства

$$I_1(r) \leqslant \frac{0,4\,K(1+r)}{1-r}, \quad I_1(r) \leqslant r\frac{2,1\,K}{1-r}. \tag{3.8}$$

Учитывая формулу

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}P_q^0(r,t) = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}P(rq^{2j},t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}P(q^{2j}/r,t)\right],$$

в которой ряды мажорируются геометрической прогрессией с общим членом $12q^{2j-1}/(1-q)^3$ и, следовательно, сходятся абсолютно и равномерно для $q \leqslant r \leqslant 1$, получим следующее неравенство для $I_2(r)$:

$$I_2(r) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{K}{2\pi}\int_{0}^{\pi} t\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}P(rq^{2j},t)\right|dt + \frac{K}{2\pi}\int_{0}^{\pi} t\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}P(q^{2j}/r,t)\right|dt\right).$$

Привлекая второе неравенство (3.8), запишем

$$I_2(r) \leqslant 2,1\,K\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{rq^{2j}}{1-rq^{2j}} + \frac{q^{2j}/r}{1-q^{2j}/r}\right) \leqslant 2,1\,K\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q^j}{1-q^j} < \frac{2,1\,K\,q}{(1-q)^2}.$$

Отсюда и из первого неравенства (3.8) получаем утверждение леммы.

Лемма 3.3. *Пусть функция F голоморфна в кольце $E(q,1)$, непрерывно продолжима на граничную окружность $|z|=q$ и имеет на окружности $|z|=q$ вещественную часть, равную нулю. Если внутри кольца $E(q,1)$ справедливо неравенство $|\operatorname{Re} F(re^{i\varphi})| \leqslant \frac{C}{(1-r)}$ с постоянной C, то*

$$|F(z)| \leqslant \frac{8,2\,C(1+1,8q)}{(1-r)(1-q^2)} + \max_{\varphi\in[-\pi,\pi]} |\operatorname{Im} F(qe^{i\varphi})|.$$

Доказательство. Пусть ρ — некоторое число, удовлетворяющее условию $q<\rho<1$, $\tilde{q}=q/\rho$. Функция F голоморфна в кольце $E(\tilde{q},\rho)\subset E(q,1)$ и непрерывно продолжима на граничную окружность $|\zeta|=\rho$. Оценим вначале модуль производной функции F, которую запишем в виде

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} F(\rho e^{i\theta})\left[\frac{d}{dz}S(\rho^{-1}ze^{-i\theta}) + \frac{d}{dz}S^0_{\tilde{q}}(\rho^{-1}ze^{-i\theta})\right]d\theta.$$

Поскольку

$$\left|\frac{d}{dz}S(\rho^{-1}ze^{-i\theta})\right| = \frac{2\rho}{\rho^2-r^2}P(r/\rho,\theta-\varphi),$$

$$\left|\frac{d}{dz}S^0_{\tilde{q}}(\rho^{-1}ze^{-i\theta})\right| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{2\rho\tilde{q}^{2j}}{\rho^2-r^2\tilde{q}^{4j}}P(r\tilde{q}^{2j}/\rho,\theta-\varphi) + \frac{2\rho\tilde{q}^{2j}}{r^2-\rho^2\tilde{q}^{4j}}P(\rho\tilde{q}^{2j}/r,\theta-\varphi)\right]$$

то, оценивая в представлении для $F'(z)$ по модулю, получим

$$|F'(z)| \leqslant \frac{C}{1-\rho}\left[\frac{2\rho}{\rho^2-r^2} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{2\rho\tilde{q}^{2j}}{\rho^2-r^2\tilde{q}^{4j}} + \frac{2\rho\tilde{q}^{2j}}{r^2-\rho^2\tilde{q}^{4j}}\right].$$

Учитывая неравенства

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2\rho\tilde{q}^{2j}}{\rho^2-r^2\tilde{q}^{4j}} \leqslant \frac{2\rho}{\rho^2-r^2}\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{q}^{2j} = \frac{2\rho q^2}{(\rho^2-r^2)(\rho^2-q^2)},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2\rho\tilde{q}^{2j}}{r^2-\rho^2\tilde{q}^{4j}} \leqslant \frac{2\rho}{r^2(1-\tilde{q}^2)}\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{q}^{2j} \leqslant \frac{2\rho q^2}{r^2(\rho^2-r^2)(\rho^2-q^2)},$$

получим следующую оценку на $|F'(z)|$:

$$|F'(z)| \leqslant \frac{2C\rho}{(1-\rho)(\rho^2-r^2)}\left[1+\frac{q^2}{\rho^2-q^2}+\frac{q^2}{r^2(\rho^2-q^2)}\right].$$

Выбрав в этом неравенстве $\rho=(1+\sqrt{2}r)/(1+\sqrt{2})$, получим

$$|F'(z)| \leqslant \frac{8,2C}{(1-r)^2}\left[1+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^2}{r^2(1-q^2)}\right].$$

Интегрируя последнее неравенство по радиусу, получим утверждение леммы.

Доказательство теоремы 3.1. Рассмотрим отображение кольца $E(q,1)$ функцией (3.1). Будем считать, что $P \in \Lambda_{1+\alpha}(K)$. Необходимым и достаточным условием выпуклости кривой Γ_q– образа окружности $\gamma_q = \{\zeta,\ \zeta = qe^{i\theta},\ -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi\}$ при отображении функцией f является неравенство

$$\lim_{z\to\zeta} \operatorname{Re} z\frac{f''(z)}{f'(z)} > -1,\ \zeta \in \gamma_q. \tag{3.9}$$

Из формулы (3.1) получим

$$iz\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{\partial}{\partial\varphi}g_1(z) + \frac{\partial}{\partial\varphi}g_2(z),\ z = re^{i\varphi}.$$

Отсюда следует представление

$$i\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{\partial}{\partial\varphi}g_1(\zeta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}g_2(\zeta),\ \zeta = qe^{i\varphi}.$$

Для выполнения условия (3.9) достаточно потребовать неравенства

$$\left|\operatorname{Im}\frac{\partial}{\partial\varphi}g_1(\zeta) + \operatorname{Im}\frac{\partial}{\partial\varphi}g_2(\zeta)\right| < 1. \tag{3.10}$$

Для функции

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}g_2(\zeta)\right| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial}{\partial\varphi}Q_q(qe^{i(\varphi-\theta)})d\mu(\theta),\ \zeta = qe^{i\varphi},$$

приняв во внимание неравенство $\frac{\partial}{\partial t}Q_q(qe^{it}) < 4q/(1-q)^2$, получим

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}g_2(\zeta)\right| \leqslant \frac{4q}{(1-q)^2}\beta,\ \zeta = qe^{i\varphi},\ \beta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|d\mu(\theta)|.$$

Для функции $\frac{\partial}{\partial\varphi}g_1(\zeta)$ по лемме 1 с учетом неравенства (3.6) имеем

$$\left|\operatorname{Im}\frac{\partial}{\partial\varphi}g_1(\zeta)\right| \leqslant \frac{K}{1-q^2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}2q + (1+2q)B(\alpha)\right].$$

Следовательно, неравенство (3.10) будет выполнено в силу условия (3.2).

Из формулы (3.1) получим неравенство

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| < \left|\frac{\partial}{\partial\varphi}g_1(z)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial\varphi}g_2(z)\right|,\ z = re^{i\varphi} \in E(q,1).$$

Привлекая полученные выше оценки, запишем неравенство

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| < \frac{4\,q\,\beta}{(1-q)^2} + K\left[1 + \frac{(3-q^2)}{(1-q)^2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}q + B(\alpha)\right) + \left(6,6 + \frac{17,3q}{1-q^2}\right)\frac{1+1,8q}{1-q^2}\right],$$

из которого и условия (3.3) следует справедливость неравенства $|zf''(z)/f'(z)| < (1-|z|^2)^{-1}$ для любой точки $z \in E(q,1)$.

Для завершения доказательства теоремы 3.1 для голоморфной в кольце $E(q,1)$ функции f установим одно достаточное условие однолистности методом продолжения, изложенным в [18]. А именно, докажем следующее

Утверждение. *Пусть f голоморфна в $E(q,1)$, гармоническая функция $\mathrm{Re}\,[zf''(z)/f'(z)]$ непрерывно продолжима на внутреннюю границу $|z|=q$. Если*

$$|zf''(z)/f'(z)| < 1/(1-|z|^2),\ z\in E(q,1), \tag{3.11}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\,[1+\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)]d\theta = 2\pi, \quad \mathrm{Re}\,[1+\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)] \geq 0,\ \zeta = qe^{i\theta}, \tag{3.12}$$

то функция f будет однолистной в $E(q,1)$.

Доказательство. В силу условия (3.12) образом окружности $\gamma_q := \{|\zeta| = q\}$, при отображении функцией f будет замкнутая выпуклая кривая Γ_q, однократно обходимая против часовой стрелки, когда θ изменяется от $-\pi$ до π. Возьмем какой-либо гомеоморфизм g круга $\overline{E}_q := \{z : |z| \leqslant q\}$ на замкнутую ограниченную область с границей Γ_q удовлетворяющую условию склейки $f(qe^{i\theta}) = g(qe^{i\theta})$. Пусть d – некоторое число $q<d<1$. Определим отображение всей плоскости следующим образом

$$\hat f(\zeta) = \begin{cases} g(\zeta), & \zeta\in \overline{E}_q,\\ f(\zeta), & \zeta \in E(q,d),\\ f(d^2/\overline{\zeta}) + \Big(\zeta - \dfrac{d^2}{\overline{\zeta}}\Big) f'\Big(\dfrac{d^2}{\overline{\zeta}}\Big), & \zeta\in E\Big(d,\dfrac{d^2}{q}\Big),\\ f(qe^{i\theta}) + \Big(1-\dfrac{q}{d^2}\Big) re^{i\theta} f'(qe^{i\theta}), & \zeta \in \overline{E}^-_{d^2/q} := \{\zeta : |\zeta| \geq d^2/q\}. \end{cases}$$

Функция $\hat f$ является локально однолистной во всей комплексной плоскости. Действительно, в $\overline{E}_q$ функция $\hat f(\zeta) \equiv g(\zeta)$ однолистна по построению. При $\zeta \in \overline{E}(q,d)$ неравенство $|f'(\zeta)| > 0$ следует из (3.11). В кольце $E\Big(d, \frac{d^2}{q}\Big)$ условием локальной однолистности функции $\hat f$ является неравенство $I = |\hat f_\zeta|^2 - |\hat f_{\overline{\zeta}}|^2 > 0$. Запишем явное выражение для якобиана отображения $\hat f$ в кольце $E\Big(d,\frac{d^2}{q}\Big)$

$$I = |f'(d^2/\overline{\zeta})|^2 \left[1 - \left|\Big(\zeta - \frac{d^2}{\overline{\zeta}}\Big)\frac{d^2}{\overline{\zeta}^2}\right|^2 \left|\frac{f''(d^2/\overline{\zeta})}{f'(d^2/\overline{\zeta})}\right|^2\right],$$

из которого ясно, что положительная ориентация отображения есть следствие условия (3.11). Если же $\zeta \in \overline{E}^-_{d^2/q}$, то условие локальной однолистности в этой точке равносильно неравенству

$$1 + \mathrm{Re}\, qe^{i\theta}\frac{f''(qe^{i\theta})}{f'(qe^{i\theta})} + \frac{d^2}{r(d^2-q^2)} > 0, \quad f'(qe^{i\theta}) \neq 0, \quad r = |\zeta| \geq \frac{d^2}{q},$$

вытекающему из условия (3.12).

Поскольку отображение $\hat f$ переводит любую последовательность точек, сходящуюся к бесконечности, в аналогичную, по теореме Адамара (см, например, [18], [21]) из локальной однолистности $\hat f$ следует однолистность во всей плоскости. Следовательно, f будет однолистной в кольце $E(q,1)$.

Таким образом, теорема 3.1 доказана.

4. Условия однолистности отображений конечно-связных областей

Пусть f осуществляет однолистное конформное отображение D_n на некоторую область Ω_n; Ω_{nk} – односвязная область, введенная в определении 2b). Аналогично введем области D_{nk}. Очевидно, это круг или внешность круга с границей γ_k. Возьмем концентрическую с γ_k окружность γ'_k, $\gamma'_k = \{\zeta : |\zeta - a_k| = R'_k\}$, и через D'_{nk} обозначим круговое кольцо с границей $\gamma_k \cup \gamma'_k$.

Лемма 4.1. *Справедливо представление $f(\zeta) = (f_k \circ w_k)(\zeta)$, $\zeta \in D'_{nk}$, где f_k — любое из однолистных конформных отображений D_{nk} на Ω_{nk}, а w_k — гомеоморфизм D_{nk} на себя, конформный в D'_{nk}.*

Доказательство. Продолжим отображение f кольца D'_{nk} на двусвязную область Ω'_{nk} до гомеоморфизма $\hat{f}$ области D_{nk} на Ω_{nk}. Это можно сделать, например, следующим образом. Возьмем некоторую функцию φ_k, осуществляющую однолистное конформное отображение $D_{nk} \backslash D'_{nk}$ на область $\Omega_{nk} \backslash \Omega'_{nk}$. Тогда в качестве $\hat{f}$ можно взять функцию, определяемую равенствами

$$\hat{f}(\zeta) = \begin{cases} f(\zeta), \quad \zeta \in E'_{nk}, \\ \varphi(a_k + re^{i\tau}), \ \tau = \arg\{\varphi^{-1}[f(a_k + R'_k e^{i\theta})] - a_k\}, \ \zeta = a_k + re^{i\theta} \in E_{nk} \setminus E'_{nk}. \end{cases}$$

Функция $\hat{f}$ осуществляет гомеоморфное, следовательно, внутреннее в смысле Стоилова отображение D_{nk} на Ω_{nk}. По теореме Стоилова, $\hat{f}(\zeta) = (F \circ w_k)(\zeta)$, где w_k — гомеоморфизм D_{nk} на себя, функция F является аналитической в D_{nk}. Поскольку $F(w_k) = (\hat{f} \circ \zeta)(w_k)$, то F однолистна в D'_{nk}, т.е. $F(z) = f_k(z)$. Конформность w_k в D'_{nk} сразу следует из равенства $w_k(\zeta) = (f_k^{-1} \circ f)(\zeta)$, $\zeta \in D'_{nk}$.

Лемма доказана.

Для дальнейшего нам удобно выделить узкое кольцо D''_{nk}, лежащее в кольце D'_{nk}. Именно, пусть $\gamma''_k = \{\zeta : |\zeta - a_k| = R''_k\}$, лежит в D'_{nk} Тогда полагаем, что D''_{nk} — кольцо с границей $\gamma_k \bigcup \gamma''_k$. Учитывая аналитичность w_k на γ_k, по принципу симметрии Римана-Шварца получаем, что w_k является однолистной аналитической функцией в замкнутой области $\overline{D}''_{nk}$. Поэтому производные любого порядка от $w_k(\zeta)$ непрерывны и равномерно ограничены в $\overline{D}''_{nk}$. И, кроме того, существуют такие положительные постоянные C_j, что в $\overline{D}''_{nk}$ справедливы оценки

$$C_1 \leqslant |\ln w'_k(\zeta)| < C_2, \quad C_3 \leqslant (R_k - |\zeta - a_k|)/(R_k - |w_k - a_k|) \leqslant C_4. \tag{4.1}$$

С помощью леммы предложим простое доказательство эквивалентности определений 2a) и 2b). Действительно, имеем:

$$\ln f'(\zeta) = \ln f'_k(w_k(\zeta)) + \ln w'_k(\zeta), \ \zeta \in D''_{nk}.$$

Пусть $\gamma^m_{k,\zeta}$ — замкнутые спрямляемые кривые из D''_{nk}, сходящиеся к γ_k при $m \to \infty$. Тогда кривые $\gamma^m_{k,z} = \{z : z = w_k(\zeta), \ \zeta \in \gamma^m_{k,\zeta}\}$ обладают аналогичными свойствами. В силу неравенств (4.1) получаем:

$$\int\limits_{\gamma^m_{k,\zeta}} |\ln f'(\zeta)d\zeta| \leqslant M_1 \int\limits_{\gamma^m_{k,z}} |\ln f'_k(z)dz| + M_2, \ k = \overline{1,n}, \tag{4.2}$$

$$\int\limits_{\gamma^m_{k,z}} |\ln f'_k(z)dz| \leqslant M_3 \int\limits_{\gamma^m_{k,\zeta}} |\ln f'(\zeta)d\zeta| + M_4, \ k = \overline{1,n}, \tag{4.3}$$

где $M_l, l = \overline{1,4}$— положительные постоянные.

Предположим, что $\Omega_n = f(E_n)$ принадлежит классу В.И. Смирнова и $\ln|f'(z)|$ представим по формуле Грина. Тогда согласно [14] функция $\ln f'$ принадлежит классу $H_1(D_n)$. На основании определения класса H_1 и неравенства (4.3) заключаем, что $\ln f'_k \in H_1(D_{nk})$. Следовательно, Ω_{nk} есть область класса В.И. Смирнова.

В обратную сторону утверждение доказывается аналогично, только вместо неравенства (4.3) нужно использовать (4.2).

На основании леммы 4.1 легко оценить порядок роста по $r = |\zeta - a_k|$, $R_k - \varepsilon \leqslant r \leqslant R_k$ вблизи границы γ_k многих функционалов для однолистных в D_n функций, если подобные оценки известны для функций, однолистных в круге или внешности круга. Именно этим мы воспользуемся для доказательства следующего утверждения.

Лемма 4.2. *Если f голоморфна и однолистна в D_n, то*

$$\sup_{z\in D_n}\left(\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\prod_{k=1}^{n}(R_k-|z-a_k|)\right)=M(f)<\infty.$$

Доказательство. Если f_k однолистна в D_{nk}, то на основании известных результатов (см., например, [19], [23]) можно записать

$$\sup_{z\in E_{nk}}\left(\left|\frac{f''_k(z)}{f'_k(z)}(R_k-|z-a_k|)\right|\right)\leqslant M_1<\infty. \tag{4.4}$$

Из леммы 4.1 следует, что

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}=\frac{f''_k(w_k(\zeta))}{f'_k(w_k(\zeta))}w'_k(\zeta)+\frac{w''_k(\zeta)}{w'_k(\zeta)},\ \zeta\in D''_{nk}.$$

Отсюда, с использованием (4.1), (4.4) и неравенства $C_5 \leqslant |w''_k(\zeta)/w'_k(\zeta)| < C_6$, получаем соотношение

$$\sup_{\zeta\in D''_{nk}}\left(\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}(R_k-|\zeta-a_k|)\right|\right)\leqslant M_2<\infty,$$

из которого, очевидно, следует утверждение леммы.

Рассмотрим теперь область Ω_n, не принадлежащую классу В.И. Смирнова и ограниченную жордановыми спрямляемыми кривыми. На основании теоремы Ф. Рисса $f' \in H_1(D_n)$, поэтому мы можем воспользоваться параметрическим представлением (2.6). Очевидно, справедлива следующая структурная формула для функции, отображающей некоторую каноническую область D_n на Ω_n:

$$f(z)=\int z^{\delta}\Theta^{-1}(z)\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_k(z,z_k(\theta))d\nu_k(\theta)-\alpha\right\}dz,\ z_k\in\gamma_k, \tag{4.5}$$

$$\alpha=\sum_{j\neq k}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_j(z_k,z_j(\theta))d\nu_j(\theta),\ k=\overline{1,n}.$$

Здесь ν_k — функция ограниченной вариации, в разложении которой присутствует нетривиальная сингулярная составляющая $\mu_k(\theta)$, $k=\overline{1,n}$. Пусть однолистная область Ω_n ограничена жордановыми спрямляемыми кривыми Γ_k, $k=\overline{1,n}$. Нас будет интересовать вопрос, какие ограничения налагают последние требования на отображающую функцию (4.5).

Теорема 4.1. *Если функция (4.5) однолистно и конформно отображает D_n на Ω_n, то существует такая постоянная $K>0$, что $\nu_k \in \Lambda(K)$ для любого $k=1,2,...,n$.*

Доказательство. Представим выражение (4.5) в кольце D'_{nk} в виде (см. [17]):

$$\ln f'(z) = \delta \ln z - \ln \Theta(z) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{z + z_k - 2a_k}{z - z_k} d\nu_k(\theta) + \varphi_k(z), \ z \in D'_{nk}, \tag{4.6}$$

где φ_k — функция, голоморфная в области $D^k = \bigcap\limits_{j \neq k} D_{nj}$ и, следовательно, голоморфная в кольце $\overline{D}'_{nk}$. Пусть

$$q_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \nu_k(\theta) \frac{z + z_k - 2a_k}{z - z_k} d\theta$$

— функция, голоморфная в D_{nk}. Тогда на окружности γ_k выполняется равенство $\operatorname{Re} q_k(z_k(\theta)) = \nu_k(\theta)$. Из (4.6) имеем

$$i(z - a_k) q'_k(z) = \ln f'(z) - \delta \ln z + \ln \Theta(z) - \varphi_k(z), \ z \in D'_{nk}.$$

Отсюда, с применением леммы 4.2 находим, что

$$\sup_{z \in D'_{nk}} |(R_k - |z - a_k|) \frac{d}{dz} [(z - a_k) q'_k(z)]| \leqslant M < \infty.$$

Отобразим единичный круг $D = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ на область D_{nk} функцией $z_k(\zeta) = a_k + R_k/\zeta$, рассмотрим голоморфную в единичном круге функцию, определенную равенством $Q_k(\zeta) := q_k[z_k(\zeta)]$, и функцию $\tilde{Q}_k$, определенную равенством $\tilde{Q}_k(\theta) = Q_k(e^{i\theta})$. Легко заметить, что

$$\sup_{\zeta \in D} |(1 - |\zeta|^2) \frac{d}{d\zeta} [\zeta\, Q'_k(\zeta)]| = \sup_{z \in D'_{nk}} |(R_k - |z - a_k|) \frac{d}{dz} [(z - a_k) q'_k(z)]| \leqslant M < \infty.$$

Отсюда следует ([5], с.419), что $\tilde{Q}_k \in \Lambda(K)$ с вполне определенной постоянной $K > 0$, зависящей лишь от M. Установив связь между граничными значениями $Q_k(\zeta)$ и $q_k(z)$, убеждаемся в справедливости теоремы.

Отметим, что эта теорема распространяется на случай многосвязных областей известный результат Дюрена, Шапиро и Шилдса [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Привалов И.И. *Граничные свойства аналитических функций.* изд. 2, М;—Л., Гостехиздат, 1950. 336 с.
2. Смирнов В.И. *Sur la théorie des polynômes orthogonaux à la variable complex* // Журнал Ленингр. физ.-матем. об-ва. 1928. Т.2. С. 155–179.
3. M.V. Keldyš, M.A. Lavrentiev *Sur la repréntation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables* // Ann. Ecole Norm. (3). 1937. V. 54. P. 1–38.
4. P.L. Duren, M.S. Shapiro, A.L. Shields *Singular measures and domains not of Smirnov type* // Duke Math. J. 1966. V. 33. № 2. P. 247–254.
5. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* М.: Мир. Т.1. 1965. 615 с.
6. L.V. Ahlfors, G. Weill *A uniqueness theorem for Beltrami equations* // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. V. 13. P. 247–254.
7. Шабалин П.Л. *Об однолистности общего решения внутренней обратной краевой задачи* // Изв. вузов, Математика. 1975. № 12. С. 92–95.
8. Авхадиев Ф.Г. *Оценки в классе Зигмунда и их применение к краевым задачам* // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. № 6. С. 1289–1292.
9. Макаров Н.Г. *О размере множества особых точек на границе несмирновской области* // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1989. Т. 170. С. 176–183.

10. P.W. Jones, S.K. Smirnov, V.I. On *Smirnov domains* // Ann. Acad. Sci. Fennicae Mathem. 1999. V. 24. P. 105–108.
11. C. Bishop, L. Carleson, J. Garnett *Jones P. Harmonic measures supported on curves* // Pacific J. Math. 1989. V. 138. P. 233–236.
12. S. Rohde *On conformal welding and quasicircles* // Michigan Math. J. 1991. V. 38. P. 111–116.
13. Дубинин В.Н. *Неравенства для гармонических мер относительно неналегающих областей* // Изв АН СССР, сер. матем. 2015. Т. 79, № 5. С. 47–64.
14. Тумаркин Г.Ц., Хавинсон С.Я. *Аналитические функции в многосвязных областях класса В.И.Смирнова (класса S)* // Изв АН СССР, сер. матем. 1958. Т. 22, № 3. С. 379–385.
15. Тумаркин Г.Ц., Хавинсон С.Я. *О существовании в многосвязных областях однозначных аналитических функций с заданным модулем граничных значений* // Изв АН СССР, сер. матем. 1958. Т.22, № 4. С. 543–562.
16. Тумаркин Г.Ц. *Условия существования аналитической мажоранты семейства аналитических функций* // Изв АН Арм.ССР, сер. матем. 1964. Т.17, № 6. С. 3–25.
17. D. Khavinson *Factorization theorems for different classes of analytic functions in multiply connected domains* // Pacific J. Math. 1983. V. 108. №. 2 P. 295–318.
18. Авхадиев Ф.Г. *Достаточные условия однолистности квазиконформных отображений* // Матем.заметки 1975. Т. 18, № 6. С. 793–802.
19. B.G. Osgood *Some properties of f''/f' and the Poincaré metric* // Indiana Univ. Math. J. 1982. V. 31. № 4. P. 449–461.
20. J. Becker, Ch. Pommerenke *Schlichtheitskriterien und Jordangebiete* // J. Reine Angew. Math. 1984. V. 354. P. 74–94.
21. Авхадиев Ф.Г. *Об инъективности в области открытых изолированных отображений с заданными граничными свойствами* // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292. № 4. С. 78–783.
22. Авхадиев, Ф.Г. *Допустимые функционалы в условиях однолистности для дифференцируемых отображений n-мерных областей* // Изв. вузов. Матем. 1989. № 4. С. 3–12.
23. F.G. Avkhadiev, K.J. Wirths *Schwarz-Pick type inequalities.* Basel-Boston-Berlin, Birkhäuser Verlag. 2009. 156 p.
24. Голузин Г.М. *О параметрическом представлении функций, однолистных в кольце* // Мат. сб. 1951. Т. 29 (71). № 2. С.469–476.

Фарит Габидинович Авхадиев,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18,
420008, г. Казань, Россия
E-mail: avkhadiev47@mail.ru

Павел Леонидович Шабалин,
Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Зеленая, 1,
420043, г. Казань, Россия
E-mail: pavel.shabalin@mail.ru