ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 4 (2016). С. 127-134.

УДК 517.55+517.98+517.982.3

ВОЗМУЩЕНИЕ СЮРЪЕКТИВНОГО ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ

И.Х. МУСИН

Аннотация. Пусть $\mu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ – обобщенная функция с компактным носителем – выпуклым множеством с непустой внутренностью. Пусть X_2 – выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, $X_1 = X_2 + supp\ \mu$. Пусть оператор свертки $A : \mathcal{E}(X_1) \to \mathcal{E}(X_2)$, действующий по правилу $(Af)(x) = (\mu * f)(x)$, сюръективен. Получено достаточное условие на линейный непрерывный оператор $B : \mathcal{E}(X_1) \to \mathcal{E}(X_2)$, обеспечивающее сюръективность оператора $A + B$.

Ключевые слова: оператор свертки, обобщенная функция, преобразования Фурье-Лапласа, целые функции.

Mathematics Subject Classification: 42B10, 44A35, 46E10

1. Введение

1.1. О проблеме и основной результат. Через $\mathcal{E}(X)$, где X – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, обозначаем пространство бесконечно дифференцируемых функций на X с топологией, определяемой системой полунорм

$$\|f\|_{K,N} = \sup_{x\in K, |\alpha|\le N} |(D^\alpha f)(x)|, \ K \Subset X, N \in \mathbb{Z}_+.$$

Сильное сопряженное $\mathcal{E}^*(X)$ для пространства $\mathcal{E}(X)$ состоит из обобщенных функций с компактным носителем в X.

Если $0 \ne \mu \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n)$, X_1, X_2 – два непустых открытых множества в $\mathbb{R}^n$ таких, что

$$X_2 + supp\ \mu \subset X_1, \tag{1}$$

тогда свертка $\mu * f$ распределения μ и функции $f \in \mathcal{E}(X_1)$, определяемая по правилу

$$(\mu * f)(x) = \mu(f(x + y)), \ x \in X_2,$$

принадлежит $\mathcal{E}(X_2)$.

Л. Эренпрайс [1] и Б. Мальгранж [2] установили, что для любого ненулевого полинома P n переменных $P(D)(\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Для обобщенной функции $\mu \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n), \mu \ne 0$, Л. Эренпрайс [3] доказал, что оператор свертки $f \to \mu * f$, действующий из $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, сюръективен тогда и только тогда, когда μ обратимо, что означает, что его преобразование Фурье-Лапласа $\hat{\mu}$, определяемое по правилу

$$\hat{\mu}(z) = \mu(e^{\langle -iz,\xi\rangle}), \ z \in \mathbb{C}^n,$$

медленно убывает, то есть найдется число $a > 0$ такое, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует точка $\eta \in \mathbb{R}^n$, для которой $\|\xi - \eta\| \le a \ln(2 + \|\xi\|)$ и $|\hat{\mu}(\eta)| \ge (a + \|\xi\|)^{-a}$. Решение проблемы сюръективности операторов свертки в общем случае было дано Л. Хёрмандером [4]–[6]. Он доказал, что уравнение свертки $\mu * f = g$ имеет решение $f \in \mathcal{E}(X_1)$ для любого $g \in \mathcal{E}(X_2)$ тогда и только тогда, когда μ обратимо и пара (X_1, X_2) – μ-выпуклая для носителей.

I.Kh. Musin, Perturbation of a surjective convolution operator.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №15-01-01661) и Программы Президиума РАН (проект «Комплексный анализ и функциональные уравнения».)

Поступила 25 июня 2016 г.

Напомним, что пара (X_1, X_2) открытых множеств X_1, X_2 в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию (1), называется μ-выпуклой для носителей [4, Определение 3.2], [5, Определение 3.2], если для любого $\nu \in \mathcal{E}^*(X_2)$

$$dist(supp\ \nu, \mathbb{R}^n \setminus X_2) = dist(supp\ \mu * \nu, \mathbb{R}^n \setminus X_1).$$

Здесь $\mu * \nu$ – свертка обобщенных функций μ и ν, определяемая по формуле

$$(\mu * \nu)(f) = \mu(\nu(f(x+y))),\ f \in \mathcal{E}(X_1),$$

$dist(A, B) = \inf\{\|x-y\| : x \in A, y \in B\}$, $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

Л. Хёрмандером было доказано [7, Theorem 5.4, Corollary 5.4], что если $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ имеют непересекающиеся сингулярные носители и μ_1 медленно убывает, то $\mu_1 + \mu_2$ тоже медленно убывает. Позже прямое доказательство этого результпта Л. Хёрмандера было дано В. Абрамчуком [8, Theorem 1]. Таким образом, если $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ имеют непересекающиеся сингулярные носители и μ_1 определяет сюръективный оператор свертки на $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, то оператор свертки, ассоциированный с $\mu_1 + \mu_2$, также сюръективен.

Впоследствии было не так много работ, посвященных возмущениям операторов свертки в пространствах бесконечно дифференцируемых функций. Среди них необходимо упомянуть относительно недавние результаты К. Фернандес (C. Fernandez), А. Гальбиса (A. Galbis) и Д. Жорнэ (D. Jornet) [9], исследовавших поведение возмущений сверточных операторов в пространствах ультрадифференцируемых функций в смысле Брауна, Майзе и Тейлора [10]. При этом существенно использовались результаты работ [11], [12] о сюръективности операторов свертки в этих пространствах.

В данной работе проблема сюръективности возмущенных операторов свертки изучается в пространстве бесконечно дифференцируемых функций на выпуклых областях в $\mathbb{R}^n$. Постановка задачи отличается от рассматривавшихся в [7], [8]. На ее формулировку (а также решение задачи) значительное влияние оказали исследования С.Г. Мерзлякова [13], посвященные возмущениям операторов свертки в пространствах голоморфных функций. А именно, зафиксируем обобщенную функцию $\mu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, носитель которой есть выпуклое множество с непустой внутренностью. Пусть X_2 – выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, $X_1 = X_2 + supp\,\mu$. Отметим, что в этом случае пара (X_1, X_2) – μ-выпуклая для носителей. Это следует из теоремы о носителях [6, Теорема 4.3.3] и из того, что для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и для любого компакта $K \subset \Omega$ имеем $dist(K, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) = dist(chK, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Здесь chK – выпуклая оболочка компакта K. Предположим, что оператор свертки $A : \mathcal{E}(X_1) \to \mathcal{E}(X_2)$, действующий по правилу $(Af)(x) = (\mu * f)(x)$, сюръективен (таким образом, μ обратимо). Рассмотрим линейный оператор $B : \mathcal{E}(X_1) \to \mathcal{E}(X_2)$ такой, что для любого выпуклого компакта K_2 в X_2 существуют выпуклое компактное подмножество V во внутренности носителя μ (обозначаемого $supp\ \mu$) и число $N_1 \in \mathbb{Z}_+$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$, меньшего расстояния между K_2 и границей X_2, и для каждого $N_2 \in \mathbb{Z}_+$ найдется число $c = c(\varepsilon, N_2) > 0$ такое, что

$$\|Bf\|_{K_2^\varepsilon, N_2} \le c\|f\|_{K_2+V, N_1},\ f \in \mathcal{E}(X_1). \tag{2}$$

Здесь K_2^ε – ε-вздутие компакта K_2.

Основной результат работы – следующая

Теорема. *Оператор $A + B : \mathcal{E}(X_1) \to \mathcal{E}(X_2)$ сюръективен.*

1.2. Структура работы. В разделе 2 приводятся два вспомогательных результата. Первый – результат типа принципа Фрагмена-Линделефа (Предложение 1). Второй – теорема деления Л. Хёрмандера [14, Corollary 2.6.]. Также здесь мы напоминаем определения двух типов локально выпуклых пространств из [15]. Основной результат доказан в разделе 3. В разделе 4 приведен пример оператора B.

1.3. Некоторые обозначения. Для $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$ и $\|u\|$ обозначает Евклидову норму в $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$.

Для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ $\quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, D^α – соответствующая частная производная.

Если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то $\overline{\Omega}$, $int\ \Omega$, $\partial\Omega$, $ch\ \Omega$ – замыкание, внутренность, граница и выпуклая оболочка Ω, соответственно. Для $\varepsilon > 0$ пусть $\Omega^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-y\| \le \varepsilon$ для некоторого $y \in \Omega\}$.

Для $r > 0$ пусть $D(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$.

Опорная функция H_K выпуклого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n$ определяется по формуле $H_K(y) = \max\limits_{t \in K} \langle y, t\rangle,\ y \in \mathbb{R}^n$.

$H(\mathbb{C}^n)$ – пространство целых функций в $\mathbb{C}^n$.

Сильное сопряженное локально выпуклого пространства E обозначаем через E^*.

2. Вспомогательные сведения и результаты

2.1. Вспомогательные результаты. При доказательстве Теоремы будут полезны следующие два результата.

Предложение 1. *Пусть b – неотрицательная выпуклая позитивно однородная степени 1 функция в $\mathbb{C}^n$ и $g \in H(\mathbb{C}^n)$. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $c_\varepsilon > 0$ такая, что*

$$|g(z)| \le c_\varepsilon \exp\left(b(z) + \varepsilon\|z\|\right),\ z \in \mathbb{C}^n,$$

и для некоторых $M > 0$ и $N \in \mathbb{Z}_+$

$$|g(x)| \le M(1 + \|x\|)^N,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$|g(z)| \le 2^{\frac{N}{2}} M(1 + \|z\|)^{2N} \exp(b(iIm\ z)),\ z \in \mathbb{C}^n.$$

Приведенное утверждение – легкое следствие нижеприведенной Леммы 1, фактически доказанной в [16]. Чтобы ее сформулировать, определим пространство $\mathcal{P}_a(T_C)$ следующим образом. Пусть C – открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале и a – неотрицательная выпуклая позитивно однородная степени 1 функция в $\mathbb{R}^n + i\overline{C}$. Тогда $\mathcal{P}_a(T_C)$ – пространство функций f, голоморфных в трубчатой области $T_C = \mathbb{R}^n + iC$ и удовлетворяющих условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $c = c_{\varepsilon,f} > 0$ такая, что

$$|f(z)| \le c \exp\left(a(z) + \varepsilon\|z\|\right),\ z \in \mathbb{R}^n + iC.$$

Лемма 1. *Пусть $g \in \mathcal{P}_a(T_C)$ и для $\xi \in \mathbb{R}^n$* $\quad \overline{\lim\limits_{\substack{z \to \xi, \\ z \in T_C}}} |g(z)| \le M.$

Тогда

$$|g(x + iy)| \le M \exp(a(iy)),\ x + iy \in T_C.$$

Замечание. В [16, Lemma] предполагалось, что C – острый конус. Анализ доказательства Леммы показывает, что это условие на C излишне.

Следующий результат получен Л. Хёрмандером [14, Corollary 2.6.])

Предложение 2. *Для j= 1, 2, 3 пусть $u_j \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, пусть*

$$H_j(\eta) = sup\{\langle x, \eta\rangle,\ x \in supp\ u_j\},$$

и пусть U_j – преобразование Фурье-Лапласа u_j. Предположим, что $U_2 = \frac{U_3}{U_1}$ – целая функция. Тогда $H_2 = H_3 - H_1$ – опорная функция некоторого выпуклого компакта из $\mathbb{R}^n$ и для любого $\varepsilon > 0$

$$|U_2(\zeta)| \le C_\varepsilon \exp(H_2(Im\zeta) + \varepsilon\|\zeta\|),\ \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

где $C_\varepsilon > 0$ – постоянная.

2.2. Два определения. Напомним определения (M^*)-пространства и (LN^*)-пространства из [15].

Определение 1. Пространство, представимое в виде проективного предела последовательности нормированных пространств S_n, $n \in \mathbb{N}$, относительно линейных непрерывных отображений $g_{mn} : S_n \to S_m$, $m < n$, таких, что $g_{n,n+1}$ вполне непрерывны для каждого n, называется пространством (M^*).

Определение 2. Локально выпуклое пространство E, представимое в виде индуктивного предела возрастающей последовательности нормированных пространств E_k таких, что единичный шар пространства E_k относительно компактен в E_{k+1} для каждого $k \in \mathbb{N}$, называется пространством (LN^*).

2.3. Еще несколько обозначений и сведений. Если X – открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ – последовательность компактных подмножеств X такая, что $K_m \subset int\ K_{m+1}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и $X = \cup_{k=1}^{\infty} K_m$, то обозначим через $C^m(K_m)$ нормированное пространство функций f, гладких до порядка m в K_m, с нормой $\|f\|_{K_m,m}$. Отметим, что $\mathcal{E}(X)$ – проективный предел пространств $C^m(K_m)$. Причем, $\mathcal{E}(X)$ плотно в каждом $C^m(K_m)$ и вложения $i_m : C^{m+1}(K_{m+1}) \to C^m(K_m)$ вполне непрерывны. Следовательно, $\mathcal{E}(X)$ – (M^*)-пространство. Тогда $\mathcal{E}^*(X)$ – (LN^*)-пространство и $\mathcal{E}^*(\Omega)$ – индуктивный предел пространств $(C^m(K_m))^*$ [15, Теорема 5].

3. Доказательство Теоремы

Теорема будет доказана, если покажем, что образ оператора $A + B$ замкнут и плотен в $\mathcal{E}(X_2)$.

Вначале покажем, что образ оператора $A + B$ замкнут в $\mathcal{E}(X_2)$. Так как $\mathcal{E}(X_1)$ и $\mathcal{E}(X_2)$ – пространства Фреше, то замкнутость оператора $A + B$ эквивалентна замкнутости образа сопряженного оператора $(A + B)^*$ [17, 8.6.13, Теорема]. Так как $\mathcal{E}^*(X_1)$ – (LN^*)-пространство, то для того, чтобы показать, что образ оператора $(A + B)^*$ замкнут, достаточно доказать, что образ оператора $(A + B)^*$ секвенциально замкнут [15, Предложение 8]. Поэтому пусть функционалы $S_k \in \mathcal{E}^*(X_2)$ таковы, что последовательность $((A + B)^* S_k)_{k=1}^{\infty}$ сходится к $F \in \mathcal{E}^*(X_1)$ в $\mathcal{E}^*(X_1)$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ пусть $X_{2,m}$ – открытое ограниченное выпуклое подмножество X_2 такое, что $\overline{X}_{2,m} \subset X_{2,m+1}$, $X_2 = \cup_{m=1}^{\infty} \overline{X}_{2,m}$. Положим $X_{1,m} = X_{2,m} + supp\ \mu$. Тогда $\overline{X}_{1,m} \subset X_{1,m+1}$, $X_1 = \cup_{m=1}^{\infty} \overline{X}_{1,m}$. По свойствам (LN^*)-пространств [15, Теорема 2, Следствие 1] найдется $p \in \mathbb{N}$ такое, что функционалы $F_k := (A + B)^* S_k$ и F принадлежат $(C^p(\overline{X}_{1,p}))^*$, и последовательность $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ сходится к F в $(C^p(\overline{X}_{1,p}))^*$. Таким образом, носители функционалов F_k и F лежат в $\overline{X}_{1,p}$ и порядок распределений F_k и F не превосходит p.

Пусть $2r_p := dist(\overline{X}_{2,p}, \partial X_{2,p+1})$, $\tilde{X}_2 := X_{2,p} + D(r_p)$ и $\tilde{X}_1 := \tilde{X}_2 + supp\ \mu$. Отметим, что $\tilde{X}_1$ и $\tilde{X}_2$ – ограниченные открытые выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$ и пара $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ – μ-выпуклая для носителей. Обозначим через $\tilde{A}$ оператор свертки $f \in \mathcal{E}(\tilde{X}_1) \to \mu * f$. Очевидно, $\tilde{A}$ действует из $\mathcal{E}(\tilde{X}_1)$ в $\mathcal{E}(\tilde{X}_2)$ линейно и непрерывно и если $f \in \mathcal{E}(X_1)$, то $\tilde{A}f = \tilde{A}f$. По выше цитированному результату Л. Хёрмандера [5] $\tilde{A}(\mathcal{E}(\tilde{X}_1)) = \mathcal{E}(\tilde{X}_2)$.

Далее, пользуясь неравенством (2), продолжим (единственным образом) оператор B до линейного непрерывного оператора $\tilde{B}$, действующего из $\mathcal{E}(\tilde{X}_1)$ в $\mathcal{E}(\tilde{X}_2)$. Отметим, что для любого выпуклого компакта $\tilde{K}_2 \subset \tilde{X}_2$ существуют компакт $V \subset int(supp\ \mu)$ и число $N_1 \in \mathbb{Z}_+$ такие, что для любого $\varepsilon \in (0, dist(\tilde{K}_2, \partial \tilde{X}_2))$ и для каждого $N_2 \in \mathbb{Z}_+$ найдется число $c = c(\varepsilon, N_2) > 0$ такое, что

$$\|\tilde{B}f\|_{\tilde{K}_2^{\varepsilon}, N_2} \le c\|f\|_{\tilde{K}_2 + V, N_1},\ f \in \mathcal{E}(\tilde{X}_1).$$

Полагая здесь $\tilde{K}_2 = \overline{X_{2,p}}$, убеждаемся, что $\tilde{B}$ – компактный оператор из $\mathcal{E}(\tilde{X}_1)$ в $\mathcal{E}(\tilde{X}_2)$. По теореме 9.6.7 из [17] образ оператора $\tilde{A} + \tilde{B}$ замкнут в $\mathcal{E}(\tilde{X}_2)$. Следовательно, образ оператора $(\tilde{A} + \tilde{B})^*$ замкнут в $\mathcal{E}^*(\tilde{X}_1)$.

Для каждого $j \in \mathbb{N}$ пусть $X_{2,j} = X_{2,p} + D(\frac{j}{j+1}r_p)$. Тогда $\tilde{X}_1 = \cup_{j=1}^{\infty}(\overline{\tilde{X}}_{2,j} + supp\ \mu)$. Отметим, что при некотором $m \in \mathbb{N}$ носители функционалов F, $F_k = (A+B)^*S_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ лежат в $\overline{\tilde{X}}_{2,m} + supp\ \mu$.

Теперь возьмем произвольный функционал S_k и покажем, что выпуклая оболочка W_k его носителя содержится в $\overline{\tilde{X}}_{2,m+2}$. Предположим противное. Тогда найдется точка ξ из W_k, не принадлежащая $\overline{\tilde{X}}_{2,m+2}$. Существует гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, разделяющая $\overline{\tilde{X}}_{2,m+2}$ и ξ. Поэтому можно найти точку $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такую, что

$$H_{W_k}(y_0) > H_{\overline{\tilde{X}}_{2,m+2}}(y_0). \tag{3}$$

Обозначим порядок распределения S_k через $N_{2,k}$. Возьмем $\delta_1 > 0$ настолько малым, что $W_k^{\delta_1} \Subset X_2$. Тогда найдется постоянная $a_{\delta_1,k} > 0$ такая, что

$$|(B^*S_k)(f)| = |S_k(Bf)| \le a_{\delta,k}\|Bf\|_{W_k^{\delta_1},N_{2,k}},\ f \in \mathcal{E}(X_1).$$

По условию на B существуют выпуклый компакт $V \subset int(supp\ \mu)$ и число $N_1 \in \mathbb{Z}_+$ такие, что для выбранного $\delta_1 > 0$ найдется постоянная $c_{\delta_1,k} > 0$ такая, что

$$|(B^*S_k)(f)| \le c_{\delta_1,k}\|f\|_{W_k+V,N_1},\ f \in \mathcal{E}(X_1).$$

Отсюда для всех $z \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$|\widehat{(B^*S_k)}(z)| \le c_{\delta_1,k}(1+\|z\|)^{N_1}\exp(H_{W_k}(Im\ z) + H_V(Im\ z)). \tag{4}$$

Принимая во внимание, что при некотором $d > 0$

$$H_V(x) \le H_{supp\ \mu}(x) - d\|Im\ x\|,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

из (4) получаем, что для всех $z \in \mathbb{C}^n$

$$|\widehat{(B^*S_k)}(z)| \le c_{\delta_1,k}(1+\|z\|)^{N_1}e^{H_{W_k}(Im\ z)+H_{supp\ \mu}(Im\ z)-d\|Im\ z\|}. \tag{5}$$

Далее, так как $F_k \in \mathcal{E}^*(X_1)$, $supp\ F_k \subset \overline{\tilde{X}}_{2,m} + supp\ \mu$ и порядок распределения F_k не превосходит p, то для любого $\delta > 0$ существует постоянная $m_{\delta,k} > 0$ такая, что для всех $z \in \mathbb{C}^n$

$$|\hat{F}_k(z)| \le m_{\delta,k}(1+\|z|)^p\exp(H_{\overline{\tilde{X}}_{2,m}}(Im\ z) + H_{supp\ \mu}(Im\ z) + \delta\|Im\ z\|). \tag{6}$$

Используя оценки (5) и (6) с $\delta = \frac{r_p}{2(m+1)(m+2)}$, получим, что для всех $z \in \mathbb{C}^n$

$$|\widehat{(A^*S_k)}(z)| \le a(1+\|z|)^b e^{H_{ch(W_k\cup\overline{\tilde{X}}_{2,m+1})+supp\ \mu}(Im\ z)-\gamma\|Im\ z\|}, \tag{7}$$

где $\gamma = \min(d,\delta)$, $a = \max(c_{\delta_1,k}, m_{\delta,k})$ и $b = \max(p, N_1)$. Возьмем число $\gamma_1 \in (0,\gamma)$ и найдем выпуклый компакт $\Omega_k \subset int\ (ch(W_k \cup \overline{\tilde{X}}_{2,m+1}))$ такой, что

$$H_{ch(W_k\cup\overline{\tilde{X}}_{2,m+1})}(y) - H_{\Omega_k}(y) \le \gamma_1\|y\|,\ y \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда из (7) имеем

$$|\widehat{(A^*S_k)}(z)| \le a(1+\|z|)^b e^{H_{\Omega_k+supp\ \mu}(Im\ z)},$$

Отметим, что по теореме Пэйли-Винера-Шварца [6, Теорема 7.3.1] это означает, что носитель A^*S_k содержится в $\Omega_k + supp\ \mu$. Учитывая равенство

$$\widehat{(A^*S_k)}(z) = \hat{S}_k(z)\hat{\mu}(z),\ z \in \mathbb{C}^n,$$

и Предложение 2, получаем, что $H_{supp\ (A^*S_k)} - H_{supp\ \mu}$ – опорная функция некоторого выпуклого компакта $G_k \subset \mathbb{R}^n$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $C_\varepsilon > 0$ такое, что

$$|\hat{S}_k(z)| \le C_\varepsilon\exp(H_{G_k}(Imz) + \varepsilon\|z\|),\ z \in \mathbb{C}^n. \tag{8}$$

По теореме Пэйли-Винера-Шварца [6, Теорема 7.3.1] при некотором $M_k > 0$ имеем

$$|\hat{S}_k(x)| \le M_k(1+\|x\|)^{N_{2,k}},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Из этого неравенства и неравенства (8), пользуясь Предложением 1, получаем, что

$$|\hat{S}_k(z)| \le M_k(1+\|z\|)^{2N_{2,k}} e^{H_{G_k}(Imz)},\ z \in \mathbb{C}^n.$$

Снова пользуясь теоремой Пэйли-Винера-Шварца [6, Теорема 7.3.1], получаем, что носитель S_k содержится в G_k. Следовательно, для всех $y \in \mathbb{R}^n$ имеем, что

$$H_{W_k}(y) \le H_{G_k}(y) = H_{supp\ (A^* S_k)}(y) - H_{supp\ \mu}(y) \le$$

$$\le H_{\Omega_k + supp\ \mu}(y) - H_{supp\ \mu}(y) = H_{\Omega_k}(y).$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\Omega_k \subset int\ (ch(W_k \cup \overline{\tilde{X}}_{2,m+1}))$, получим, что

$$H_{W_k}(y) < \max(H_{W_k}(y), H_{\overline{\tilde{X}}_{2,m+1}}(y)),\ y \in \mathbb{R}^n.$$

Но это невозможно ввиду (3). Таким образом, для каждого $k \in \mathbb{N}$ выпуклая оболочка W_k носителя функционала S_k $(k = 1, 2, \ldots)$ содержится в $\overline{\tilde{X}}_{2,m+2}$.

Пусть $\eta \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ – функция с носителем в $\overline{\tilde{X}}_{2,m+4}$ такая, что $0 \le \eta(x) \le 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $\eta(x) = 1$ для $x \in \overline{\tilde{X}}_{2,m+3}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим функционал $\tilde{S}_k$ на $\mathcal{E}(\tilde{X}_2)$ по правилу: $\tilde{S}_k(f) = S_k(\eta f),\ f \in \mathcal{E}(\tilde{X}_2)$. Очевидно, $\tilde{S}_k \in \mathcal{E}^*(\tilde{X}_2)$ и $\tilde{S}_k(f) = S_k(f),\ f \in \mathcal{E}(X_2)$. Отметим, что так как для каждого $f \in \mathcal{E}(X_1)$ $(A+B)(f) = (\tilde{A}+\tilde{B})(f)$, то функционалы $(A+B)^* S_k$ и $(\tilde{A}+\tilde{B})^* \tilde{S}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ совпадают на $\mathcal{E}(X_1)$. Теперь, принимая во внимание, что $\mathcal{E}(X_1)$ плотно в $\mathcal{E}(\tilde{X}_1)$, получаем, что $(\tilde{A}+\tilde{B})^* \tilde{S}_k$ – (единственное) продолжение функционала $(A+B)^* S_k$ на $\mathcal{E}(\tilde{X}_1)$.

Покажем, что функционалы $(\tilde{A}+\tilde{B})^* \tilde{S}_k$ сходятся в $\mathcal{E}^*(\tilde{X}_1)$. Сперва отметим, что последовательность $((\tilde{A}+\tilde{B})^* \tilde{S}_k)_{k=1}^{\infty}$ – фундаментальная в $\mathcal{E}^*(\tilde{X}_1)$. Действительно, пусть $\mathcal{B}$ – произвольное ограниченное множество в $\mathcal{E}(\tilde{X}_1)$ и

$$\mathcal{B}^\circ = \{F \in \mathcal{E}^*(\tilde{X}_1) : |F(f)| \le 1\ \forall f \in \mathcal{B}\}$$

– ее поляра. Возьмем функцию $\omega \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ с носителем в $\overline{\tilde{X}}_{2,m+4} + supp\ \mu$ такую, что $0 \le \omega(x) \le 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $\omega(x) = 1$ для $x \in \overline{\tilde{X}}_{2,m+3} + supp\ \mu$. Так как носители функционалов $\tilde{S}_k$ лежат в $\overline{\tilde{X}}_{2,m+2}$, то носители функционалов $(\tilde{A}+\tilde{B})^* \tilde{S}_k$ содержатся $\tilde{X}_{2,m+2} + supp\ \mu$. Поэтому для любого $f \in \mathcal{E}(\tilde{X}_1)$ и всех $k, m \in \mathbb{N}$ имеем, что

$$((\tilde{A}+\tilde{B})^* \tilde{S}_k)(f) - ((\tilde{A}+\tilde{B})^* \tilde{S}_m)(f) = ((\tilde{A}+\tilde{B})^* \tilde{S}_k)(\omega f) - ((\tilde{A}+\tilde{B})^* \tilde{S}_m)(\omega f).$$

Мы можем рассматривать ωf как элемент $\mathcal{E}(X_1)$ полагая $(\omega f)(x) = 0$ для $x \in X_1 \setminus (\overline{\tilde{X}}_{2,m+4} + supp\ \mu)$. Тогда

$$((\tilde{A}+\tilde{B})^* \tilde{S}_k)(f) - ((\tilde{A}+\tilde{B})^* \tilde{S}_m)(f) = ((A+B)^* S_k)(\omega f) - ((A+B)^* S_m)(\omega f).$$

Отметим, что множество $\omega\mathcal{B} = \{\omega f : f \in \mathcal{B}\}$ ограничено в $\mathcal{E}(X_1)$. Так как последовательность $((A+B)^* S_k)_{k=1}^{\infty}$ сходится в $\mathcal{E}^*(X_1)$, то она – фундаментальная в $\mathcal{E}^*(X_1)$. Поэтому найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что для всех натуральных чисел k, m: $k, m \ge N$ и $g \in \omega\mathcal{B}$ имеем $|((A+B)^* S_k)(g) - ((A+B)^* S_m)(g)| \le 1$. Следовательно, для всех натуральных чисел k, m: $k, m \ge N$ и $f \in \mathcal{B}$ получаем, что

$$|((\tilde{A}+\tilde{B})^* \tilde{S}_k)(f) - ((\tilde{A}+\tilde{B})^* \tilde{S}_m)(f)| \le 1.$$

Это значит, что для всех натуральных чисел k, m: $k, m \ge N$ и $f \in \mathcal{B}$ имеем, что $(\tilde{A}+\tilde{B})^* \tilde{S}_k - ((\tilde{A}+\tilde{B})^* \tilde{S}_m \in \mathcal{B}^\circ$. Таким образом, доказано, что последовательность $((\tilde{A}+\tilde{B})^* \tilde{S}_k)_{k=1}^{\infty}$ – фундаментальная в $\mathcal{E}^*(\tilde{X}_1)$. Наконец, так как $\mathcal{E}^*(\tilde{X}_1)$ – полное, то получаем, что последовательность $((\tilde{A}+\tilde{B})^* \tilde{S}_k)_{k=1}^{\infty}$ сходится в $\mathcal{E}^*(\tilde{X}_1)$ к некоторому $\tilde{T} \in \mathcal{E}^*(\tilde{X}_1)$. Но $(\tilde{A}+\tilde{B})^*(\mathcal{E}^*(\tilde{X}_2))$ замкнуто в $\mathcal{E}^*(\tilde{X}_1)$. Следовательно, существует функционал $\tilde{S} \in \mathcal{E}^*(\tilde{X}_2)$

такой, что $\tilde{T} = (\tilde{A} + \tilde{B})^* \tilde{S}$. Пусть S – сужение $\tilde{S}$ на $\mathcal{E}(X_2)$. Тогда для любого $f \in \mathcal{E}(X_1)$ имеем, что $\tilde{T}(f) = T(f)$. Действительно,

$$\tilde{T}(f) = \lim_{k\to\infty}((\tilde{A} + \tilde{B})^*(\tilde{S}_k))(f) = \lim_{k\to\infty} \tilde{S}_k((\tilde{A} + \tilde{B})f) = \lim_{k\to\infty} \tilde{S}_k((A + B)f) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} S_k((A + B)f) = \lim_{k\to\infty}((A + B)^* S_k)(f) = T(f).$$

Отсюда и из следующей цепочки равенств

$$\tilde{T}(f) = \lim_{k\to\infty}((\tilde{A} + \tilde{B})^*(\tilde{S}_k))(f) = ((\tilde{A} + \tilde{B})^*(\tilde{S}))(f) = \tilde{S}((\tilde{A} + \tilde{B})f) =$$

$$= \tilde{S}((A + B)f) = S((A + B)f) = ((A + B)^* S)(f)$$

следует, что $T = (A + B)^* S$. Таким образом, образ оператора $(A + B)^*$ замкнут в $\mathcal{E}^*(X_1)$. Следовательно, образ оператора $A + B$ замкнут в $\mathcal{E}(X_2)$.

Теперь докажем, что образ оператора $A + B$ плотен в $\mathcal{E}(X_2)$. Это будет сделано, если покажем, что произвольный функционал $S \in \mathcal{E}^*(X_2)$ такой, что $S((A + B)f) = 0$ для всех $f \in \mathcal{E}(X_1)$, – нулевой функционал. Предположим противное. Тогда носитель S не пуст. Пусть N – порядок распределения S и $\delta > 0$ настолько мало, что $(supp\ S)^\delta \Subset X_2$. Тогда найдется постоянная $c_\delta > 0$ такая, что

$$|S(g)| \le c_\delta \|g\|_{(supp\ S)^\delta, N},\ g \in \mathcal{E}(X_2).$$

Отсюда и из неравенства (2) следует, что существуют выпуклый компакт $V \subset int(supp\ \mu)$, число $N_1 \in \mathbb{Z}_+$ (зависящее от $ch(supp\ S)$) и постоянная $C_\delta > 0$ такие, чтодля любого $f \in \mathcal{E}(X_1)$

$$|(B^* S)(f)| \le C_\delta \|f\|_{ch(supp\ S)+V, N_1}.$$

Следовательно, носитель функционала $B^* S$ содержится в $ch(supp\ S) + V$. С другой стороны, из равенства $B^* S = -\mu * S$ и по теореме о носителях [6, Теорема 4.3.3] $ch(supp\ B^* S) = ch(supp\ S) + supp\ \mu$. Таким образом, $ch(supp\ S) + supp\ \mu \subset ch(supp\ S) + V$. Но это включение невозможно так, как выпуклый компакт V содержится во внутренности носителя μ. Следовательно, предположение, что S – ненулевой функционал было неверным. Таким образом, $S = 0$. Это означает, что образ $A + B$ плотен в $\mathcal{E}(X_2)$. Тем самым, теорема полностью доказана.

4. Пример оператора B

Пусть $\mu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ – обратимое распределение и $supp\ \mu = \overline{D(1)}$. Распределения с такими свойствами могут быть построены (см., например,, [8, Theorem 1, Theorem 3, Theorem 4]). Пусть $X_2 = D(1)$, $X_1 = D(2)$. Пусть $A : \mathcal{E}(X_1) \to \mathcal{E}(X_2)$ – оператор свертки, действующий по правилу $(Af)(x) = (\mu * f)(x),\ x \in X_1$. Возьмем функцию $b \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{2n})$ с носителем в $\overline{D(\frac{1}{4})} \times \overline{D(\frac{1}{4})}$. Определим оператор $B : \mathcal{E}(X_1) \to \mathcal{E}(X_2)$ по правилу

$$(Bf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} b(x, \xi) f(x + \xi)\ d\xi,\ \|x\| \le \frac{1}{4},$$

$$(Bf)(x) = 0,\ \frac{1}{4} < \|x\| < 1.$$

Пусть K – выпуклый компакт в X_2 и $\gamma := dist(K, \partial X_2)$. Покажем, что существует выпуклый компакт $V \subset int(supp\ \mu)$ такой, что для любых $\varepsilon \in (0, \gamma)$ и $N_2 \in \mathbb{Z}_+$ найдется постоянная $c = c(\varepsilon, N_2) > 0$ такая, что

$$\|Bf\|_{K^\varepsilon, N_2} \le c\|f\|_{K+V,0}\ ,\ f \in \mathcal{E}(X_1).$$

Очевидно, для любого $\varepsilon \in (0, \gamma)$ и для любого $N_2 \in \mathbb{Z}_+$ найдется постоянная $C > 0$, зависящая от b и N_2 такая, что для каждого $f \in \mathcal{E}(X_1)$ имеем

$$\|Bf\|_{K^\varepsilon, N_2} = \|Bf\|_{K^\varepsilon \cap \overline{D(\frac{1}{4})}, N_2} \le C_1 \|f\|_{(K^\varepsilon \cap \overline{D(\frac{1}{4})}) + \overline{D(\frac{1}{4})}, 0}. \tag{9}$$

Если $\gamma \in (0, \frac{3}{4})$, то из (9) имеем, что

$$\|Bf\|_{K^\varepsilon, N_2} \le C_1 \|f\|_{K^\gamma + \overline{D(\frac{1}{4})}, 0} = C_1 \|f\|_{K + \overline{D(\gamma + \frac{1}{4})}, 0}$$

Следовательно, в этом случае можно положить $V = \overline{D(\gamma + \frac{1}{4})}$. Если $\gamma \in [\frac{3}{4}, 1]$, то $K \subset \overline{D(\frac{1}{4})}$ и из (9) имеем

$$\|Bf\|_{K^\varepsilon, N_2} \le C_1 \|f\|_{\overline{D(\frac{1}{2})}, 0} \le C_1 \|f\|_{K + \overline{D(\frac{3}{4})}, 0}.$$

Итак, при $\gamma \in [\frac{3}{4}, 1]$ можно положить $V = \overline{D(\frac{3}{4})}$.

Таким образом, по Теореме оператор $A + B : \mathcal{E}(X_1) \to \mathcal{E}(X_2)$ сюръективен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. Ehrenpreis *Solution of some problems of division, Part I. Division by a polynomial of derivation* // Amer. J. Math. 1954. V. 76. P. 883–903.
2. B. Malgrange *Existence et approximation des solutions des equation aux derivees partielles et des equations de convolution* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1955-56, 6, P. 271–355/
3. L. Ehrenpreis *Solutions of some problems of division, Part IV. Invertible and elliptic operators* // Amer. J. Math. 1960. V. 82. P. 522–588.
4. L. Hörmander *On the range of differential and convolution operators.* Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey. 1961.
5. L. Hörmander *On the range of convolution operators* // Ann. of Math. 1962. V. 76. P. 148–170.
6. Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 1, 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами* М.: Мир, 1986.
7. L. Hörmander *Supports and singular supports of convolutions* // Acta Math. 1963. V. 110. P. 279–302.
8. W. Abramczuk *A class of surjective convolution operators* // Pacific J. Math. 1984. V. 110. P. 1–7.
9. C. Fernandez, A. Galbis, D. Jornet *Perturbations of surjective convolution operators* // Proc. Amer. Math. Soc. 2002. V. 130. P. 2377–2381.
10. R. Braun, R. Meise, B.A. Taylor *Ultradifferentiable functions and Fourier analysis* // Results Math. 1990. V. 17. P. 206–237.
11. J. Bonet, A. Galbis, R. Meise *On the range of convolution operators on non-quasianalytic ultradifferentiable functions* // Studia Math. 1997. V. 126. P. 171–198.
12. R. Braun, R. Meise, D. Vogt *Existence of fundamental solutions and surjectivity of convolution operators on classes of ultradifferentiable functions* // Proc. London Math. Soc. 1990. V. 61. P. 344–370.
13. Мерзляков С.Г. *О возмущении операторов свертки в пространствах голоморфных функций* // Матем. сб. 1995. Т. 186, №3. С. 103–130.
14. L. Hörmander *Convolution Equations in Convex Domains* // Inventiones math. 1968. V. 4. P. 306–317.
15. Себаштьян-и-Сильва Ж. *О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях* // сб. пер. Математика. 1957. 1:1. С. 60–77.
16. I.Kh. Musin *On the Fourier-Laplace representation of analytic functions in tube domains* // Collect. Math. 1994. V. 45. P. 301–308.
17. Эдвардс Р. *Функциональный анализ.* М.: Мир, 1972.

Ильдар Хамитович Мусин
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: musin_ildar@mail.ru