ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 4 (2016). С. 114-126.

УДК 517.9

СИММЕТРИЙНАЯ РЕДУКЦИЯ И ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ С ИСТОЧНИКОМ

С.Ю. ЛУКАЩУК

Аннотация. Рассматривается задача построения инвариантных решений для нелинейного дробно-дифференциального уравнения аномальной диффузии с источником. На основе проведенной ранее групповой классификации исследуемого уравнения, для каждого случая классификации построена оптимальная система одномерных подалгебр алгебр Ли инфинитезимальных операторов группы точечных преобразований, допускаемых уравнением. Для каждой одномерной подалгебры каждой оптимальной системы найден соответствующий вид инвариантного решения и выполнена симметрийная редукция к обыкновенному дифференциальному уравнению. Доказано, что выделяется всего три различных типа редукционных уравнений (фактор-уравнений): обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, интегрируемое в квадратурах, и два обыкновенных нелинейных дробно-дифференциальных уравнения, для ряда частных случаев которых в работе построены точные решения.

Ключевые слова: дробно-дифференциальное уравнение диффузии, симметрия, оптимальная система подалгебр, симметрийная редукция, инвариантное решение.

Mathematics Subject Classification: 45K05, 70G65

1. Введение

Рассматривается нелинейное уравнение аномальной диффузии

$$D_t^\alpha u = (k(u)u_x)_x + f(u), \quad \alpha \in (0,2) \tag{1}$$

с дробной производной Римана–Лиувилля [1,2] по времени:

$$D_t^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\int_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau. \tag{2}$$

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция и $n = [\alpha]+1$.

Уравнение (1) при $\alpha \in (0,1)$ известно как уравнение субдиффузии, а при $\alpha \in (1,2)$ представляет собой диффузионно-волновое уравнение [3–6]. В предельном случае $\alpha = 1$ оно переходит в классическое уравнение диффузии, при $\alpha = 2$ — в волновое уравнение.

В настоящее время наиболее хорошо изученным является случай, когда уравнение (1) не содержит источника ($f(u) = 0$) и является линейным ($k(u) = const$). Вопросы существования и единственности решения соответствующих начально-краевых задач для такого

S.Yu. Lukashchuk, Symmetry reduction and invariant solutions for nonlinear fractional diffusion equation with a source term.

Работа выполнена в ФГБОУ ВО УГАТУ в рамках договора № 11.G34.31.0042 по постановлению № 220 Правительства РФ.

Поступила 8 февраля 2016 г.

линейного уравнения изучались многими авторами, которые показали, что решения этих задач представляются, как правило, через специальные функции Райта и Фокса [6–8].

Нелинейные уравнения аномальной диффузии изучались менее интенсивно. Это обусловлено значительной сложностью исследования нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, частным случаем которых является и уравнение (1). Тем не менее, существует ряд общих математических подходов, позволяющих построить точные решения нелинейных дифференциальных уравнений, одним из которых является современный групповой анализ [9, 10].

Исследование симметрийных свойств уравнений дробного порядка представляет собой весьма непростую задачу даже для линейных уравнений. Сложность задачи обусловлена, прежде всего, свойствами интегро-дифференциального оператора дробного дифференцирования и связана с его нелокальностью. В отличие от классического оператора дифференцирования целого порядка, действие оператора дробного дифференцирования на произведение двух функций представляется не конечной суммой, а бесконечным рядом (так называемое, обобщенное правило Лейбница) [1]. Еще более сложным образом представляется дробная производная сложной функции — в общем случае приходится иметь дело с четырехкратным рядом [13]. В результате решение определяющих уравнений для нахождения группы точечных преобразований оказывается весьма трудоемким.

Общие методы теории групп преобразований для дробно-дифференциальных уравнений представлены в работах [13–18]. Построены формулы продолжения группы точечных преобразований на дробно-дифференциальные переменные, предложен алгоритм нахождения линейно-автономных симметрий таких уравнений, развиты алгоритмы построения законов сохранения по известным симметриям на основе дробно-дифференциальных обобщений теоремы Нётер.

Для дробно-дифференциальных уравнений аномальной диффузии симметрии впервые использованы для построения инвариантных решений в работах [11, 12]. Были построены инвариантные решения линейного уравнения субдиффузии и диффузионно-волнового уравнения с производными Римана–Лиувилля, соответствующие группе неравномерных растяжений. Было показано, что решения представляются через функции Райта.

В работе [14] проведена групповая классификация нелинейного уравнения (1) без источника. Показано, что такое уравнение всегда допускает двухпараметрическую группу, состоящую из группы переносов по переменной x и группы неравномерных растяжений. Эта основная группа расширяется для четырех частных видов зависимости коэффициента диффузии $k(u)$: $k = const$, $k = u^{\sigma}$, $k = u^{2\alpha/(1-\alpha)}$ и $k = u^{-4/3}$.

В работе [19] приведены результаты групповой классификации классического ($\alpha = 1$) уравнения диффузии с источником вида (1), а также инвариантные решения, соответствующие оптимальным системам одномерных подалгебр для каждого случая групповой классификации. Групповая классификация дробно-дифференциального уравнения (1) проведена в работе [20]. Там же построены некоторые инвариантные решения этого уравнения. Однако, задача построения инвариантных решений этого уравнения, соответствующих оптимальным системам подалгебр, в [20] лишь обозначена.

В настоящей работе приводится решение этой задачи для всех одномерных подалгебр конечномерных алгебр Ли инфинитезимальных операторов групп точечных преобразований, допускаемых уравнением (1). Доказано, что в результате симметрийной редукции исходное уравнение аномальной диффузии приводится к одному из трех видов обыкновенных дифференциальных уравнений, называемых редуцированными уравнениями, или фактор-уравнениями (в терминах академика Л. В. Овсянникова): одному уравнению второго порядка, которое проинтегрировано в квадратурах, и двум обыкновенным дробно-дифференциальным уравнениям, для которых найдены допускаемые ими группы линейно-автономных симметрий и построены соответствующие инвариантные решения.

2. Оптимальные системы одномерных подалгебр

Так как (1) является скалярным уравнением с двумя независимыми переменными, то для построения инвариантных решений могут быть использованы только одно- и двумерные подалгебры. При этом решения, построенные на двумерных подалгебрах, являются частными случаями решений, построенных на соответствующих вложенных одномерных подалгебрах. Поэтому интерес представляют, в первую очередь, одномерные подалгебры.

Групповая классификация уравнения (1) выполнена в работе [20], ее результаты приведены в первых трех столбцах табл. 1. При этом функция $g(t,x)$, определяющая бесконечномерную алгебру L_∞, в случаях I.1 и I.2 является произвольным решением уравнения $D_t^\alpha g = g_{xx}$, а в случае I.3 — уравнения $D_t^\alpha g = g_{xx} + \delta g$.

В четвертом столбце (L) таблицы 1 указан тип соответствующей алгебры инфинитезимальных операторов. Из анализа табл. 1 видно, что конечномерная часть алгебр Ли операторов групп, допускаемых уравнением (1), исчерпывается шестью типами алгебр — двумя двумерными, двумя трехмерными и двумя четырехмерными:

$$\begin{array}{ll}
1)\ L_2 = 2A_1; & \\
2)\ L_2 = A_2: & [e_1,e_2]=e_2; \\
3)\ L_3 = A_2\oplus A_1: & [e_1,e_2]=e_2; \\
4)\ L_3 = A_{3,8}: & [e_1,e_2]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_3,\ [e_3,e_1]=2e_2; \\
5)\ L_4 = 2A_2: & [e_1,e_2]=e_2,\ [e_3,e_4]=e_4; \\
6)\ L_4 = A_{3,8}\oplus A_1: & [e_1,e_2]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_3,\ [e_3,e_1]=2e_2
\end{array}$$

(здесь e_i — i-й базисный вектор алгебры и, как обычно, указаны только ненулевые коммутационные соотношения).

Также в четвертом столбце (L) табл. 1 указана связь между базисами $\{e_i\}$ и $\{X_i\}$. Например, в случае IV.5 запись $< \frac{2}{\omega}(4-1), \frac{1}{\omega}(1+3-4), \frac{1}{\omega}(1+3), 2 >$ означает, что имеет место замена базиса

$$e_1 = \frac{2}{\omega}(X_4 - X_1),\ e_2 = \frac{1}{\omega}(X_1 + X_3 - X_4),\ e_3 = \frac{1}{\omega}(X_1 + X_3),\ e_4 = X_2.$$

Для алгебр малых размерностей оптимальные системы подалгебр хорошо известны. В частности, для вещественных алгебр Ли размерности три и четыре такие оптимальные системы построены в работе [21]. Соответствующие оптимальные системы одномерных подалгебр были взяты за основу в данной работе. В ряде случаев, для упрощения построения инвариантных решений, эти системы были дополнительно преобразованы с помощью соответствующих групп внутренних автоморфизмов алгебр. Также учитывалось, что уравнение (1) инвариантно относительно отражения $\bar{x} = -x$. Окончательный вид оптимальных систем одномерных подалгебр для рассматриваемого уравнения приведен в последнем столбце (ΘL_1) табл. 1. Все оптимальные системы записаны в базисе $\{X_i\}$. Как обычно, указаны только номера соответствующих операторов, т.е. запись $2+\beta 3$ означает подалгебру с оператором $X_2 + \beta X_3$, где β — произвольная вещественная постоянная. Из табл. 1 видно, что размерность соответствующих оптимальных систем одномерных подалгебр для уравнения (1) не превышает семи.

3. Симметрийная редукция

Для каждого случая каждой оптимальной системы одномерных подалгебр из табл. 1 был найден вид соответствующего инвариантного решения и проведена симметрийная редукция уравнения (1). Результаты представлены в табл. 2. Редукция проводилась таким образом, чтобы сохранить вид дробной производной Римана–Лиувилля. Отметим, что такой подход является не единственно возможным. В работе [11] для построения инвариантного решения на группе неравномерных растяжений использовалась редукция к уравнению с дробно-дифференциальным оператором типа Эрдейи–Кобера.

Таблица 1: Групповая классификация уравнения (1) и оптимальные системы одномерных подалгебр (здесь $\varepsilon = \pm 1,\ \delta = \pm 1,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R},\ \rho, \lambda \geq 0,\ \omega = 2/\sqrt{3}$)

$k(u)$	$f(u)$	X	L	ΘL_1
I. $k = 1$	1. $f = 0$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{2}{\alpha} t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}$, $X_3 = u \frac{\partial}{\partial u}$, $X_\infty = g(t,x) \frac{\partial}{\partial u}$	$L_3 \oplus L_\infty$, $L_3 = A_2 \oplus A_1$ $< -2, 1, 3 >$	1. $\{1\}$ 2. $\{1+3\}$ 3. $\{2+\beta 3\}$ 4. $\{3\}$
	2. $f = \delta$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{2}{\alpha} t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} +$ $+ \frac{2\delta}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha \frac{\partial}{\partial u}$ $X_3 = \left(u - \frac{\delta}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha\right) \frac{\partial}{\partial u}$, $X_\infty = g(t,x) \frac{\partial}{\partial u}$	$L_3 \oplus L_\infty$ $L_3 = A_2 \oplus A_1$ $< -2, 1, 3 >$	1. $\{1\}$ 2. $\{1+3\}$ 3. $\{2+\beta 3\}$ 4. $\{3\}$
	3. $f = \delta u + \chi$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = [u - \chi t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\delta t^\alpha)] \frac{\partial}{\partial u}$, $X_\infty = g(t,x) \frac{\partial}{\partial u}$	$L_2 \oplus L_\infty$, $L_2 = 2A_1$ $< 1, 2 >$	1. $\{1\}$ 2. $\{\beta 1 + 2\}$
	4. $f = \delta u^\gamma$ $(\gamma \neq 0,\ 1)$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{2}{\alpha} t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2}{1-\gamma} u \frac{\partial}{\partial u}$	$L_2 = A_2$ $< -2, 1 >$	1. $\{1\}$ 2. $\{2\}$
II. $k = u^\sigma$ $(\sigma \neq 0,$ $-\frac{4}{3},\ \frac{2\alpha}{1-\alpha})$	1. $f = 0$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{2}{\alpha} t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}$, $X_3 = \frac{\sigma}{\alpha} t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u}$	$L_3 = A_2 \oplus A_1$ $< -2, 1, -3 >$	1. $\{1\}$ 2. $\{1+3\}$ 3. $\{2+\beta 3\}$ 4. $\{3\}$
	2. $f = \delta u^\gamma$ $(\gamma \neq \sigma + 1)$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{2(1-\gamma)}{\alpha(\sigma+1-\gamma)} t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} +$ $+ \frac{2}{\sigma+1-\gamma} u \frac{\partial}{\partial u}$	$L_2 = A_2$ $< -2, 1 >$	1. $\{1\}$ 2. $\{2\}$
	3. $f = \delta u^{\sigma+1}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{\sigma}{\alpha} t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u}$	$L_2 = 2A_1$ $< 1, 2 >$	1. $\{1\}$ 2. $\{\beta 1 + 2\}$
III. $k = u^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}$	1. $f = 0$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\alpha-1}{2} u \frac{\partial}{\partial u}$, $X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\alpha-1}{\alpha} u \frac{\partial}{\partial u}$, $X_4 = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + (\alpha-1) t u \frac{\partial}{\partial u}$	$L_4 = 2A_2$ $< -3, 1, 2, 4 >$	1. $\{1\}$ 2. $\{1+2\}$ 3. $\{1+4\}$ 4. $\{2\}$ 5. $\{\beta 2 + 3\}$ 6. $\{3 + \varepsilon 4\}$ 7. $\{4\}$
	2. $f = \delta u^\gamma$ $(\gamma \neq \frac{1+\alpha}{1-\alpha})$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{2(1-\gamma)(1-\alpha))}{\alpha[1-\gamma+\alpha(1+\gamma)]} t \frac{\partial}{\partial t} +$ $+ x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2(1-\alpha)}{1-\gamma+\alpha(1+\gamma)} u \frac{\partial}{\partial u}$	$L_2 = A_2$ $< -2, 1 >$	1. $\{1\}$ 2. $\{2\}$

Продолжение таблицы 1

$k(u)$	$f(u)$	X	L	ΘL_1
	3. $f=\delta u^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$	$X_1=\frac{\partial}{\partial x}$, $X_2=t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{(\alpha-1)}{2}u\frac{\partial}{\partial u}$, $X_3=t^2\frac{\partial}{\partial t}+(\alpha-1)tu\frac{\partial}{\partial u}$	$L_3=A_2\oplus A_1$ $<2,3,1>$	1. $\{1\}$ 2. $\{\beta 1+2\}$ 3. $\{1+3\}$ 4. $\{3\}$
IV. $k=u^{-\frac{4}{3}}$	1. $f=0$	$X_1=\frac{\partial}{\partial x}$, $X_2=\frac{2}{\alpha}t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial u}$, $X_3=x\frac{\partial}{\partial x}-\frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial u}$, $X_4=x^2\frac{\partial}{\partial x}-3xu\frac{\partial}{\partial u}$	$L_4=A_{3,8}\oplus A_1$ $<1,3,-4,2>$	1. $\{1\}$ 2. $\{1+2\}$ 3. $\{1+\beta 2-4\}$ 4. $\{2\}$ 5. $\{\rho 2+3\}$
	2. $f=\delta u$	$X_1=\frac{\partial}{\partial x}$ $X_2=x\frac{\partial}{\partial x}-\frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial u}$, $X_3=x^2\frac{\partial}{\partial x}-3xu\frac{\partial}{\partial u}$	$L_3=A_{3,8}$ $<1,2,-3>$	1. $\{1\}$ 2. $\{2\}$ 3. $\{1-3\}$
	3. $f=\delta u^\gamma$ $(\gamma\neq-\frac{1}{3},1)$	$X_1=\frac{\partial}{\partial x}$, $X_2=\frac{6(1-\gamma)}{\alpha(1+3\gamma)}t\frac{\partial}{\partial t}-x\frac{\partial}{\partial x}+$ $+\frac{6}{1+3\gamma}u\frac{\partial}{\partial u}$	$L_2=A_2$ $<2,1>$	1. $\{1\}$ 2. $\{2\}$
	4. $f=u^{-\frac{1}{3}}$	$X_1=\frac{\partial}{\partial x}$, $X_2=4t\frac{\partial}{\partial t}+3\alpha u\frac{\partial}{\partial u}$, $X_3=e^{\omega x}\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{3}e^{\omega x}u\frac{\partial}{\partial u}$, $X_4=e^{-\omega x}\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{3}e^{-\omega x}u\frac{\partial}{\partial u}$	$L_4=A_{3,8}\oplus A_1$ $<\frac{1}{\omega}3,-\frac{1}{\omega}1,$ $-\frac{1}{\omega}4,2>$	1. $\{1\}$ 2. $\{\rho 1+2\}$ 3. $\{2+\varepsilon 3\}$ 4. $\{\beta 2+3-4\}$ 5. $\{3\}$
	5. $f=-u^{-\frac{1}{3}}$	$X_1=\frac{\partial}{\partial x}$, $X_2=4t\frac{\partial}{\partial t}+3\alpha u\frac{\partial}{\partial u}$, $X_3=\cos(\omega x)\frac{\partial}{\partial x}+$ $+\sqrt{3}\sin(\omega x)u\frac{\partial}{\partial u}$, $X_4=\sin(\omega x)\frac{\partial}{\partial x}-$ $-\sqrt{3}\cos(\omega x)u\frac{\partial}{\partial u}$	$L_4=A_{3,8}\oplus A_1$ $<\frac{2}{\omega}(4-1),$ $\frac{1}{\omega}(1+3-4),$ $\frac{1}{\omega}(1+3),2>$	1. $\{1\}$ 2. $\{\rho 1+2\}$ 3. $\{1+2+3\}$ 4. $\{1+4\}$ 5. $\{\lambda 2+3\}$
	6. $f=u^{-\frac{1}{3}}+$ $+\chi u$	$X_1=\frac{\partial}{\partial x}$, $X_2=e^{\omega x}\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{3}e^{\omega x}u\frac{\partial}{\partial u}$, $X_3=e^{-\omega x}\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{3}e^{-\omega x}u\frac{\partial}{\partial u}$,	$L_3=A_{3,8}$ $<\frac{1}{\omega}2,-\frac{1}{\omega}1,$ $-\frac{1}{\omega}3>$	1. $\{1\}$ 2. $\{2\}$ 3. $\{2-3\}$
	7. $f=$ $=-u^{-\frac{1}{3}}+\chi u$	$X_1=\frac{\partial}{\partial x}$, $X_2=\cos(\omega x)\frac{\partial}{\partial x}+$ $+\sqrt{3}\sin(\omega x)u\frac{\partial}{\partial u}$, $X_3=\sin(\omega x)\frac{\partial}{\partial x}-$ $-\sqrt{3}\cos(\omega x)u\frac{\partial}{\partial u}$	$L_3=A_{3,8}$ $<\frac{2}{\omega}(3-1),$ $\frac{1}{\omega}(1+2-3),$ $\frac{1}{\omega}(1+2)>$	1. $\{1\}$ 2. $\{1+3\}$ 3. $\{2\}$

Таблица 2: Вид инваринтных решений и соответствующие редуцированные уравнения для уравнения (1) (здесь $\varepsilon = \pm 1,\ \delta = \pm 1,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R},\ \rho, \lambda \geq 0,\ \omega = 2/\sqrt{3}$)

N_k	N_f	N_Θ	Вид решения	Редуцированное уравнение
I	1	1	$u = \varphi(t)$	$D_t^\alpha \varphi = 0$
		2	$u = e^x \varphi(t)$	$D_t^\alpha \varphi = \varphi$
		3	$u = x^{-\beta}\varphi(\tau),\ \tau = tx^{-\frac{2}{\alpha}}$	$D_\tau^\alpha \varphi = \frac{4}{\alpha^2}\tau^2\varphi'' + \frac{2}{\alpha}(\frac{2}{\alpha} + 1 + 2\beta)\tau\varphi' + \beta(\beta+1)\varphi$
		4	—	—
	2	1	$u = \varphi(t)$	$D_t^\alpha \varphi = \delta$
		2	$u = e^x \varphi(t) + \frac{\delta t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$	$D_t^\alpha \varphi = \varphi$
		3	$u = x^{-\beta}\varphi(\tau) + \frac{\delta t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$, $\tau = tx^{-\frac{2}{\alpha}}$	$D_\tau^\alpha \varphi = \frac{4}{\alpha^2}\tau^2\varphi'' + \frac{2}{\alpha}(\frac{2}{\alpha} + 1 + 2\beta)\tau\varphi' + \beta(\beta+1)\varphi$
		4	$u = \frac{\delta t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$	—
	3	1	$u = \varphi(t)$	$D_t^\alpha \varphi = \delta\varphi + \chi$
		2	$u = e^{-\beta x}\varphi(t) +$ $+\chi t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\delta t^\alpha),\ (\beta \neq 0)$	$D_\tau^\alpha \varphi = (\beta^2 + \delta)\varphi$
			$u = \chi t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\delta t^\alpha)\ (\beta = 0)$	—
	4	1	$u = \varphi(t)$	$D_t^\alpha \varphi = \delta\varphi^\gamma\ (\gamma \neq 0,\, 1)$
		2	$u = x^{-\beta}\varphi(\tau),\ \tau = tx^{-\frac{2}{\alpha}}$, $\beta = \frac{2}{1-\gamma}\ (\gamma \neq 0,\, 1)$	$D_\tau^\alpha \varphi = \frac{4}{\alpha^2}\tau^2\varphi'' + \frac{2}{\alpha}(\frac{2}{\alpha} + 1 + 2\beta)\tau\varphi' +$ $+\beta(\beta+1)\varphi + \delta\varphi^\gamma$
II	1	1	$u = \varphi(t)$	$D_t^\alpha \varphi = 0$
		2	$u = e^{-x}\varphi(\tau),\ \tau = te^{-\frac{\sigma}{\alpha}x}$	$D_\tau^\alpha \varphi = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\tau^2\varphi^\sigma\varphi'' + \frac{\sigma^3}{\alpha^2}\tau^2\varphi^{\sigma-1}(\varphi')^2 +$ $+\frac{\sigma}{\alpha}\left[\frac{\sigma}{\alpha} + 2(1+\sigma)\right]\tau\varphi^\sigma\varphi' + (\sigma+1)\varphi^{\sigma+1}$
		3	$u = x^{-\beta}\varphi(\tau),\ \tau = tx^\nu$, $\nu = -\frac{\beta\sigma+2}{\alpha}$,	$D_\tau^\alpha \varphi = \nu^2\tau^2\varphi^\sigma\varphi'' + \sigma\nu^2\tau^2\varphi^{\sigma-1}(\varphi')^2 +$ $+\nu[\nu - 1 - 2\beta(\sigma+1)]\tau\varphi^\sigma\varphi' +$ $+\beta[1 + \beta(1+\sigma)]\varphi^{\sigma+1}$
		4	$u = t^{-\frac{\alpha}{\sigma}}\varphi(x)$	$\varphi\varphi'' + \sigma(\varphi')^2 - \frac{\Gamma(1-\alpha/\sigma)}{\Gamma(1-\alpha-\alpha/\sigma)}\varphi^{2-\sigma} = 0$
	2	1	$u = \varphi(t)$	$D_t^\alpha \varphi = \delta\varphi^\gamma$
		2	$u = x^{-\beta}\varphi(\tau),\ \tau = tx^\nu$, $\nu = -\frac{\beta\sigma+2}{\alpha},\ \beta = -\frac{2}{\sigma+1-\gamma}$	$D_\tau^\alpha \varphi = \nu^2\tau^2\varphi^\sigma\varphi'' + \sigma\nu^2\tau^2\varphi^{\sigma-1}(\varphi')^2 +$ $+\nu[\nu - 1 - 2\beta(\sigma+1)]\tau\varphi^\sigma\varphi' +$ $+\beta[1 + \beta(1+\sigma)]\varphi^{\sigma+1} + \delta\varphi^\gamma$
	3	1	$u = \varphi(t)$	$D_t^\alpha \varphi = \delta\varphi^{\sigma+1}$
		2	$u = e^{-\frac{x}{\beta}}\varphi(\tau),\ \tau = te^{\nu x}$, $\nu = -\frac{\sigma}{\alpha\beta}\ (\beta \neq 0)$	$D_\tau^\alpha \varphi = \nu^2\tau^2\varphi^\sigma\varphi'' + \sigma\nu^2\tau^2\varphi^{\sigma-1}(\varphi')^2 +$ $+\nu\left[\nu - \frac{2(\sigma+1)}{\beta}\right]\tau\varphi^\sigma\varphi' + \left(\frac{\sigma+1}{\beta^2} + \delta\right)\varphi^{\sigma+1}$
			$u = t^{-\frac{\alpha}{\sigma}}\varphi(x)\ (\beta = 0)$	$\varphi\varphi'' + \sigma(\varphi')^2 + \delta\varphi^2 - \frac{\Gamma(1-\alpha/\sigma)}{\Gamma(1-\alpha-\alpha/\sigma)}\varphi^{2-\sigma} = 0$

Продолжение таблицы 2

N_k	N_f	N_Θ	Вид решения	Редуцированное уравнение
III	1	1	$u=\varphi(t)$	$D_t^\alpha\varphi=0$
		2	$u=e^{\frac{\alpha-1}{2}x}\varphi(\tau)$, $\tau=te^{-x},\ \sigma=\frac{2\alpha}{1-\alpha}$	$D_\tau^\alpha\varphi=\tau^2\varphi^\sigma\varphi''+\sigma\tau^2\varphi^{\sigma-1}(\varphi')^2+$ $+(\alpha+2)\tau\varphi^\sigma\varphi'+\frac{1-\alpha^2}{4}\varphi^{\sigma+1}$
		3	$u=(1+tx)^{\alpha-1}\varphi(\tau)$, $\tau=\frac{t}{1+tx},\ \sigma=\frac{2\alpha}{1-\alpha}$	$D_\tau^\alpha\varphi=\tau^4\varphi^\sigma\varphi''+\sigma\tau^4\varphi^{\sigma-1}(\varphi')^2+$ $+2(\alpha+2)\tau^3\varphi^\sigma\varphi'+(1-\alpha)(2+\alpha)\tau^2\varphi^{\sigma+1}$
		4	$u=t^{\frac{\alpha-1}{2}}\varphi(x)$	$\varphi\varphi''+\frac{2\alpha}{1-\alpha}(\varphi')^2-\frac{\Gamma(1/2+\alpha/2)}{\Gamma(1/2-\alpha/2)}\varphi^{\frac{4\alpha-2}{\alpha-1}}=0$
		5	$u=x^\nu\varphi(\tau),\ \tau=tx^{-\beta}$, $\nu=\frac{2-\alpha\beta}{\sigma},\ \sigma=\frac{2\alpha}{1-\alpha}$	$D_\tau^\alpha\varphi=\beta^2\tau^2\varphi^\sigma\varphi''+\sigma\beta^2\tau^2\varphi^{\sigma-1}(\varphi')^2+$ $+\beta[\beta+1-2\gamma(\sigma+1)]\tau\varphi^\sigma\varphi'+$ $+\nu[\nu(\sigma+1)-1]\varphi^{\sigma+1}$
		6	$u=x^{\frac{2}{\sigma}}\varphi(\tau)\times$ $\times(1-\varepsilon\tau\ln(x))^{1-\alpha}$, $\tau=\frac{t}{1+\varepsilon t\ln(x)},\ \sigma=\frac{2\alpha}{1-\alpha}$	$D_\tau^\alpha\varphi=\tau^4\varphi^\sigma\varphi''+\sigma\tau^4\varphi^{\sigma-1}(\varphi')^2+$ $+\frac{\alpha+2}{\alpha}(2\alpha\tau-\varepsilon)\tau^2\varphi^\sigma\varphi'+$ $+\frac{1-\alpha}{\alpha^2}[1-\alpha(\alpha+2)\varepsilon\tau+\alpha^2(\alpha+2)\tau^2]\varphi^{\sigma+1}$
		7	$u=t^{\alpha-1}\varphi(x)$	$\varphi\varphi''+\frac{2\alpha}{1-\alpha}(\varphi')^2=0$
	2	1	$u=\varphi(t)$	$D_t^\alpha=\delta\varphi^\gamma$
		2	$u=x^{-\beta}\varphi(\tau),\ \tau=tx^\nu$, $\nu=-\frac{\beta\sigma+2}{\alpha},\ \beta=-\frac{2}{\sigma+1-\gamma}$, $\sigma=\frac{2\alpha}{1-\alpha}\ \left(\gamma\neq\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$	$D_\tau^\alpha\varphi=\nu^2\tau^2\varphi^\sigma\varphi''+\sigma\nu^2\tau^2\varphi^{\sigma-1}(\varphi')^2+$ $+\nu[\nu-1-2\beta(\sigma+1)]\tau\varphi^\sigma\varphi'+$ $+\beta[1+\beta(1+\sigma)]\varphi^{\sigma+1}+\delta\varphi^\gamma$
	3	1	$u=\varphi(t)$	$D_t^\alpha\varphi=\delta\varphi^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$
		2	$u=e^{\frac{1-\alpha}{2}\nu x}\varphi(\tau),\ \tau=te^{\nu x}$, $\nu=-\frac{1}{\beta},\ \sigma=\frac{2\alpha}{1-\alpha}\ (\beta\neq0)$	$D_\tau^\alpha\varphi=\nu^2\tau^2\varphi^\sigma\varphi''+\sigma\nu^2\tau^2\varphi^{\sigma-1}(\varphi')^2+$ $+(\alpha+2)\nu^2\tau\varphi^\sigma\varphi'+\left(\delta+\frac{1-\alpha^2}{4}\nu^2\right)\varphi^{\sigma+1}$
			$u=t^{\frac{\alpha-1}{2}}\varphi(x)\ (\beta=0)$	$\varphi\varphi''+\frac{2\alpha}{1-\alpha}(\varphi')^2+\delta\varphi^2-\frac{\Gamma(1/2+\alpha/2)}{\Gamma(1/2-\alpha/2)}\varphi^{\frac{2-4\alpha}{1-\alpha}}=0$
		3	$u=(1+tx)^{\alpha-1}\varphi(\tau)$, $\tau=\frac{t}{1+tx},\ \sigma=\frac{2\alpha}{1-\alpha}$	$D_\tau^\alpha\varphi=\tau^4\varphi^\sigma\varphi''+\sigma\tau^3\varphi^{\sigma-1}(\varphi')^2+$ $+2(\alpha+2)\tau^3\varphi^\sigma\varphi'+$ $+[\delta-(\alpha-1)(\alpha+2)\tau^2]\varphi^{\sigma+1}$
		4	$u=t^{\alpha-1}\varphi(x)$	$\varphi\varphi''+\frac{2\alpha}{1-\alpha}(\varphi')^2+\delta\varphi^2=0$
IV	1	1	$u=\varphi(t)$	$D_t^\alpha\varphi=0$
		2	$u=e^{\frac32x}\varphi(\tau),\ \tau=te^{-\frac{2}{\alpha}x}$	$D_\tau^\alpha\varphi=\frac{4}{\alpha^2}\tau^2\varphi^{-\frac43}\varphi''-\frac{16}{3\alpha^2}\tau^2\varphi^{-\frac73}(\varphi')^2+$ $+\frac{2}{\alpha}\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\tau\varphi^{-\frac43}\varphi'-\frac34\varphi^{-\frac13}$
		3	$u=\frac{(1+x)^{\frac34\beta-\frac32}}{(1-x)^{\frac34\beta+\frac32}}\varphi(\tau)$, $\tau=t\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}$	$D_\tau^\alpha\varphi=\frac{4\beta^2}{\alpha^2}\tau^2\varphi^{-\frac43}\varphi''-\frac{16}{3}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\tau^2\varphi^{-\frac73}(\varphi')^2+$ $+\frac{2\beta^2}{\alpha^2}(\alpha+2)\tau\varphi^{-\frac43}\varphi'+\left(3-\frac{\beta^2}{4}\right)\varphi^{-\frac13}$
		4	$u=t^{\frac34\alpha}\varphi(x)$	$\varphi\varphi''-\frac43(\varphi')^2-\frac{\Gamma(1+3\alpha/4)}{\Gamma(1-\alpha/4)}\varphi^{\frac{10}{3}}=0$
		5	$u=x^{\frac32(\rho-1)}\varphi(\tau)$, $\tau=tx^{-2\frac{\rho}{\alpha}}$	$D_\tau^\alpha\varphi=\frac{4\rho^2}{\alpha^2}\tau^2\varphi^{-\frac43}\varphi''-\frac{16}{3}\frac{\rho^2}{\alpha^2}\tau^2\varphi^{-\frac73}(\varphi')^2+$ $+\frac{\rho}{\alpha}\left(\frac{4\rho}{\alpha}+2-\rho\right)\tau\varphi^{-\frac43}\varphi'-\frac34(1+\rho)\varphi^{-\frac13}$

Продолжение таблицы 2

N_k	N_f	N_Θ	Вид решения	Редуцированное уравнение
	2	1	$u=\varphi(t)$	$D_t^\alpha\varphi=\delta\varphi$
		2	$u=x^{-\frac{3}{2}}\varphi(t)$	$D_t^\alpha\varphi=\frac{3}{4}\varphi^{-\frac{1}{3}}+\delta\varphi$
		3	$u=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\varphi(t)$	$D_t^\alpha\varphi=3\varphi^{-\frac{1}{3}}+\delta\varphi$
	3	1	$u=\varphi(t)$	$D_t^\alpha\varphi=\delta\varphi^\gamma$
		2	$u=x^{-\beta}\varphi(\tau),\ \tau=tx^\nu,$ $\nu=\frac{6(1-\gamma)}{\alpha(1+3\gamma)},\ \beta=\frac{6}{1+3\gamma}$	$D_\tau^\alpha\varphi=\nu^2\tau^2\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi''-\frac{4}{3}\nu^2\tau^2\varphi^{-\frac{7}{3}}(\varphi')^2+$ $+\nu\left(\frac{2}{3}b-1+\nu\right)\tau\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi'+\left(b-\frac{b^2}{3}\right)\varphi^{-\frac{1}{3}}+\delta\varphi^\gamma$
	4	1	$u=\varphi(t)$	$D_t^\alpha\varphi=\varphi^{-1/3}$
		2	$u=t^{\frac{3}{4}\alpha}\varphi(x)\ (\rho=0)$	$\varphi\varphi''-\frac{4}{3}(\varphi')^2+\varphi^2-\frac{\Gamma(1+3\alpha/4)}{\Gamma(1-\alpha/4)}\varphi^{\frac{10}{3}}=0$
			$u=e^{-\frac{3\alpha}{\rho}x}\varphi(\tau),\ \tau=te^{\frac{4}{\rho}x}$ $(\rho>0)$	$D_\tau^\alpha\varphi=\frac{16}{\rho^2}\tau^2\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi''-\frac{64}{3\rho^2}\tau^2\varphi^{-\frac{7}{3}}(\varphi')^2+$ $+\frac{8}{\rho^2}(\alpha+2)\tau\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi'+\left(1-\frac{3\alpha^2}{\rho^2}\right)\varphi^{-\frac{1}{3}}$
		3	$u=e^{-\frac{3}{2}\omega x-3\alpha\psi(x)}\varphi(\tau),$ $\tau=te^{4\psi(x)},\ \psi(x)=\frac{\varepsilon}{\omega}e^{-\omega x}$	$D_\tau^\alpha\varphi=\tau^2\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi''-\frac{4}{3}\tau^2\varphi^{-\frac{7}{3}}(\varphi')^2+$ $+(1+2\alpha)\tau\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi'-3\alpha^2\varphi^{-\frac{1}{3}}$
		4	$u=\psi^{-\frac{3}{4}\alpha}\sinh^{-\frac{3}{2}}(\omega x)\varphi(\tau),$ $\tau=t\psi(x),$ $\psi=\left[\tanh\left(\frac{\omega x}{2}\right)\right]^{-\frac{4\beta}{\omega}}$	$D_\tau^\alpha\varphi=16\beta^2\tau^2\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi''-\frac{64}{3}\beta^2\tau^2\varphi^{-\frac{7}{3}}(\varphi')^2+$ $+8\beta^2(\alpha+2)\tau\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi'+(1-3\alpha^2\beta^2)\varphi^{-\frac{1}{3}}$
		5	$u=e^{-\frac{3}{2}\omega x}\varphi(t)$	$D_t^\alpha\varphi=0$
	5	1	$u=\varphi(t)$	$D_t^\alpha\varphi=-\varphi^{-\frac{1}{3}}$
		2	$u=t^{\frac{3}{4}\alpha}\varphi(x)\ (\rho=0)$	$\varphi\varphi''-\frac{4}{3}(\varphi')^2-\varphi^2-\frac{\Gamma(1+3\alpha/4)}{\Gamma(1-\alpha/4)}\varphi^{\frac{10}{3}}=0$
			$u=e^{\frac{3\alpha}{\rho}x}\varphi(\tau),$ $\tau=te^{-\frac{4}{\rho}x}\ (\rho>0)$	$D_\tau^\alpha\varphi=\frac{16}{\rho^2}\tau^2\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi''-\frac{64}{3\rho^2}\varphi^{-\frac{7}{3}}\tau^2(\varphi')^2+$ $+\frac{8}{\rho^2}(\alpha+2)\tau\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi'-\left(1+\frac{3\alpha^2}{\rho^2}\right)\varphi^{-\frac{1}{3}}$
		3	$u=\psi^{-\frac{3}{4}\alpha}(x)\cos^{-\frac{3}{2}}(\omega x)\varphi(\tau),$ $\tau=t\psi(x),\ \psi=e^{-\frac{4}{\omega}\tan(\omega x/2)}$	$D_\tau^\alpha\varphi=4\tau^2\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi''-\frac{16}{3}\tau^2\varphi^{-\frac{7}{3}}(\varphi')^2+$ $+2(\alpha+2)\tau\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi'-\frac{3}{4}\alpha^2\varphi^{-\frac{1}{3}}$
		4	$u=\sin^{-3}\left(\frac{\omega x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\varphi(t)$	$D_t^\alpha\varphi=0$
		5	$u=\psi^{-\frac{3}{4}\alpha}(x)\cos^{-\frac{3}{2}}(\omega x)\varphi(\tau),$ $\tau=t\psi(x),$ $\psi(x)=\tan^{-\frac{4\lambda}{\omega}}\left(\frac{\omega x}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$	$D_\tau^\alpha\varphi=16\lambda^2\tau^2\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi''-\frac{64}{3}\lambda^2\tau^2\varphi^{-\frac{7}{3}}(\varphi')^2+$ $+8\lambda^2(\alpha+2)\tau\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi'+(1-3\alpha^2\lambda^2)\varphi^{-\frac{1}{3}}$
	6	1	$u=\varphi(t)$	$D_t^\alpha\varphi=\varphi^{-\frac{1}{3}}+\chi\varphi$
		2	$u=e^{-\frac{3}{2}\omega x}\varphi(t)$	$D_t^\alpha\varphi=\chi\varphi$
		3	$u=\sinh^{-\frac{3}{2}}(\omega x)\varphi(t)$	$D_t^\alpha\varphi=\varphi^{-\frac{1}{3}}+\chi\varphi$
	7	1	$u=\varphi(t)$	$D_t^\alpha\varphi=-\varphi^{-\frac{1}{3}}+\chi\varphi$
		2	$u=\sin^{-3}\left(\frac{\omega x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\varphi(t)$	$D_t^\alpha\varphi=\chi\varphi$
		3	$u=\cos^{-\frac{3}{2}}(\omega x)\varphi(t)$	$D_t^\alpha\varphi=\varphi^{-\frac{1}{3}}+\chi\varphi$

Тем не менее, сохранение типа оператора дробного дифференцирования при редукции представляется более целесообразным, так как позволяет с единых позиций рассматривать различные виды редуцированных уравнений. Тип дробной производной (2) сохраняется, в частности, при замене переменных следующего вида:

$$u(x,t) = f(x)\varphi(\tau),\ \tau = tg(x),$$

где $f(x),\ g(x)$ — прозвольные функции. Тогда

$$D_t^\alpha u = f(x)g^\alpha(x)D_\tau^\alpha\varphi(\tau).$$

Подавляющее большинство случаев из табл. 2 соответствует именно такой замене переменных.

Другим типом замены переменных, также позволяющим сохранить тип оператора дробного дифференцирования при симметрийной редукции, является

$$u(x,t) = f(x)\varphi(\tau),\ \tau = \frac{t}{1+tg(x)},$$

который соответствует проективной группе точечных преобразований. В этом случае

$$D_t^\alpha u = f(x)(1+\tau g(x))^{1-\alpha}D_\tau^\alpha\varphi(\tau).$$

Этому типу замены переменных соответствуют случаи III.1.3, III.1.6 и III.3.3 табл. 2, в которых одномерные подалгебры включают проективный оператор

$$X = t^2\frac{\partial}{\partial t} + (\alpha-1)tu\frac{\partial}{\partial t}.$$

Из табл. 2 вытекает следующее

Утверждение 1. *Симметрийная редукция нелинейного дробно-дифференциального уравнения аномальной диффузии (1), соответствующая оптимальным системам одномерных подалгебр алгебр Ли инфинитезимальных операторов группы точечных преобразований этого уравнения, представленных в табл. 1, приводит к уравнению одного из следующих видов:*

$$\varphi\varphi'' + \sigma(\varphi')^2 + \delta\varphi^2 + \varepsilon\frac{\Gamma(1-\alpha/\sigma)}{\Gamma(1-\alpha-\alpha/\sigma)}\varphi^{2-\sigma} = 0, \quad \sigma\notin[0,\alpha]; \tag{3}$$

$$D_\tau^\alpha\varphi = A\tau^2(\varphi^\sigma\varphi')' + B\tau\varphi^\sigma\varphi' + C\varphi^{\sigma+1} + \delta\varphi^\gamma; \tag{4}$$

$$\begin{aligned} D_\tau^\alpha\varphi = {}& \tau^4(\varphi^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}\varphi')' + (2+\alpha)\left[2\tau - \frac{\varepsilon}{\alpha}\right]\tau^2\varphi^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}\varphi' + \\ & + (1-\alpha)(2+\alpha)\left[\tau^2 - \frac{\varepsilon}{\alpha}\tau + \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2(2+\alpha)} + \frac{\delta}{(1-\alpha)(2+\alpha)}\right]\varphi^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\alpha\in(0,1)\cup(1,2)$*;* $\varphi=\varphi(\tau)$*;* $\delta = 0,\ \pm1$*;* $\varepsilon = 0,\ 1$.

4. Решения редуцированных уравнений

В результате проведенной симметрийной редукции, задача построения инвариантных решений уравнения (1) свелась к задаче нахождения решений обыкновенных дифференциальных уравнений (3)–(5).

Уравнение (3) интегрируется в квадратурах:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\psi(\varphi, C_1)}} = \tau \pm C_2, \tag{6}$$

где

$$\psi(\varphi, C_1) = \begin{cases} C_1\varphi^{-2\sigma} + \dfrac{a}{2+\sigma}\varphi^{2-\sigma} - \dfrac{\delta}{1+\sigma}\varphi^2, & (\sigma \neq -1) \cup (\delta \neq 0),\ \sigma \neq -2; \\ C_1\varphi^2 + a\varphi^3 - 2\delta\varphi^2 \ln(\varphi), & \sigma = -1,\ \delta \neq 0; \\ C_1\varphi^4 + a\varphi^4 \ln(\varphi) + \delta\varphi^2, & \sigma = -2. \end{cases}$$

Здесь $a = 2\Gamma(1-\alpha/\sigma)/\Gamma(1-\alpha-\alpha/\sigma)$, C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Общие решения нелинейных обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений (4) и (5) в настоящее время неизвестны. Могут быть построены лишь общие решения линейного ($\sigma = 0$) уравнения вида (4), а также некоторые инвариантные решения нелинейных уравнений (4) и (5).

В соответствии с табл. 2, при $\sigma = 0$ выделяются следующие линейные частные случаи уравнения (4):

$$D_\tau^\alpha \varphi = 0; \tag{7}$$

$$D_\tau^\alpha \varphi = \lambda\varphi + \delta, \quad \lambda \in \mathbb{R},\ \delta = \pm 1; \tag{8}$$

$$\alpha^2 D_\tau^\alpha \varphi = 4\tau^2\varphi'' + 2\left(2\alpha\beta + \alpha + 2\right)\tau\varphi' + \alpha^2\beta(\beta+1)\varphi, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Общие решения уравнений (7) и (8) хорошо известны [1] и имеют, соответственно, вид

$$\varphi(\tau) = \sum_{k=1}^{n} C_k \tau^{\alpha-k}, \quad \varphi(\tau) = \sum_{k=1}^{n} C_k \tau^{\alpha-k} E_{\alpha,\alpha+1-k}(\lambda\tau^\alpha) + \delta\tau^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda\tau^\alpha),$$

где C_k — произвольные постоянные, $n = [\alpha]+1$ и $E_{\rho,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\rho n+\mu)}$ $(z \in \mathbb{C})$ — функция типа Миттаг-Леффлера.

Общее решение уравнения (9) может быть представлено через функцию Райта $\phi(\rho,\mu;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(\rho n+\mu)}$ $(z \in \mathbb{C})$:

$$\varphi(\tau) = \tau^{-\frac{\alpha\beta}{2}} \left[C_1\phi\left(-\alpha/2, 1-\alpha\beta/2; \tau^{-\frac{\alpha}{2}}\right) + C_2\phi\left(-\alpha/2, 1-\alpha\beta/2; -\tau^{-\frac{\alpha}{2}}\right)\right],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. В частном случае $\beta = 0$, это решение впервые было построено в работе [11].

Инвариантные решения нелинейных уравнений (4) и (5) могут быть построены методами группового анализа. В соответствии с табл. 2, выделяются два основных частных вида нелинейного ($\sigma \neq 0$) уравнения (4): $A = B = C = 0$, $\delta \neq 0$ и $A \neq 0$, $\delta = 0$. В первом случае (4) принимает вид

$$D_\tau^\alpha \varphi = \delta\varphi^\gamma, \quad \delta \neq 0, \quad \gamma \neq 0,\ 1. \tag{10}$$

Это уравнение является частным случаем уравнения вида $D_\tau^{\alpha+1}\varphi = f(\tau, \varphi, D_\tau^\alpha\varphi)$, групповая классификация которого в классе линейно-автономных симметрий вида

$$X = \xi(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau} + \left[\eta_0(\tau) + \eta_1(\tau)\varphi\right]\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

дана в работе [16]. Из результатов этой классификации следует следующее

Утверждение 2. *Нелинейное уравнение (10) для $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$ и $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0,\ 1$, допускает однопараметрическую группу растяжений с оператором*

$$X_1 = (1-\gamma)\tau\frac{\partial}{\partial\tau} + \alpha\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{11}$$

В частном случае $\gamma = (1+\alpha)/(1-\alpha)$ группа расширяется проективным точечным преобразованием с оператором

$$X_2 = \tau^2\frac{\partial}{\partial\tau} + (\alpha-1)\tau\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{12}$$

Оператору X_1 из (11) соответствует инвариантное решение уравнения (10):

$$\varphi(\tau) = a\tau^{\nu}, \quad a = \left[\delta\,\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\gamma\nu)}\right]^{-\frac{\nu}{\alpha}}, \quad \nu = \frac{\alpha}{1-\gamma}. \tag{13}$$

Это решение существует при $\gamma \notin [1, 1+\alpha]$ $(\nu > -1)$ и дополнительных условиях

$$\gamma \neq \frac{1}{1-\alpha}, \quad \alpha \in (1,2); \qquad \gamma \neq \frac{1+n}{1+n-\alpha}, \quad n = [\alpha], \quad \alpha \in (1,2) \cup (1,2),$$

соответствующих необращению коэффициента a в бесконечность и нуль, соответственно.

При $\gamma = (1+\alpha)/(1-\alpha)$ с помощью оператора X_2 (12) из решения (13) получается однопараметрическое семейство решений

$$\varphi(\tau) = a[\tau(1-b\tau)]^{\frac{\alpha-1}{2}}, \quad a = \left[\frac{\delta}{\pi}\cos\frac{\pi\alpha}{2}\Gamma^2\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right]^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}},$$

где b — произвольная постоянная. Это решение при $\alpha \in (0,1)$ является общим решением соответствующего уравнения.

Теперь рассмотрим уравнение (4) при $\delta = 0$ и $A \neq 0$. Его групповая классификация проведена в работе [22]. Справедливо

Утверждение 3. *Нелинейное ($\sigma \neq 0$) уравнение (4) при $\delta = 0$ и $A \neq 0$ допускает однопараметрическую группу точечных преобразований растяжения с оператором*

$$X_1 = -\sigma\tau\frac{\partial}{\partial\tau} + \alpha\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{14}$$

В частном случае $\sigma = -2$, $B = 2\alpha A$, $C = \alpha(1-\alpha)A$ проективным точечным преобразованием с оператором X_2 из (12) группа расширяется до двухпараметрической.

Оператор (14) порождает инвариантное решение уравнения (4):

$$\varphi(\tau) = a\tau^{-\frac{\alpha}{\sigma}}, \quad a = \left[\frac{\sigma^2}{\alpha(\alpha+\sigma+\alpha\sigma)A - \alpha\sigma B + \sigma^2 C}\,\frac{\Gamma\left(1-\alpha/\sigma\right)}{\Gamma\left(1-\alpha-\alpha/\sigma\right)}\right]^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{15}$$

Это решение существует при $\sigma \notin [0,\alpha]$, $\sigma \neq \alpha/(1-\alpha)$ при $\alpha \in (0,1)\cup(1,2)$ и $\sigma \neq \alpha/(2-\alpha)$ при $\alpha \in (1,2)$, а также выполнении очевидных дополнительных условий

$$\sigma \neq \frac{\alpha}{2C}\left[B - (1+\alpha)A \pm \sqrt{[(1+\alpha)A - B]^2 - 4AC}\right], \quad C \neq 0;$$
$$\sigma \neq \frac{\alpha A}{B-(1+\alpha)A}, \quad C = 0, \quad B \neq (1+\alpha)A.$$

В частном случае $\sigma = -2$, $B = 2\alpha A$, $C = \alpha(1-\alpha)A$ оператору X_2 (12) соответствует инвариантное решение уравнения (4) $\varphi(\tau) = a\tau^{\alpha-1}$ с произвольной постоянной a. Также при $A > 0$ с помощью этого оператора из решения (15) строится однопараметрическое (с произвольной постоянной b) семейство решений уравнения (4):

$$\varphi(\tau) = a\tau^{\frac{\alpha}{2}}(1-b\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1}, \quad a = \sqrt{\frac{(2-\alpha)\pi A}{2\sin(\pi\alpha/2)\Gamma^2(\alpha/2)}}.$$

Наконец, рассмотрим уравнение (5). Справедливо

Утверждение 4. *Уравнение (5) для любых ε и δ допускает однопараметрическую группу линейно-автономных симметрий с оператором X_2 из (12). При $\varepsilon = 0$ и $\delta = 0$ группа расширяется до двухпараметрической преобразованием растяжения с оператором*

$$X_1 = 2\alpha\tau\frac{\partial}{\partial\tau} + (\alpha-1)(\alpha+2)\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

В результате при $\varepsilon = \delta = 0$ и любом $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$, а также при $\varepsilon = 1$, $\delta = -1$ и $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$, уравнение (5) имеет инвариантное решение $\varphi(\tau) = a\tau^{\alpha-1}$ с произвольной постоянной a, соответствующее оператору X_2. В случае $\varepsilon = 0$ и $\delta = 0$, с помощью операторов X_1 и X_2, строится еще одно однопараметрическое семейство инвариантных решений

$$\varphi(\tau) = a\tau^{\nu}(1-b\tau)^{\alpha-1-\nu}, \quad a = \left[\frac{\Gamma(\nu+2-\alpha)}{\Gamma(\nu)}\right]^{\frac{\nu}{\alpha+2}}, \quad \nu = \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{2\alpha},$$

где b — произвольная постоянная.

Вопрос о нахождении общих решений нелинейных обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений (4) и (5) остается открытым.

Построенные решения редуцированных уравнений позволяют восстановить соответствующие точные решения исходного уравнения аномальной диффузии (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
2. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations.* Elsevier, Amsterdam, 2006. 539 p.
3. Metzler R., Klafter J. *The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamic approach.* // Phys. Rep. 2000. Vol. 339. P. 1–77.
4. Zaslavsky G. M. *Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport.* // Phys. Rep. 2002. V. 371. P. 461–580.
5. Учайкин В. В. *Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы* // УФН. 2003. Т. 173, № 8. С. 847–876.
6. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука, 2005. 199 с.
7. Mainardi F., Pagnini G. *The Wright functions as solutions of the time-fractional diffusion equation.* //App. Math. Comp. 2003. Vol. 141, №. 1. P. 51–62.
8. Mainardi F. *The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation.* // Appl. Math. Lett. 2007. Vol. 9, №. 6. P. 23–28.
9. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1978. 339 с.
10. Ibragimov N. H. (ed.) *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations.* — CRC Press, Boca Raton. V. 1. 1994. 430 p.
11. Buckwar E, Luchko Yu. *Invariance of a partial differential equation of fractional order under the Lie group of scaling transformations.* // J. Math. Anal. Appl. 1998. Vol. 227. P. 81–97.
12. Gorenflo R., Luchko Yu., Mainardi F. *Wright functions as scale-invariant solutions of the diffusion-wave equation.* // J. Comp. Appl. Math. 2000. Vol. 118, №. 1. P. 175–191.

13. Газизов Р. К., Касаткин А. А., Лукащук С. Ю. *Непрерывные группы преобразований дифференциальных уравнений дробного порядка* // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, № 3 (21). С. 125–135.
14. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. *Symmetry properties of fractional diffusion equations.* // Physica Scripta. 2009. T 136. 014016.
15. Газизов Р. К., Касаткин А. А., Лукащук С. Ю. *Уравнения с производными дробного порядка: замены переменных и нелокальные симметрии* // Уфимский мат. журнал. 2012. Т. 4, № 4. С. 54–68.
16. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. *Linearly autonomous symmetries of the ordinary fractional differential equations* // Proc. of 2014 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications, ICFDA 2014. — IEEE. 2014. P.1–6.
17. Lukashchuk S. Yu. *Conservation laws for time-fractional subdiffusion and diffusion-wave equations* // Nonlinear Dyn. 2015. Vol. 80. P. 791–802.
18. Лукащук С. Ю. *О построении законов сохранения для интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка* // ТМФ. 2015. Т. 184, № 2. С. 179–199.
19. Дородницын В. А. *Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником* // ЖВММФ. 1982. Т. 22, № 6. С. 1393–1400.
20. Lukashchuk S. Yu., Makunin A. V. *Group classification of nonlinear time-fractional diffusion equation with a source term* // Appl. Math. Comp. 2015. Vol. 257. P. 335–343.
21. Patera J., Winternitz P. *Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras* // J. Math. Phys. 1977. Vol. 18, №. 7. P. 1449–1455.
22. Белевцов Н. С., Лукащук С. Ю. *Групповая классификация одного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка* // Мавлютовские чтения: Материалы IX Всероссийской молодежной научной конференции (28–30 октября 2015 г.). Уфа: УГАТУ, 2015. Т. 3. С. 170–175.

Станислав Юрьевич Лукащук,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: lsu@mail.rb.ru