ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 4 (2016). С. 100-113.

УДК 517.9

ВЫРОЖДЕННЫЕ ДРОБНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С σ-РЕГУЛЯРНОЙ ПАРОЙ ОПЕРАТОРОВ

М. КОСТИЧ, В.Е. ФЁДОРОВ

Аннотация. Рассмотрено вырожденное дифференциальное уравнение дробного порядка $D_t^\alpha Lu(t) = Mu(t)$ в отделимом секвенциально полном локально выпуклом пространстве. При условии p-регулярности пары операторов (L, M) найдено фазовое пространство уравнения и его семейство разрешающих операторов. Показано, что образ единицы последнего совпадает с фазовым пространством. Доказана теорема об однозначной разрешимости и получен вид решения задачи Коши для соответствующего неоднородного уравнения. Приведен пример применения полученных абстрактных результатов к исследованию разрешимости класса начально-краевых задач для уравнений в частных производных, содержащих целые функции от неограниченного оператора в банаховом пространстве, в специальным образом построенных пространствах Фреше. Это позволило рассмотреть, например, периодическую по пространственной переменной x задачу для уравнения со сдвигом по x, имеющего дробный порядок производной по временно́й переменной t.

Ключевые слова: дробное дифференциальное уравнение, вырожденное эволюционное уравнение, локально выпуклое пространство, σ-регулярная пара операторов, фазовое пространство, разрешающий оператор.

Mathematics Subject Classification: 34A08, 34G10, 47D99, 35R11

1. Введение

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$D_t^\alpha Lu(t) = Mu(t) + f(t), \tag{1}$$

где D_t^α — дробная производная Капуто порядка $\alpha > 0$ [1], $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — отделимые секвенциально полные локально выпуклые линейные топологические пространства, $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ — линейный непрерывный оператор, $M : D_M \to \mathfrak{V}$ — линейный замкнутый оператор с областью определения D_M, плотной в $\mathfrak{U}$. Это уравнение далее называется вырожденным, поскольку предполагается, что $\ker L \neq \{0\}$. В работе рассматриваются вопросы однозначной разрешимости задачи Коши

$$u^{(k)}(0) = u_k, k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2}$$

для уравнения (1). Здесь m — наименьшее целое число, не превосходимое числом α.

M. Kostić, V.E. Fedorov, Degenerate fractional differential equations in locally convex spaces with a σ-regular pair of operators.

Работа первого автора частично поддержана грантом 174024 Министерства науки и технологического развития Республики Сербия. Работа второго автора выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

Поступила 16 октября 2015 г.

Уравнения такого вида в банаховых пространствах рассматривались в работах [2, 3] в невырожденном случае, когда оператор L непрерывно обратим, в работе [4] при условиях вырожденности оператора L и сильной (L,p)-секториальности оператора M. Отметим также работы [5]–[10], в которых исследуются дробные дифференциальные уравнения в локально выпуклых пространствах.

Настоящая работа содержит обобщение результатов работы [11], в которой исследована разрешимость задачи Коши (2) для однородного уравнения (1) в банаховом пространстве с использованием условия (L,σ)-ограниченности оператора [12], введенного в рассмотрение при изучении вырожденного уравнения порядка $\alpha = 1$. В данной работе используется понятие (L,σ)-регулярного оператора, использованное ранее в [13] для исследования вырожденного уравнения первого порядка в локально выпуклых пространствах. С помощью условия (L,σ)-регулярности оператора M получены пары инвариантных подпространств операторов L и M, и исходное уравнение редуцировано к системе двух уравнений, заданных на двух подпространствах. Одно из полученных уравнений является разрешенным относительно производной и имеет регулярный оператор [14] при искомой функции. Условия разрешимости задачи Коши для такого уравнения и вид ее решения найдены в работе [14]. Другое из полученных уравнений имеет нильпотентный оператор при производной. В случае p-регулярности пары операторов (L,M) показана однозначная разрешимость такого уравнения без использования начальных данных. В однородном случае соответствующее решение тривиально. Этот факт позволил найти фазовое пространство и семейство разрешающих операторов однородного уравнения. В неоднородном же случае он приводит к необходимости выполнения условий согласования между начальными данными задачи Коши и правой частью уравнения.

Рассмотрена также обобщенная задача Шоуолтера–Сидорова, подразумевающая задание начальных данных не для всего решения, а только для его проекции на первое подпространство. Поэтому отличие теоремы о разрешимости такой задачи от теоремы о задаче Коши состоит лишь в отсутствии условий согласования, которое подчеркивает естественность такой задачи для вырожденных эволюционных уравнений.

Найденное в работе семейство разрешающих операторов построено в явном виде с использованием функции Миттаг-Лёффлера и использовано для представления решения.

Полученные абстрактные результаты использованы при исследовании разрешимости класса периодических по пространствененой переменной x задач Коши и Шоуолтера–Сидорова для уравнений дробного порядка по времени и бесконечного порядка по x с целыми функциями от оператора дифференцирования по x и со смещением по этой переменной. Для этого смещение по пространственной переменной представлено как результат действия экспоненциальной функции от оператора A дифференцирования по x, и показана для полученных операторов $(L,0)$-регулярность оператора M при рассмотрении задачи в пространстве Фреше, представляющем собой индуктивный предел шкалы пространств Фреше элементов A-экспоненциального типа из $D(A^\infty)$.

2. Неоднородная задача Коши для невырожденного уравнения

Пусть $\mathfrak{Z}$ — отделимое секвенциально полное локально выпуклое пространство. Через $\circledast_{\mathfrak{Z}}$ обозначим фундаментальную систему полунорм в $\mathfrak{Z}$, определяющую в этом пространстве топологию.

Определение 1. Линейный непрерывный оператор $A : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}$ назовем *регулярным* (коротко, $A \in \mathcal{R}(\mathfrak{Z})$), если существует такое $C \in \mathbb{R}_+$, что для любой полунормы $q \in \circledast_{\mathfrak{Z}}$ найдется такая полунорма $r \in \circledast_{\mathfrak{Z}}$, что $q(A^n z) \le C^n r(z)$ для всех $z \in \mathfrak{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Замечание 1. Константу C из определения 1 будем называть константой регулярности оператора A. Понятно, что множество констант регулярности для заданного оператора не ограничено сверху.

Замечание 2. В случае банахова пространства $\mathfrak{Z}$ регулярность оператора в точности означает его принадлежность к классу $\mathcal{L}(\mathfrak{Z})$ линейных непрерывных на всем пространстве операторов.

Замечание 3. В случае квазиполного локально выпуклого пространства оператор A является регулярным в смысле данного определения тогда и только тогда, когда он является регулярным элементом выпуклой борнологической алгебры непрерывных линейных отображений из $\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{Z}$ с борнологией равностепенной непрерывности [14, с. 136].

Регулярным спектром $\sigma_r(A)$ оператора A будем называть [14, с. 136] множество таких $\mu \in \mathbb{C}$, при которых не существует регулярного оператора $(\mu I - A)^{-1}$, а регулярным резольвентным множеством оператора A — множество $\rho_r(A) = \mathbb{C}\setminus\sigma_r(A)$. Регулярный спектр регулярного оператора в квазиполном локально выпуклом пространстве — непустое компактное множество [14, с. 137]. Для спектрального радиуса регулярного оператора A в таком случае имеем $r_\sigma(A) = \inf\{C > 0 : q(A^n v) \leq C^n r(v)\}$.

Обозначим $g_\delta(t) = \Gamma(\delta)^{-1}t^{\delta-1}$ при $\delta > 0$, $t > 0$,

$$J_t^\delta h(t) = (g_\delta * h)(t) = \int\limits_0^t g_\delta(t-s)h(s)ds.$$

Пусть $\alpha > 0$, m — наименьшее целое число, не превосходимое числом α, D_t^m — обычная производная порядка $m \in \mathbb{N}$, J_t^0 — тождественный оператор, D_t^α — дробная производная Капуто, т. е. $D_t^\alpha f(t) = J_t^{m-\alpha}D_t^m f(t)$ в случае, когда выражение в правой части этого равенства имеет смысл. Далее будет также использовано равенство $D_t^\alpha f(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha}\left(f(t) - \sum\limits_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)g_{k+1}(t)\right)$, справедливое в случае, когда определено выражение в его правой части [1, с. 11].

При $\alpha, \beta > 0$ введем в рассмотрение функцию Миттаг-Лёффлера $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}$ и рассмотрим задачу Коши

$$z^{(k)}(0) = z_k,\ k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{3}$$

для дробного дифференциального уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in [0, T), \tag{4}$$

где $T \in (0, +\infty]$, A — регулярный оператор в секвенциально полном локально выпуклом пространстве $\mathfrak{Z}$. Решением задачи (3), (4) назовём функцию $z \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{Z})$, для которой $g_{m-\alpha} * \left(z - \sum\limits_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(0)g_{k+1}\right) \in C^m(\mathbb{R}_+; \mathfrak{Z})$ и выполняются равенства (3) и (4). Здесь и далее $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Теорема 1. *Пусть $A \in \mathcal{R}(\mathfrak{Z})$, $f \in C^m([0, T); \mathfrak{Z})$. Тогда при любом $z_0 \in \mathfrak{Z}$ существует единственное решение задачи* (3), (4). *При этом оно имеет вид*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(At^\alpha)z_k + \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)f(s)ds. \tag{5}$$

Доказательство. Почленно дифференцируя ряды, получим в силу регулярности оператора A равенства

$$D_t^\alpha \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(At^\alpha) z_k = A \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(At^\alpha) z_k, \tag{6}$$

$$D_t^l \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(At^\alpha) z_k|_{t=0} = z_l, \quad l = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{7}$$

$$D_t^\alpha \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha) f(s) ds = J_t^{m-\alpha} D_t^m \int_0^t s^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(As^\alpha) f(t-s) ds =$$

$$= J_t^{m-\alpha} D_t^{m-1} \left(t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha)\right) f(0) + J_t^{m-\alpha} D_t^{m-1} \int_0^t s^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(As^\alpha) f'(t-s) ds =$$

$$= J_t^{m-\alpha} \sum_{k=0}^{m-1} D_t^k \left(t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha)\right) f^{(m-1-k)}(0) +$$

$$+ J_t^{m-\alpha} \int_0^t s^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(As^\alpha) f^{(m)}(t-s) ds =$$

$$= J_t^{m-\alpha} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^{\alpha(n+1)-1-k}}{\Gamma(\alpha n + \alpha - k)} f^{(m-1-k)}(0) +$$

$$+ \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1-\alpha} d\tau}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(\tau-s)^\alpha) f^{(m)}(s) ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^{\alpha n + m - 1 - k}}{\Gamma(\alpha n + m - k)} f^{(m-1-k)}(0) +$$

$$+ \int_0^t ds \int_s^t \frac{(t-\tau)^{m-1-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)} (\tau - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(\tau-s)^\alpha) f^{(m)}(s) d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(At^\alpha) f^{(k)}(0) +$$

$$+ \int_0^t ds \int_0^{t-s} \frac{(t-s-\sigma)^{m-1-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)} \sigma^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A\sigma^\alpha) f^{(m)}(s) d\sigma =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(At^\alpha) f^{(k)}(0) + \int_0^t \left[J_{t-s}^{m-\alpha} (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)\right] f^{(m)}(s) ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(At^\alpha) f^{(k)}(0) + \int_0^t (t-s)^{m-1} E_{\alpha,m}(A(t-s)^\alpha) f^{(m)}(s) ds =$$

$$= f(t) - \int_0^t \left[\frac{d}{ds} E_{\alpha,1}(A(t-s)^\alpha)\right] f(s) ds =$$

$$= A\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)f(s)ds + f(t). \tag{8}$$

В конце рассуждений использовано m-кратное интегрирование по частям. Из равенств (6)–(8) следует, что функция (5) — решение задачи (3), (4).

Если существуют решения z_1 и z_2 задачи (3), (4), то их разность $z = z_1 - z_2$ является решением задачи Коши (3) с начальными данными $z_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для однородного уравнения $D_t^\alpha z(t) = Az(t)$. Подействуем на обе части этого равенства оператором J_t^α, тогда $z(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}Az(s)ds$ (см. [1, с. 12, формула (1.21)]). Тогда в силу теоремы 4 [14, с. 169] единственное решение такой задачи в случае регулярного оператора A в секвенциально полном локально выпуклом пространстве имеет вид $z \equiv 0$. $\Box$

3. σ-РЕГУЛЯРНАЯ ПАРА ОПЕРАТОРОВ

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ — секвенциально полные локально выпуклые пространства. Через $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ будем обозначать множество линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{V}$. Множество линейных замкнутых операторов с областями определения, плотными в пространстве $\mathfrak{U}$, действующих в $\mathfrak{V}$, обозначим через $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Если $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}$, то сответствующие обозначения будут иметь вид $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $\mathcal{C}l(\mathfrak{U})$ соответственно.

Пусть $L, M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, через D_L, D_M будем обозначать области определения операторов L и M. Обозначим $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$.

Регулярным L-резольвентным множеством оператора M назовем множество $\rho_r^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U}),\ R_\mu^L(M) \in \mathfrak{R}(\mathfrak{U}),\ L_\mu^L(M) \in \mathfrak{R}(\mathfrak{V})\}$, регулярным L-спектром — его дополнение $\sigma_r^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho_r^L(M)$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие тождества, справедливые при всех $\mu, \lambda \in \rho_r^L(M)$, $u \in D_L \cap D_M$:

$$\begin{gathered}(\mu L - M)^{-1}(\lambda L - M)u = u + (\lambda - \mu)(\mu L - M)^{-1}Lu,\\ (\lambda L - M)(\mu L - M)^{-1} = I + (\lambda - \mu)L(\mu L - M)^{-1},\\ (\mu L - M)^{-1} - (\lambda L - M)^{-1} = (\lambda - \mu)R_\mu^L(M)(\lambda L - M)^{-1},\\ L(\mu L - M)^{-1}Mu = M(\mu L - M)^{-1}Lu.\end{gathered} \tag{9}$$

Утверждение 1. *Пусть* $L, M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, множество $D_L \cap D_M$ секвенциально плотно в $\mathfrak{U}$. *Тогда*

(i) $\rho_r^L(M)$ — *открытое множество*;

(ii) *оператор-функции* $(\mu L - M)^{-1}$, $R_\mu^L(M)$, $L_\mu^L(M)$ *сильно голоморфны на* $\rho_r^L(M)$;

(iii) *можно выбрать константы регулярности для операторов* $R_\mu^L(M)$ *и* $L_\mu^L(M)$, *непрерывно зависящие от* $\mu \in \rho_r^L(M)$.

Доказательство. Пусть $\mu \in \rho_r^L(M)$, C_μ — максимум из двух констант регулярности операторов $R_\mu^L(M)$ и $L_\mu^L(M)$, тогда

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \mu| < C_\mu^{-1}\} \subset \rho_r^L(M).$$

Действительно, в этом случае согласно второму из тождеств (9) определен непрерывный оператор

$$[(\lambda L - M)(\mu L - M)^{-1}]^{-1} = \sum_{k=0}^\infty (\mu - \lambda)^k [L(\mu L - M)^{-1}]^k.$$

Домножим это равенство слева на $L_\mu^L(M)$ и получим для любых $v \in \mathfrak{V}$, $q \in \circledast_{\mathfrak{V}}$

$$q(L_\lambda^L(M)v) = q\left(\sum_{k=0}^\infty (\lambda - \mu)^k (L_\mu^L(M))^{k+1}v\right) \le \frac{C_\mu r(v)}{1 - |\lambda - \mu|C_\mu},$$

$$q((L_\lambda^L(M))^n v) \leq \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} |\lambda-\mu|^{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i} q\left(\left(L_\mu^L(M)\right)^{n+\sum\limits_{i=1}^{n} k_i} v\right) \leq$$
$$\leq \sum_{k_1=0}^{\infty} |\lambda-\mu|^{k_1} C_\mu^{k_1+1} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} |\lambda-\mu|^{k_n} C_\mu^{k_n+1} r(v) \leq \frac{C_\mu^n r(v)}{(1-|\lambda-\mu|C_\mu)^n}$$

при некотором $r \in \circledast_{\mathfrak{V}}$. Тем самым, оператор $R_\lambda^L(M)$ регулярен с константой регулярности $C_\mu(1-|\lambda-\mu|C_\mu)^{-1}$.

Для оператор-функций $(\mu L - M)^{-1}$, $R_\mu^L(M)$ доказательство проводится аналогично с помощью первого тождества из (9). Поэтому каждая точка μ лежит в $\rho_r^L(M)$ вместе с некоторой окрестностью. Утверждения (ii) и (iii) следуют из доказанного очевидным образом. $\square$

Определение 2. Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Оператор M называется (L,σ)-*регулярным*, если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho_r^L(M)).$$

Иногда удобнее говорить не о (L,σ)-регулярном операторе M, а о σ-*регулярной паре операторов* (L,M), что в нашем изложении будет означать то же самое.

Возьмем (L,σ)-регулярный оператор M, построим замкнутый контур

$$\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = R > a\}.$$

Тогда имеют смысл следующие интегралы как интегралы от голоморфных функций по замкнутому контуру:

$$Pu = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R_\mu^L(M) u d\mu, \quad Qv = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L_\mu^L(M) v d\mu.$$

Нетрудно показать, что операторы P и Q являются проекторами. Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{V}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im} P$, $\mathfrak{V}^1 = \mathrm{im} Q$, тогда $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$. Через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ $(D_{M_k} = D_M \cap \mathfrak{U}^k)$, $k = 0,1$. Кроме того, через $\sigma_{r,k}^L(M)$ будет обозначать регулярный L_k-спектр оператора M_k, а через $\rho_{r,k}^L(M)$ — его регулярное L_k-резольвентное множество.

Лемма 1. *Пусть оператор M (L,σ)-регулярен. Тогда для любого $u \in \mathfrak{U}$ $Pu \in D_M$.*

Доказательство. Действительно, в силу утверждения 1 (ii) сходится интеграл

$$\int\limits_\gamma M R_\mu^L(M) u d\mu = \int\limits_\gamma \mu L R_\mu^L(M) u d\mu.$$

Из замкнутости оператора M получим требуемое. $\square$

Теорема 2. *Пусть оператор M (L,σ)-регулярен. Тогда*
(i) $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{V}^k)$, $k = 0,1$;
(ii) $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0;\mathfrak{V}^0)$, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$;
(iii) *существует оператор* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$;
(iv) $\rho_{r,0}^L(M) = \mathbb{C}$ *и в частности существует оператор* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^0;\mathfrak{U}^0)$.
(v) *операторы* $S_1 = L_1^{-1}M_1$, $T_1 = M_1 L_1^{-1}$ *регулярны.*

Доказательство теоремы можно найти в [13].

Обозначим $H = M_0^{-1}L_0$. Если при некотором $p \in \mathbb{N}_0 \equiv \{0\} \cup \mathbb{N}$ $H^p \neq \mathbb{O}$, $H^{p+1} = \mathbb{O}$, то (L,σ)-регулярный оператор M будем называть (L,p)-регулярным. При этом пара операторов (L,M) будет назваться (L,p)-регулярной.

Нетрудно показать, что степень нильпотентности оператора H или отсутствие нильпотентности определяют характер особенности в бесконечно удаленной точке оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$ (см. [12, с. 92]).

Упорядоченное множество $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\} \subset \mathfrak{U}$ назовем цепочкой M-присоединенных векторов оператора L, если $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$,

$$L\varphi_{k+1} = M\varphi_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad \varphi_l \notin \ker L, \quad l = 1, 2, \ldots$$

Цепочка конечна, если существует такой M-присоединенный вектор φ_p, что либо $\varphi_p \notin D_M$, либо $M\varphi_p \notin \mathrm{im} L$. Порядковый номер M-присоединенного вектора, под которым он входит в цепочку, назовем высотой этого вектора. Линейная оболочка всех M-присоединенных векторов оператора L называется M-корневым линеалом оператора L.

Рассуждая, как в монографии [12, с. 95], можно получить следующий результат.

Теорема 3. *Пусть оператор M (L, σ)-регулярен. Тогда M-корневой линеал оператора L содержится в $\mathfrak{U}^0$. При этом справедливы следующие утверждения.*

(i) *Оператор M (L, p)-регулярен при $p \in \mathbb{N}$ в том и только в том случае, когда M-корневой линеал состоит из M-присоединенных векторов оператора L высоты не больше p и при этом существует M-присоединенный вектор высоты p. В этом случае M-корневое пространство оператора L совпадает с $\mathfrak{U}^0$.*

(ii) *Оператор M $(L, 0)$-регулярен в том и только в том случае, когда* $\ker L = \mathfrak{U}^0$. *При этом* $\mathrm{im} L = \mathfrak{V}^1$ *и для любого $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ выполняется $\varphi_0 \notin D_M$ или $M\varphi_0 \notin \mathrm{im} L$.*

Лемма 2. *Пусть оператор M (L, σ)-регулярен, $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = R > a\}$, $\alpha, \beta > 0$,*

$$U_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R_\mu^L(M) E_{\alpha,\beta}(\mu t^\alpha) d\mu, \ t \geq 0.$$

$$V_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} L_\mu^L(M) E_{\alpha,\beta}(\mu t^\alpha) d\mu, \ t \geq 0.$$

Тогда для любого $t \geq 0$ $U_{\alpha,\beta}(t)P = PU_{\alpha,\beta}(t) = U_{\alpha,\beta}(t)$, $V_{\alpha,\beta}(t)Q = QV_{\alpha,\beta}(t) = V_{\alpha,\beta}(t)$.

Доказательство. Пусть $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = R > a\}$, $\gamma_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = R + 1\}$, тогда

$$U_{\alpha,\beta}(t)P = PU_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma} \int\limits_{\gamma_1} R_\lambda^L(M) R_\mu^L(M) E_{\alpha,\beta}(\mu t^\alpha) d\mu d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma} R_\mu^L(M) E_{\alpha,\beta}(\mu t^\alpha) d\mu \int\limits_{\gamma_1} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_1} R_\lambda^L(M) d\lambda \int\limits_{\gamma} \frac{E_{\alpha,\beta}(\mu t^\alpha) d\mu}{\lambda - \mu} =$$

$$= U_{\alpha,\beta}(t).$$

Утверждения леммы об операторах $V_{\alpha,\beta}(t)$ и Q доказываются аналогично. □

Отсюда очевидным образом получаем следствие.

Следствие 1. *Пусть оператор M (L, σ)-регулярен, $\alpha, \beta > 0$. Тогда для любого $t \geq 0$ $\mathfrak{U}^0 \subset \ker U_{\alpha,\beta}(t)$, $\mathrm{im} U_{\alpha,\beta}(t) \subset \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V}^0 \subset \ker V_{\alpha,\beta}(t)$, $\mathrm{im} V_{\alpha,\beta}(t) \subset \mathfrak{V}^1$.*

Лемма 3. *Пусть оператор M (L, σ)-регулярен, $\alpha, \beta > 0$. Тогда при любом $t \geq 0$ $U_{\alpha,\beta}(t) = E_{\alpha,\beta}(L_1^{-1} M_1 t^\alpha) P$, $V_{\alpha,\beta}(t) = E_{\alpha,\beta}(M_1 L_1^{-1} t^\alpha) Q$.*

Доказательство. По теореме 2 $S \equiv L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{R}(\mathfrak{U}^1)$. Для $t \geq 0$ в силу леммы 2

$$U_{\alpha,\beta}(t) = U_{\alpha,\beta}(t)P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R_\mu^{L_1}(M_1) P E_{\alpha,\beta}(\mu t^\alpha) d\mu =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(\mu I-S)^{-1}PE_{\alpha,\beta}(\mu t^{\alpha})d\mu=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}S^kP\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu^nt^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+\beta)}d\mu=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S^kt^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}P=E_{\alpha,\beta}(St^{\alpha})P.$$

Второе равенство доказывается аналогично. □

Замечание 4. Таким же образом можно показать, что если оператор L непрерывно обратим, то $U_{\alpha,\beta}(t)=E_{\alpha,\beta}(L^{-1}Mt^{\alpha})$ в случае регулярности оператора $L^{-1}M$, а $V_{\alpha,\beta}(t)=E_{\alpha,\beta}(ML^{-1}t^{\alpha})$, если регулярен оператор ML^{-1}.

4. Однородное вырожденное уравнение

Решением уравнения

$$D_t^{\alpha}Lu(t)=Mu(t),\quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+,\tag{10}$$

называется такая функция $u\in C(\overline{\mathbb{R}}_+;D_M)$, для которой $Lu\in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{V})$, $g_{m-\alpha}*\left(Lu-\sum\limits_{k=0}^{m-1}(Lu)^{(k)}(0)g_{k+1}\right)\in C^m(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{V})$, при этом для всех $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$ выполняется равенство (10).

Уравнение (10) будем рассматривать наряду с эквивалентным ему уравнением на пространстве $\mathfrak{V}$

$$D_t^{\alpha}L_{\beta}^L(M)v(t)=M(\beta L-M)^{-1}v(t),\quad t\in\mathbb{R}_+,\tag{11}$$

где $(\beta L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})$. Связь между решениями уравнений (10) и (11) задаётся равенством $u(t)=(\beta L-M)^{-1}v(t)$.

Лемма 4. *Пусть оператор M (L,σ)-регулярен. Тогда при любом $u_0\in\mathfrak{U}$ ($v_0\in\mathfrak{V}$) вектор-функция $u(t)=U_{\alpha,1}(t)u_0$ ($v(t)=V_{\alpha,1}(t)v_0$) есть решение уравнения* (10) ((11)).

Доказательство. Пусть $u_0\in\mathfrak{U}$. Тогда

$$MU(t)u_0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\mu LR_{\mu}^L(M)u_0E_{\alpha}(\mu t^{\alpha})d\mu-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}Lu_0E_{\alpha}(\mu t^{\alpha})d\mu.$$

Полученная функция непрерывна по t. Очевидно также, что $LU_{\alpha,1}(\cdot)u_0\in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{V})$. Учитывая сильную голоморфность по μ подынтегральных функций, получим при $t\geq 0$ равенства

$$D_t^{\alpha}LU(t)u_0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}LR_{\mu}^L(M)u_0J_t^{m-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^nt^{\alpha n-m}}{\Gamma(\alpha n-m+1)}d\mu=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}LR_{\mu}^L(M)u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^nt^{\alpha(n-1)}B(m-\alpha,\alpha n-m+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\alpha n-m+1)}d\mu=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}LR_{\mu}^L(M)u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^nt^{\alpha(n-1)}}{\Gamma(\alpha(n-1)+1)}d\mu=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\mu LR_{\mu}^L(M)u_0E(\mu t^{\alpha})d\mu=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}Lu_0E(\mu t^{\alpha})d\mu+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}MR_{\mu}^L(M)u_0E(\mu t^{\alpha})d\mu=0+MU(t)u_0$$

в силу теоремы Коши и замкнутости оператора M. □

Решением задачи Коши

$$u(0) = u_0,\ u^{(k)}(0) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{12}$$

для уравнения (10) называется решение $u \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$ этого уравнения, удовлетворяющее условиям (12).

Особенность уравнений вида (10) с вырожденным оператором при производной состоит в том, что их решения поточечно заполняют лишь некоторое подпространство исходного пространства, в котором уравнение задано. Естественно, это подпространство играет важную роль при исследовании уравнения. Чтобы описать его формально, введем, следуя [12], следующее определение.

Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ будем называть *фазовым пространством* уравнения (10), если

(i) для любого решения $u = u(t)$ уравнения (10) $u(t) \in \mathfrak{P}$ для всех $t \geq 0$;

(ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (10), (12).

Очевидно, что если фазовое пространство уравнения существует, то оно единственно.

Замечание 5. Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{U})$ и при этом $L^{-1}M$ регулярен, то фазовым пространством уравнения (9) служит все пространство $\mathfrak{U}$. Действительно, тогда в силу теоремы 4 [14, с. 169] при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение $u(t) = E_{\alpha,1}(L^{-1}Mt^\alpha)u_0$ задачи (10), (12).

Лемма 5. *Пусть оператор* $G \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$ *нильпотентен степени* $p \in \mathbb{N}_0$, *существуют дробные производные* $(D_t^\alpha G)^k g \in C([0, T); \mathfrak{Z})$ *при* $k = 0, 1, \ldots, p$, $T \in (0, +\infty]$. *Тогда существует единственное решение уравнения*

$$D_t^\alpha G z(t) = z(t) + g(t), \quad t \in [0, T), \tag{13}$$

при этом оно имеет вид

$$z(t) = -\sum_{k=0}^{p} (D_t^\alpha G)^k g(t), \quad t \in [0, T). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $z = z(t)$ — решение уравнения (13). Подействуем оператором G на обе части (13) и получим равенство $GD_t^\alpha Gz(t) = Gz(t) + Gg(t)$. Тогда существует дробная производная порядка α его правой, а значит, и его левой части. Действуя оператором D_t^α на обе части этого равенства, получим $(D_t^\alpha G)^2 z = D_t^\alpha G z + D_t^\alpha G g = z + g + D_t^\alpha G g$. На p-м шаге, последовательно продолжая такую процедуру, получим равенство $(D_t^\alpha G)^{p+1} z = z + \sum\limits_{k=0}^{p} (D_t^\alpha G)^k g$. В силу непрерывности и нильпотентности оператора G имеем $(D_t^\alpha G)^{p+1} z = (D_t^\alpha)^{p+1} G^{p+1} z \equiv 0$, отсюда следует равенство (14). Оно влечет существование решения уравнения (13) (проверяется подстановкой этой функции в уравнение) и его единственность. □

Теорема 4. *Пусть оператор* M (L, p)*-регулярен. Тогда фазовое пространство уравнения* (10) (*уравнения* (11)) *совпадает с подпространством* $\mathfrak{U}^1$ $(\mathfrak{V}^1)$.

Доказательство. Пусть $u = u(t)$ — решение уравнения (10). Положим $u^0(t) \equiv (I - P)u(t)$, $u^1(t) \equiv Pu(t)$. Тогда в силу теоремы 2 имеем

$$D_t^\alpha H u^0(t) = u^0(t),\ H \equiv M_0^{-1} L_0\,,$$
$$D_t^\alpha u^1(t) = S u^1(t),\ S \equiv L_1^{-1} M_1\,. \tag{15}$$

Согласно лемме 5 $u^0 \equiv 0$ и $u(t) = u^1(t) \in \mathfrak{U}^1$ при любом $t \geq 0$.

В силу теоремы 2 оператор S регулярен в пространстве $\mathfrak{U}^1$. Поэтому при любом $Pu_0 = u_0^1 \in \mathfrak{U}^1$ существует единственное решение задачи Коши $u^1(0) = u_0^1$, $u^{1(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, для уравнения (15) (см. замечание 5), а значит, и для уравнения (10), имеющее вид $u(t) = E_{\alpha,1}(St^\alpha)u_0^1 = U_{\alpha,1}(t)u_0$.

Утверждение теоремы относительно фазового пространства уравнения (11) доказывается аналогично. □

Замечание 6. Из доказательства теоремы 4 следует, что задача Коши

$$u^{(k)}(0) = u_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1, \tag{16}$$

для уравнения (10) при условии (L, p)-регулярности оператора M редуцируется к задаче Коши для уравнения (15). Отсюда следует эквивалентность задачи Коши (12) и общей задачи Коши (16) для уравнения (10) и разрешимость последней при любых заданных $u_k \in \mathfrak{U}^1$, $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$. Решение задачи (10), (16), как и задачи (10), (12), согласно [1, с. 20] и замечанию 5 при этом имеет вид $u(t) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} J_t^k U_{\alpha,1}(t) u_k = \sum\limits_{k=0}^{m-1} J_t^k E_{\alpha,1}(St^\alpha) u_k = \sum\limits_{k=0}^{m-1} t^k U_{\alpha,k+1}(t) u_k$.

Семейство операторов $\{W(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ назовем семейством разрешающих операторов уравнения (10), если существует фазовое пространство $\mathfrak{P}$ этого уравнения, и для любого $u_0 \in \mathfrak{P}$ единственное решение задачи (10), (12) имеет вид $u(t) = W(t)u_0$ при $t \geq 0$.

Из определения следует, что для семейства разрешающих операторов при любом $t \geq 0$ $\mathrm{im} W(t) \subset \mathfrak{P}$, $\mathrm{im} W(0) = \mathfrak{P}$

Теорема 5. *Пусть оператор M (L, p)-регулярен. Тогда семейство операторов $\{U_{\alpha,1}(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ $(\{V_{\alpha,1}(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\})$ является семейством разрешающих операторов уравнения* (10) ((12)).

Доказательство. Если $u_0 \in \mathfrak{U}^1$, то по определению фазового пространства существует единственное решение задачи (12) для уравнения (10). Поэтому оно должно совпадать с уже известным решением $u(t) = U_{\alpha,1}(t)u_0$ этой задачи. □

5. Задачи Коши и Шоуолтера–Сидорова для неоднородного вырожденного уравнения

Теорема 6. *Пусть оператор M (L, p)-регулярен, $Qf \in C^m([0, T); \mathfrak{V})$, $T \in (0, +\infty]$, существуют дробные производные $(D_t^\alpha H)^n M_0^{-1}(I - Q)f \in C([0, T); \mathfrak{U})$ при $n = 0, 1, \dots, p$, $u_k \in \mathfrak{U}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, выполняются равенства*

$$-D_t^k \sum_{n=0}^{p} (D_t^\alpha H)^n M_0^{-1}(I - Q) f(t)|_{t=0} = (I - P)u_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \tag{17}$$

Тогда существует единственное решение задачи (16) *для уравнения*

$$D_t^\alpha L u(t) = M u(t) + f(t), \quad t \in [0, T), \tag{18}$$

при этом оно имеет вид при $t \in [0, T)$

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k U_{\alpha,k+1}(t) u_k + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} U_{\alpha,\alpha}(t-s) L_1^{-1} Q f(s) ds -$$

$$- \sum_{n=0}^{p} (D_t^\alpha H)^n M_0^{-1}(I - Q) f(t). \tag{19}$$

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 4, получим

$$D_t^\alpha H u^0(t) = u^0(t) + M_0^{-1}(I - Q) f(t), \; H \equiv M_0^{-1} L_0, \tag{20}$$

$$D_t^\alpha u^1(t) = S u^1(t) + h(t), \; S \equiv L_1^{-1} M_1, \; h(t) = L_1^{-1} Q f(t). \tag{21}$$

По лемме 5 существует единственное решение уравнения (20), оно имеет вид $u^0 = -\sum\limits_{n=0}^{p}(D_t^\alpha H)^n M_0^{-1}(I-Q)f$. Отсюда следует, что для выполнения условий Коши (16) необходимо выполнение условий согласования (17).

В силу теоремы 2 оператор $S \in \mathcal{R}(\mathfrak{U}^1)$. Поэтому по теореме 1 существует единственное решение задачи Коши $u^{1(k)}(0) = Pu_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для уравнения (21), при этом оно имеет вид

$$u^1(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(S^\alpha t^\alpha)Pu_k + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(S^\alpha (t-s)^\alpha)h(s)ds.$$

Ссылка на лемму 3 завершает доказательство теоремы. □

Поскольку в определении решения уравнения классу $C^{m-1}([0,T);\mathfrak{V})$ принадлежит функция Lu, а не u, логичным может показаться рассмотрение начальных условий $(Lu)^{(k)}(0) = v_k$, $k = 0, 1, \dots m-1$, вместо условий (16). Однако, как видно из теоремы 6, и в этом случае будет необходимо выполнение условий согласования вида

$$\lim_{t\to 0+} D_t^k L \sum_{n=0}^{p}(D_t^\alpha H)^n M_0^{-1}(I-Q)f(t) = -L(I-P)u_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Более естественным представляется рассмотреть часто возникающую в приложениях при рассмотрении вырожденных эволюционных уравнений обобщенную задачу Шоуолтера–Сидорова

$$(Pu)^{(k)}(0) = u_k, \ k = 0, 1, \dots, m-1. \tag{22}$$

Решением задачи (22) для уравнения (18) называется решение этого уравнения, для которого выполняются условия (22). Заметим, что из существования производных $(Lu)^{(k)}(0)$ следует существование производных $(Pu)^{(k)}(0)$. Действительно, $L_1^{-1}Q(Lu)^{(k)} = (L_1^{-1}QLu)^{(k)} = (L_1^{-1}LPu)^{(k)} = (Pu)^{(k)}$. В случае $p = 0$ по теореме 3 имеет место равенство $\ker P = \ker L$, поэтому задание условий (22) равносильно заданию условий на $(Lu)^{(k)}(0)$.

Теорема 7. *Пусть оператор M (L,p)-регулярен, $Qf \in C^m([0,T);\mathfrak{V})$, существуют дробные производные $(D_t^\alpha H)^n M_0^{-1}(I-Q)f \in C([0,T);\mathfrak{U})$ при $n = 0, 1, \dots, p$. Тогда существует единственное решение задачи* (18), (22), *при этом оно имеет вид* (19).

Доказательство аналогично предыдущему. При этом специфика начального условия Шоуолтера–Сидорова такова, что условий в начальный момент времени на проекцию u^0 решения уравнения (18) и ее производные оно не влечет. Поэтому нет необходимости в выполнении условий согласования (17).

6. Пример

Пусть $\mathfrak{X}$ — банахово пространство, $A \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X})$. Снабдим линеал $D(A^\infty) = \bigcap_{k=1}^\infty D(A^k)$ системой полунорм $q_k(u) = \sum_{l=0}^k \|A^l u\|_{\mathfrak{X}}$, $k \in \mathbb{N}_0$, и получим пространство Фреше, которое обозначим $\mathfrak{D}_A$. При некотором $\tau > 0$ обозначим $\overset{\circ}{\mathfrak{E}}_A(\tau) = \{u \in D(A^\infty) : \overline{\lim}_{k\to\infty}\|A^k u\|_{\mathfrak{X}}^{1/k} \le \tau\}$ — множество элементов A-экспоненциального типа, не превосходящего τ. Наибольшее замкнутое в топологии $\mathfrak{D}_A$ подпространство пространства $\overset{\circ}{\mathfrak{E}}_A(\tau)$ обозначим через $\mathfrak{E}_\tau$. Это множество с топологией, определяемой полунормами q_k, $k \in \mathbb{N}_0$, также является пространством Фреше. Обозначим $A_\tau = A|_{\mathfrak{E}_\tau}$. В [14, гл. 7, §3] показано, что $\sigma(A_\tau) \subset \sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le \tau\}$, при этом оператор A_τ регулярен в $\mathfrak{E}_\tau$.

Пусть $L = G(A) = \sum\limits_{k=0}^\infty a_k A^k$, $M = J(A) = \sum\limits_{k=0}^\infty b_k A^k$, где $G(\lambda)$, $J(\lambda)$ — целые функции. В силу сказанного выше $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{E}_\tau)$.

Рассмотрим индуктивную шкалу локально выпуклых линейных топологических пространств $\{\mathfrak{E}_\tau : \tau \in \mathbb{N}\}$ и ее индуктивный предел $\mathfrak{E}_\infty$. Он является внутренним и даже строгим [15, гл. 1, дополнение]. Пространство $\mathfrak{E}_\infty = \bigcup_{\tau\in\mathbb{N}} \mathfrak{E}_\tau \subset \mathfrak{D}_A$, снабженное полунормами $q_{k,\tau}(u) = \sum_{l=0}^k \|A_\tau^l u\|_{\mathfrak{X}}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in \mathbb{N}$, является отделимым локально выпуклым пространством. В силу предложения 4.1 [15, гл. 1, дополнение] $G(A), J(A) \in \mathcal{L}(\mathfrak{E}_\infty)$.

Обозначим $\mathcal{G}_0 = \{\lambda \in \mathbb{R} : G(\lambda) = 0\}$.

Теорема 8. *Пусть $\mathfrak{X}$ — гильбертово пространство, A — самосопряженный оператор в $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{U} = \mathfrak{V} = \mathfrak{E}_\infty$, целые функции G, J не имеют общих нулей на множестве $\sigma(A)$,*

$$\exists a > 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A) \setminus \mathcal{G}_0 \quad |J(\lambda)/G(\lambda)| \le a.$$

Тогда оператор $J(A)$ $(G(A), 0)$-регулярен.

Доказательство. Обозначим через $\{\mathcal{E}_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ спектральное семейство самосопряженного оператора A. В силу условий теоремы в случае $|\mu| > a + 1$ выполняется неравенство $|\mu - J(\lambda)/G(\lambda)| \ge |\mu| - a > 1$, поэтому

$$\int\limits_{\sigma(A)\setminus\mathcal{G}_0} \frac{d\mathcal{E}_\lambda u}{\mu - J(\lambda)/G(\lambda)} = R_\mu^L(M)u = L_\mu^L(M)u,$$

$$q_{\beta,\tau}([R_\mu^L(M)]^k u) = \sum_{l=0}^{\beta} \left\| \int\limits_{\sigma(A_\tau)\setminus\mathcal{G}_0} \frac{\lambda^l d\mathcal{E}_\lambda u}{(\mu - J(\lambda)/G(\lambda))^k} \right\|_{\mathfrak{X}} \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{\beta} \left\| \int\limits_{\sigma(A_\tau)\setminus\mathcal{G}_0} \lambda^l d\mathcal{E}_\lambda u \right\|_{\mathfrak{X}} = q_{\beta,\tau}(u).$$

Кроме того, $\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{V}^0 = \operatorname{im} \int\limits_{\mathcal{G}_0} d\mathcal{E}_\lambda$, $L_0 = \mathbb{O}$, поэтому оператор M $(L, 0)$-регулярен. □

Пусть $\mathfrak{X} = L_2(0, 1)$,

$$A = i\frac{d}{dx}, \quad D(A) = \{v \in L_2(0,1) : v' \in L_2(0,1),\, v(0) = v(1)\}. \tag{23}$$

Тогда $\sigma(A) = \{\lambda_k = 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$. Собственным значениям λ_k соответствуют собственные функции $\varphi_k(x) = e^{-2\pi k i x}$. По оператору A построим пространство $\mathfrak{E}_\infty$, как это сделано выше.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^\alpha G(A)u(x,t) = J_1(A)u(x+h,t) + f(x), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{24}$$

$$u(x,t) = u(x+1,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{25}$$

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,0) = u_n(x), \quad n = 0, 1, \ldots, m-1,\; x \in (0,1). \tag{26}$$

Теорема 9. *Пусть G и J_1 — целые функции, для которых $|G(2\pi k)| + |J(2\pi k)| \ne 0$ при $k \in \mathbb{Z}$, множество $\{J_1(2\pi k)/G(2\pi k) : k \in \mathbb{Z},\, G(2\pi k) \ne 0\}$ ограничено, $f(x,t) = f(x+1,t)$ для всех $(x,t) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+$, $f \in C^m(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{E}_\infty)$, $u_n \in \mathfrak{E}_\infty$,*

$$\int\limits_{\mathcal{G}_0} d\mathcal{E}_\lambda (J_1(\lambda) e^{-ih\lambda} u_n + f^{(n)}(\cdot, 0)) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Тогда задача (24)–(26) *имеет единственное решение со значениями в пространстве* $\mathfrak{E}_\infty$, *при этом оно имеет вид*

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{m-1} t^n \int\limits_{\sigma(A)\setminus\mathcal{G}_0} E_{\alpha,n+1}\left(t^\alpha \frac{J_1(\lambda)e^{-ih\lambda}}{G(\lambda)}\right) d\mathcal{E}_\lambda u_n +$$

$$+ \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} \int\limits_{\sigma(A)\setminus\mathcal{G}_0} E_{\alpha,\alpha}\left(t^\alpha \frac{J_1(\lambda)e^{-ih\lambda}}{G(\lambda)}\right) \frac{d\mathcal{E}_\lambda f(\cdot,s)}{G(\lambda)} ds - \int\limits_{\mathcal{G}_0} \frac{e^{ih\lambda} d\mathcal{E}_\lambda f(\cdot,s)}{J_1(\lambda)}. \tag{27}$$

Доказательство. Возьмем $\mathfrak{X} = L_2(0,1)$, A — самосопряженный оператор (23), $J(\lambda) = e^{-ih\lambda}J_1(\lambda)$. Тогда

$$J(A)v(x) = J_1(A)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k v^{(k)}(x)}{k!} = J_1 v(x+h)$$

для $v \in D(A^\infty)$. По теореме 8 получим $(G(A),0)$-регулярность оператора $J(A)$ в пространстве $\mathfrak{E}_\infty$. Из теоремы 6 следует утверждение данной теоремы. □

Условие Шоуолтера–Сидорова в данном случае можно задать следующим образом

$$G(A)\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,0) - u_n(x)\right) = 0, \quad n = 0,1,\ldots,m-1,\ x \in (0,1). \tag{28}$$

Аналогичным образом получим утверждение.

Теорема 10. *Пусть* G *и* J_1 *— целые функции, для которых* $|G(2\pi k)| + |J(2\pi k)| \neq 0$ *при* $k \in \mathbb{Z}$, *множество* $\{J_1(2\pi k)/G(2\pi k) : k \in \mathbb{Z},\ G(2\pi k) \neq 0\}$ *ограничено,* $f(x,t) = f(x+1,t)$ *для всех* $(x,t) \in \mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}_+$, $f \in C^m(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{E}_\infty)$, $u_n \in \mathfrak{E}_\infty$ *при* $n = 0,1,\ldots,m-1$. *Тогда задача* (24), (25), (28) *имеет единственное решение со значениями в пространстве* $\mathfrak{E}_\infty$, *при этом оно имеет вид* (27).

Замечание 7. Условиям теоремы 9 удовлетворяют, например, многочлены G и J_1, не имеющие общих нулей среди чисел $\{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$, для которых $\deg G \geq \deg J_1$. Тогда уравнение (24) имеет вид

$$D_t^\alpha \sum_{k=0}^{r} a_k u^{(k)}(x,t) = \sum_{l=0}^{s} b_l u^{(l)}(x+h,t) + f(x), \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}_+,$$

где $a_r \neq 0$, $b_s \neq 0$, $r \geq s$, $-ia_k$ — коэффициенты многочлена G, $-ib_l$ — коэффициенты многочлена J_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. G. Bajlekova. *Fractional Evolution Equations in Banach Spaces*. PhD thesis, Eindhoven: Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001. iv+107+2 p.
2. K. Balachandran, S. Kiruthika. *Existence of solutions of abstract fractional integrodifferential equations of Sobolev type* // Computers and Mathematics with Applications. 2012. V. 64. P. 3406–3413.
3. F. Li, J. Liang, H.-K. Xu. *Existence of mild solutions for fractional integrodifferential equations of Sobolev type with nonlocal conditions* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2012. V. 391. P. 510–525.
4. Федоров В.Е., Дебуш А. *Один класс вырожденных дробных эволюционных систем в банаховых пространствах* // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 12. С. 1616–1622.
5. M. Kostić. *Abstract Volterra equations in locally convex spaces* // Sci. China Math. 2012. V. 55. P. 1797–1825.

6. M. Kostić, C.-G. Li, M. Li. *On a class of abstract time-fractional equations on locally convex spaces* // Abstr. Appl. Anal. 2012. Article ID 131652, 41 pages.
7. M. Kostić. *Abstract time-fractional equations: existence and growth of solutions* // Fract. Calculus Appl. Anal. 2014. V. 14. P. 301–316.
8. M. Kostić. *On the existence and uniqueness of solutions of certain classes of abstract multi-term fractional differential equations* // Funct. Anal. Appr. Comp. 2014. V. 6. P. 13–33.
9. M. Kostić, C.-G. Li, M. Li. *Abstract multi-term fractional differential equations* // Krag. J. Math. 2014. V. 38. P. 51–71.
10. M. Kostić. *Hypercyclic and topologically mixing properties of degenerate multi-term fractional differential equations* // Diff. Eqns. Dyn. Sys. 2015. V. 3. DOI: 10.1007/s12591-015-0238-x.
11. Федоров В. Е., Гордиевских Д. М. *Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени* // Изв. вузов. Математика. 2015. № 1. С. 71–83.
12. G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. VSP: Utrecht, Boston, 2003. vii+216 p.
13. Федоров В. Е. *Сильно голоморфные группы линейных уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах* // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 5. С. 702–712.
14. Радыно Я. В. *Линейные уравнения и борнология*. Мн.: Изд-во БГУ, 1982. 200 с.
15. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. *Обобщенные функции и уравнения в свертках*, М.: Физматлит, 1994. 336 с.

Марко Костич,
Университет г. Нови Сад,
ул. Д. Обрадовича, 6,
21125, г. Нови Сад, Сербия
E-mail: `marco.s@verat.net`

Владимир Евгеньевич Фёдоров,
ФГБОУ ВПО «Челябинский государственный университет»,
лаборатория квантовой топологии
ул. Братьев Кашириных, 129,
454001, г. Челябинск, Россия
E-mail: `kar@csu.ru`