ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 4 (2016). С. 90-99.

УДК 517.5

О БЕЗУСЛОВНЫХ БАЗИСАХ ИЗ ЭКСПОНЕНТ В СЛАБОВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НА ОТРЕЗКЕ

К.П. ИСАЕВ, А.В. ЛУЦЕНКО, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. Показано, что существование безусловных базисов из экспонент в весовом пространстве не определяется ростовыми характеристиками весовой функции. Для этого построены примеры выпуклых весов сколь угодно медленного роста вблизи границы такие, что безусловных базисов из экспонент в соответствующем пространстве не существует.

Ключевые слова: гильбертовы пространства, целые функции, безусловные базисы из экспонент, базисы Рисса.

Mathematics Subject Classification: 30B50, 30D20

1. Введение

В данной работе мы рассматриваем гильбертовы пространства вида

$$L_2(W) = \{f \in L_{\text{loc}}(-1,1) : ||f||^2 = \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 W^2(t)dt < \infty\},$$

где W — положительная непрерывная интегрируемая функция на $(-1,1)$.

В классическом случае, когда $W(t) \equiv 1$, система Фурье $\{e^{\pi nit}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис. Очевидно, что в других случаях ортонормированных базисов из экспонент в пространствах $L_2(W)$ не может быть. Понятие базиса Рисса введено в [1] и обозначает образ ортонормированного базиса при ограниченном обратимом операторе.

Базис $\{e_k,\ k = 1, 2, ...\}$ в гильбертовом пространстве называется безусловным базисом [2], если для некоторых постоянных $c, C > 0$ и для любого элемента

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k,$$

выполняется соотношение

$$c \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 ||e_k||^2 \leqslant ||x||^2 \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 ||e_k||^2.$$

Безусловный базис $\{e_k,\ k = 1, 2, ...\}$ становится базисом Рисса тогда и только тогда, когда $0 < \inf ||e_k|| \leqslant \sup ||e_k|| < \infty$.

Задача о базисности по Риссу данной системы экспонент $\{e^{\lambda_k t}\}$ в классическом пространстве L_2 подробно изучалась. В работе [3] получен критерий, состоящий в том, что порождающая функция данной системы должна удовлетворять условию Макенхоупта. В весовых пространствах с неограниченной весовой функцией базисов Рисса из экспонент не может существовать. Этот факт доказан в работе [4].

K.P. Isaev, A.V. Lutsenko, R.S. Yulmukhametov, On unconditional exponential bases in weak weighted spaces on segment.

Поступила 30 мая 2016 г.

Безусловные базисы рассматривались и в гильбертовых подпространствах пространства $H(D)$ аналитических в ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ функций. Для пространства Смирнова $E_2(D)$ на выпуклом многоугольнике D были построены безусловные базисы из экспонент [5]. В работе [6] рассмотрен вопрос о существовании базисов из экспонент в $E_2(D)$ на выпуклой области D с гладкой границей. В [7] доказано, что в пространствах Смирнова на выпуклых областях, содержащих на границе гладкую дугу, безусловных базисов из экспонент не существует. В [8] показано, что в пространствах Бергмана $B_2(D)$ на выпуклых областях, на границе которых есть точка с ненулевой кривизной, безусловных базисов из экспонент не существует.

В работе [9] доказан аналог этого результата в весовых пространствах $L_2(e^{-h(t)})$ с выпуклой функцией h: при определенных условиях регулярности роста весовой функции $h(t)$, если для любого $k \in \mathbb{N}$

$$e^{h(t)}(1-|t|)^k \longrightarrow \infty,\ |t| \longrightarrow 1,$$

то в пространстве $L_2(e^{-h(t)})$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Все упомянутые выше задачи могут быть сформулированы на одной модели весовых пространств целых функций, если с помощью преобразования Фурье-Лапласа перейти к эквивалентной задаче о безусловных базисах из воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций.

Пусть X — некоторое гильбертово пространство функций, в котором совокупность всех экспонент $e^{\lambda z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, полна. Тогда преобразование Фурье-Лапласа, которое каждому линейному непрерывному функционалу $S \in X^*$ ставит в соответствие функцию

$$\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z}),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

взаимно однозначно отображает сопряженное пространство X^* на некоторое пространство функций $\widehat{X}$. При естественных условиях на исходное пространство X пространство $\widehat{X}$ оказывается гильбертовым пространством целых функций с наведенной из X^* структурой, в котором точечные функционалы $F \longrightarrow F(z)$ оказываются ограниченными для всех $z \in \mathbb{C}$. Тем самым, в силу самосопряженности гильбертовых пространств возникает воспроизводящее ядро (см. [10]) $K(\lambda, z)$:

$$(F(\lambda), K(\lambda, z))_{\widehat{X}} = F(z),\ \forall F \in \widehat{X}.$$

Из простых функционально-аналитических соображений следует, что система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{Z}$, будет безусловным базисом в X тогда и только тогда, когда система $K(\lambda, \lambda_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, будет безусловным базисом в $\widehat{X}$.

Задача о безусловных базисах из воспроизводящих ядер в весовых пространствах целых функций изучалась в работах [11]–[14], в которых рассматривались весовые пространства целых функций

$$H(\varphi) = \{F \in H(\mathbb{C}):\ ||F||^2 = \int_{\mathbb{C}} |F(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} dm(z) < \infty\},$$

где φ — некоторая субгармоническая функция на плоскости, $dm(z)$ — плоская мера Лебега. В работе [14] в предположении некоторой регулярности роста функции $\varphi(z) = \varphi(|z|)$ доказано, что если

$$\ln^2 t = o(\varphi(t)),\ t \longrightarrow \infty,$$

то в пространстве $H(\varphi)$ безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует, а в пространствах с весом $\varphi(t) = \ln^\alpha t,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant 2,$ — существуют.

В работе [15] доказано общее условие на функцию Бергмана весового пространства целых функций, при выполнении которого безусловного базиса из воспроизводящих ядер в этом пространстве не существует.

Результаты работы [14] наводят на мысль о некоторой устойчивости существования безусловных базисов в весовых пространствах при «возмущениях» веса. Дело в том, что пространства $H(\varphi)$ когда $\varphi(\lambda) = O(\ln|\lambda|),\ \lambda \longrightarrow \infty$, становятся конечномерными и, тем самым, в них существуют безусловные базисы из воспроизводящих ядер. В данной работе мы построим примеры выпуклых функций h на интервале $(-1;1)$ сколь угодно медленного роста на концах интервала таких, что в пространстве $L_2(h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

2. Обозначения, предварительные сведения и формулировка утверждений

Утверждение о том, что для двух неотрицательных функций $f,\ g$ при некоторой постоянной C выполняется оценка

$$f(x) \leqslant Cg(x),\ \forall x \in X,$$

будем обозначать символом $\prec$:

$$f(x) \prec g(x),\ x \in X.$$

Соответствующий смысл имеют символы $\succ$ и $\asymp$.

В работе [16] доказано, что пространство $\widehat{L}_2(h)$ преобразований Фурье-Лапласа непрерывных функционалов на $L_2(e^{-h})$ как нормированное пространство изоморфно пространству целых функций экспоненциального типа с нормой

$$||F||^2 := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|F(x+iy)|^2}{K(x)}dyd\widetilde{h}'(x),$$

где

$$\widetilde{h}(x) = \sup_{|t|<1}(xt - h(t))$$

— сопряженная по Юнгу к функции h и

$$K(x) = ||e^{(x+iy)t}||^2_{\widehat{L}_2(h)} = \int_{-1}^{1} e^{2xt-2h(t)}dt.$$

Если $\delta_z : F(\cdot) \longrightarrow F(z)$ — точечный функционал на $\widehat{L}_2(h)$, то по определению преобразования Фурье-Лапласа

$$||\delta_z||^2_{L_2^*(h)} = ||e^{zt}||^2 = K(Re\, z).$$

Для упрощения записи в дальнейшем будем писать $K(z) := K(Re\, z)$.

Для непрерывной в $\overline{B}(z,r)$ функции f положим

$$\|f\|_r = \max_{w\in\overline{B}(z,r)} |f(w)|.$$

Пусть $d(f,z,r)$ — расстояние от функции f до пространства гармонических в $B(z,r)$ функций:

$$d(f,z,r) = \inf\{\|f-H\|_r,\ H - \text{гармонична в}\ \ B(z,r)\}.$$

Для непрерывной на $\mathbb{C}$ функции u и положительного числа p положим

$$\tau(u,z,p) = \sup\{r :\ d(u,z,r) \leqslant p\}.$$

Если функция u зависит только от $Re\, z$, то есть $u(z) = u(x)$, $z = x+iy$, $u(x)$ — выпуклая функция, то несколькими иными способами можно определить характеристики этой выпуклой функции, сравнимые с $\tau(u,z,p)$.

Например, через $\rho(u,x,p)$ обозначим наибольшее число $r > 0$ такое, что

$$\int_{-r}^{r}|u'(x+t) - u'(x)|dt \leqslant p.$$

Тогда из лемм 2 и 5 в работе [17] (см. также [18]) следует, что

$$\tau(u,x,p) \asymp \rho(u,x,p),\ x \in \mathbb{R}.$$

В работе [17] сформулировано, в [18] доказано (Теорема 2) утверждение

$$K(x) \asymp \frac{1}{\rho(\widetilde{h}, x, p)} e^{2\widetilde{h}(x)}. \tag{1}$$

В данной работе будет доказана теорема.

Теорема 1. *Для любой непрерывной интегрируемой положительной функции W на интервале $(-1;1)$, стремящейся к 0, при $|t| \longrightarrow 1$ существует выпуклая функция h, такая что $e^{h(t)} \leqslant \frac{1}{W(t)}$ при $|t| < 1$ и в пространстве $L_2(e^{-h(t)})$ безусловных базисов из экспонент не существует.*

Доказательство будет по существу основано на следующей теореме из работы [9] (теорема 4).

Теорема A. *Пусть $h(t)$— выпуклая функция на интервале $(-1;1)$,*

$$K(\lambda) = \int_{-1}^{1} e^{2Re\,\lambda t - 2h(t)}\,dt.$$

Предположим, что для некоторого $p > 0$ существует последовательность промежутков $[a_m; b_m]$ и положительных чисел τ_m, $m = 1, 2, ...$, так, что

1) для некоторого положительного числа δ и для всех $x \in [a_m; b_m]$

$$\delta\tau_m \leqslant \tau(\ln K, x, p) \leqslant \tau_m,\ m = 1, 2, ...,$$

2) имеет место соотношение

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \frac{b_m - a_m}{\tau_m} = \infty,$$

тогда в пространстве $L^2(e^{-h})$ не существует безусловного базиса из экспонент.

3. Конструкция сопряженной функции $\widetilde{h}$

Возьмем произвольную положительную непрерывную монотонно возрастающую неограниченную функцию $\alpha(t)$ на $[1;\infty)$, удовлетворяющую условию: для некоторой постоянной $A \in (1;2)$

$$\alpha(2t) \leqslant A\alpha(t),\ t > 1. \tag{2}$$

Эта функция будет удовлетворять условию: для $y \geq x$ и $\delta = \frac{\ln A}{\ln 2}$

$$\alpha(y) \leqslant A \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{\delta} \alpha(x),\ x > 1. \tag{3}$$

В самом деле, пусть $n = \left[\log_2 \frac{y}{x}\right] + 1$, здесь квадратные скобки обозначают целую часть, тогда из (2) и монотонности α следует неравенство

$$\alpha(y) \leqslant \alpha(2^n x) \leqslant A^n \alpha(x) \leqslant A \cdot A^{\log_2 \frac{y}{x}} \alpha(x) = A \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{\delta} \alpha(x).$$

Полагая $x = 1$ и учитывая, что $\delta < 1$, получим сходимость несобственного интеграла

$$\int^{\infty} \frac{\alpha(t)dt}{t^2} < \infty.$$

Таким образом, корректно определяется функция

$$v(x) = \int_1^x \left(\int_t^{\infty} \frac{\alpha(s)ds}{s^2}\right) dt,\ x \geq 1,$$

которая будет вогнутой на $[1;\infty)$. В самом деле,

$$v''(x) = -\frac{\alpha(x)}{x^2} < 0.$$

Определим последовательность неотрицательных чисел T_n:

$$T_1 = 1,\ T_{n+1} = \max(\alpha^{(-1)}(n^2), 2T_n),\ n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

где $\alpha^{(-1)}$ — обратная функция к α. Последовательность T_n возрастает до бесконечности. Пусть для $n \in \mathbb{N}$

$$\chi_n(t) = \begin{cases} 0, & t < T_n, \\ 1, & T_n \leqslant t \leqslant 2T_n, \\ 0, & 2T_n < t. \end{cases}$$

— характеристическая функция отрезка $I_n = [T_n; 2T_n]$ и

$$\beta_n(t) = \sqrt{\alpha(t)}\chi_n(t), \quad \beta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t),\ t > 1.$$

Положим

$$u(x) = \int_1^x \left(\int_t^{\infty} \frac{\beta(s)ds}{s^2} \right) dt,\ x \geq 1.$$

Лемма 1. *Функция $u(x)$ — вогнутая, неотрицательная, линейная вне отрезков I_n и монотонно возрастающая до бесконечности. Для некоторой константы $c > 0$ имеет место оценка*

$$u(x) \leqslant c\alpha(x),\ x \geq 1.$$

Производная $u'(x)$ убывает до нуля.

Доказательство.

Функция α монотонно возрастает до бесконечности, значит для любого $M > 0$ с некоторого номера m на отрезках $I_k,\ k \geq m$, выполняется неравенство $\beta(t) \geq M$. Тогда для $t \in [T_k; \frac{3}{2}T_k]$ имеем

$$u'(t) = \int_t^{\infty} \frac{\beta(s)ds}{s^2} \geq M \int_{\frac{3}{2}T_k}^{2T_k} \frac{ds}{s^2} = \frac{M}{6T_k}.$$

Следовательно,

$$u\left(\frac{3}{2}T_m\right) = u(T_m) + \int_{T_m}^{\frac{3}{2}T_m} u'(s)ds \geq \frac{M}{12}.$$

Поскольку функция u по определению возрастающая, то она возрастает до бесконечности.

Оценим производную u' сверху. Пусть

$$B_k = \int_{T_k}^{T_{k+1}} \frac{\beta(t)dt}{t^2} = \int_{T_k}^{2T_k} \frac{\sqrt{\alpha(t)}dt}{t^2},\ k \in \mathbb{N}.$$

Тогда по условию (2)

$$B_k \leqslant \frac{\sqrt{\alpha(2T_k)}}{2T_k} \leqslant \frac{\sqrt{A\alpha(T_k)}}{2T_k}. \tag{5}$$

Пусть $x \in [2T_n, T_{n+1}]$. Тогда

$$u'(x) = \int_x^{\infty} \frac{\beta(t)dt}{t^2} = \sum_{k=n+1}^{\infty} B_k \leqslant \sqrt{A} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sqrt{\alpha(T_k)}}{2T_k}.$$

Воспользуемся соотношением (3), полагая $y = T_k,\ k \geq n+1$, и $x = T_{n+1}$:

$$\alpha(T_k) \leqslant A \cdot \left(\frac{T_k}{T_{n+1}}\right)^{\delta} \cdot \alpha(T_{n+1}).$$

Продолжим оценку u':

$$u'(x) \leqslant \frac{A\sqrt{\alpha(T_{n+1})}}{2T_{n+1}^{\frac{\delta}{2}}} \sum_{k=n+1}^{\infty} T_k^{\frac{\delta}{2}-1}.$$

По определению последовательности T_k верна оценка

$$T_k \geq 2^{k-(n+1)} T_{n+1},$$

значит, для $\varepsilon = 1 - \frac{\delta}{2} > 0$ и $x \in [2T_n; T_{n+1}]$ имеем

$$u'(x) \leqslant \frac{A\sqrt{\alpha(T_{n+1})}}{2T_{n+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} (2^{\varepsilon})^{n+1-k} = \frac{A\sqrt{\alpha(T_{n+1})}}{2T_{n+1}} \cdot \frac{2^{\varepsilon}}{2^{\varepsilon}-1} := A_1 \frac{\sqrt{\alpha(T_{n+1})}}{T_{n+1}}.$$

Если $x \in [T_n; 2T_n]$, то по последнему неравенству и по (5)

$$u'(x) = \int_x^{2T_n} \frac{\beta(t)dt}{t^2} + u'(2T_n) \leqslant B_n + u'(2T_n) \leqslant \frac{\sqrt{A}}{2} \frac{\sqrt{\alpha(T_n)}}{T_n} + A_1 \frac{\sqrt{\alpha(T_{n+1})}}{T_{n+1}}.$$

По определению (4) последовательности T_n

$$T_{n+1} = \alpha^{(-1)}(n^2)$$

или

$$T_{n+1} = 2T_n.$$

В любом случае

$$n \leqslant \sqrt{\alpha(T_{n+1})}. \tag{6}$$

В первом случае $\sqrt{\alpha(T_{n+1})} = n$, поэтому для $n \geq 2$

$$\sqrt{\alpha(T_{n+1})} \leqslant 2(n-1) \leqslant 2\sqrt{\alpha(T_n)}.$$

Во втором случае воспользуемся свойством (2)

$$\sqrt{\alpha(T_{n+1})} = \sqrt{\alpha(2T_n)} \leqslant \sqrt{A}\sqrt{\alpha(T_n)}.$$

Следовательно, для всех $n \geq 2$

$$\sqrt{\alpha(T_{n+1})} \leqslant 2\sqrt{\alpha(T_n)}. \tag{7}$$

Таким образом, для $x \in [2T_n; 2T_{n+1}]$ при некоторой постоянной A_0 выполняется оценка

$$u'(x) \leqslant A_0 \frac{\sqrt{\alpha(T_{n+1})}}{T_{n+1}}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Оценим $u(x)$ сверху. Пусть $x \in [2T_n; 2T_{n+1}]$, тогда

$$u(x) = \int_1^x u'(t)dt = u(2) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{2T_k}^{2T_{k+1}} u'(t)\,dt + \int_{2T_n}^x u'(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant u(2) + 2A_0 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{\alpha(T_{k+1})}}{T_{k+1}} (T_{k+1} - T_k) + A_0 \frac{\sqrt{\alpha(T_{n+1})}}{T_{n+1}} (x - 2T_n) \leqslant$$

$$\leqslant u(2) + 2A_0 \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\alpha(T_{k+1})} + 2A_0 \sqrt{\alpha(T_{n+1})} \leqslant$$

$$\leqslant u(2) + 2A_0(n-1)\sqrt{\alpha(T_n)} + 2A_0\sqrt{\alpha(T_{n+1})}, \; n \in \mathbb{N}.$$

По неравенствам (6) и (7) отсюда следует, что

$$u(x) \leqslant c\alpha(x)$$

для некоторой константы $c > 0$, $x \geq 1$.

Лемма 1 доказана.

Нормируя при необходимости функцию α, будем считать, что

$$u'(1)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k<1.$$

Тогда функция

$$\widetilde{h}(x)=|x|-u(|x|),\ |x|\geq 1,\quad \widetilde{h}(x)=1,\ |x|\leqslant 1,$$

будет выпуклой функцией на $\mathbb{R}$, убывающей на $\mathbb{R}_-$ и возрастающей на положительной полуоси. Положим

$$h(t)=sup_x(xt-\widetilde{h}(x)),\ |t|<1,$$

и докажем, что при подходящем выборе α функция h удовлетворяет условиям теоремы 1.

4. Оценка характеристики τ

Лемма 2. *Если функция α удовлетворяет условию (2), и функции u, $\widetilde{h}$ определены по этой функции α, то для $q<\frac{1}{4}$ и для любого $p>0$ в интервалах $J_n=[(1+q)T_n;(2-q)T_n]$ верна оценка*

$$\tau(\widetilde{h},x,p)\asymp x(\alpha(x))^{-\frac{1}{4}}=o(x),\ x\in J_n,\ n\in\mathbb{N}.$$

Доказательство.

Ранее указывалось, что $\tau(u,x,p)\asymp\rho(u,x,p)$, поэтому в доказательстве будем рассматривать характеристику ρ. Если $x\in J_n$ и $\rho<qT_n$, то

$$\int_{-\rho}^{\rho}|\widetilde{h}'(x+t)-\widetilde{h}'(x)|dt\geq\min_{T_n\leqslant y\leqslant 2T_n}|u''(y)|\rho^2.$$

Значит,

$$\rho(\widetilde{h},x,p)\leqslant\sqrt{p(\min_{T_n\leqslant y\leqslant 2T_n}|u''(y)|)^{-1}}.$$

С другой стороны,

$$\int_{-\rho}^{\rho}|\widetilde{h}'(x+t)-\widetilde{h}'(x)|dt\leqslant\max_{T_n\leqslant y\leqslant 2T_n}|u''(y)|\rho^2.$$

Значит,

$$\rho(\widetilde{h},x,p)\geq\sqrt{p(\max_{T_n\leqslant y\leqslant 2T_n}|u''(y)|)^{-1}}.$$

По свойству (2) функции α отсюда получаем утверждение леммы 2.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если функция α удовлетворяет условию (2), и функции u, $\widetilde{h}$ определены по этой функции α, то для $q<\frac{1}{4}$ и для любого $p>0$ в интервалах $J_n=[(1+q)T_n;(2-q)T_n]$ верна оценка*

$$\tau(\ln K,x,p)\asymp x(\alpha(x))^{-\frac{1}{4}}=o(x),\ x\in J_n,\ n\in\mathbb{N}.$$

Тем самым, по теореме A в пространстве $L_2(e^{-h})$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Доказательство.

Соотношение (1) теперь мы можем записать в виде

$$K(x)\asymp\frac{\sqrt[4]{\alpha(x)}}{x}e^{2\widetilde{h}(x)}.$$

Положим

$$a(x)=\frac{\sqrt[4]{\alpha(x)}}{x},\ x\geq 1.$$

Тогда для $x \in J_n$ по свойству (2) для некоторой константы $C > 0$

$$|\ln a(x) - \ln T_n| \leqslant C.$$

Положим $u_1(x) = \widetilde{h}(x),\ u_2(x) = \ln K(x) - \ln a(T_n)$. Тогда в интервале J_n

$$|u_1(x) - u_2(x)| = |\widetilde{h}(x) - \ln K(x) + \ln a(T_n)| \leqslant C.$$

По лемме 4 в работе [18] отсюда следует, что

$$\frac{p}{(p+C)}\rho(u_1, y, p) \leqslant \rho(u_2, y, p) \leqslant \frac{(p+C)}{p}\rho(u_1, y, p).$$

Значит, по лемме 2

$$\rho(\ln K, x, p) \asymp \rho(\widetilde{h}, x, p) \asymp x(\alpha(x))^{-\frac{1}{4}} = o(x),\ x \in J_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 3 доказана.

5. Доказательство теоремы 1

Переходя при необходимости к функции $W(t) := \min(W(t), W(-t))$, можем считать, что весовая функция W положительная, четная и $W(t) \longrightarrow 0$, $|t| \longrightarrow 1$. Далее, переходя при необходимости к функции

$$W(t) := \min_{|\tau| \leqslant t} W(\tau),$$

можем считать функцию монотонной на интервалах $(-1; 0), (0; 1)$. Наконец, нормируя постоянным множителем, будем считать, что $W(t) \leqslant 1$. Таким образом, функция

$$a(t) = \ln \frac{1}{W(t)},\ |t| < 1,$$

положительная, четная и монотонная на $(0; 1)$. Положим

$$\widetilde{a}(x) = \sup_{|t|<1}(xt - a(t)),\ x \in \mathbb{R}.$$

Функция $\widetilde{a}(x)$ выпуклая на $\mathbb{R}$, четная и обладает легко проверяемыми свойствами

$$0 < \ln a(0) \leqslant \widetilde{a}(x) < |x|, \quad \lim_{|x| \longrightarrow \infty} \frac{\widetilde{a}(x)}{|x|} = 1. \tag{8}$$

При этом функция $b(x) = x - \widetilde{a}(x)$ вогнутая и неограничена в $\mathbb{R}_+$. В самом деле, если t_x — точка достижения супремума в определении $\widetilde{a}$, то

$$b(x) = a(t_x) + (1 - t_x)x,$$

и если $|t_x| \leqslant d < 1$ при $x \in \mathbb{R}_+$, то $b(x) \geq (1-d)x \longrightarrow \infty$, а если $\overline{\lim}_{x \longrightarrow \infty} t_x = 1$, то $b(x) \geq a(t_x) \longrightarrow \infty$. Из вогнутости следует, что $b'(x)$ убывающая функция, а из неограниченности получим, что $b'(x)$ неотрицательная функция. Значит, функция $b(x)$ возрастает до бесконечности. Положим

$$h_0(t) = \sup_x (xt - \widetilde{a}(x)),\ |t| < 1.$$

Тогда функция h выпукла на $(-1; 1)$ и

$$e^{h_0(t)} \leqslant a(t) = \frac{1}{W(t)},\ |t| < 1.$$

Нам остается найти выпуклую функцию $\widetilde{h}(x) \geq \widetilde{a}(x)$ на $\mathbb{R}$, имеющую конструкцию, описанную в параграфе 2. Тогда функция

$$h(t) = \sup_x (xt - \widetilde{h}(x)) \leqslant \sup_x (xt - \widetilde{a}(x)) = h_0(t) \leqslant a(t) \leqslant \frac{1}{W(t)},$$

и по лемме 3 в пространстве $L_2(e^{-h})$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Определим функцию $\alpha(x)$ рекуррентными соотношениями на отрезках $[2^n; 2^{n+1}]$. Возьмем число $A \in (1; 2)$. Пусть $l_0(x)$ линейная функция, такая, что $l_0(1) = b(1)$, $l_0(2) = \min(b(2), \sqrt{A}b(1))$ и для $x \in [1; 2]$ положим $\alpha(x) = l_0(x)$. В силу вогнутости $b(x)$ имеем $\alpha(x) \geq b(x)$, $x \in [1; 2]$. Если на отрезках $[2^k; 2^{k+1}]$ при $k \leqslant n-1$ функцию α уже определили, то через l_n обозначим линейную функцию, такую, что $l_n(2^n) = \alpha(2^n)$, $l_n(2^{n+1}) = \min(b(2^{n+1}), \sqrt{A}\alpha(2^n)$ и положим для $x \in [2^n; 2^{n+1}]$ $\alpha(x) = l_n(x)$. Функция α, определенная таким образом, будет непрерывной и возрастающей до бесконечности и удовлетворять неравенству $\alpha(x) \leqslant b(x)$. В самом деле, если для некоторой последовательности n_k окажется $\alpha(2^{n_k}) = b(2^{n_k})$, то

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \alpha(x) = \lim_{k \longrightarrow \infty} b(2^{n_k}) = \infty,$$

а если начиная с номера m $\alpha(2^n) = \sqrt{A}\alpha(2^{n-1})$, то $\alpha(2^n) = A^{\frac{n-m}{2}}\alpha(2^m) \longrightarrow \infty$ при $n \longrightarrow \infty$.

Функция α удовлетворяет условию (2). Возьмем $x \in [2^n; 2^{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\alpha(2x) \leqslant \alpha(2^{n+2}) \leqslant \sqrt{A}\alpha(2n+1) \leqslant A\alpha(2n) \leqslant A\alpha(x).$$

По функции α построим как в параграфе 3 вогнутую возрастающую функцию u на $[1; \infty)$ и выпуклую функцию $\widetilde{h}$ на $\mathbb{R}$. По лемме 1 мы можем нормировать функцию $u(x)$ постоянным множителем так, что

$$u(x) \leqslant \alpha(x), \ x \geq 1.$$

По построению функция $\widetilde{h}(x) = x - u(x) \geq x - b(x) = \widetilde{a}(x)$.

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бари Н.К. *О базисах в гильбертовом пространстве*//Доклады Академии наук. 1946. Т.54. С. 383–386.
2. Hruščev S.V., Nikol'skii N.K., Pavlov B.S. *Unconditional Bases of exponentials and of reproducing kernels*//Complex Analysis and Spectral Theory. Lecture Notes in Mathematics. V. 864. 1981. P. 214–335.
3. Павлов Б.С. *Базисность системы экспонент и условие Макенхоупта*// ДАН СССР. Т. 247, №1. 1979. С.37–40.
4. Путинцева А.А. *Базисы Рисса в весовых пространствах*// Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, №1. С. 47–52.
5. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. мат., 39:3 (1975). С. 657–702.
6. Любарский Ю.И. *Ряды экспонент в пространствах Смирнова и интерполяция целыми функциями специальных классов* // Изв. АН СССР. Сер. матем., 52:3 (1988). С. 559–580.
7. Луценко В.И. *Безусловные базисы из экспонент в пространствах Смирнова* // Дис.канд. физ.-мат. наук. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. 1992.
8. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Преобразования Лапласа функционалов на пространствах Бергмана*// Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68, №1. С. 5–42.
9. Башмаков Р.А., Махота А.А., Трунов К.В. *Об условиях отсутствия безусловных базисов из экспонент*// Уфимский математический журнал. 2015. Т. 7, №2. С. 19–34.
10. Aronszajn N. *Theory of reproducing kernels* // Transactions of the American Mathematical Society. 1950. V. 68, № 3. P. 337–404.
11. Seip K. *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space* I // Reine Angew. Math. 429 (1992). P. 91—106.
12. Seip K., Wallsten R. *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock spaceII* // Reine Angew. Math. 429 (1992). P. 107—113.

13. Borichev A., Dhuez R., Kellay K. *Sampling and interpolation in large Bergman and Fock spaces* // Journal of Functional Analysis 242 (2007), №2. P. 563—606.
14. Borichev A., Lyubarskii Yu. *Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces* // Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu 9 (2010). P. 449–461.
15. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Безусловные базисы из воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций* // Уфимский математический журнал. 2013. Т. 5, №3. С. 67–77.
16. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Пэли–Винера на весовые пространства* // Матем. заметки. 1990. Т. 48, № 5. С. 80–87.
17. Напалков В.В., Башмаков Р.А., Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическое поведение интегралов Лапласа и геометрические характеристики выпуклых функций* // ДАН. 2007. Т. 413, № 1. С. 20–22.
18. Башмаков Р.А., Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *О геометрических характеристиках выпуклых функций и интегралах Лапласа* // Уфимский мат. журн. 2010. Т. 2, № 1. С. 3–16.

Константин Петрович Исаев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: orbit81@list.ru

Анастасия Владимировна Луценко,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: lutsenko.av@ya.ru

Ринад Салаватович Юлмухаметов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: Yulmukhametov@mail.ru