ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 4 (2016). С. 53-62.

УДК 511.515, 511.54, 512.752

О СОВМЕСТНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ КДВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Р.Н. ГАРИФУЛЛИН

Аннотация. Рассматривается универсальное решение уравнения КдВ. Это решение также удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению пятого порядка. Ставится задача о исследовании его поведения при $t \to \infty$. При больших временах асимптотическое решение имеет разную структуру в зависимости от медленной переменной $s = x^2/t$. Построено асимптотическое решение в областях $s < -3/4$, $-3/4 < s < 5/24$ и в окрестности точки $s = -3/4$. Показано, что медленная модуляция параметров решения в окрестности точки $s = -3/4$ описывается решением уравнения Пенлеве IV.

Ключевые слова: асимптотика, согласование асимптотических разложений, уравнение Кортевега–де Вриза, недиссипативные ударные волны.

Mathematics Subject Classification: 35Q53, 35N10

1. Введение

В работах А.М. Ильина и С.В. Захарова [1–3] начато исследование вопроса о влиянии малой диссипации на процессы трансформации слабых разрывов в сильные. В этих работах показано, что этот процесс в главном описывается специальным решением уравнения Бюргерса. В работе [4] показано, что в задачах с малой дисперсией аналогичную роль играют два специальных решения уравнения Кортевега–де Вриза (КдВ)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{1.1}$$

В этой работе будет исследоваться одно из них с заданными асимптотиками:

$$u\big|_{x\to\infty} = 0, \qquad u\big|_{x\to-\infty} = (t + \sqrt{t^2 - 4x})/2. \tag{1.2}$$

Решение $u(x,t)$ играет универсальную роль [4] в задачах о возникновении бездиссипативных ударных волн [4, 5]. В работе [4] для решения задачи (1.1, 1.2) в асимптотическое решение при $x^2 + t^2 \to \infty$ было построено в некоторых направлениях, которое в области незатухающих осцилляций задается квазипростыми решениями уравнений Уизема. В данной работе асимптотика этого решение при $t \to \infty$ исследуется более детально. А именно, предлагается анзатц для зоны, в которой возникают быстрые осцилляции, определяется уравнение для сдвига фазы в зоне Уиземовских колебаний, строится асимптотика решения перед зоной этих колебаний. Показано, что уравнение Пенлеве IV описывает главный член асимптотики в окрестности зоны возникновения Уиземовских колебаний.

R.N. Garifullin, On simultaneous solution of the KdV equation and a fifth-order differential equation.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00078).

Поступила 30 июня 2016 г.

В [4] показано, что решение $u(x,t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению пятого порядка по переменной x :

$$\left(u_{xxxx}+\frac{5u_{xx}u}{3}+\frac{5u_x^2}{6}+\frac{5u^3}{18}\right)'_x+\frac{2u+xu_x-3t(u_{xxx}+uu_x)}{6}=0. \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) представляет собой комбинацию стационарных частей симметрий уравнения КдВ. Одна из них — высшая (обобщенная) симметрия пятого порядка:

$$u_{\tau_5}=\left(u_{xxxx}+\frac{5u_{xx}u}{3}+\frac{5u_x^2}{6}+\frac{5u^3}{18}\right)'_x, \tag{1.4}$$

вторая – классическая симметрия растяжения:

$$u_{\tau_r}=2u+xu_x-3t(u_{xxx}+uu_x). \tag{1.5}$$

Уравнения (1.3) можно назвать первым высшим аналогом уравнения Пенлеве I, см.6.2 [4].

Асимптотическое решение задачи (1.1, 1.2, 1.3) при $t\to\infty$ имеет разную структуру в зависимости от направления [4]. Эти направления определяются значениями переменной

$$s=\frac{x}{t^2}. \tag{1.6}$$

Зоне Уиземовских осцилляций соответствует $-\frac{3}{4}<s<\frac{5}{24}$, некоторая окрестность точки $s=-\frac{3}{4}$ соответствует зоне возникновения Уиземовских колебаний, $s<-\frac{3}{4}$ – зона перед Уиземовскими колебаниями.

Работа посвящена исследованию асимптотических решений в этих областях и их согласованию. Следует отметить, что для решения этой задачи наряду с обычными методами усреднения [6] используется условие, что искомое решение удовлетворяет одновременно двум уравнениям. Это условие позволяет получать уравнения в медленной переменной, см. [7,8].

2. Асимптотика при $s<-3/4$

Сделаем замену переменных

$$u=t\,U(t,s),\quad s=\frac{x}{t^2}.$$

После нее уравнения (1.1,1.3) примут вид:

$$t^{-5}U_{sss}+tU_t-2sU_s+UU_s+U=0, \tag{2.1}$$

$$t^{-10}U_{sssss}+\frac{1}{6}t^{-5}(20U_sU_{ss}+(10U-3)U_{sss})+\frac{1}{6}(5U^2+s-3U)U_s+\frac{1}{3}U=0. \tag{2.2}$$

В уравнении (2.2) все производные по переменной x третьего и более высокого порядка можно заменить в силу уравнения (2.1):

$$\begin{gathered}\frac{1}{3}t^{-5}(U_s+9)U_{ss}-t^{-4}U_{sst}+\frac{1}{6}(U^2-4sU+24s^2-5s)U_s-\\-\frac{1}{6}(4U-3+12s)tU_t-\frac{1}{6}(4U+12s-5)U=0.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Главный член асимптотики зависит только от медленной переменной s:

$$U=V_0(s)+...,t\to\infty,\quad s<-\frac{3}{4}.$$

Подстановка этой формулы в уравнения (2.1) и (2.3) приводит к двум уравнениям на $V_0(s)$:

$$\frac{1}{6}(V_0^2-4sV0-5s+24s^2)V_0'-\frac{1}{6}V_0(4V_0-5+12s)=0,\quad (V_0-2s)V_0'+V_0=0. \tag{2.4}$$

Из этой системы следует алгебраическое уравнение:

$$V_0^2-V_0+s=0$$

решения которого удовлетворяют системе (2.4). Из (1.2) следует, что нужно выбрать один из корней этого уравнения:

$$V_0 = (1 + \sqrt{1-4s})/2. \tag{2.5}$$

Из результатов статьи [4] следует, что в поправках возникают быстрые осцилляции, поэтому асимптотика решения строится в виде отрезка ряда:

$$U = V_0 + V_1(p,V_0)t^{-5/2} + V_2(p,V_0)t^{-5} + V_3(p,V_0)t^{-15/2} + V_4(p,V_0)t^{-10} + V_5(p,V_0)t^{-25/2} + \ldots. \tag{2.6}$$

Для быстрой переменной p строится свой ряд:

$$p = t^{5/2}p_{-1}(V_0) + p_{\ln}\ln t + p_0(V_0) + p_1(V_0)t^{-5/2} + p_2(V_0)t^{-5} + p_3(V_0)t^{-15/2} + p_4(V_0)t^{-10} + \ldots. \tag{2.7}$$

На коэффициенты $V_k(p,s)$ накладывается требование 2π периодичности по переменной p. Вместо медленной переменной s в коэффициентах асимптотического разложения ставится зависимость от V_0 для удобства вычислений.

Подставив ряды (2.6) и (2.7) в (2.1) и (2.3) на V_1, получим 2 уравнения:

$$-\frac{(p'_{-1})^3}{(2V_0-1)^3}\frac{\partial^3 V_1}{\partial p^3} + \frac{1}{2}(5p_{-1} - 2p'_{-1}V_0)\frac{\partial V_1}{\partial p} = 0$$
$$-\frac{5}{2}\frac{p_{-1}(p'_{-1})^2}{(2V0-1)^2}\frac{\partial^3 V_1}{\partial p^3} + \frac{1}{12}(p_{-1}(12V_0^2 - 16V_0 + 3) - 2V_0(2V_0-1)(6V_0-5)p'_{-1})\frac{\partial V_1}{\partial p} = 0.$$

Исключая из этой системы $\frac{\partial^3 V_1}{\partial p^3}$, получаем соотношение:

$$\Big(2V_0(6V_0-5)p'_{-1} + 15(2V_0-1)p_{-1}\Big)\Big((2V_0-1)p'_{-1} - 5p_{-1}\Big)\frac{\partial V_1}{\partial p} = 0,$$

поскольку V_1 должно зависить от p, из последнего соотношения можно найти p_{-1}. Ограниченные поправки существуют лишь при одном выборе p_{-1}, а именно:

$$p_{-1}(V_0) = -\frac{2\sqrt{2}}{15\sqrt{3}}V_0^{3/2}(6V_0-5). \tag{2.8}$$

Здесь константы интегрирования определены из требования 2π периодичности V_1. Уравнение на V_1 принимает вид:

$$\frac{\partial^3 V_1}{\partial p^3} + \frac{\partial V_1}{\partial p} = 0,$$

его решение запишем в виде:

$$V_1 = D_1(V_0) + A_1(V_0)\cos p, \tag{2.9}$$

где $D_1(V_0), A_1(V_0)$ – функции медленной переменной, подлежащие определению из требования существования и ограничености следующих поправок. Здесь и ниже третьей константе интегрирования соответствуют сдфиги фазы $p_j(V_0)$.

На функцию V_2 получаем 2 неоднородных уравнения по переменной p вида:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 V_2}{\partial p^3} + \frac{\partial V_2}{\partial p} &= F_{21}(p, V_0, A_1, D_1, A'_1, D'_1, p'_0),\\
\frac{\partial^3 V_2}{\partial p^3} + \frac{\partial V_2}{\partial p} &= F_{22}(p, V_0, A_1, D_1, A'_1, D'_1, p'_0).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Требования существования и ограниченности решений имеют вид равенства правых частей друг другу и их ортогональности решениям однородного уравнения, т.е.:

$$\begin{aligned}
&F_{21}(p,V_0,A_1,D_1,A_1',D_1',p_0')=F_{22}(p,V_0,A_1,D_1,A_1',D_1',p_0'),\\
&\int_0^{2\pi}F_{21}(p,V_0,A_1,D_1,A_1',D_1',p_0')dp=0,\\
&\int_0^{2\pi}F_{21}(p,V_0,A_1,D_1,A_1',D_1',p_0')\cos p dp=0,\\
&\int_0^{2\pi}F_{21}(p,V_0,A_1,D_1,A_1',D_1',p_0')\sin p dp=0.
\end{aligned}\tag{2.11}$$

Решения системы (2.11) имеют вид:

$$\begin{aligned}
&A_1=\frac{C_1}{\sqrt{V_0}(2V_0-3)},\\
&D_1=-\frac{2p_{ln}\sqrt{6}}{5\sqrt{V_0}(2V_0-1)},\\
&p_0=\frac{p_{ln}}{5}\ln((2V_0-3)^2V_0^3)+p^0,
\end{aligned}\tag{2.12}$$

где $C_1,\ p^0$ – произвольные константы. Уравнение на V_2 принимает вид:

$$\frac{\partial^3V_2}{\partial p^3}+\frac{\partial V_2}{\partial p}=\frac{3C_1^2}{4(2V_0-3)^2V_0^2}\sin 2p,\tag{2.13}$$

его решение:

$$V_2=D_2(V_0)+A_2(V_0)\cos p+\frac{C_1^2}{8(2V_0-3)^2V_0^2}\cos 2p.\tag{2.14}$$

На следующие поправки получаем системы вида (2.10) с условием разрешимости вида (2.11). Доказать для всех поправок разрешимость этих систем не удалось, непосредственно проверено, что до V_5 все строится однозначно, никаких новых констант не возникает. Приведем явные формулы для $D_2,\ A_2,\ p_1$:

$$\begin{aligned}
&D_2=-\frac{C_1^2}{24V_0^2(2V_0-1)(2V_0-3)}-\frac{12(4V_0-1)p_{\ln}^2}{25V_0^2(2V_0-1)^3}+\frac{4}{(2V_0-1)^4}\\
&A_2=-\frac{3\sqrt{6}(14V_0+15)C_1p_{\ln}}{20(2V_0-3)^3V_0^2}\\
&p_1=-\frac{\sqrt{6}}{V_0^{3/2}(2V_0-3)^2}\Bigg(\frac{(4V_0^2-96V_0+63)p_{\ln}^2}{50(2V_0-1)}-\frac{(2V_0+9)C_1^2}{288}+\\
&\quad+\frac{(2V_0+1)(212V_0^2-204V_0+45)}{24(2V_0-1)^2}\Bigg).
\end{aligned}\tag{2.15}$$

Эти формулы полностью определяют V_2.

В рядах (2.6) и (2.7) остались произвольными коэффициенты $p_{\ln},p^0,C_1$. Их можно определить, сравнивая ряды с формулой [4, (5.3)] и формулой сразу за ней. Находим:

$$p_{\ln}=\frac{5\ln 2}{2\pi},\quad C_1=-\frac{3\sqrt{6}\ln 2}{\pi},\quad p_0=\frac{\ln 2\ln 24}{2\pi}-\frac{\pi}{2}+2\arg\Gamma\left(\frac{i\ln 2}{2\pi}\right).\tag{2.16}$$

Используя выражения (2.9, 2.12, 2.14, 2.15) для V_1 и V_2, определим область пригодности асимптотического разложения из требовани $V_1\gg t^{-5/2}V_2$. Находим $|V_0-3/2|\gg t^{-5/4}$, в переменной s область имеет вид $|s+3/4|\gg t^{-5/4}$. Поэтому медленная переменная внутреннего разложения имеет вид:

$$y=(s+3/4)t^{5/4}.\tag{2.17}$$

Заменяя переменную s в силу формулы (2.17) в рядах (2.6) и (2.7) получим:

$$\begin{gathered}U \approx \frac{3}{2} + \left(-\frac{y}{2} + \left(\frac{6\ln 2}{\pi y} + \frac{108\ln^2 2}{\pi^2 y^3} - \frac{432\ln 2(5\pi^2 - 9\ln^2 2)}{\pi^3 y^5} + \dots\right)\cos p\right) t^{-5/4} + \dots \\ p \approx -\frac{4}{5}t^{5/2} + yt^{5/4} - \frac{5\ln 2\ln t}{4\pi} - \frac{y^2}{12} - \frac{\ln 2\ln(-y)}{\pi} - \frac{3\ln 2\ln(3/2)}{2\pi} + p^0 + \dots\end{gathered} \tag{2.18}$$

Эти формулы определяют асимптотику коэффициентов внутреннего разложения при $y \to -\infty$.

3. Асимптотическое решение в окрестности точки $s = -3/4$

Для построения асимптотического решения в окрестности точки $s = -3/4$ сделаем замену

$$U = \frac{3}{2} + t^{-5/4}W(y,t), \quad y = (s + 3/4)t^{5/4}, \tag{3.1}$$

уравнения (2.1) и (2.3) примут вид:

$$\begin{gathered}t^{-9/4}W_{yyy} + t^{-1}(WW_y - \frac{3}{4}yW_y - \frac{1}{4}W) + t^{1/4}(3W_y + \frac{3}{2}) + W_t = 0 \\ t^{-5/2}W_{tyy} - t^{-7/2}\frac{W_{yy}}{12}(4W_y - 21) + t^{-1}\frac{1}{24}(W_y(68y - 12W) + 22W + 27y) - \\ - t^{-9/4}\frac{1}{48}(W_y(8W^2 - 12yW - 27y^2) + W(8W + 9y)) + \\ + t^{-5/4}\frac{W_y}{12}(8W + 9y) - W_t + t^{1/4}2(2W_y + 1) = 0.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Асимптотическое решение W строится в виде:

$$W = W_0(\psi, y) + t^{-5/4}W_1(\psi, y) + t^{-5/2}W_2(\psi, y) + t^{-15/4}W_3(\psi, y) + \dots, \quad t \to \infty, \tag{3.3}$$

с быстрой переменной

$$\psi = -\frac{4}{5}t^{5/2} + yt^{5/4} - \frac{5\ln 2}{4\pi}\ln t + \psi_0(y) + t^{-5/4}\psi_1(y) + t^{-5/2}\psi_2(y) + \dots, \ t \to \infty. \tag{3.4}$$

После подстановки (3.3) и (3.4) в (3.2) получаем уравнения на коэффициенты ряда (3.3). Уравнения на главный член W_0 совпадают и имеют вид:

$$\partial_\psi^3 W_0 + \partial_\psi W_0 = 0. \tag{3.5}$$

Его решение запишем в виде

$$W_0 = H_0(y) + R_0(y)\cos\psi, \tag{3.6}$$

где $H_0(y)$, $R_0(y)$ – неизвестные функции медленной переменной, слагаемое с $\sin\psi$ учтено в сдвиге фазы $\psi_0(y)$. Уравнения на W_1 имеют вид:

$$\begin{gathered}\partial_\psi^3 W_1 + \partial_\psi W_1 = \frac{R_0}{2}(y + 2H_0)\sin\psi - \frac{3}{2}(1 + 2H_0') + \frac{R_0^2}{2}\sin 2\psi, \\ \partial_\psi^3 W_1 + \partial_\psi W_1 = \frac{5R_0}{6}(y + 2H_0)\sin\psi + \frac{1}{2}(1 + 2H_0') + \frac{R_0^2}{2}\sin 2\psi.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Требование существования и ограниченности решений этой системы дает:

$$H_0(y) = -\frac{y}{2}.$$

При таком выборе H_0 решение системы (3.7) существует и ограничено при $\psi \to \infty$. Функция W_1 имеет вид:

$$W_1 = H_1(y) + R_1(y)\cos 2\psi + \frac{R_0^2}{12}\cos 2\psi. \tag{3.8}$$

На поправки получаем уравнения вида (2.10), условия разрешимости и ограниченности решений имеют вид (2.11). Из требования существования и ограниченности W_2 получаем:

$$H_1 = -\frac{R_0^2}{12} - \frac{y^2}{8} - \frac{1}{\pi}, \tag{3.9}$$

$$R_0'' = R_0(\psi_0')^2 + \frac{5}{12}yR_0\psi_0' + \frac{1}{72}R_0^3 + \frac{y^2}{24}R_0^2 - \frac{1}{12\pi}R_0 \tag{3.10а}$$

$$R_0\psi_0'' = -2R_0'\psi_0' - \frac{5}{12}yR_0' - \frac{1}{4}R_0. \tag{3.10б}$$

Решение $W_2(p,y)$ принимает вид:

$$W_2 = R_2\cos\psi + H_2(y) + \frac{R_0^3}{192}\cos 2\psi - \frac{R_0^2}{6}\psi_0'\cos 2\psi + \frac{R_0}{6}R_1\cos 2\psi - \frac{R_0}{6}R_0'\sin 2\psi. \tag{3.11}$$

Далее проверено, что поправки до V_5 находятся в классе ограниченных, периодических по переменой p функций. Функции $R_1, R_2, R_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3, H_3, H_4$ определяются однозначно, без дополнительных произволов.

Покажем, что система (3.10) эквивалентна уравнению Пенлеве IV. Заметим, что у этой системы есть первый интеграл, квадратичный по производным:

$$I = (R_0')^2 + R_0^2(\psi_0')^2 + \frac{y}{2}R_0^2\psi_0' + \frac{3\pi y^2+4}{48\pi}R_0^2 - \frac{1}{144}R_0^4. \tag{3.12}$$

Систему (3.10а) и (3.12) можно рассматривать как одно дифференциальное уравнение второго порядка на $R_0(y)$ с параметром ψ_0'. Сделаем в этой системе замену:

$$\psi_0' = iR_0'/R_0 + P(y) - y/4, \tag{3.13}$$

где i – мнимая единица. Исключая из (3.10а) и (3.12) функцию $R_0(y)$ на новую неизвестную $P(y)$, получим уравнение Пенлеве IV:

$$2P(y)P''(y) = (P'(y))^2 - 3P^4(y) + \frac{1}{3}yP^3(y) + \left(-\frac{y^2}{144} + \frac{1}{6}(i - \ln 2/\pi)\right)P^2(y). \tag{3.14}$$

(функция $Q(z) = (2+2i)\sqrt{3}P((-2+2i)\sqrt{3}z)$ удовлетворяет обычному уравнению Пенлеве IV.) В (3.14) подставлено значение I найденное с помощью формул (2.18), которые дают асимптотику функций ψ_0, R_0 при $y \to -\infty$, и, следовательно, позволяют найти значение I и асимптотику $P(y)$ при $y \to -\infty$:

$$I = \frac{\ln^2 2}{4\pi^2},$$

$$P(y) = \frac{y}{12} + \frac{1}{y}(i - \ln 2/\pi) + \frac{6}{y^3}\left(\frac{6i\ln 2}{\pi} - \frac{3\ln^2 2}{\pi^2} + 4\right) + \dots. \tag{3.15}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что у уравнения (3.14) существует решение с асимптотикой (3.15). Однако, на данный момент не определено, какая асимптотика этого решения при $y \to \infty$, подобная задача может быть решена с помощью методов статьи [9].

4. Асимтотическое решение в зоне Уиземовских колебаний

В зоне Уиземовских колебаний асимптотическое решение U системы (2.1, 2.3) строится в виде ряда по обратным степеням t

$$U = U_0(\varphi, s) + t^{-5/4}U_1(\varphi, s) + t^{-5/2}U_2(\varphi, s) + \dots, \quad t \to \infty. \tag{4.1}$$

Здесь U_0, U_1 и U_2 – 2π периодические функции быстрой переменной φ. Эта переменная имеет вид

$$\varphi = t^{5/2}f(s) + n(s),$$

где $f(s), n(s)$ — неизвестные функции.

Для функции U_0 получаем следующую нелинейную систему уравнений по быстрой переменной φ:

$$\begin{aligned} &(f')^2\frac{\partial^3 U_0}{\partial\varphi^3} + (U_0 - a(s))\,\frac{\partial U_0}{\partial\varphi} = 0,\\ &a(s)(f')^2\frac{\partial^3 U_0}{\partial\varphi^3} - \frac{1}{3}(f')^2\frac{\partial U_0}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 U_0}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{6}\left(U_0^2 + s + 4a(s)U_0 - 3a(s)\right)\frac{\partial U_0}{\partial\varphi} = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь обозначено:

$$a(s) = 2s - \frac{5f}{2f'}.$$

Исключив из (4.2) выражение $\partial^3_\varphi U_0$, получим уравнение второго порядка для функции U_0:

$$(f')^2\frac{\partial^2 U_0}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{2}U_0^2 - a(s)U_0 + 3a(s)^2 + \frac{s - 3a(s)}{2} = 0. \tag{4.3}$$

Уравнение (4.3) может быть один раз проинтегрировано:

$$\left(f'\frac{\partial U_0}{\partial\varphi}\right)^2 + \frac{1}{3}U_0^3 - a(s)U_0^2 + (6a^2 - 3a + s)U_0 + b(s) = 0. \tag{4.4}$$

Здесь $b(s)$ – произвольная функция (константа интегрирования).

Явную формулу для U_0 выпишем позднее, а пока будем требовать, что это некая 2π периодическая функция, удовлетворяющая уравнению (4.4). В силу этого уравнения мы можем все производные от $\partial_\varphi U_0$ выписать как рационально-дробные выражения в терминах:

$$U_0, \partial_\varphi U_0, \partial_s U_0, \partial_s^2 U_0, \dots .$$

Используя это условие, можно найти условия ограниченности следующих поправок – уравнения для медленно меняющихся функций $f(s), n(s), b(s)$.

Уравнения на U_1 имеют вид:

$$\begin{aligned} &(f')^2\partial^3_\varphi U_1 + (U_0 - a)\,\partial_\varphi U_1 + \partial_\varphi U_0 U_1 = \frac{F_1(U_0, \partial_\varphi U_0, \partial_s U_0, a, a', n', s)}{f}\\ &a(s)(f')^2\partial^3_\varphi U_1 - \frac{1}{3}(f')^2(\partial^2_\varphi U_1\partial_\varphi U_0 + \partial^2_\varphi U_0\partial_\varphi U_1) + \frac{1}{6}\partial_\varphi U_1(U_0^2 + s + 4aU_0 - 3a) +\\ &+\frac{1}{3}\partial_\varphi U_0(U_0 + 2a)U_1 = \frac{F_2(U_0, \partial_\varphi U_0, \partial_s U_0, a, b, a', b', n', s)}{f\partial_\varphi U_0}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь F_1, F_2 — полиномиальные функции своих аргументов. Исключая из системы (4.5) последовательно старшие производные U_1 по переменной φ, придем к соотношению, не содержащему функцию U_1 – условию совместности этой системы:

$$\begin{aligned} &\left(f(360a - 30s - 45 - 540a^2)a' - 10fb' + 2f'(108a^3 - 108a^2 + 6as + 6b + 27a - 2s)\right)U_0 +\\ &\quad + 15f(54a^2 - 72a^3 - 12as + 4b - 9a + 3s)a' + 15f(4a - 1)b' +\\ &\quad + 6f'(72a^4 - 66a^3 + 12a^2 s - 16ab + 15a^2 + 5as - 5b) = 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Поскольку равенство (4.6) должно выполняться тождественно, то равны 0 коэффициенты при разных степенях U_0, следовательно, получаем замкнутую систему уравнения для $a(s), b(s)$:

$$\begin{aligned} &a' = \frac{(2a-1)(288a^3 - 192a^2 + 24sa + 27a - 4s - 4b)}{(a - 2s)(-576a^3 + 504a^2 - 126a - 48sa + 8b + 12s + 9)},\\ &b' = (36a - 3s - 54a^2 - 9/2)a' - \frac{108a^3 - 108a^2 + 6as + 6b + 27a - 4s}{2a - 4s}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Система (4.5) совместна тогда и только тогда, когда $a(s)$ и $b(s)$ определены из уравнений (4.7). Если это условие выполнено, то все производные по φ от U_1 старше второго порядка можно выразить через младшие производные, например:

$$(f')^2\partial_\varphi^2 U_1 = (a - U_0)U_1 + (n' + \partial_s U_0/\partial_\varphi U_0)G_1(U_0, a, s)/s + G_2(U_0, a, b, s)/f/\partial_\varphi U_0,$$

где G_1, G_2 — некоторые функции.

Уравнения на U_2 имеют вид:

$$\begin{aligned}(f')^2\partial_\varphi^3 U_1 + (U_0 - a)\,\partial_\varphi U_1 + \partial_\varphi U_0 U_1 &= \frac{F_3}{f}\\ a(s)(f')^2\partial_\varphi^3 U_1 - \frac{1}{3}(f')^2(\partial_\varphi^2 U_1\partial_\varphi U_0 + \partial_\varphi^2 U_0\partial_\varphi U_1) + \frac{1}{6}\partial_\varphi U_1(U_0^2 + s + 4aU_0 - 3a)&+\\ +\frac{1}{3}\partial_\varphi U_0(U_0 + 2a)U_1 &= \frac{F_4}{f\partial_\varphi U_0}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Здесь F_3, F_4 — функции, зависящие от предыдущих поправок.

Исключая последовательно производные функции U_2 из этих уравнений, получим соотношение вида:

$$\begin{aligned}\partial_{\varphi s}U_1 - \frac{\partial_\varphi^2 U_0}{\partial_\varphi U_0}\partial_s U_1 + \left(\frac{\partial_\varphi^2 U_0\partial_s U_0}{(\partial_\varphi U_0)^2} + \frac{G_3(U_0, a, b)}{(f\partial_\varphi U_0)^2(2U_0 + 3 - 12a)}\right)\partial_\varphi U_1-\\ -\left(\frac{\partial_\varphi^3 U_0\partial_s U_0}{(\partial_\varphi U_0)^2} - \frac{G_4(U_0, a, b)}{(f\partial_\varphi U_0)^2(2U_0 + 3 - 12a)}\right)U_1 = G_5(U_0, a, b, n', n'').\end{aligned} \tag{4.9}$$

Дифференцируя это уравнение по φ, получаем соотношение такого же вида, исключая из этих двух уравнений $\partial_{\varphi s}U_1$, получаем:

$$\partial_\varphi U_1 = \frac{\partial_\varphi^2 U_0}{\partial_\varphi U_0}U_1 + \frac{n''G_6(s, a, b, f) + n'G_7(U_0, s, a, b, f)}{\partial_\varphi U_0} + G_8(\partial_s^3 U_0, \partial_s^2 U_0, \partial_s U_0, U_0, a, b, f, s). \tag{4.10}$$

Подставив (4.10) в уравнение (4.9), получим соотношение вида:

$$\begin{aligned}\partial_\varphi U_0(n''' + A_1 n'' + A_2 n') + \partial_s^3 U_0 + B_1\partial_s^2 U_0\partial_s U_0 + B_2\partial_s^2 U_0 &\;+\\ +B_3(\partial_s U_0)^3 + B_4(\partial_s U_0)^2 + B_5\partial_s U_0 + B_6 &= 0,\end{aligned} \tag{4.11}$$

где

$$A_i = A_i(s, f, a, b), \quad B_i = B_i(U_0, s, f, a, b)$$

некоторые функции.

Без ограничения общности можно считать функцию U_0 четной по φ. Тогда в (4.11) первая часть нечетна, вторая четна по φ. Следовательно, из (4.11) немедленно получаем два уравнения:

$$n''' + A_1 n'' + A_2 n' = 0. \tag{4.12}$$

$$\partial_s^3 U_0 + B_1\partial_s^2 U_0\partial_s U_0 + B_2\partial_s^2 U_0 + B_3(\partial_s U_0)^3 + B_4(\partial_s U_0)^2 + B_5\partial_s U_0 + B_6 = 0. \tag{4.13}$$

Теперь определим главный член асимптотического решения (4.1). Решение уравнения (4.4) будем искать в виде

$$U_0 = A(s)\mathrm{dn}^2\left(\frac{B(s)}{f'(s)}p; k(s)\right) + C(s). \tag{4.14}$$

Где A, B, k, C – функции медленных переменных, dn – элиптическая функция Якоби. Они определяются после подстановки (4.14) в (4.3) и приравнивания коэффициентов при разных степенях dn нулю и требования равенства периода колебаний 2π. Из этой системы находим:

$$\begin{aligned}
A =&6B^2, \qquad f' = \frac{\pi B}{K(k)}, \qquad a = -4k^2B^2 + 8B^2 + C,\\
f =&\frac{2\pi B(4B^2k^2 - 8B^2 - C + 2s)}{5K(k)},\\
b =&4608(2k^2-3)(4k^4-17k^2+19)B^6 - 384(k^2-2)(7k^2-13)(10C-3)B^4+\\
&+8(4C(41k^2-79)(5C-3)+12(2k^2-3)s+63(k^2-2))B^2-\\
&-\frac{1}{3}(10C-3)(32C(5C-3)+12s+9).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Здесь и ниже $K(k)$, $E(k)$ – полные элиптические интегралы. Кроме того остается еще одно алгебраическое соотношение:

$$45(2k^4 - 7k^2 + 7)B^4 - 4(k^2-2)(10C-3)B^2 + 5C^2 - 3C + s = 0. \tag{4.16}$$

На данном этапе все функции медленных переменых выражены через B, k, C, и у нас есть одно алгебраическое уравнение (4.16) и 3 дифференциальных – (4.7) и следствие тождества $(f)' = f'$, где f, f' определены независимо в (4.15). Диффенцируя (4.16), получаем дифференциальное следствие. Исключая из 4 дифференциальных соотношений 3 производные B', k', C', получим дополнительное алгебраическое соотношение в терминах $B, k, C, q = E(k)/K(k)$. Его также можно продифференцировать по s и опять подставить найденные производные, получив дополнительное алгебраическое уравнение.

Используя эти соотношения, функции $B(s), k(s), C(s)$ находятся в неявном виде:

$$\begin{aligned}
B^2 =&\frac{5(k^2q + k^2 + q - 1)}{12(3k^3q + k^4 + 2k^2q + 2k^2 + 3q - 3)}, \qquad C = 6B^2(k^2-1)\\
s =&\frac{1}{3k^4 + 2k^2 + 3}\left(\frac{3(k^2+1)^2}{4} - \frac{1}{3}\left(k^2 + 1 + \frac{5k^2(k^2-1)^2}{3k^4q + k^4 + 2k^2q + 2k^2 + 3q - 3}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Зависимость от медленной переменной s в функциях A, B, C, k, f, a определена.

В этой статье не дается ответа на вопрос о том, какое решение уравнения (4.12) отвечает нашему исследуемому решению. Однако, из соображений согласования с разложением в окрестности точки $s = -3/4$ мы можем найти асимптотику функции $n(s)$ при $s \to -3/4$.

Для этого найдем асимптотику решения (4.1) при $s \to -3/4$:

$$\begin{aligned}
&U = \frac{3}{2} + t^{-5/4}\left(-\frac{y}{2} + \left(\frac{y}{3} + \dots\right)\cos\varphi\right) + \dots, y = (s + 3/4)t^{5/2},\\
&\varphi = -\frac{4}{5}t^{5/2} + t^{5/4}y + \left(-\frac{y^2}{9} + \dots\right) + \dots
\end{aligned}$$

Эти формулы позволяют найти главный член асимптотики функции $P(y)$ при $y \to \infty$, из формулы (3.13) определяем:

$$P(y) = \frac{y}{36} + \frac{-i}{y} + \dots, y \to \infty.$$

С помощью уравнения (3.14) можно найти следующие члены асимптотики этого решения:

$$P = \frac{y}{36} + \frac{\ln 2/\pi - i}{y} + \frac{6(3\ln^2 2/\pi^2 - 4 - 6i\ln 2/\pi)}{y^3} + \dots, y \to \infty.$$

Возвращаясь в переменную s для функции $n(s)$, находим

$$n(s) = \frac{\ln 2}{\pi}\ln(s + 3/4) + \left(p_0 - \frac{3\ln 2\ln(3/2)}{2\pi}\right) + \dots, s \to -3/4.$$

Видим, что в данном случае функция $n(s)$ не является константой, в отличие от похожих задач [7, 8].

5. Заключение

В работе исследовано решение введеное в статье [4]. Основной результат – описание асимптотики переднего фронта. Показано, что главный член описывается уравнением Пенлеве IV. В работе также найдено уравнение для сдвига фазы в зоне Уиземовских колебаний, показано, что в этом случае функция $n(s)$ не является константой в отличие от похожих случаев [7, 8].

В дальнейшем планируется показать, что у уравнения (3.14) существует решение с заданными асимптотиками (3.15) и (4) при $y \to \pm\infty$. Определить функцию $n(s)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A.M. Il'in, S.V. Zakharov *On the influence of small dissipation on the evolution of weak discontinuities* // International Conference on Differential and Functional Differential Equations (Moscow, 1999). Funct. Differ. Equ. 8 (2001), no. 3–4. P. 257–271.
2. Захаров С.В., Ильин А.М. *От слабого разрыва к градиентной катастрофе* // Матем. сб. 2001. Т. 192. Вып.10. С. 3–18.
3. Захаров С.В. *Зарождение ударной волны в одной задаче Коши для уравнения Бюргерса* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т.44. Вып.3. С. 536–542.
4. Гарифуллин Р.Н., Сулейманов Б.И. *От слабых разрывов к бездиссипативным ударным волнам* // ЖЭТФ. 2010. Т.137. вып. 1. С. 149–164.
5. Камчатнов А.М., Корнеев С.В. *Течение Бозе-Эйнштейновского конденсата в квазиодномерном канале под действием поршня* // ЖЭТФ. 2010. Т. 137. Вып. 1. С. 191–204.
6. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* М.: Наука, 1989. 336 с.
7. Гарифуллин Р.Н. *Сдвиг фазы для совместного решения уравнения КДВ и дифференциального уравнения пятого порядка*// Уфимск. матем. журн. 2012. Т.4 №2. С. 80–86.
8. R. Garifullin, B. Suleimanov, N. Tarkhanov *Phase Shift in the Whitham Zone for the Gurevich-Pitaevskii Special Solution of the Korteweg-de Vries Equation* // Ph. Let. A. 2010. V. 374 P. 1420–1424, DOI:10.1016/j.physleta.2010.01.057.
9. Итс А.Р., Капаев А.А. *Метод изомонодромных деформаций и формулы связи для второго трансцендента Пенлеве* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т.51. Вып.4. С.878–892.

Рустем Наилевич Гарифуллин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: rustem@matem.anrb.ru