ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 4 (2016). С. 63-89.

УДК 517.929.7:517.929.8:517.984

ЗАДАЧА ТИПА СТЕКЛОВА В ПОЛУЦИЛИНДРЕ С МАЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Д.Б. ДАВЛЕТОВ, Д.В. КОЖЕВНИКОВ

Аннотация. В работе рассмотрена задача типа Стеклова для оператора Лапласа в n-мерном полуцилиндре, содержащим малую полость. На боковых границах выставлено любое из трех обычных граничных условий, на границе полости — условие Дирихле, а на основании самого полуцилиндра — спектральное условие Стеклова. Доказаны теоремы сходимости собственных значений этой задачи при стремлении малого параметра («диаметра» отверстия) к нулю. Построены и строго обоснованы полные асимптотические разложения собственных значений по малому параметру, сходящихся как к простому, так и двукратному собственному значению предельной задачи (без малой полости).

Ключевые слова: полуцилиндр, задача Стеклова, собственное значение, сингулярное возмущение, малая полость, сходимость, асимптотика.

Mathematics Subject Classification: 35J05, 35J25, 47A10, 47A55, 47A75, 47F05

1. Введение

Исследование собственных значений краевых задач для эллиптических операторов в области с малой полостью имеет достаточно большую историю. В [1] была получена оценка скорости сходимости собственного значения краевой задачи Дирихле для оператора Лапласа в трехмерной области с малой полостью. Позднее аналогичные результаты были получены в [2, 3, 4]. Затем в [5] были построены полные асимптотические разложения первых собственных чисел и соответствующих собственных функций классических краевых задач для оператора Лапласа в двумерных и трехмерных областях с малыми отверстиями. Асимптотика решения эллиптической краевой задачи с малым отверстием на спектре предельной задачи получена в работе [6]. Краевые задачи для эллиптических операторов теории упругости в ограниченных областях с малыми отверстиями исследованы в работах [7, 8, 9, 10]. В случае краевых условий Неймана на границе малой полости в [7] построены полные асимптотические разложения собственных значений возмущенной краевой задачи. В работе [8] доказана сходимость собственных элементов краевой задачи Дирихле к собственным элементам соответствующей предельной краевой задачи, а в [9, 10] построены двучленные асимптотики по малому параметру в двумерном и трехмерном случае соответственно. Полные асимптотики собственных значений задачи Стеклова для оператора Лапласа в области с малым отверстием были построены в [11].

В настоящей работе исследуется задача типа Стеклова для оператора Лапласа в n-мерном полуцилиндре, содержащим малую полость. На боковой поверхности задается любое из трех классических граничных условий (Дирихле, Неймана, Фурье), на границе малого отверстия — граничное условие Дирихле, а на основании полуцилиндра — условие Стеклова. Подобные вопросы возникают в краевых задачах для оператора Лапласа

D.B. Davletov, D.V. Kozhevnikov, The problem of Steklov type in a half-cylinder with a small cavity.

© Давлетов Д.Б., Кожевников Д.В. 2016.

Работа поддержана РФФИ-Молодежный (проект No. 16-31-00066) и РФФИ-Поволжье (проект No. 14-01-97024) .

Поступила 9 июня 2016 г.

в области, перфорированной вдоль части границы [12]. Похожие задачи в полуполосах и полуцилиндрах сингулярно возмущенными граничными условиями возникали ранее в задачах с частой сменой типа граничного условия [13, 14, 15].

В заключение раздела заметим, что возникновение собственных значений из края существенного спектра для цилиндров с малыми отверстиями и граничными условиями Дирихле на границах этих малых отверстий исследовалось в [16, 17].

2. Формулировка основных утверждений

Пусть $3 \leqslant n \in \mathbb{N}$, Σ — $(n-1)$-мерная ограниченная область с гладкой границей, $\Pi := \Sigma \times (a, +\infty)$, $-\infty < a < 0$, $\Sigma_a := \Sigma \times \{a\}$, $\{0\} \in \Pi$, ω — ограниченная, связная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, $\omega_\varepsilon = \{x : \varepsilon^{-1} x \in \omega\}$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $\Pi_\varepsilon = \Pi \setminus \overline{\omega_\varepsilon}$. Рассматривается сингулярное возмущение следующей задачи Стеклова на собственные значения

$$\begin{aligned} -\Delta\psi_0 =& 0, \qquad x \in \Pi, \qquad \mathfrak{l}\psi_0 := \left(H\frac{\partial}{\partial\nu} + h\right)\psi_0 = 0, \qquad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a, \\ \frac{\partial\psi_0}{\partial\nu} =& \lambda_0\psi_0, \qquad x \in \Sigma_a, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где ν — внешняя нормаль, H, $h \geqslant 0$, $H + h \neq 0$, осуществляемое вырезанием в полуцилиндре малого отверстия ω_ε и заданием на его границе краевого условия Дирихле:

$$\begin{aligned} -\Delta\psi_\varepsilon =& 0, \qquad x \in \Pi_\varepsilon, \qquad \mathfrak{l}\psi_\varepsilon = 0, \qquad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a, \\ \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial\nu} =& \lambda_\varepsilon\psi_\varepsilon, \qquad x \in \Sigma_a, \qquad \psi_\varepsilon = 0, \qquad x \in \partial\omega_\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Собственные функции рассматриваются в классе функций, обладающих конечным интегралом Дирихле:

$$\int\limits_{\Pi} |\nabla\psi_0|^2 dx < \infty, \qquad \int\limits_{\Pi_\varepsilon} |\nabla\psi_\varepsilon|^2 dx < \infty.$$

Методом Фурье легко показать, что собственные значения $\lambda_{0,1} < \lambda_{0,2} \leqslant \dots \leqslant \lambda_{0,k} \leqslant \cdots$ и соответствующие ортонормированные в $L_2(\Sigma_a)$ собственные функции $\psi_{0,k}$ задачи Стеклова (2.1) определяются равенствами

$$\lambda_{0,k} = \sqrt{\zeta_k}, \qquad \psi_{0,k}(x) = \phi_k(x')\mathrm{e}^{-\sqrt{\zeta_k}(x_n - a)}, \tag{2.3}$$

где $x' := (x_1, \dots, x_{n-1})$, ζ_k и ϕ_k — собственные значения и соответствующие нормированные в $L_2(\Sigma)$ собственные функции краевой задачи

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2\phi_k}{\partial x_i^2} = \zeta_k\phi_k \quad \text{в } \Sigma, \qquad \mathfrak{l}\phi_k = 0 \quad \text{на } \partial\Sigma. \tag{2.4}$$

В следующем разделе будет доказана

Теорема 2.1. *Пусть отрезок $[\lambda_-, \lambda_+]$ не содержит собственных значений задачи Стеклова* (2.1)*. Тогда при достаточно малых ε этот отрезок не содержит и собственных значений задачи Стеклова* (2.2)*.*

Пусть кратность собственного значения λ_0 задачи Стеклова (2.1) *равна d. Тогда у задачи Стеклова* (2.2) *существует ровно d собственных значений $\lambda_\varepsilon^{(l)}$, $l = \overline{1, d}$ (с учетом кратности), сходящихся к λ_0 при $\varepsilon \to 0$.*

Для соответствующих проекторов $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{P}_\varepsilon$ в $L_2(\Sigma_a)$ имеет место сходимость $\mathcal{P}_\varepsilon \to \mathcal{P}_0$ при $\varepsilon \to 0$.

Основным содержанием работы является доказательство методом согласования асимптотических разложений [18, 19, 20] сформулированных ниже теоремы 2.2 и теоремы 2.3.

Прежде чем перейти к формулировке этих утверждений, введем некоторые обозначения. Всюду далее, $r = |x|$, $|S_n|$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Через $z_q(x)$, $q = \overline{0,n}$, обозначим убывающие на бесконечности гармонические в $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\omega}$ функции, удовлетворяющие граничным условиям

$$z_0(x) = 1, \qquad z_m(x) = x_m, \quad m = \overline{1,n} \quad \text{на } \partial\omega.$$

Хорошо известно, что эти функции имеют дифференцируемые асимптотические разложения

$$z_q(x) = c_{q,0} r^{-n+2} + \sum_{p=1}^{n} c_{q,p} x_p r^{-n} + \sum_{i=2}^{\infty} Z_i^{(q)}(x) r^{-2i-n+2}, \quad r \to \infty, \tag{2.5}$$

где $Z_i^{(q)}(x)$ — однородные гармонические полиномы степени k с индексом q. Постоянная $c_{0,0} = c(\omega) > 0$ называется гармонической емкостью, а постоянные $c_{m,q}$, $m,q = \overline{1,n}$, — коэффициентами дипольной формы, ассоциированной с поляризацией [21].

Интегрируя по частям правые части равенств

$$0 = \int\limits_{\{r<R\}\setminus\omega} (x_m - z_m(x))\Delta(x_j - z_j(x))\,\mathrm{d}x, \quad j,m = \overline{1,n},$$

$$0 = \int\limits_{\{r<R\}\setminus\omega} (x_m - z_m(x))\Delta(1 - z_0(x))\,\mathrm{d}x, \quad m = \overline{1,n},$$

при $R \to \infty$, легко показать, что

$$c_{m,j} = c_{j,m}, \quad j,m = \overline{1,n}, \qquad (n-2)c_{m,0} = c_{0,m}, \quad m = \overline{1,n}. \tag{2.6}$$

В силу этих равенств $n \times n$-матрицы $C(\omega)$ и $\widetilde{C}(\omega)$ с компонентами $c_{m,q}$ и

$$\widetilde{c}_{m,q} = c_{m,q} - \frac{c_{m,0}c_{0,q}}{c(\omega)}, \quad m,q = \overline{1,n}$$

являются симметричными.

Теорема 2.2. *Пусть λ_0 – простое собственное значение задачи Стеклова (2.1), ψ_0 – соответствующая нормированная в $L_2(\Sigma_a)$ собственная функция.*

Тогда собственное значение λ_ε возмущенной задачи Стеклова (2.2), сходящееся к λ_0, имеет асимптотическое разложение

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^{n-2} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \lambda_{n-2+i}, \tag{2.7}$$

где

$$\lambda_{n-2} = c(\omega)\,|S_n|\,(n-2)\psi_0^2(0). \tag{2.8}$$

Если $\psi_0(0) = 0$, то

$$\lambda_{n-2} = 0, \tag{2.9}$$

$$\lambda_{n-1} = 0, \tag{2.10}$$

$$\lambda_n = |S_n|\,\nabla\psi_0(0) C(\omega) \nabla\psi_0(0). \tag{2.11}$$

Замечание 2.1. *Очевидно, что если ω — шар единичного радиуса центром в начале координат, то*

$$z_0(x) = r^{-n+2}, \qquad z_m(x) = x_m r^{-n}, \quad m = \overline{1,n}.$$

Отсюда растяжением и сдвигом системы координат легко показать, что в случае, когда ω — шар радиуса R с центром в точке $(0,\dots,0,t)$, то матрицы $C(\omega)$ и $\widetilde{C}(\omega)$ являются диагональными, причем,

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= c(\omega) = R^{n-2}, \\ c_{n,n} &= R^{n-2}(R^2 + (n-2)t^2), \quad c_{j,j} = \widetilde{c}_{j,j} = \widetilde{c}_{n,n} = R^n, \quad j = \overline{1,n-1}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Следовательно, в этом случае равенства (2.8) *и* (2.11) *приобретают вид*

$$\begin{aligned}\lambda_{n-2} =&R^{n-2}\,|S_n|\,(n-2)\psi_0^2(0),\\ \lambda_n =&R^{n-2}\,|S_n|\left(R^2|\nabla\psi_0(0)|^2+(n-2)t^2\left|\frac{\partial\psi_0}{\partial x_n}(0)\right|^2\right),\end{aligned}\tag{2.13}$$

соответственно.

Замечание 2.2. *Если ζ_k — простое собственное значение краевой задачи* (2.4)*, то в силу* (2.3) *равенства* (2.8) *и* (2.13) *приобретают вид*

$$\begin{aligned}\lambda_{n-2} =&c(\omega)\,|S_n|\,(n-2)\mathrm{e}^{2a\sqrt{\zeta_k}}\phi_k^2(0),\\ \lambda_{n-2} =&R^{n-2}\,|S_n|\,(n-2)\mathrm{e}^{2a\sqrt{\zeta_k}}\phi_k^2(0),\\ \lambda_n =&R^{n-2}\,|S_n|\,\mathrm{e}^{2a\sqrt{\zeta_k}}\left(R^2|\nabla'\phi_k(0)|^2+\left(R^2+(n-2)t^2\right)\zeta_k\phi_k^2(0)\right),\end{aligned}$$

соответственно, где под $\nabla'\phi$ понимается вектор с компонентами

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_j},\quad j=\overline{1,n-1}.$$

В работе строится и полное асимптотическое разложение собственной функции ψ_ε задачи Стеклова (2.2), соответствующей собственному значению λ_ε. Однако, предельное значение для ψ_ε в силу теоремы 2.1 известно — единственная (с точностью до знака) собственная функция ψ_0 предельной задачи Стеклова (2.1).

Замечание 2.3. *В работе рассматривается как случай простого собственного значения, так и кратного. Ввиду того, что рассуждения для двукратного значения легко переносятся на случай n-кратного, то для простоты изложения асимптотические разложения будут строиться для двукратного собственного значения.*

Если же λ_0 – двукратное собственное значение задачи (2.1), то из теоремы 2.1 вытекает, что для сходящихся к λ_0 собственных значений возмущенной задачи (2.2) возможны следующие случаи: либо это два простых собственных значения, либо это одно двукратное собственное значение, либо для разных ε имеет место один из этих вариантов. И даже, если к λ_0 сходится два простых собственных значения $\lambda_\varepsilon^{(1)}$ и $\lambda_\varepsilon^{(2)}$, то нельзя утверждать, что соответствующие нормированные в $L_2(\Sigma_a)$ собственные функции $\psi_\varepsilon^{(1)}$ и $\psi_\varepsilon^{(2)}$ имеют пределы. Теорема 2.1 лишь гарантирует, что из любой последовательности $\varepsilon_k\to 0$ можно выделить подпоследовательность $\varepsilon_{k_m}\to 0$ такую, что на ней имеет место сходимость $\psi_\varepsilon^{(j)}\to\psi_0^{(j)}$ в $L_2(\Sigma_a)$, где $\psi_0^{(j)}$ – ортонормированные в $L_2(\Sigma_a)$ собственные функции задачи (2.1), соответствующие λ_0. Однако, эти пределы, вообще говоря, могут меняться в зависимости от выбора подпоследовательности $\varepsilon_{k_m}\to 0$.

В работе рассматривается случай наиболее общего положения:

$$|\psi_0^{(1)}(0)|+|\psi_0^{(2)}(0)|\neq 0.\tag{2.14}$$

Тогда, очевидно, эти собственные функции можно ортонормировать в $L_2(\Sigma_a)$ так, что

$$\psi_0^{(1)}(0)\neq 0,\qquad \psi_0^{(2)}(0)=0.\tag{2.15}$$

Будет доказана следующая

Теорема 2.3. *Пусть λ_0 – двукратное собственное значение задачи* (2.1)*, $\psi_0^{(1)}$ и $\psi_0^{(2)}$ – соответствующие собственные функции, удовлетворяющие условию* (2.14) *и ортонормированные в $L_2(\Sigma_a)$ в соответствии с* (2.15)*.*

Тогда существуют два простых собственных значения $\lambda_\varepsilon^{(1)}$ *и* $\lambda_\varepsilon^{(2)}$ *возмущенной задачи Стеклова* (2.2)*, сходящиеся к* λ_0*, и они имеют асимптотические разложения*

$$\lambda_\varepsilon^{(1)} =\lambda_0 + \varepsilon^{n-2}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\lambda_{n-2+i}^{(1)}, \tag{2.16}$$

$$\lambda_\varepsilon^{(2)} =\lambda_0 + \varepsilon^{n}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\lambda_{n+i}^{(2)}, \tag{2.17}$$

где

$$\lambda_{n-2}^{(1)} = c(\omega)\,|S_n|\,(n-2)\left(\psi_0^{(1)}(0)\right)^2 > 0, \tag{2.18}$$

$$\lambda_n^{(2)} = |S_n|\,\nabla\psi_0^{(2)}(0)\widetilde{C}(\omega)\nabla\psi_0^{(2)}(0). \tag{2.19}$$

Соответствующие собственные функции $\psi_\varepsilon^{(j)}$ *сходятся к* $\psi_0^{(j)}$ *в* $L_2(\Sigma_a)$.

Замечание 2.4. *Из теоремы, в частности, следует, что если выполнено условие* (2.14)*, то двукратное собственное значение* λ_0 *при рассматриваемом возмущении расщепляется на два простых собственных значения, а соответствующие собственные функции сходятся к собственным функциям задачи Стеклова* (2.1)*, ортонормированным в* $L_2(\Sigma_a)$ *в соответствии с* (2.15).

Замечание 2.5. *Если* ω *— шар радиуса* R *с центром в точке* $(0,\dots,0,t)$*, то в силу* (2.12) *равенства* (2.18) *и* (2.19) *приобретают вид*

$$\begin{aligned}\lambda_{n-2}^{(1)} &= R^{n-2}\,|S_n|\,(n-2)\left(\psi_0^{(1)}(0)\right)^2,\\ \lambda_n^{(2)} &= R^n\,|S_n|\left|\nabla\psi_0^{(2)}(0)\right|^2 > 0,\end{aligned} \tag{2.20}$$

соответственно.

Замечание 2.6. *Если* $\zeta_k = \zeta_{k+1}$ *— двукратное собственное значение краевой задачи* (2.4)*, а соответствующие собственные функции ортонормированы в* $L_2(\Sigma)$ *так, что* $\phi_k(0')=0$*,* $\phi_{k+1}(0')\neq 0$*, то в силу* (2.3) *равенства* (2.18) *и* (2.20) *приобретают вид*

$$\begin{aligned}\lambda_{n-2}^{(1)} =&c(\omega)\,|S_n|\,(n-2)\mathrm{e}^{2a\sqrt{\zeta_k}}\phi_k^2(0'),\\ \lambda_{n-2}^{(1)} =&R^{n-2}\,|S_n|\,(n-2)\mathrm{e}^{2a\sqrt{\zeta_k}}\phi_k^2(0'),\\ \lambda_n^{(2)} =&R^n\,|S_n|\,\mathrm{e}^{2a\sqrt{\zeta_k}}\left(|\nabla'\phi_{k+1}(0')|^2+\zeta_k\phi_{k+1}^2(0')\right),\end{aligned}$$

соответственно.

3. Доказательство теоремы 2.1

Определим пространство $H^1(\Pi)$ как пополнение по норме

$$\|w\|_{H^1(\Pi)} = \left(\int\limits_{\Pi}|\nabla w|^2\,dx + \int\limits_{\Sigma_a} w^2 dx'\right)^{1/2} \tag{3.1}$$

функций из $C^\infty(\overline{\Pi})$, обладающих конечным интегралом Дирихле. Подмножество функций из $H^1(\Pi)$, обращающихся в нуль на $\partial\Pi\setminus\overline{\Sigma}_a$, обозначим как $H^1(\Pi;\partial\Pi\setminus\overline{\Sigma}_a)$. Пространство $H^1(\Pi_\varepsilon)$ определим как пополнение по норме

$$\|w\|_{H^1(\Pi_\varepsilon)} = \left(\int\limits_{\Pi_\varepsilon}|\nabla w|^2\,dx + \int\limits_{\Sigma_a} w^2 dx'\right)^{1/2} \tag{3.2}$$

функций из $C^\infty(\overline{\Pi}_\varepsilon)$, обладающих конечным интегралом Дирихле. Подмножество функций из $H^1(\Pi_\varepsilon)$, обращающихся в нуль на $\partial\omega_\varepsilon$ (на $\partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a$), обозначим как $H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon)$ (как $H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a)$).

Краевые задачи

$$\begin{aligned} -\Delta U_0 &= 0, \qquad x \in \Pi, \qquad \mathfrak{l}U_0 = 0, \qquad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a, \\ \frac{\partial U_0}{\partial \nu} + U_0 &= f, \qquad x \in \Sigma_a \end{aligned} \tag{3.3}$$

и

$$\begin{aligned} -\Delta U_\varepsilon &= 0, \qquad x \in \Pi_\varepsilon, \qquad \mathfrak{l}U_\varepsilon = 0, \qquad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a, \\ \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \nu} + U_\varepsilon &= f_\varepsilon, \qquad x \in \Sigma_a, \qquad U_\varepsilon = 0, \qquad x \in \partial\omega_\varepsilon, \end{aligned} \tag{3.4}$$

будем понимать в обобщенном (слабом) смысле. Т.е., пусть f, $f_\varepsilon \in L_2(\Sigma_a)$. Тогда при $h = 0$ (при $H = 0$) элемент $H^1(\Pi)$ (элемент $H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a)$) называется обобщенным решением краевой задачи (3.3), если для любого $v \in H^1(\Pi)$ (для любого $v \in H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a)$) выполняется следующее равенство

$$\int\limits_{\Pi} \nabla U_0 \nabla v dx + \int\limits_{\Sigma_a} U_0 v dx' = \int\limits_{\Sigma_a} f v dx'. \tag{3.5}$$

При $hH \neq 0$ элемент $H^1(\Pi)$ называется обобщенным решением краевой задачи (3.3), если для любого $v \in H^1(\Pi)$ выполняется равенство

$$\int\limits_{\Pi} \nabla U_0 \nabla v dx + H^{-1} h \int\limits_{\partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a} U_0 v ds + \int\limits_{\Sigma_a} U_0 v dx' = \int\limits_{\Sigma_a} f v dx'. \tag{3.6}$$

Аналогично, при $h = 0$ (при $H = 0$) элемент $U_\varepsilon \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon)$ (элемент $U_\varepsilon \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a)$) называется обобщенным решением краевой задачи (3.4), если для любого $v \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon)$ (для любого $v \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a)$) выполняется равенство

$$\int\limits_{\Pi_\varepsilon} \nabla U_\varepsilon \nabla v dx + \int\limits_{\Sigma_a} U_\varepsilon v dx' = \int\limits_{\Sigma_a} f_\varepsilon v dx'. \tag{3.7}$$

При $hH \neq 0$ элемент $U_\varepsilon \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon)$ называется обобщенным решением краевой задачи (3.4), если для любого $v \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon)$ выполняется равенство

$$\int\limits_{\Pi_\varepsilon} \nabla U_\varepsilon \nabla v dx + H^{-1} h \int\limits_{\partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a} U_\varepsilon v ds + \int\limits_{\Sigma_a} U_\varepsilon v dx' = \int\limits_{\Sigma_a} f_\varepsilon v dx'. \tag{3.8}$$

Очевидно, что если функцию, принадлежащую $H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon)$ (принадлежащую $H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a)$), продолжить нулем в $\overline{\omega}_\varepsilon$, то она будет принадлежать $H^1(\Pi)$ (принадлежать $H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a)$). Будем сохранять для этих продолжений их первоначальные обозначения.

Подставляя $v = U_0$ и $v = U_\varepsilon$ в (3.5), (3.6) и в (3.7), (3.8), получаем априорные оценки

$$\|U_0\|_{H^1(\Pi)} \leqslant \|f\|_{L_2(\Sigma)}, \qquad \|U_\varepsilon\|_{H^1(\Pi)} \leqslant \|f_\varepsilon\|_{L_2(\Sigma)}. \tag{3.9}$$

Отсюда следует единственность решений краевых задач (3.3) и (3.4).

Используя метод разделения переменных, легко показать, что искомое решение краевой задачи (3.3) представимо в виде

$$U_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(f, \phi_j)_0}{\zeta_j + 1} \phi_j(x') \mathrm{e}^{-\sqrt{\zeta_j}(x_n - a)}, \tag{3.10}$$

где $(u, v)_0$ — скалярное произведение в $L_2(\Sigma)$.

Покажем разрешимость краевой задачи (3.4). Обозначим через $(u,v)_1$ скалярное произведения в $H^1(\Pi_\varepsilon)$. Тогда интегральное тождество (3.7) запишется в виде

$$(U_\varepsilon, v)_1 = \int\limits_{\Sigma_a} f_\varepsilon v dx'. \tag{3.11}$$

При любом фиксированном $f_\varepsilon \in L_2(\Sigma)$ правая часть является линейным ограниченным функционалом над гильбертовом пространством $H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon)$ (над гильбертовым пространством $H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a)$). Поэтому в силу теоремы Рисса существует единственный элемент $F_\varepsilon \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon)$ (элемент $F_\varepsilon \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a)$) такой, что

$$\int\limits_{\Sigma_a} f_\varepsilon v dx' = (F_\varepsilon, v)_1$$

для любого $v \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon)$ (любого $v \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a)$). Отсюда и из (3.11) следует, что $U_\varepsilon = F_\varepsilon$. Т.е. краевая задача (3.4) однозначно разрешима при $h=0$ и $H=0$. Аналогично с использованием интегрального тождества (3.8) доказывается однозначная разрешимость краевой задачи (3.4) при $hH \neq 0$.

Обозначим через $T_0 : L_2(\Sigma_a) \to L_2(\Sigma_a)$ линейный оператор, ставящий в соответствие функции f сужение решения U_0 краевой задачи (3.3) на Σ_a, т.е. (см. (3.10))

$$T_0 f := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(f,\phi_j)_0}{\zeta_j + 1} \phi_j(x'). \tag{3.12}$$

А через $T_\varepsilon : L_2(\Sigma_a) \to L_2(\Sigma_a)$ обозначим линейный оператор, ставящий в соответствие функции f_ε сужение решения U_ε краевой задачи (3.4) на Σ_a.

Так как $f_k \rightharpoonup f$ в $L_2(\Sigma_a)$ при $k \to \infty$, а оператор T_0 компактен в силу компактности вложения $H^1(\Pi)$ в $L_2(\Sigma_a)$, то имеет место сходимость

$$T_0 f_k \to T_0 f \quad \text{в} \quad L_2(\Sigma_a) \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.13}$$

Лемма 3.1. *Пусть v — произвольная функция из $C^\infty(\overline{\Pi})$ (из $C^\infty(\overline{\Pi})$, обращающаяся в нуль на $\partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a$), обладающая конечным интегралом Дирихле. Тогда существуют функции $v_\varepsilon \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon)$ (функции $v_\varepsilon \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a)$) такие, что $\|v - v_\varepsilon\|_{H^1(\Pi)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что область ω_ε лежит в шаре радиуса ε с центром в начале координат. Пусть $\widetilde{\chi}(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная нулю при $t \leqslant 1$ и единице при $t \geqslant 2$. Легко проверить, что функции $v_\varepsilon(x) = \widetilde{\chi}\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) v(x)$ удовлетворяют утверждению леммы. □

Для $R > 0$ обозначим $\Pi(R) = \Sigma \times (a, R)$,

$$\|w\|_{H^1(\Pi(R))} = \left(\int\limits_{\Pi(R)} |\nabla w|^2 dx + \int\limits_{\Sigma_a} w^2 dx' \right)^{1/2}.$$

Так как, очевидно, $\|w\|_{H^1(\Pi(R))} \leqslant \|w\|_{H^1(\Pi)}$, а $\|w\|_{W_2^1(\Pi(R))} \leqslant C(R)\|w\|_{H^1(\Pi(R))}$ в силу [22, Глава III, § 5, теорема 5], то

$$\|w\|_{W_2^1(\Pi(R))} \leqslant C(R)\|w\|_{H^1(\Pi)}. \tag{3.14}$$

Лемма 3.2. *Если*

$$f_\varepsilon \rightharpoonup f \quad \text{в} \quad L_2(\Sigma_a) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

то для решений краевых задач (3.3) *и* (3.4) *имеет место сходимость*

$$T_\varepsilon f_\varepsilon \to T_0 f \quad \text{в} \quad L_2(\Sigma_a) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{3.15}$$

Доказательство. В силу слабой компактности ограниченного множества в гильбертовом пространстве (см., например, [23, глава 2, §3]), оценок (3.9) и (3.14) и компактности вложения $W_2^1(\Pi(R))$ в $L_2(\Sigma_a)$ из любой последовательности $\varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$ можно выделить подпоследовательность (которую, не ограничивая общности, будем считать совпадающей с последовательностью $\{\varepsilon_k\}$) такую, что на ней

$$\begin{aligned} &U_\varepsilon \rightharpoonup U_* \quad \text{в} \quad H^1(\Pi) \quad \text{при} \quad \varepsilon = \varepsilon_k \to 0, \\ &U_\varepsilon \to U_* \quad \text{в} \quad L_2(\Sigma_a) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \end{aligned} \tag{3.16}$$

причем, $U_* \in H^1(\Pi)$, если $U_\varepsilon \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon)$, и $U_* \in H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a)$, если $U_\varepsilon \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a)$.

Осталось показать, что $U_* = U_0$. Тогда из произвола в выборе исходной последовательности $\varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$ будет следовать сходимость (3.15). Пусть v произвольная функция из $C^\infty(\overline{\Pi})$ (из $C^\infty(\overline{\Pi})$, обращающаяся в нуль на $\partial\Pi\setminus\overline{\Sigma}_a$), имеющая конечный интеграл Дирихле, функции v_ε удовлетворяют утверждению леммы 3.1. Переходя в (3.7) и (3.8) для $v = v_\varepsilon$ к пределу при $\varepsilon \to 0$ в силу (3.16) и леммы 3.1, получаем в силу определения пространств $H^1(\Pi)$ и $H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a)$, что функция U_* является обобщенным решением краевой задачи (3.3). А так как решение краевой задачи (3.3) единственно, то $U_* = U_0$. □

Лемма 3.3. *При $\varepsilon \to 0$ имеет место сходимость $T_\varepsilon \to T_0$ (по операторной норме).*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать справедливость равномерной сходимости

$$\|T_\varepsilon f - T_0 f\|_{L_2(\Sigma_a)} \underset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows} 0 \tag{3.17}$$

для нормированных в $L_2(\Sigma_a)$ функций f.

Допустим противное. Следовательно, существует число $\delta > 0$, последовательность $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$ и последовательность нормированных в $L_2(\Sigma_a)$ функций f_k такие, что

$$\|T_{\varepsilon_k} f_k - T_0 f_k\|_{L_2(\Sigma_a)} > \delta. \tag{3.18}$$

Так как ограниченное множество слабо компактно, то, не ограничивая общности, можно считать, что

$$f_k \rightharpoonup f$$

в $L_2(\Sigma_a)$. Из (3.18) и неравенства треугольника вытекает неравенство

$$\|T_{\varepsilon_k} f_k - T_0 f\|_{L_2(\Sigma_a)} + \|T_0 f - T_0 f_k\|_{L_2(\Sigma_a)} > \delta, \tag{3.19}$$

которое противоречит (3.13) и утверждению леммы 3.2. □

Так как краевые задачи (3.3) и (3.4) однозначно разрешимы, то существуют обратные операторы $S_0 = T_0^{-1}$ и $S_\varepsilon = T_\varepsilon^{-1}$, определенные в $L_2(\Sigma)$. Из этой леммы и [23, глава 4, § 2] следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 3.4. *При $\varepsilon \to 0$ оператор S_ε сходится к оператору S_0 в обобщенном смысле.*

Доказательство теоремы 2.1. Из определения операторов S_0 и S_ε следует, что собственные значения Λ_0 и Λ_ε этих операторов и собственные значения λ_0 и λ_ε задач Стеклова (2.1) и (2.2) связаны равенствами $\lambda_0 = \Lambda_0 - 1$ и $\lambda_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon - 1$, а соответствующие нормированные в $L_2(\Sigma_a)$ собственные функции совпадают. Отсюда, из леммы 3.4 и [23, глава 4, теорема 3.16] вытекает справедливость доказываемой теоремы. □

4. Вспомогательные утверждения

Напомним, что $X_k^{(q)}(x)$, $Y_k^{(q)}(x)$ и $Z_k^{(q)}(x)$ — однородные гармонические полиномы степени k с индексом q, указывающим функцию, для которой они выписаны.

Лемма 4.1. *Для любого гармонического многочлена $\widetilde{V}$ существует решение $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \overline{\omega})$ краевой задачи*

$$\Delta V = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\omega}, \qquad V = 0, \quad x \in \partial\omega, \tag{4.1}$$

имеющее дифференцируемое асимптотическое разложение

$$V(x) = \widetilde{V}(x) + \sum_{i=0}^{\infty} Z_i(x) r^{-2i-n+2}, \qquad r \to \infty. \tag{4.2}$$

Доказательство. Из (гл. 3, §1, [18]) следует, что краевая задача

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0, & x &\in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\omega}, \\ v &= -\widetilde{V}, & x &\in \partial\omega. \end{aligned}$$

разрешима в классе убывающих функций при $r \to \infty$, причем, дифференцируемое асимптотическое разложение решения имеет вид

$$v(x) = \sum_{i=0}^{\infty} Z_i(x) r^{-2i-n+2}, \quad r \to \infty.$$

Следовательно, задача Стеклова (4.1) имеет решение $V = \widetilde{V} + v$ с асимптотикой (4.2) при $r \to \infty$. □

Обозначим через $\mathcal{A}$ подмножество функций $u(x)$ класса $C^\infty(\overline{\Pi} \backslash \{0\})$ таких, что $u(x)\widetilde{\chi}(rR)$ является элементом $H^1(\Pi)$ для любого достаточно большого $R > 0$. Напомним, что $\widetilde{\chi}(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная нулю при $t \leqslant 1$ и единице при $t \geqslant 2$.

Лемма 4.2. *Пусть λ_0 — простое собственное значение задачи Стеклова* (2.1), *$Y_j(x)$ — любой заданный гармонический полином, $F \in C^\infty(\Sigma_a)$. Тогда существует константа μ, при которой задача Стеклова*

$$\begin{aligned} -\Delta E &= 0, \qquad x \in \Pi \setminus \{0\}, \qquad E = 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a, \\ \frac{\partial E}{\partial \nu} &= \lambda_0 E + F + \mu\psi_0, \quad x \in \Sigma_a, \end{aligned} \tag{4.3}$$

разрешима, и решение ортогонально функции ψ_0 в $L_2(\Sigma_a)$, причем, $E \in \mathcal{A}$ и имеет следующее дифференцируемое асимптотическое разложение

$$E(x) = Y_j(x) r^{-2j-n+2} + \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x), \qquad x \to 0. \tag{4.4}$$

Доказательство. Будем искать $E(x)$ в виде

$$E(x) = (1 - \widetilde{\chi}(rR))\, Y_j(x) r^{-2j-n+2} + \widetilde{E}(x), \tag{4.5}$$

где R — достаточно большое положительное число. Подставляя (4.5) в (4.3), получаем задачу на $\widetilde{E}(x)$:

$$\begin{aligned} -\Delta \widetilde{E} &= \widetilde{F}, \qquad x \in \Pi \setminus \{0\}, \qquad \widetilde{E} = 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a, \\ \frac{\partial \widetilde{E}}{\partial \nu} &= \lambda_0 \widetilde{E} + F + \mu\psi_0, \quad x \in \Sigma_a, \end{aligned} \tag{4.6}$$

где $\widetilde{F} \in C_0^\infty(\Pi)$. Используя метод разделения переменных, легко показать существование такого числа μ, при котором решение $\widetilde{E}(x)$ задачи (4.6) существует и принадлежит $C^\infty(\overline{\Pi}) \cap H^1(\Pi)$ и определено с точностью до слагаемого $\alpha\psi_0(x)$ для любого α. Тогда при подходящем выборе α функция (4.5) удовлетворяет утверждению леммы. □

Из определения пространств $H^1(\Pi)$ и $\mathcal{A}$ следует, что для $\psi_0(x)$ и любой функции $E(x)$, являющейся решением задачи (4.3), справедливы равенства

$$\left|\psi_0(x)\frac{\partial E}{\partial x_n}(x)\right| + \left|E(x)\frac{\partial \psi_0}{\partial x_n}(x)\right| \underset{x_n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.7}$$

Следствие 1. *Существуют функции $E_q \in \mathcal{A}$, $q = \overline{0,n}$, имеющие при $r \to 0$ дифференцируемые асимптотические разложения*

$$E_0 = r^{-n+2} + \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x), \tag{4.8}$$

$$E_m = x_m r^{-n} + \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x), \quad m = \overline{1,n}, \tag{4.9}$$

и являющиеся решениями краевых задач

$$\begin{aligned} -\Delta E_q &= 0, \qquad x \in \Pi \setminus \{0\}, \qquad E_q = 0, \qquad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a, \\ \frac{\partial E_q}{\partial \nu} &= \lambda_0 E_q + \mu_q \psi_0, \quad x \in \Sigma_a, \end{aligned} \tag{4.10}$$

при

$$\mu_0 = |S_n|(n-2)\psi_0(0), \tag{4.11}$$

$$\mu_m = |S_n|\frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0), \quad m = \overline{1,n}. \tag{4.12}$$

Доказательство. В силу леммы 4.2 достаточно убедиться в равенствах (4.11) и (4.12). Покажем справедливость (4.11). Пусть B_δ — шар радиуса $\delta \ll 1$ с центром в начале координат. Тогда, интегрируя дважды по частям, получаем:

$$\begin{aligned} 0 = &\int\limits_{\Pi(\delta^{-1})\setminus B_\delta} \Delta E_0 \psi_0 dx = \\ = &\int\limits_{x_n=\delta^{-1}} \left(\frac{\partial E_0}{\partial x_n}\psi_0 - \frac{\partial \psi_0}{\partial x_n}E_0\right) dx' - \int\limits_{r=\delta} \left(\frac{\partial E_0}{\partial r}\psi_0 - \frac{\partial \psi_0}{\partial r}E_0\right) ds + \mu_0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Ряд Тейлора функции $\psi_0(x)$ в нуле имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi_0(x) = &\sum_{k=0}^{\infty} X_k^{(0)}(x), \qquad r \to 0, \\ X_0^{(0)}(x) = &\psi_0(0), \quad X_1^{(0)}(x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) x_m. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Подставляя (4.7), (4.8) и (4.14) в (4.13) и переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем равенство (4.11). Равенство (4.12) доказывается аналогично. □

Аналогично лемме 4.2 доказывается

Лемма 4.3. *Пусть λ_0 — двукратное собственное значение задачи Стеклова* (2.1), $\psi_0^{(1)}$ *и $\psi_0^{(2)}$ — соответствующие собственные функции, ортонормированные в $L_2(\Sigma_a)$, $Y_j(x)$ —*

любой заданный гармонический полином, $F \in C^\infty\left(\overline{\Sigma}_a\right)$. *Тогда существуют константы* $\mu^{(i)}$, *при которых задача Стеклова*

$$
\begin{aligned}
-\Delta E =&0, \qquad x \in \Pi \setminus \{0\}, \qquad \mathfrak{l}E = 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a,\\
\frac{\partial E}{\partial \nu} =&\lambda_0 E + F + \mu^{(1)}\psi_0^{(1)} + \mu^{(2)}\psi_0^{(2)}, \quad x \in \Sigma_a,
\end{aligned}
$$

разрешима, и решение ортогонально функциям $\psi_0^{(i)}$ *в* $L_2(\Sigma_a)$, *причем,* $E \in \mathcal{A}$ *и имеет дифференцируемое асимптотическое разложение* (4.4).

Аналогично следствию 1 (но с использованием леммы 4.3 вместо леммы 4.2) доказывается

Следствие 2. *Пусть* λ_0 *— двукратное собственное значение задачи Стеклова* (2.1), $\psi_0^{(1)}$ *и* $\psi_0^{(2)}$ *— соответствующие собственные функции, ортонормированные в* $L_2(\Sigma_a)$ *и удовлетворяющие* (2.15). *Тогда существуют функции* $E_q \in \mathcal{A}$, $q = \overline{0,n}$, *имеющие при* $r \to 0$ *дифференцируемые асимптотические разложения* (4.8), (4.9) *и являющиеся решениями краевых задач*

$$
\begin{aligned}
-\Delta E_q =&0, \qquad x \in \Pi \setminus \{0\}, \qquad \mathfrak{l}E_q = 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a,\\
\frac{\partial E_q}{\partial \nu} =&\lambda_0 E_q + \mu_q^{(1)}\psi_0^{(1)} + \mu_q^{(2)}\psi_0^{(2)}, \quad x \in \Sigma_a,
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

при

$$
\begin{aligned}
\mu_0^{(1)} =&|S_n|(n-2)\psi_0^{(1)}(0), && \mu_0^{(2)} = 0,\\
\mu_m^{(i)} =&|S_n|\frac{\partial \psi_0^{(i)}}{\partial x_m}(0), && m = \overline{1,n}, \quad i = 1,2.
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

В свою очередь из следствия 2 и леммы 4.3 вытекает справедливость следующих двух утверждений.

Следствие 3. *Пусть* λ_0 *— двукратное собственное значение задачи Стеклова* (2.1), $\psi_0^{(1)}$ *и* $\psi_0^{(2)}$ *— соответствующие собственные функции, ортонормированные в* $L_2(\Sigma_a)$ *и удовлетворяющие* (2.15). *Тогда функция*

$$
\widetilde{E}_m(x) = E_m(x) + \delta_m E_1(x) \in \mathcal{A}, \qquad m = \overline{1,n},
$$

имеет при $r \to 0$ *дифференцируемое асимптотическое разложение*

$$
\widetilde{E}_m(x) = x_m r^{-n} + \delta_m r^{-n} + \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x), \qquad \delta_m = \frac{\frac{\partial \psi_0^{(2)}}{\partial x_m}(0)}{(n-2)\psi_0^{(1)}(0)}, \quad m = \overline{1,n},
$$

и является решением краевой задачи

$$
\begin{aligned}
-\Delta \widetilde{E}_m =&0, \qquad x \in \Pi \setminus \{0\}, \qquad \mathfrak{l}\widetilde{E}_m = 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a,\\
\frac{\partial \widetilde{E}_m}{\partial \nu} =&\lambda_0 \widetilde{E}_m + \mu_m^{(2)}\psi_0^{(2)}, \quad x \in \Sigma_a,
\end{aligned}
$$

при $\mu_m^{(2)}$, *определяемом равенством* (4.16).

Лемма 4.4. *Пусть* λ_0 *— двукратное собственное значение задачи Стеклова* (2.1), $\psi_0^{(1)}$ *и* $\psi_0^{(2)}$ *— соответствующие собственные функции, ортонормированные в* $L_2(\Sigma_a)$, $Y_j(x)$ *— любой заданный гармонический полином,* $j \geqslant 1$, $F \in C^\infty\left(\overline{\Sigma}_a\right)$. *Тогда существует функция*

$\widetilde{E} \in \mathcal{A}$, ортогональная функциям $\psi_0^{(i)}$ в $L_2(\Sigma_a)$, являющаяся решением задачи Стеклова

$$
\begin{aligned}
-\Delta \widetilde{E} =&0, \qquad x \in \Pi \setminus \{0\}, \qquad \widetilde{E} = 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a,\\
\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial \nu} =&\lambda_0 \widetilde{E} + F + \mu \psi_0^{(2)}, \quad x \in \Sigma_a,
\end{aligned}
$$

и имеющая дифференцируемые асимптотические разложения

$$
\widetilde{E}_m(x) = x_m r^{-n} + \delta r^{-n} + \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x), \quad m = \overline{1, n}, \quad r \to 0,
$$

при некоторых δ и μ.

5. Доказательство теоремы 2.2

Вне окрестности отверстия приближение $U(x,\varepsilon)$ (*внешнее разложение*) функции ψ_ε естественно искать в виде $U(x,\varepsilon) \approx \psi_0(x)$. В окрестности же ω_ε приближение $V(x,\varepsilon)$ (*внутреннее разложение*) функции ψ_ε также естественно искать в виде разложения по функциям, зависящим от переменой $\xi = x\varepsilon^{-1}$.

Обозначим $\rho = |\xi|$. Переписывая правую часть (4.14) в переменной ξ, имеем:

$$
U(x,\varepsilon) \approx \psi_0(x) = \psi_0(0) + \varepsilon \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0)\xi_m + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k X_k^{(0)}(\xi), \qquad \rho\varepsilon = r \to 0.
$$

Поэтому, следуя методу согласования асимптотических разложений [18], внутреннее разложение будем искать в виде

$$
V(\xi,\varepsilon) = v_0(\xi) + \varepsilon v_1(\xi) + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\xi), \tag{5.1}
$$

где

$$
\begin{aligned}
v_0(\xi) \sim& X_0^{(0)}(\xi) \equiv \psi_0(0), \quad v_1(\xi) \sim X_1^{(0)}(\xi) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0)\xi_m, \quad \rho \to \infty,\\
v_k(\xi) \sim& X_k^{(0)}(\xi), \quad k \geqslant 2, \quad \rho \to \infty.
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

Подставляя (5.1) в (2.2), переходя к переменной ξ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем следующие краевые задачи для v_k

$$
\Delta_\xi v_k = 0 \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\omega}, \qquad v_k = 0 \quad \xi \in \partial\omega. \tag{5.3}
$$

Замечание 5.1. *Здесь Δ_ξ означает оператор Лапласа по переменной ξ. Так как всюду в дальнейшем в уравнениях для коэффициентов внутренних разложений оператор Лапласа используется только в таком смысле, то для упрощения обозначений будем в Δ_ξ опускать этот индекс ξ.*

Функция

$$
v_0(\xi) = \psi_0(0)(1 - z_0(\xi)) \tag{5.4}
$$

является решением краевой задачи (5.3), имеющим асимптотическое разложение

$$
v_0(\xi) = X_0^{(0)} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{Y_i^{(0)}(\xi)}{\rho^{2i+n-2}}, \qquad \rho \to \infty, \tag{5.5}
$$

$$
Y_0^{(0)} = -\,\psi_0(0)c(\omega), \quad Y_k^{(0)}(\xi) = -\psi_0(0) Z_k^{(0)}(\xi), \qquad k \geqslant 1, \tag{5.6}
$$

которое уточняет требуемое асимптотическое разложение (5.2) для $v_0(\xi)$.

Переписывая, теперь (5.5) в переменных $x = \varepsilon\xi$, получаем, что

$$v_0(\xi) = X_0^{(0)} + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{n-2+i} \frac{Y_i^{(0)}(x)}{r^{2i+n-2}}, \qquad \varepsilon^{-1} r \to \infty. \tag{5.7}$$

С учетом этого равенства и в соответствии с методом согласования асимптотических разложений внешнее разложение собственной функции следует искать в виде

$$U(x,\varepsilon) = \psi_0(x) + \varepsilon^{n-2} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \psi_{i+n-2}(x), \tag{5.8}$$

где

$$\psi_{n-2}(x) \sim Y_0^{(0)} r^{-n+2} = -\psi_0(0) c(\omega) r^{-n+2}, \quad r \to 0, \tag{5.9}$$

$$\psi_{i+n-2}(x) \sim Y_i^{(0)} r^{-n-2i+2} = -\psi_0(0) Z_i^{(0)}(x) r^{-2i-n+2}, \quad i \geqslant 1, \quad r \to 0. \tag{5.10}$$

Так как внешнее разложение должно описывать поведение собственной функции почти во всей области Π (за исключением малой окрестности отверстия), то по аналогии с (5.8) асимптотическое разложение собственного значения естественно искать в виде (2.7).

Подставляя ряды (5.8) и (2.7) в (2.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем краевую задачу (2.1) для ψ_0 и следующие краевые задачи для остальных коэффициентов внешнего разложения (5.8):

$$\begin{aligned} -\Delta\psi_{n-2} &= 0, \qquad x \in \Pi \setminus \{0\}, \qquad l\psi_{n-2} = 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a, \\ \frac{\partial \psi_{n-2}}{\partial \nu} &= \lambda_0 \psi_{n-2} + \lambda_{n-2}\psi_0, \quad x \in \Sigma_a, \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} -\Delta\psi_{n-2+i} &= 0, \qquad x \in \Pi \setminus \{0\}, \qquad l\psi_{n-2+i} = 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a, \\ \frac{\partial \psi_{n-2+i}}{\partial \nu} &= \lambda_0 \psi_{n-2+i} + \lambda_{n-2+i}\psi_0, \quad x \in \Sigma_a, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-3, \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned} -\Delta\psi_{n-2+i} &= 0, \qquad x \in \Pi \setminus \{0\}, \qquad l\psi_{n-2+i} = 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a, \\ \frac{\partial \psi_{n-2+i}}{\partial \nu} &= \lambda_0 \psi_{n-2+i} + \lambda_{n-2+i}\psi_0 + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{i-n+2} \lambda_{n-2+k}\psi_{i-k}, \quad x \in \Sigma_a, \quad i \geqslant n-2. \end{aligned} \tag{5.13}$$

В силу следствия 1 функция

$$\psi_{n-2}(x) = -\psi_0(0) c(\omega) E_0(x) \in \mathcal{A}, \tag{5.14}$$

является решением краевой задачи (5.11) при λ_{n-2}, определяемом равенством (2.8), и имеет дифференцируемое асимптотическое разложение

$$\psi_{n-2}(x) = Y_0^{(0)} r^{-n+2} + \sum_{j=0}^{\infty} X_j^{(n-2)}(x), \quad r \to 0, \tag{5.15}$$

которое уточняет асимптотику (5.9).

Замечание 5.2. *Таким образом, доказано существование функций $v_0(\xi)$ и $\psi_{n-2}(x)$, являющихся решением краевых задач* (5.3) *и* (5.11) *при λ_{n-2}, определяемом равенством* (2.8), *и имеющих асимптотики* (5.2) *и* (5.9).

Легко видеть, что в классе функций, ортогональных ψ_0 в $L_2(\Sigma_a)$, решение $\psi_{n-2}(x)$ краевой задачи (5.11), *имеющее асимптотику* (5.9) *единственно. Однако, также легко видеть, что решения задач* (5.12) *и* (5.13) *по главным особенностям* (5.10) *в нуле однозначно не определяются: например, можно добавить слагаемое $\alpha E_0(x)$ для любого α.*

Аналогично, легко видеть, что единственное решение $v_0(\xi)$ *краевой задачи* (5.3), *имеющее на бесконечности асимптотику* (5.2), *определяется равенством* (5.4). *С другой стороны, также легко видеть, что при* $k \geqslant 1$ *решения* $v_k(\xi)$ *краевых задач* (5.3), *имеющие на бесконечности асимптотики* (5.2), *определяются неоднозначно: например, можно добавить слагаемое* $\alpha z_0(x)$ *для любого* α.

Таким образом, построены главные члены $v_0(\xi)$, $\psi_{n-2}(x)$ *и* λ_{n-2} *асимптотических разложений* (5.1), (5.8) *и* (2.7) *и определены главные члены асимптотик коэффициентов* $v_k(\xi)$ *и* $\psi_{n-2+k}(x)$ *при* $k \geqslant 1$ *на бесконечности и в нуле, соответственно.*

Дальнейшее согласование рядов (5.1) *и* (5.8) *заключается в построении решений* $v_k(\xi)$ *и* $\psi_{n-2+k}(x)$ *краевых задач* (5.3) *и* (5.12), (5.13) *таких, что, если коэффициенты* $\psi_0(x)$ *и* $\psi_{n-2+i}(x)$ *в* (5.8) *заменить на их асимптотические разложения при* $r \to 0$ *и перейти к переменной* $\xi = \varepsilon^{-1}x$, *а в ряду* (5.1) *заменить коэффициенты* $v_i(\xi)$ *заменить на их асимптотические разложения при* $\rho \to \infty$, *то получим два одинаковых ряда.*

Ключевым для согласования асимптотических разложений является следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Пусть*

$$\Psi^\varepsilon(x) = \Psi_0(x) + \varepsilon^{n-2} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Psi_{i+n-2}(x), \tag{5.16}$$

$$\Phi^\varepsilon(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Phi_i(\xi) \tag{5.17}$$

$$\Psi_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k^{(0)}(x), \tag{5.18}$$

$$\Psi_{n-2+i}(x) = \sum_{k=0}^{i} Y_k^{(i-k)}(x) r^{-2k-n+2} + \sum_{k=0}^{\infty} X_k^{(n-2+i)}(x), \qquad i \geqslant 0, \tag{5.19}$$

$$\Phi_i(\xi) = X_i^{(0)}(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(i)}(\xi) \rho^{-2k-n+2}, \qquad 0 \leqslant i < n-2, \tag{5.20}$$

$$\Phi_i(\xi) = X_i^{(0)}(\xi) + \sum_{k=0}^{i-n+2} X_k^{(i-k)}(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(i)}(\xi) \rho^{-2k-n+2}, \qquad i \geqslant n-2, \tag{5.21}$$

где $X_q^{(j)}$, $Y_q^{(j)}$ *— произвольные гармонические полиномы. Тогда*

$$\Psi^\varepsilon(\varepsilon\xi) = \Phi^\varepsilon(\xi). \tag{5.22}$$

Существуют $v_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \overline{\omega})$, $\psi_{n-2+i} \in \mathcal{A}$, $i \geqslant 0$, *удовлетворяющие краевым задачам* (5.3) *и* (5.11), (5.12), (5.13) *при некоторых* λ_{n-2+i} *и имеющие асимптотические разложения*

$$v_i(\xi) = \Phi_i(\xi), \qquad \rho \to \infty, \tag{5.23}$$

$$\psi_{n-2+i}(x) = \Psi_{n-2+i}(x), \qquad r \to 0, \tag{5.24}$$

где $X_q^{(0)}$ *из разложения в нуле* (4.14) *функции* $\psi_0(x)$, *а остальные* $X_q^{(j)}$, $Y_q^{(j)}$ *— некоторые гармонические полиномы.*

Справедливы равенства (2.8), (5.4) *и* (5.14).

Если $\psi_0(0) = 0$, *то справедливы равенства* (2.9), (2.10), (2.11),

$$v_0(\xi) \equiv 0, \qquad \psi_{n-2}(x) \equiv 0, \tag{5.25}$$

$$v_1(\xi) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0)(\xi_m - z_m(\xi)), \tag{5.26}$$

$$\psi_{n-1}(x) = -\,E_0(x)\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c_{m,0}. \tag{5.27}$$

Доказательство. Равенство (5.22) проверяется непосредственно заменой $x=\varepsilon\xi$ в $\Psi^\varepsilon(x)$.

Справедливость утверждений леммы для λ_{n-2}, $v_0(\xi)$ и $\psi_{n-2}(x)$, в том числе и равенства (2.8), (5.4) и (5.14) уже доказаны. Подчеркнем, что, так как уже определены функции $\psi_0(x)$, $v_0(\xi)$ и $\psi_{n-2}(x)$, то, следовательно, определены и гармонические полиномы $X_k^{(0)}$, $Y_k^{(0)}$ и $X_k^{(n-2)}$, $k\geqslant 0$.

Из определения $\Phi_1(\xi)$ следует, что

$$\Phi_1(\xi) = X_1^{(0)}(\xi) + X_0^{(1)} + \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(1)}(\xi)\rho^{-2k-1}, \quad n=3, \tag{5.28}$$

$$\Phi_1(\xi) = X_1^{(0)}(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(1)}(\xi)\rho^{-2k-n+2}, \quad n>3, \tag{5.29}$$

где

$$X_1^{(0)}(\xi) = \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)\xi_m$$

в соответствии с (4.14), $X_0^{(1)}$ — уже определенная постоянная из Ψ_{n-1} при $n=3$, а $Y_k^{(1)}$ — пока произвольные гармонические полиномы. Из определения функций z_q (см. (2.5)) следует, что функция

$$v_1(\xi) = \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)(\xi_m - z_m(\xi)) + X_0^{(1)}(1 - z_0(\xi)), \quad n=3, \tag{5.30}$$

$$v_1(\xi) = \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)(\xi_m - z_m(\xi)), \quad n>3 \tag{5.31}$$

является решением краевой задачи (5.3), имеющим асимптотические разложения (5.23), (5.20), (5.21), (5.28), (5.29) при некоторых гармонических полиномах $Y_k^{(1)}(\xi)$, причем,

$$Y_0^{(1)}(\xi) = -\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c_{m,0} - c(\omega)X_0^{(1)}, \quad n=3, \tag{5.32}$$

$$Y_0^{(1)}(\xi) = -\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c_{m,0}, \quad n>3, \tag{5.33}$$

$$Y_1^{(1)}(\xi) = -\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)\sum_{q=1}^{n}c_{m,q}\xi_q - X_0^{(1)}\sum_{q=1}^{n}c_{0,q}\xi_q, \quad n=3, \tag{5.34}$$

$$Y_1^{(1)}(\xi) = -\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)\sum_{q=1}^{n}c_{m,q}\xi_q, \quad n>3. \tag{5.35}$$

Определив $Y_k^{(1)}(\xi)$, в силу леммы 4.2 получаем, что существует функция $\psi_{n-1}\in\mathcal{A}$, являющаяся решением задачи (5.13) для $n=3$ и задачи (5.12) для $n\geqslant 4$ при некотором λ_{n-1} и имеющая асимптотическое разложение (5.24) при некоторых гармонических полиномах $X_k^{(n-1)}(x)$.

Далее, определив $X_k^{(n-1)}(x)$, в силу леммы 4.1 получаем, что существует решение $v_2\in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\overline{\omega})$ краевой задачи (5.3), имеющее асимптотическое разложение (5.23) при некоторых гармонических полиномах $Y_k^{(2)}(\xi)$.

В свою очередь, определив $Y_k^{(2)}(\xi)$, в силу леммы 4.2 получаем, что существуют постоянная λ_n и функция $\psi_n \in \mathcal{A}$ такие, что ψ_n является решением задачи (5.13) для $n = 4$ и задачи (5.12) для $n \geqslant 5$ и имеет асимптотическое разложение (5.24) при некоторых гармонических полиномах $X_k^{(n)}(x)$. И так далее.

Пусть теперь $\psi_0(0) = 0$. Тогда из (5.4), (5.14) и (2.8) вытекают равенства (5.25), (2.9). Следовательно, во-первых,

$$Y_1^{(0)}(\xi) \equiv 0, \tag{5.36}$$

$$Y_2^{(0)}(\xi) \equiv 0, \tag{5.37}$$

а, во-вторых, $X_0^{(1)} = 0$ при $n = 3$ и в силу (5.32), (5.33), (5.34), (5.35) получаем, что

$$Y_0^{(1)} = -\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) c_{m,0}, \quad n \geqslant 3, \tag{5.38}$$

$$Y_1^{(1)}(\xi) = -\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) \sum_{q=1}^{n} c_{m,q}\xi_q, \quad n \geqslant 3. \tag{5.39}$$

Так как $\psi_0(0) = \lambda_{n-2} = 0$, то функция $\psi_{n-1}(x)$, определяемая равенством (5.27), имеет асимптотическое разложение (5.24), (5.19), (5.36), (5.38) при $i = 1$. Поэтому согласно следствию 1 является решением краевой задачи (5.12) для $n \geqslant 4$ и решением краевой задачи (5.13) для $n = 3$ при $\lambda_{n-1} = 0$. Т.е. справедливо равенство (2.10). В свою очередь, так как $\psi_0(0) = \psi_{n-2}(x) = \lambda_{n-2} = \lambda_{n-1} = 0$, то функция

$$\psi_n(x) = -\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) \sum_{q=1}^{n} c_{m,q} E_q(x) + Y_0^{(2)} E_0(x)$$

имеет асимптотическое разложение (5.24), (5.19), (5.37), (5.39) при $i = 2$ и согласно следствию 1 является решением краевой задачи (5.12) для $n \geqslant 4$ и решением краевой задачи (5.13) для $n = 3$ при λ_n, определяемом равенством (2.11).

□

Обозначим через $\widehat{\lambda}_{\varepsilon,N}$, $\widehat{u}_{\varepsilon,N}(x)$, $\widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi)$ частичные суммы рядов (2.7), (5.8) и (5.1) до степеней N включительно. Из леммы 5.1 вытекает следующее утверждение

Лемма 5.2. *Функция $\widehat{u}_{\varepsilon,N} \in \mathcal{A}$ является решением краевой задачи*

$$-\Delta \widehat{u}_{\varepsilon,N}(x) = 0, \qquad x \in \Pi \setminus \{0\}, \qquad \widehat{u}_{\varepsilon,N}(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a,$$
$$\frac{\partial \widehat{u}_{\varepsilon,N}(x)}{\partial \nu} = \widehat{\lambda}_{\varepsilon,N} \widehat{u}_{\varepsilon,N}(x) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad x \in \Sigma_a.$$

Имеет место сходимость

$$\int\limits_{\Sigma_a} (\widehat{u}_{\varepsilon,N} - \psi_\varepsilon)^2 \, dx' \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{5.40}$$

Функция $\widehat{v}_{\varepsilon,N} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \overline{\omega})$ является решением краевой задачи

$$\Delta_\xi \widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\omega}, \qquad \widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\omega.$$

При $\varepsilon^{\frac{1}{2}} < r < 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ (или что тоже самое $\varepsilon^{-\frac{1}{2}} < \rho < 2\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$) справедливо дифференцируемое равенство

$$\widehat{u}_{\varepsilon,N}(x) - \widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi) = O\left(r^{N+1} + \varepsilon^N r + \rho^{-N-1} + \varepsilon^N \rho^{-1}\right). \tag{5.41}$$

Обозначим

$$\widetilde{u}_{\varepsilon,N}(x) = \widetilde{\chi}(r\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) \widehat{u}_{\varepsilon,N}(x) + (1 - \widetilde{\chi}(r\varepsilon^{-\frac{1}{2}})) \widehat{v}_{\varepsilon,N}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

где, напомним $\widetilde{\chi}(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная нулю при $t \leqslant 1$ и единице при $t \geqslant 2$.

Из (5.40) и теоремы 2.1 следует, что

$$\int\limits_{\Sigma_a} \widetilde{u}_{\varepsilon,N}\psi_\varepsilon dx' \to 1, \quad \varepsilon \to 0. \tag{5.42}$$

Лемма 5.3. *Функция $\widetilde{u}_{\varepsilon,N} \in H^1(\Pi_\varepsilon)$ является решением краевой задачи*

$$\begin{aligned} &-\Delta\widetilde{u}_{\varepsilon,N} = F_{\varepsilon,N}, && x \in \Pi_\varepsilon, && \widetilde{u}_{\varepsilon,N} = 0, && x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a, \\ &\frac{\partial\widetilde{u}_{\varepsilon,N}}{\partial\nu} = \widehat{\lambda}_{\varepsilon,N}\widetilde{u}_{\varepsilon,N} + g_{\varepsilon,N}, && x \in \Sigma_a, && \widetilde{u}_{\varepsilon,N} = 0, && x \in \partial\omega_\varepsilon, \end{aligned} \tag{5.43}$$

где

$$\|g_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\Sigma_a)} \leqslant C\varepsilon^{N+1}, \tag{5.44}$$

$$\|F_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\Pi_\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{2N+n-2}{4}}, \tag{5.45}$$

$$\operatorname{supp} F_{\varepsilon,N} \subset \overline{B}_{2\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \setminus B_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}. \tag{5.46}$$

Доказательство. Справедливость всех утверждений за исключением (5.45) и (5.46) следует непосредственно из леммы 5.2. Подействовав оператором Лапласа на функцию $\widetilde{u}_{\varepsilon,N}$, получаем, что

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon,N}(x) = &- \left(\widehat{u}_{\varepsilon,N}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \widehat{v}_{\varepsilon,N}(x)\right)\Delta\widetilde{\chi}(r\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) \\ &- \nabla\left(\widehat{u}_{\varepsilon,N}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \widehat{v}_{\varepsilon,N}(x)\right)\nabla\widetilde{\chi}(r\varepsilon^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned} \tag{5.47}$$

Отсюда следует (5.46). В свою очередь, из (5.47), (5.46) и (5.41) вытекает оценка (5.45). $\square$

Умножая уравнение (5.43) на собственную функцию ψ_ε и интегрируя по частям на Π_ε, в силу краевых задач (5.43), (2.2) получаем

$$(\lambda_\varepsilon - \widehat{\lambda}_{\varepsilon,N})\int\limits_{\Sigma_a} \widetilde{u}_{\varepsilon,N}\psi_\varepsilon dx' = \int\limits_{\Pi_\varepsilon} F_{\varepsilon,N}\psi_\varepsilon dx + \int\limits_{\Sigma_a} g_{\varepsilon,N}\psi_\varepsilon dx'. \tag{5.48}$$

Так как $\|\psi_\varepsilon\|_{L_2(\Sigma_a)} = 1$, то в силу (5.44) получаем, что

$$\int\limits_{\Sigma_a} g_{\varepsilon,N}\psi_\varepsilon dx' = O\left(\varepsilon^{N+1}\right). \tag{5.49}$$

В силу интегрального тождества для функции ψ_ε имеем:

$$\int\limits_{\Pi_\varepsilon} |\nabla\psi_\varepsilon|^2 dx + \widetilde{h} \int\limits_{\partial\Pi_\varepsilon \setminus \overline{\Sigma}_a} \psi_\varepsilon^2 ds = \lambda_\varepsilon,$$

где $\widetilde{h} = 0$, если $H = 0$, и $\widetilde{h} = \frac{h}{H}$, если $H \neq 0$. Следовательно,

$$\|\psi_\varepsilon\|^2_{H^1(\Pi_\varepsilon)} = \int\limits_{\Pi_\varepsilon} |\nabla\psi_\varepsilon|^2 dx + \int\limits_{\Sigma_a} \psi_\varepsilon^2 dx' \leqslant C.$$

Тогда, продолжая ψ_ε нулем в ω_ε, в силу (3.14) имеем $\|\psi_\varepsilon\|^2_{W_2^1(\Pi(R))} \leqslant C$. Поэтому из (5.45) и (5.46) следует, что

$$\int\limits_{\Pi_\varepsilon} F_{\varepsilon,N}\psi_\varepsilon dx = O\left(\varepsilon^{\frac{2N+n-2}{4}}\right). \tag{5.50}$$

Из (5.48), (5.49), (5.50) и (5.42) вытекает, что

$$\lambda_\varepsilon - \widehat{\lambda}_{\varepsilon,N} = O\left(\varepsilon^{\frac{2N+n-2}{4}}\right).$$

Отсюда в силу произвола выбора N следует справедливость разложения (2.7). Теорема 2.2 доказана полностью.

6. Доказательство теоремы 2.3

Всюду далее λ_0 — двукратное собственное значение задачи Стеклова (2.1), а $\psi_0^{(1)}(x)$ и $\psi_0^{(2)}(x)$ — соответствующие ортонормированные в $L_2(\Sigma_a)$ собственные функции, выбранные в соответствии (2.15). Ряды Тейлора функций $\psi_0^{(s)}(x)$ в нуле имеют вид:

$$\begin{aligned}\psi_0^{(1)}(x) =&\sum_{k=0}^{\infty} X_k^{(0,1)}(x), \qquad \psi_0^{(2)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(0,2)}(x), \qquad r\to 0,\\ X_0^{(0,1)}(x) =&\psi_0^{(1)}(0), \quad X_1^{(0,s)}(x) = \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0^{(s)}}{\partial x_m}(0)x_m.\end{aligned} \tag{6.1}$$

Вне окрестности отверстия внешнее разложение $U^{(1)}(x,\varepsilon)$ собственной функции $\psi_\varepsilon^{(1)}(x)$ задачи Стеклова (2.2) будем искать в виде $U^{(1)}(x,\varepsilon) \approx \psi_0^{(1)}(x)$. Переписывая (6.1) в переменной ξ, имеем:

$$U^{(1)}(x,\varepsilon) \approx \psi_0^{(1)}(x) = \psi_0^{(1)}(0) + \varepsilon\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0^{(1)}}{\partial x_m}(0)\xi_m + \sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k X_k^{(0,1)}(\xi),\ \rho\varepsilon = r \to 0.$$

Следуя методу согласования, внутреннее разложение будем строить в виде

$$V^{(1)}(\xi,\varepsilon) = v_0^{(1)}(\xi) + \varepsilon v_1^{(1)}(\xi) + \sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k v_k^{(1)}(\xi), \tag{6.2}$$

где

$$\begin{aligned} v_0^{(1)}(\xi) \sim& X_0^{(0,1)}(\xi) \equiv \psi_0^{(1)}(0), \quad \rho\to\infty,\\ v_1^{(1)}(\xi) \sim& X_1^{(0,1)}(\xi) = \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0^{(1)}}{\partial x_m}(0)\xi_m, \quad \rho\to\infty,\\ v_k^{(1)}(\xi) \sim& X_k^{(0,1)}(\xi), \quad k\geqslant 2, \quad \rho\to\infty.\end{aligned} \tag{6.3}$$

Подставляя (6.2) в (2.2), переходя к переменной ξ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем краевые задачи для $v_k^{(1)}$:

$$\Delta_\xi v_k^{(1)} = 0 \quad \xi\in\mathbb{R}^n\setminus\overline{\omega}, \qquad v_k^{(1)} = 0 \quad \xi\in\partial\omega. \tag{6.4}$$

Функция

$$v_0^{(1)}(\xi) = \psi_0^{(1)}(0)(1 - z_0(\xi)) \tag{6.5}$$

является решением краевой задачи (6.4), имеющим дифференцируемое асимптотическое разложение

$$v_0^{(1)}(\xi) = X_0^{(0,1)} + \sum_{i=0}^{\infty}\frac{Y_i^{(0,1)}(\xi)}{\rho^{2i+n-2}}, \qquad \rho\to\infty, \tag{6.6}$$

$$Y_0^{(0,1)} = -\,\psi_0^{(1)}(0)c(\omega), \quad Y_k^{(0,1)}(\xi) = -\psi_0^{(1)}(0)Z_k^{(0,1)}(\xi), \qquad k\geqslant 1, \tag{6.7}$$

которая уточняет требуемую асимптотику (6.3) для $v_0^{(1)}(\xi)$.

Переписывая теперь (6.6) в переменных $x = \varepsilon\xi$, получаем, что

$$v_0^{(1)}(\xi) = X_0^{(0,1)} + \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{n-2+i}\frac{Y_i^{(0,1)}(x)}{r^{2i+n-2}}, \qquad \varepsilon^{-1}r\to\infty. \tag{6.8}$$

С учетом этого равенства и по аналогии с предыдущим разделом, казалось бы, внешнее разложение собственной функции следует искать в виде

$$U^{(1)}(x,\varepsilon) = \psi_0^{(1)}(x) + \varepsilon^{n-2}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\psi_{i+n-2}^{(1)}(x),$$

где

$$\psi_{n-2}^{(1)}(x) \sim Y_0^{(0,1)} r^{-n+2} = -\psi_0^{(1)}(0)c(\omega)r^{-n+2}, \quad r\to 0, \tag{6.9}$$

$$\psi_{j+n-2}^{(1)}(x) \sim Y_j^{(0,1)}(x) r^{-n-2j+2}, \quad r\to 0, \quad j \geqslant 1. \tag{6.10}$$

Однако, так как в рассматриваемом случае двукратного собственного значения λ_0 есть еще одна собственная функция $\psi_0^{(2)}(x)$, то внешнее разложение будем строить в виде

$$U^{(1)}(x,\varepsilon) = \psi_0^{(1)}(x) + \varepsilon^{n-2}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\psi_{i+n-2}^{(1)}(x) + \varepsilon\psi_0^{(2)}(x)\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{i+1}^{(1)}\varepsilon^i, \tag{6.11}$$

где коэффициенты $\psi_{i+n-2}^{(1)}(x)$ имеют асимптотики (6.9), (6.10), а $\alpha_{i+1}^{(1)}$ — некоторые постоянные.

По аналогии с (2.7) асимптотическое разложение собственного значения $\lambda_\varepsilon^{(1)}$ будем искать в виде (2.16).

Подставляя ряды (6.11) и (2.16) в (2.2), получаем следующие краевые задачи для коэффициентов внешнего разложения (6.11):

$$\begin{aligned} &-\Delta\psi_{n-2}^{(1)} = 0, \qquad x\in\Pi\setminus\{0\}, \qquad \text{ɩ}\psi_{n-2}^{(1)} = 0, \quad x\in\partial\Pi\setminus\overline{\Sigma}_a,\\ &\frac{\partial\psi_{n-2}^{(1)}}{\partial\nu} = \lambda_0\psi_{n-2}^{(1)} + \lambda_{n-2}^{(1)}\psi_0^{(1)}, \quad x\in\Sigma_a, \end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned} &-\Delta\psi_{n-2+i}^{(1)} = 0, \qquad x\in\Pi\setminus\{0\}, \qquad \text{ɩ}\psi_{n-2+i}^{(1)} = 0, \quad x\in\partial\Pi\setminus\overline{\Sigma}_a,\\ &\frac{\partial\psi_{n-2+i}^{(1)}}{\partial\nu} = \lambda_0\psi_{n-2+i}^{(1)} + \psi_0^{(2)}\sum_{p=1}^{i-1}\alpha_p^{(1)}\lambda_{i+n-2-p}^{(1)}\\ &\qquad + \lambda_{n-2+i}^{(1)}\psi_0^{(1)} + \alpha_i^{(1)}\lambda_{n-2}^{(1)}\psi_0^{(2)}, \quad x\in\Sigma_a,\ 1\leqslant i\leqslant n-3, \end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned} &-\Delta\psi_{n-2+i}^{(1)} = 0, \qquad x\in\Pi\setminus\{0\}, \qquad \text{ɩ}\psi_{n-2+i}^{(1)} = 0, \qquad x\in\partial\Pi\setminus\overline{\Sigma}_a,\\ &\frac{\partial\psi_{n-2+i}^{(1)}}{\partial\nu} = \lambda_0\psi_{n-2+i}^{(1)} + \sum_{k=0}^{i-n+2}\lambda_{n-2+k}^{(1)}\psi_{i-k}^{(1)} +\\ &\qquad + \psi_0^{(2)}\sum_{p=1}^{i-1}\alpha_p^{(1)}\lambda_{i+n-2-p}^{(s)} +\\ &\qquad + \lambda_{n-2+i}^{(1)}\psi_0^{(1)} + \alpha_i^{(1)}\lambda_{n-2}^{(1)}\psi_0^{(2)}, \quad x\in\Sigma_a,\ i\geqslant n-2. \end{aligned} \tag{6.14}$$

В силу следствия 2 функция

$$\psi_{n-2}^{(1)}(x) = -\psi_0^{(1)}(0)c(\omega)E_0(x), \quad \psi_{n-2}^{(1)}\in\mathcal{A}, \tag{6.15}$$

является решением краевой задачи (6.12) при $\lambda_{n-2}^{(1)}$, определяемом равенством (2.18), и имеет дифференцируемое асимптотическое разложение

$$\psi_{n-2}^{(1)}(x) = Y_0^{(0,1)} r^{-n+2} + \sum_{j=0}^{\infty} X_j^{(n-2,1)}(x), \quad r\to 0, \tag{6.16}$$

которое уточняет требуемую асимптотику (6.9).

Замечание 6.1. *Таким образом, доказано существование функций* $v_0^{(1)}(\xi)$ *и* $\psi_{n-2}^{(1)}(x)$, *являющихся решением краевых задач* (6.4) *и* (6.12) *при* $\lambda_{n-2}^{(1)}$, *определяемом равенством* (2.18), *и имеющих асимптотики* (6.3) *и* (6.9).

Лемма 6.1. *Пусть*

$$\Psi^{\varepsilon,1}(x) =\Psi_0^{(1)}(x) + \varepsilon^{n-2}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\Psi_{i+n-2}^{(1)}(x) + \varepsilon\Psi_0^{(2)}(x)\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{i+1}^{(1)}\varepsilon^i, \tag{6.17}$$

$$\Psi_0^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}X_k^{(0,1)}(x), \qquad \Psi_0^{(2)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}X_k^{(0,2)}(x),$$

$$\Psi_{n-2+i}^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^{i}Y_k^{(i-k.1)}(x)r^{-2k-n+2} + \sum_{k=0}^{\infty}X_k^{(n-2+i,1)}(x), \qquad i \geqslant 0,$$

$$\Phi^{\varepsilon,1}(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\Phi_i^{(1)}(\xi), \tag{6.18}$$

$$\Phi_i^{(1)}(\xi) =X_i^{(0,1)}(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty}Y_k^{(i,1)}(\xi)\rho^{-2k-n+2}+$$
$$+\sum_{k=0}^{i-2}\alpha_{k+1}^{(1)}X_{i-k-1}^{(0,2)}(\xi), \qquad 0 \leqslant i < n-2,$$
$$\Phi_i^{(1)}(\xi) =X_i^{(0,1)}(\xi) + \sum_{k=0}^{i-n+2}X_k^{(i-k,1)}(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty}Y_k^{(i,1)}(\xi)\rho^{-2k-n+2}+$$
$$+\sum_{k=0}^{i-2}\alpha_{k+1}^{(1)}X_{i-k-1}^{(0,2)}(\xi), \qquad i \geqslant n-2,$$

где $X_q^{(j,p)}$, $Y_q^{(j,1)}$ *— произвольные гармонические полиномы, а* $\alpha_j^{(1)}$ *— произвольные числа. Тогда*

$$\Psi^{\varepsilon,1}(\varepsilon\xi) = \Phi^{\varepsilon,1}(\xi). \tag{6.19}$$

Существуют $v_i^{(1)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\overline{\omega})$, $\psi_{n-2+i}^{(1)} \in \mathcal{A}$, $i \geqslant 0$, *удовлетворяющие краевым задачам* (6.4) *и* (6.12), (6.13), (6.14) *при некоторых* $\lambda_{n-2+i}^{(1)}$ *и имеющие дифференцируемые асимптотические разложения*

$$v_i^{(1)}(\xi) =\Phi_i^{(1)}(\xi), \qquad \rho\to\infty, \tag{6.20}$$
$$\psi_{n-2+i}^{(1)}(x) =\Psi_{n-2+i}^{(1)}(x), \qquad r\to 0, \tag{6.21}$$

где $X_q^{(0,s)}$ *— из разложения в нуле* (6.1) *функций* $\psi_0^{(s)}(x)$, *остальные* $X_q^{(j,1)}$, $Y_q^{(j,1)}$ *— некоторые гармонические полиномы, а* $\alpha_j^{(1)}$ *— некоторые числа.*

Справедливы равенства (2.18), (6.5) *и* (6.15).

Доказательство. Равенство (6.19) проверяется непосредственно заменой $x = \varepsilon\xi$ в $\Psi^{\varepsilon,1}(x)$.

Справедливость утверждений леммы для $\lambda_{n-2}^{(1)}$, $\psi_{n-2}^{(1)}(x)$, $v_0^{(1)}(\xi)$ уже показана. Напомним, что, так как уже определены функции $\psi_0^{(s)}(x)$, $v_0^{(1)}(\xi)$ и $\psi_{n-2}^{(1)}(x)$, то определены и гармонические полиномы $X_k^{(0,s)}$, $Y_k^{(0,1)}$ и $X_k^{(n-2,1)}$, $k \geqslant 0$.

Из определения $\Phi_i^{(1)}(\xi)$ следует, что

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(1)}(\xi) =& X_1^{(0,1)}(\xi) + X_0^{(1,1)} + \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(1,1)}(\xi)\rho^{-2k-1}, \quad n=3,\\ \Phi_1^{(1)}(\xi) =& X_1^{(0,1)}(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(1,1)}(\xi)\rho^{-2k-n+2}, \quad n>3,\end{aligned} \tag{6.22}$$

и

$$\begin{aligned}\Phi_2^{(1)}(\xi) =& X_2^{(0,1)}(\xi) + X_1^{(1,1)} + X_0^{(2,1)} + \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(2,1)}(\xi)\rho^{-2k-1}+\\ &+\alpha_1^{(1)} X_1^{(0,2)}(\xi), \qquad n=3,\\ \Phi_2^{(1)}(\xi) =& X_2^{(0,1)}(\xi) + X_0^{(1,1)} + \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(2,1)}(\xi)\rho^{-2k-2}+\\ &+\alpha_1^{(1)} X_1^{(0,2)}(\xi), \qquad n=4,\\ \Phi_2^{(1)}(\xi) =& X_2^{(0,1)}(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(2,1)}(\xi)\rho^{-2k-n+2}+\\ &+\alpha_1^{(1)} X_1^{(0,2)}(\xi), \qquad n>4,\end{aligned} \tag{6.23}$$

где $Y_k^{(1,1)}$, $Y_k^{(2,1)}$, $X_2^{(0,1)}$ — пока произвольные гармонические полиномы, а $\alpha_1^{(1)}$ — произвольная постоянная.

В силу леммы 4.1 существует решение $v_1^{(1)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\overline{\omega})$ краевой задачи (6.4), имеющее дифференцируемое асимптотическое разложение (6.20) при некоторых гармонических полиномах $Y_k^{(1,1)}(\xi)$.

Определив, в частности, $Y_0^{(1,1)}(\xi)$, в силу следствия 2 получаем, что существует функция $\psi_{n-1}^{(1)} \in \mathcal{A}$, являющаяся решением задачи (6.14), (6.13) при некоторых $\lambda_{n-1}^{(1)}$ и $\alpha_1^{(1)}$ и имеющая дифференцируемое асимптотическое разложение (6.21) при некоторых гармонических полиномах $X_k^{(n-1,1)}(x)$.

В свою очередь, определив $\alpha_1^{(1)}$ и, в частности, $X_2^{(0,1)}$, получаем, что в (6.23) остались произвольными только $Y_k^{(2,1)}$. В силу леммы 4.1 существует решение $v_2^{(1)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\overline{\omega})$ краевой задачи (6.4), имеющее дифференцируемое асимптотическое разложение (6.20) при некоторых гармонических полиномах $Y_k^{(2,1)}(\xi)$.

Определив $Y_0^{(2,1)}(\xi)$ (а ранее и $Y_1^{(1,1)}(\xi)$, $Y_2^{(0,1)}(\xi)$), в силу леммы 4.3 получаем, что существует функция $\psi_n^{(1)} \in \mathcal{A}$, являющаяся решением задачи (6.14), (6.13) при некоторых $\lambda_n^{(1)}$ и $\alpha_2^{(1)}$ и имеющая дифференцируемое асимптотическое разложение (6.21) при некоторых гармонических полиномах $X_k^{(n,1)}(x)$. И так далее. □

Перейдем к построению формальных асимптотических разложений собственного значения $\lambda_\varepsilon^{(2)}$ и соответствующей функции $\psi_\varepsilon^{(2)}(x)$. Так как $\psi_\varepsilon^{(2)}(0) = 0$, то по аналогии с (2.7), (2.9), (2.10) и (5.1), (5.25), (5.2) в критическом случае $\psi_0(0) = 0$ для простого собственного значения λ_0 асимптотическое разложение собственного значения $\lambda_\varepsilon^{(2)}$ и внутреннего разложения собственной функции будем строить в виде (2.17) и

$$V^{(2)}(\xi,\varepsilon) = \varepsilon v_1^{(2)}(\xi) + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k v_k^{(2)}(\xi), \tag{6.24}$$

где

$$\begin{aligned} &v_1^{(2)}(\xi) \sim X_1^{(0,2)}(\xi) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0^{(2)}}{\partial x_m}(0)\xi_m, \quad \rho \to \infty, \\ &v_k^{(2)}(\xi) \sim X_k^{(0,2)}(\xi), \quad k \geqslant 2, \quad \rho \to \infty. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Подставляя (6.24) в (2.2), переходя к переменной ξ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем краевые задачи для $v_k^{(1)}$:

$$\Delta_\xi v_k^{(2)} = 0 \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\omega}, \qquad v_k^{(2)} = 0 \quad \xi \in \partial\omega. \tag{6.26}$$

По аналогии с внешним разложением собственной функции (5.8), (5.25) с критическим случаем $\psi_0(0) = 0$ для простого собственного значения λ_0 и с внешним разложением (6.11) собственной функции $\psi_\varepsilon^{(1)}(x)$ для кратного собственного значения λ_0 внешнее разложение собственной функции $\psi_\varepsilon^{(2)}(x)$ начнем искать в виде

$$U^{(2)}(x,\varepsilon) = \psi_0^{(2)}(x) + \varepsilon^{n-1}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i \psi_{i+n-1}^{(2)}(x) + \varepsilon\psi_0^{(1)}(x)\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{i+1}^{(2)}\varepsilon^i. \tag{6.27}$$

Согласование первого слагаемого и последней суммы ряда (6.27) с рядом (6.24) уточняет асимптотики (6.25):

$$\begin{aligned} v_1^{(2)}(\xi) \sim{}& X_1^{(0,2)}(\xi) + \alpha_1^{(2)} X_0^{(0,1)} = \\ &= \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0^{(2)}}{\partial x_m}(0)\xi_m + \alpha_1^{(2)}\psi_0^{(1)}(0), \quad \rho \to \infty, \\ v_k^{(2)}(\xi) \sim{}& X_k^{(0,2)}(\xi) + \sum_{j=1}^{k}\alpha_j^{(2)} X_{k-j}^{(0,1)}(\xi), \quad k \geqslant 2, \quad \rho \to \infty. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Из определения функций $z_q(\xi)$ следует, что функция

$$v_1^{(2)}(\xi) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0^{(2)}}{\partial x_m}(0)(\xi_m - z_m(\xi)) + \alpha_1^{(2)}\psi_0^{(1)}(0)(1 - z_0(\xi)) \tag{6.29}$$

является решением краевой задачи (6.26) и имеет дифференцируемое асимптотическое разложение

$$v_1^{(2)}(\xi) = X_1^{(0,2)}(\xi) + \alpha_1^{(2)} X_0^{(0,1)} + \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(1,2)}(\xi)\rho^{-2i-n+2}, \qquad \rho \to \infty, \tag{6.30}$$

где

$$Y_0^{(1,2)} = -\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0^{(2)}}{\partial x_m}(0)c_{m,0} - \alpha_1^{(2)}\psi_0^{(1)}(0)c(\omega), \tag{6.31}$$

$$Y_1^{(1,2)}(\xi) = -\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0^{(2)}}{\partial x_m}(0)\sum_{q=1}^{n} c_{m,q}\xi_q - \alpha_1^{(2)}\psi_0^{(1)}(0)\sum_{q=1}^{n} c_{0,q}\xi_q, \tag{6.32}$$

$$Y_k^{(1,2)}(\xi) = -\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0^{(2)}}{\partial x_m}(0)Z_k^{(m)}(\xi) - \alpha_1^{(2)}\psi_0^{(1)}(0)Z_k^{(0)}(\xi), \qquad k \geqslant 2, \tag{6.33}$$

которая уточняет требуемую асимптотику (6.28) для $v_1^{(2)}(\xi)$.

Переписывая асимптотическое разложение на бесконечности функции $\varepsilon v_1^{(2)}(\xi)$ во внешних переменных, получаем главные члены асимптотик в нуле для коэффициентов

$\psi^{(2)}_{i+n-1}(x)$ внешнего разложения:

$$\psi^{(2)}_{n-1+j}(x) \sim Y^{(1,2)}_j(x) r^{-n-2j+2}, \quad r \to 0, \quad j \geqslant 0. \tag{6.34}$$

Подставляя ряды (6.27) и (2.17) в (2.2), получаем краевую задачу для $\psi^{(2)}_{n-1}(x)$:

$$\begin{aligned} -\Delta\psi^{(2)}_{n-1} = 0, &\qquad x \in \Pi \setminus \{0\}, \qquad \psi^{(2)}_{n-1} = 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a, \\ \frac{\partial \psi^{(2)}_{n-1}}{\partial \nu} = \lambda_0 \psi^{(2)}_{n-1} + \lambda^{(2)}_{n-1}\psi^{(2)}_0, &\quad x \in \Sigma_a, \end{aligned} \tag{6.35}$$

где $\lambda^{(2)}_{n-1} = 0$. Но, если $Y^{(1,2)}_0 \neq 0$, то в силу следствия 2 задача (6.35), (6.34) не разрешима ни при каком $\lambda^{(2)}_{n-1}$. Поэтому с учетом (6.31), (6.32) последовательно получаем, что $Y^{(1,2)}_0 = 0$,

$$\psi^{(2)}_{n-1}(x) \equiv 0, \tag{6.36}$$

$$\alpha^{(2)}_1 = -\frac{1}{\psi^{(1)}_0(0)c(\omega)} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi^{(2)}_0}{\partial x_m}(0) c_{m,0}, \tag{6.37}$$

$$Y^{(1,2)}_1(\xi) = -\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi^{(2)}_0}{\partial x_m}(0) \sum_{q=1}^{n} c_{m,q}\xi_q + \frac{1}{c(\omega)} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi^{(2)}_0}{\partial x_m}(0) c_{m,0} \sum_{q=1}^{n} c_{0,q}\xi_q. \tag{6.38}$$

Подчеркнем, что, определив $\alpha^{(2)}_1$, в силу (6.29), (6.31), (6.32), (6.33) окончательно определили $v^{(2)}_1$ и $Y^{(1,2)}_j$, $j \geqslant 0$.

Подставляя ряды (6.27) и (2.17) в (2.2), получаем следующие краевые задачи для коэффициентов внешнего разложения (6.11):

$$\begin{aligned} -\Delta\psi^{(2)}_{n} = 0, &\quad x \in \Pi \setminus \{0\}, \qquad \psi^{(2)}_{n} = 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a, \\ \frac{\partial \psi^{(2)}_{n}}{\partial \nu} = \lambda_0 \psi^{(2)}_{n} + \lambda^{(2)}_{n}\psi^{(2)}_0, &\quad x \in \Sigma_a, \end{aligned} \tag{6.39}$$

$$\begin{aligned} -\Delta\psi^{(2)}_{n+i} = 0, &\quad x \in \Pi \setminus \{0\}, \qquad \psi^{(2)}_{n+i} = 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a, \\ \frac{\partial \psi^{(2)}_{n+i}}{\partial \nu} = \lambda_0 \psi^{(2)}_{n+i} &+ \psi^{(1)}_0 \sum_{p=1}^{i} \alpha^{(2)}_p \lambda^{(2)}_{i+n-p} \\ &+ \lambda^{(2)}_{n+i}\psi^{(2)}_0, \quad x \in \Sigma_a,\ 1 \leqslant i \leqslant n-1, \end{aligned} \tag{6.40}$$

$$\begin{aligned} -\Delta\psi^{(2)}_{n+i} = 0, &\qquad x \in \Pi \setminus \{0\}, \qquad \psi^{(2)}_{n+i} = 0, \qquad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma}_a, \\ \frac{\partial \psi^{(2)}_{n+i}}{\partial \nu} = \lambda_0 \psi^{(2)}_{n+i} &+ \sum_{k=0}^{i-n} \lambda^{(2)}_{n+k}\psi^{(2)}_{i-k} + \psi^{(1)}_0 \sum_{p=1}^{i} \alpha^{(2)}_p \lambda^{(2)}_{i+n-p} + \\ &+ \lambda^{(2)}_{n+i}\psi^{(2)}_0 + \alpha^{(2)}_i \lambda^{(1)}_n \psi^{(1)}_0, \quad x \in \Sigma_a,\ i \geqslant n. \end{aligned} \tag{6.41}$$

В силу леммы 4.1 и определения функции z_0 легко видеть, что для любого числа $Y^{(2,2)}_0$ при некотором $\mu^{(2)}_2$ существует решение $v^{(2)}_2$ краевой задачи (6.26), имеющее дифференцируемое асимптотическое разложение на бесконечности:

$$\begin{aligned} v^{(2)}_2(\xi) = &X^{(0,2)}_2(\xi) + \alpha^{(2)}_1 X^{(0,1)}_1(\xi) + \alpha^{(2)}_2 X^{(0,1)}_0(\xi) + \\ &+ Y^{(2,2)}_0 \rho^{-n+2} + \sum_{j=1}^{\infty} Y^{(2,2)}_j(\xi) \rho^{-n+2-2j}, \end{aligned} \tag{6.42}$$

где $Y^{(2,2)}_j$ — некоторые полиномы при $j \geqslant 1$. Это разложение уточняет асимптотику (6.28).

Переписывание асимптотического разложения на бесконечности функции $\varepsilon^2 v_2^{(2)}(\xi)$ во внешних переменных уточняет асимптотики в нуле (6.34) коэффициентов внешнего разложения:

$$\begin{aligned}\psi_n^{(2)}(x) \sim& Y_1^{(1,2)}(x) r^{-n} + Y_0^{(2,2)} r^{-n+2}, \quad r \to 0, \\ \psi_{n+j}^{(2)}(x) \sim& Y_{j+1}^{(1,2)}(x) r^{-n-2j} + Y_j^{(2,2)} r^{-n-2j+2}, \quad r \to 0, \quad j \geqslant 1.\end{aligned} \tag{6.43}$$

В силу (6.38) и следствия 3 функция

$$\begin{aligned}\psi_n^{(2)}(x) = -\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0^{(2)}}{\partial x_m}(0) \sum_{q=1}^{n} c_{m,q} \widetilde{E}_q(x) \\ + \frac{1}{c(\omega)} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0^{(2)}}{\partial x_m}(0) c_{m,0} \sum_{q=1}^{n} c_{0,q} \widetilde{E}_q(x) \in \mathcal{A}\end{aligned} \tag{6.44}$$

является решением краевой задачи (6.39) при $\lambda_n^{(2)}$, определяемом равенством (2.19), имеющим дифференцируемое асимптотическое разложение

$$\psi_n^{(2)}(x) = Y_1^{(1,2)}(x) r^{-n} + Y_0^{(2,2)} r^{-n+2} + \sum_{j=0}^{\infty} X_j^{(n,2)}(x), \quad r \to 0, \tag{6.45}$$

при некотором явно вычисляемом $Y_0^{(2,2)}$. Это разложение уточняет асимптотику (6.43). Подчеркнем, что, определив $Y_0^{(2,2)}$, вычислили и $\mu_2^{(2)}$, а следовательно, окончательно определили $v_2^{(2)}(\xi)$.

На следующем шаге согласования из условия разрешимости задач (6.40), (6.41) для $\psi_{n+1}^{(2)}$ в силу леммы 4.4 последовательно определяется $\mu_3^{(2)}$, $\lambda_{n+1}^{(2)}$, $\psi_{n+1}^{(2)}$, $v_3^{(2)}$ и уточняются асимптотики в нуле коэффициентов внешнего разложения $\psi_{n+1+j}^{(2)}$ при $j \geqslant 1$. И так далее.

В результате получаем справедливость следующего утверждения.

Лемма 6.2. *Существуют ряды* (2.17), (6.27), (6.36), (6.24) *такие, что коэффициенты рядов* (6.27) *принадлежат* $\mathcal{A}$, *являются решениями краевых задач* (6.39), (6.40), (6.41) *и имеют в нуле дифференцируемые асимптотические разложения*

$$\psi_0^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k^{(0,1)}(x), \qquad \psi_0^{(2)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(0,2)}(x),$$
$$\psi_{n+i}^{(2)}(x) = \sum_{k=0}^{i+1} Y_k^{(i+2-k.2)}(x) r^{-2k-n+2} + \sum_{k=0}^{\infty} X_k^{(n+i,2)}(x), \qquad i \geqslant 0,$$

а коэффициенты рядов (6.24) *принадлежат* $C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \overline{\omega})$, *являются решениями краевых задач* (6.26) *и имеют на бесконечности дифференцируемые асимптотические разложения*

$$\begin{aligned}v_i^{(2)}(\xi) =& X_i^{(0,2)}(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(i,2)}(\xi) \rho^{-2k-n+2} \\ &+ \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_{k+1}^{(2)} X_{i-k-1}^{(0,1)}(\xi), \qquad 1 \leqslant i < n, \\ v_i^{(2)}(\xi) =& X_i^{(0,2)}(\xi) + \sum_{k=0}^{i-n} X_k^{(i-k,2)}(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(i,2)}(\xi) \rho^{-2k-n+2} \\ &+ \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_{k+1}^{(2)} X_{i-k-1}^{(0,1)}(\xi), \qquad i \geqslant n.\end{aligned}$$

Справедливы равенства (2.19), (6.44), (6.29), (6.37).

Обозначим через $\widehat{\lambda}^{(1)}_{\varepsilon,N}$, $\widehat{u}^{(1)}_{\varepsilon,N}(x)$, $\widehat{v}^{(1)}_{\varepsilon,N}(\xi)$ частичные суммы рядов (2.16), (6.11) и (6.2) до степеней N включительно, а через $\widehat{\lambda}^{(2)}_{\varepsilon,N}$, $\widehat{u}^{(2)}_{\varepsilon,N}(x)$, $\widehat{v}^{(2)}_{\varepsilon,N}(\xi)$ частичные суммы рядов (2.17), (6.27), (6.36), (6.24). Из лемм 6.1, 6.2 вытекает следующее утверждение

Лемма 6.3. *Функция* $\widehat{u}^{(i)}_{\varepsilon,N}\in\mathcal{A}$ *является решением задачи*

$$\begin{aligned}
&-\Delta\widehat{u}^{(i)}_{\varepsilon,N}(x)=0, && x\in\Pi\setminus\{0\}, \qquad \widehat{u}^{(i)}_{\varepsilon,N}(x)=0, \quad x\in\partial\Pi\setminus\overline{\Sigma}_a,\\
&\frac{\partial\widehat{u}^{(i)}_{\varepsilon,N}(x)}{\partial\nu}=\widehat{\lambda}^{(i)}_{\varepsilon,N}\widehat{u}^{(i)}_{\varepsilon,N}(x)+O(\varepsilon^{N+1}), && x\in\Sigma_a.
\end{aligned}$$

Имеет место сходимость

$$\int\limits_{\Sigma_a}\left(\widehat{u}^{(i)}_{\varepsilon,N}-\psi^{(i)}_0\right)^2dx'\to0,\quad \varepsilon\to0. \tag{6.46}$$

Функция $\widehat{v}^{(i)}_{\varepsilon,N}\in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\omega)$ *является решением краевой задачи*

$$\Delta_\xi\widehat{v}^{(i)}_{\varepsilon,N}(\xi)=0,\quad \xi\in\mathbb{R}^n\setminus\overline{\omega},\qquad \widehat{v}^{(i)}_{\varepsilon,N}(\xi)=0,\quad \xi\in\partial\omega.$$

При $\varepsilon^{\frac12}<r<2\varepsilon^{\frac12}$ *(или что то же самое* $\varepsilon^{-\frac12}<\rho<2\varepsilon^{-\frac12}$*) справедливо дифференцируемое равенство*

$$\widehat{u}^{(i)}_{\varepsilon,N}(x)-\widehat{v}^{(i)}_{\varepsilon,N}(\xi)=O\left(r^{N+1}+\varepsilon^Nr+\rho^{-N-1}+\varepsilon^N\rho^{-1}\right). \tag{6.47}$$

Обозначим

$$\widetilde{u}^{(i)}_{\varepsilon,N}(x)=\widetilde{\chi}(r\varepsilon^{-\frac12})\widehat{u}^{(i)}_{\varepsilon,N}(x)+(1-\widetilde{\chi}(r\varepsilon^{-\frac12}))\widehat{v}^{(i)}_{\varepsilon,N}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Аналогично лемме 5.3, но с использованием леммы 6.3 вместо леммы 5.2 доказывается справедливость следующего утверждения.

Лемма 6.4. *Функция* $\widetilde{u}^{(i)}_{\varepsilon,N}\in H^1(\Pi_\varepsilon)$ *является решение краевой задачи*

$$\begin{aligned}
&-\Delta\widetilde{u}^{(i)}_{\varepsilon,N}=F^{(i)}_{\varepsilon,N}, && x\in\Pi_\varepsilon, && \widetilde{u}^{(i)}_{\varepsilon,N}=0, && x\in\partial\Pi\setminus\overline{\Sigma}_a,\\
&\frac{\partial\widetilde{u}^{(i)}_{\varepsilon,N}}{\partial\nu}=\widehat{\lambda}^{(i)}_{\varepsilon,N}\widetilde{u}^{(i)}_{\varepsilon,N}+g^{(i)}_{\varepsilon,N}, && x\in\Sigma_a, && \widetilde{u}^{(i)}_{\varepsilon,N}=0, && x\in\partial\omega_\varepsilon,
\end{aligned} \tag{6.48}$$

где

$$\|g^{(i)}_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\Sigma_a)}\leqslant C\varepsilon^{N+1}, \tag{6.49}$$

$$\|F^{(i)}_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\Pi_\varepsilon)}\leqslant C\varepsilon^{\frac{2N+n-2}{4}}, \tag{6.50}$$

$$\operatorname{supp}F^{(i)}_{\varepsilon,N}\subset\overline{B}_{2\varepsilon^{\frac12}}\backslash B_{\varepsilon^{\frac12}}. \tag{6.51}$$

Умножая уравнение (6.48) на собственную функцию $\psi^{(j)}_\varepsilon$ и интегрируя по частям на Π_ε, в силу краевых задач (6.48), (2.2) получаем

$$(\lambda^{(j)}_\varepsilon-\widehat{\lambda}^{(i)}_{\varepsilon,N})\int\limits_{\Sigma_a}\widetilde{u}^{(i)}_{\varepsilon,N}\psi^{(j)}_\varepsilon dx'=\int\limits_{\Pi_\varepsilon}F^{(i)}_{\varepsilon,N}\psi^{(j)}_\varepsilon dx+\int\limits_{\Sigma_a}g^{(i)}_{\varepsilon,N}\psi^{(j)}_\varepsilon dx'. \tag{6.52}$$

Аналогично (5.49) и (5.50) получаем, что

$$\int\limits_{\Sigma_a}g^{(i)}_{\varepsilon,N}\psi^{(j)}_\varepsilon dx'=O\left(\varepsilon^{N+1}\right),\qquad \int\limits_{\Pi_\varepsilon}F^{(i)}_{\varepsilon,N}\psi^{(j)}_\varepsilon dx=O\left(\varepsilon^{\frac{2N+n-2}{4}}\right). \tag{6.53}$$

Из теоремы 2.1 следует, что из любой последовательности $\varepsilon_k \to 0$ можно выделить подпоследовательность ε_{k_m} такую, что на ней имеют место сходимости

$$\psi_\varepsilon^{(i)} \to \alpha_1^{(i)}\psi_0^{(1)} + \alpha_2^{(i)}\psi_0^{(2)},$$
$$\left(\alpha_1^{(i)}\right)^2 + \left(\alpha_2^{(i)}\right)^2 = 1,$$
$$\alpha_1^{(1)}\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(1)}\alpha_2^{(2)} = 0.$$

Допустим $\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)} \neq 0$. Тогда и $\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)} \neq 0$, а из (6.52), (6.53), (6.46) вытекает, что

$$\lambda_\varepsilon^{(1)} - \widehat{\lambda}_{\varepsilon,N}^{(1)} = O\left(\varepsilon^{\frac{2N+n-2}{4}}\right), \qquad \lambda_\varepsilon^{(1)} - \widehat{\lambda}_{\varepsilon,N}^{(2)} = O\left(\varepsilon^{\frac{2N+n-2}{4}}\right), \quad \forall N.$$

Что невозможно, так как $|\widehat{\lambda}_{\varepsilon,N}^{(1)} - \widehat{\lambda}_{\varepsilon,N}^{(2)}| \geqslant c\varepsilon^2$, где $c > 0$, в силу (2.16), (2.17) и (2.18). Следовательно, $\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)} = \alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)} = 0$. Отсюда в силу произвола выбора исходной последовательности ε_k следует, что

$$\|\psi_\varepsilon^{(i)} - \psi_0^{(i)}\|_{L_2(\Sigma_a)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{6.54}$$

И наконец, из (6.52) при $j = i$, (6.53) и (6.54) вытекает, что

$$\lambda_\varepsilon^{(i)} - \widehat{\lambda}_{\varepsilon,N}^{(i)} = O\left(\varepsilon^{\frac{2N+n-2}{4}}\right).$$

Отсюда в силу произвола выбора N следует справедливость разложений (2.16), (2.17). Теорема 2.3 доказана полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А. *О влиянии закрепления на собственные частоты замкнутых объемов* // ДАН СССР. 1948. Т. 63. № 6. С. 631–634.
2. Днестровский Ю.Н. *Об изменении собственных чисел при изменении границы областей* // Вестник Моск. ун-та. Сер. I. Математика, механика. 1964. № 9. С. 61–74.
3. Sh. Ozawa *Singular Hadamard's variation of domains and eigenvalues of Laplacian* // Proc. Jap. Acad. 1980. V. A 56. P. 351–357.
4. C.A. Swanson *Asymptotic variontional formulae for eigenvalues* // Canad. Math. Bull. 1963. V. 6. № 1. P. 15–25.
5. Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А. *Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач в областях с малыми отверстиями* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48. № 2. С. 347–371.
6. Ильин А.М. *Исследование асимптотики решения эллиптической краевой задачи в области с малым отверстием* // Труды семинара им. И.Г.Петровского. 1981. Т. 6. С. 57–82.
7. Камоцкий И.В., Назаров С.А. *Спектральные задачи в сингулярно возмущенных областях и самосопряженные расширения дифференциальных операторов* // Тр. Санкт-петербургск. матем. об-ва. 1998. Т. 6. С. 151–212.
8. Давлетов Д.Б. *Сингулярно возмущенная краевая задача Дирихле для стационарной системы линейной теории упругости* // Изв. вузов. Матем. 2008. Т. 12. С. 7–16.
9. Давлетов Д.Б. *Асимптотика собственных значений краевой задачи Дирихле оператора Ламэ в трехмерной области с малой полостью* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 10. С. 1847–1858.
10. Давлетов Д.Б. *Асимптотика собственного значения двумерной краевой задачи Дирихле для оператора Ламе в области с малым отверстием* // Матем. заметки. 2013. Т. 93. № 4. С. 537–548.
11. Назаров С.А. *Асимптотические разложения собственных чисел задачи Стеклова в сингулярно возмущенных областях* // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26. № 2. С. 119–184.
12. Гадыльшин Р.Р., Кожевников Д.В. *Об усреднении кравевой задачи в области, перфорированной вдоль части границы* // Проблемы математического анализа. 2014. Вып. 75. С. 41–59.

13. Чечкин Г.А. *Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий* // Матем. сб. 1993. Т. 84. № 6. С. 99–150.
14. Чечкин Г.А., Гадыльшин Р.Р. *Краевая задача для лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерной области* // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40. № 2. С. 271–287.
15. A.G. Belyaev, G.A. Chechkin, R.R. Gadyl'shin *Effective membrane permeability: estimates and low concentration asymptotics* // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2000. V. 60. № 1. P. 84–108.
16. Назаров С.А. *Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра* // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51. № 5. С. 1086–1101.
17. Борисов Д.И. *О PT-симметричном волноводе с парой малых отверстий* // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 2. С. 22–37.
18. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* М.: Наука. 1989.
19. Гадыльшин Р.Р. *Метод согласования асимптотических разложений в сингулярно возмущенной краевой задачи для оператора Лапласа* // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 5. С. 3–32.
20. Бикметов А.Р., Гадыльшин Р.Р. *Возмущение эллиптического оператора узким потенциалом в n-мерной области* // Уфимский матем. журнал. 2012. Т. 4, № 2. С. 28–64.
21. Полиа Г., Сеге Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике.* М.: Физматгиз. 1962.
22. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных* // М.:Наука. 1976.
23. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов* // М.: Мир. 1972.

Давлетов Дмитрий Борисович,
Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: davletovdb@mail.ru

Кожевников Денис Владимирович,
Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: kozhevnikovbspu@gmail.com