ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 4 (2016). С. 43-52.

УДК 512.5

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ДАРБУ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ

М.Ш. БАДАХОВ, А.Б. ШАБАТ

Аннотация. Преобразования Дарбу играют, как известно, важную роль в приложениях МОЗР. В данной работе излагается теория таких преобразований для операторов Шредингера с потенциалами, имеющими компактный носитель, но не обязательно гладкими. Исследован новый класс преобразований, связанный с нулями коэффициента отражения, расположенными в сопряжённых точках комплексной плоскости.

Ключевые слова: обратная задача рассеяния, Оператор Шредингера, финитные потенциалы, преобразования Дарбу.

Mathematics Subject Classification: 34L25, 35J10, 37K15

1. Финитные потенциалы

Проблема расширения семейства точно решаемых потенциалов в обратной задаче рассеяния для уравнения Шредингера постоянно привлекает внимание специалистов. Один из классов потенциалов, для которых обратная задача может быть решена полностью, образует потенциалы Баргмана (безотражательные потенциалы, [6]). Однако при решении обратной задачи в классе потенциалов Баргмана отсутствует характерная особенность спектральных данных, связанная с краем непрерывного спектра, что, в частности, не позволяет существенно расширить этот класс путём предельного перехода. Другой класс потенциалов, допускающий конструктивное решение, составляют дельтаобразные потенциалы [2], и мы рассматриваем здесь расширение этого класса при помощи специальных преобразований Дарбу, сохраняющих финитность носителей потенциалов.

Для решений уравнения Шредингера

$$L\psi = \lambda\psi, \quad L = q(x) - D_x^2, \tag{1}$$

преобразование Дарбу вводится следующей «хорошо известной» формулой:

$$\begin{pmatrix} \hat\psi \\ \hat\psi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & -1 \\ -f^2 + \lambda - \lambda_0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_x \end{pmatrix}, \quad f_x + f^2 = q(x) - \lambda_0,$$

из которой находим, что

$$\hat\psi = (f - D)\psi, \quad \hat L\hat\psi = \lambda\hat\psi, \quad \hat L = \hat q(x) - D^2, \quad \hat q(x) = q(x) - 2f_x,$$
$$(f + \frac{\hat\psi'}{\hat\psi})(f - \frac{\psi'}{\psi}) = \lambda - \lambda_0. \tag{2}$$

Выбор функции $f(x)$, удовлетворяющей уравнению Риккати, в этих формулах определяется в данной работе условием финитности носителей исходного и преобразованного

M.Sh. Badakhov, A.B. Shabat, Darboux transformations in the inverse scattering problem.

© Бадахов М.Ш., Шабат А.Б. 2016.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-11-20007).

Поступила 27 августа 2016 г.

потенциалов. В силу формул (2) это означает, что функция $f(x)$ является постоянной как при $x \sim -\infty$, так и при $x \sim +\infty$. Как правило, можно считать, что

$$\lambda_0 = -k_0^2 < 0, \quad f(x) = \frac{\psi_x}{\psi}(x, k_0) = \begin{cases} k_0, & x \sim -\infty \\ -k_0, & x \sim \infty \end{cases} . \tag{3}$$

Это соответствует выбору в качестве f, логарифмической производной от функции Йоста $\psi(x,k)$, которая определяется как решение интегрального уравнения:

$$\psi(x,k) = \phi(x,k)e^{kx}, \quad \phi(x,k) = 1 + \int_{-\infty}^{x} R(x-s,k)\phi(s,k)q(s)ds, \tag{4}$$

с ядром R, удовлетворяющим в правой полуплоскости K_+:

$$K_+ = \{k \in \mathbb{C},\ Re\, k \geq 0\}, \tag{5}$$

оценке

$$R(x',k) = \frac{1-e^{-2kx'}}{2k}\theta(x') \Rightarrow |R(x',k)| \leq \int_{-x'}^{0} |e^{2ks}|ds \leq x', \quad Re\, k \geq 0. \tag{6}$$

Левее носителя потенциала функция Йоста $\psi(x,k) = e^{kx}$, а правее

$$\psi(x,k) = a(k)e^{kx} + b(k)e^{-kx}, \quad x \sim +\infty. \tag{7}$$

Функции $a(k)$ и $b(k)$ имеют полюс первого порядка в точке $k = 0$, но их линейная комбинация $a(k) + b(k)$ регулярна в этой точке.

В интересующем нас случае функция q является линейной комбинацией δ-функций. Такие функции мы называем δ-образными. Выбрав $\phi \equiv 1$ в качестве нулевого приближения и применив метод итераций к скалярному интегральному уравнению (4), можно проверить, что для уравнения Шрёдингера с δ-образным потенциалом вида

$$q(x) = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \delta(x - x_j) \tag{8}$$

метод итераций даёт точное решение уже на N-ом шагу. Непрерывное при всех x построенное решение уравнения Шредингера (1) с потенциалом (8) удовлетворяет в узлах x_j, $j \in [N]$, условиям согласования левых и правых производных.

Случай (3) соответствует специальному выбору параметра $k_0 > 0$, отвечающему отрицательному собственному значению $\lambda = \lambda_0 < 0$ исходного оператора $L = q(x) - D^2$, причём

$$a(k_0) = 0, \quad \psi(x,k_0) \to 0, \quad x \to \pm\infty. \tag{9}$$

Если собственное значение $\lambda_0 < 0$ минимально, то функция Йоста (9) нулей не имеет и у её логарифмической производной отсутствуют полюса. Используя (3), мы находим, что в этом случае для преобразованной функции Йоста

$$\hat{\psi}(x,k) = \frac{f\psi - \psi_x}{k_0 - k} = \hat{a}(k)e^{kx} + \hat{b}(k)e^{-kx},\ x \sim \infty;\ \hat{a}(k) = a(k)\frac{k+k_0}{k-k_0},\ \hat{b}(k) = -b(k). \tag{10}$$

Отметим, что в случае вещественных потенциалов $q(x)$, $x \in \mathbb{R}$ на вертикальной оси $k = i\xi, \xi \in \mathbb{R}$ должны выполняться следующие условия «вещественности»:

$$a(-k) = \bar{a}(k), \quad b(-k) = \bar{b}(k), \quad |a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2 > 0, \quad k = i\xi,\ \xi \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Для произвольных финитных потенциалов уравнение, связывающее целые функции экспоненциального типа $2ka(k)$ и $2kb(k)$, записывается в виде

$$a(k)a(-k) - b(k)b(-k) = 1. \tag{12}$$

Для чётных потенциалов уравнение упрощается и его можно переписать следующим образом:

$$q(-x) = q(x) \Rightarrow b(-k) = -b(k), \quad a(k)a(-k) = (1 - b(k))(1 + b(k)). \tag{13}$$

При использовании нулей второго коэффициента $b(k_1) = 0$ формула (2) даёт:

$$f(x) = \frac{\psi_x}{\psi}(x, k_1) = \begin{cases} k_1, & x \sim -\infty \\ k_1, & x \sim \infty \end{cases} \Rightarrow \tilde{a}(k) = a(k), \quad \tilde{b}(k) = b(k)\frac{k_1 + k}{k_1 - k}.$$

Однако корни функции $b(k)$ являются комплексными числами и нужно делать дополнительное преобразование, чтобы восстановить вещественность потенциала. В результате такого двойного преобразования мы получаем

$$\hat{a}(k) = a(k), \quad \hat{b}(k) = b(k)\frac{k_1 + k}{k_1 - k} \times \frac{k_2 + k}{k_2 - k}, \quad k_2 = \bar{k}_1. \tag{14}$$

Особый интерес представляет случай, когда все нули $b(k)$ располагаются на вертикальной оси. В этом случае $k_2 = -k_1$ и формула (14) приводит к неожиданному результату:

$$b(k) = 0, \quad k = k_{1,2} = \pm i\xi, \ \xi \in \mathbb{R} \Rightarrow \hat{a} = a, \quad \hat{b} = b. \tag{15}$$

Напомним, в случае «гладких» потенциалов обратная задача рассеяния сводится обычно к паре интегральных уравнений

$$\psi(x, k) = e^{kx} + \int_{-\infty}^{x} K(x, y)e^{ky}dy, \quad Re\, k \geq 0, \tag{16}$$

$$K(x, y) + F(x + y) + \int_{-\infty}^{x} K(x, s)F(s + y)ds = 0, \ y < x. \tag{17}$$

Первое из них определяет, используя преобразование Фурье функции Йоста (4), ядро $K(x, y)$, $y < x$ как функцию от y при фиксированном x. Второе из этих соотношений «уравнение Гельфанда-Левитана-Марченко» используется для восстановления функции $K(x, y)$, $y < x$ как решения интегрального уравнения Винера-Хопфа на полуоси $-\infty < y \leq x$ с заданным ядром $F = F(x + y)$, стремящимся к нулю при $X = x + y \to -\infty$. Преобразование Фурье функции $F(X)$ выражается через значения b/a на вертикальной оси $k = i\xi$. На рис. 1 показан график модуля такой функции, когда все нули целой функции $2kb(k)$ расположены на мнимой оси. Для построения примеров неоднозначной разрешимости уравнения (17), как будет показано ниже, можно использовать пару сопряжённых друг другу нулей (15) целой функции $2kb(k)$, расположенных на мнимой оси. Отметив, что пара сопряжённых друг другу нулей $k = i\xi$ отвечает одному и тому же значению $\lambda = -k^2$, мы показываем (см. Пример 2 в конце работы), что в этом случае преобразование Дарбу приводит к новому потенциалу с носителем на полуоси $[x_1, \infty)$, но с той же функцией $F(x)$.

2. Нули коэффициента отражения

После преобразования Дарбу (10) коэффициент $\hat{a}(k)$ не имеет нуля в точке $k = k_0$ и можно таким образом избавиться в обратной задаче от дискретного спектра оператора Шредингера (1). Напомним, что число этих собственных значений совпадает с числом перемен знака графика предельной $k \to 0$ функции Йоста $\psi(x, 0)$. В случае (8) этот график представляет собой ломаную (см. рис. 2) с узлами в точках узлах x_j, играющую определяющую роль в спектральных свойствах дельтаобразных потенциалов [1].

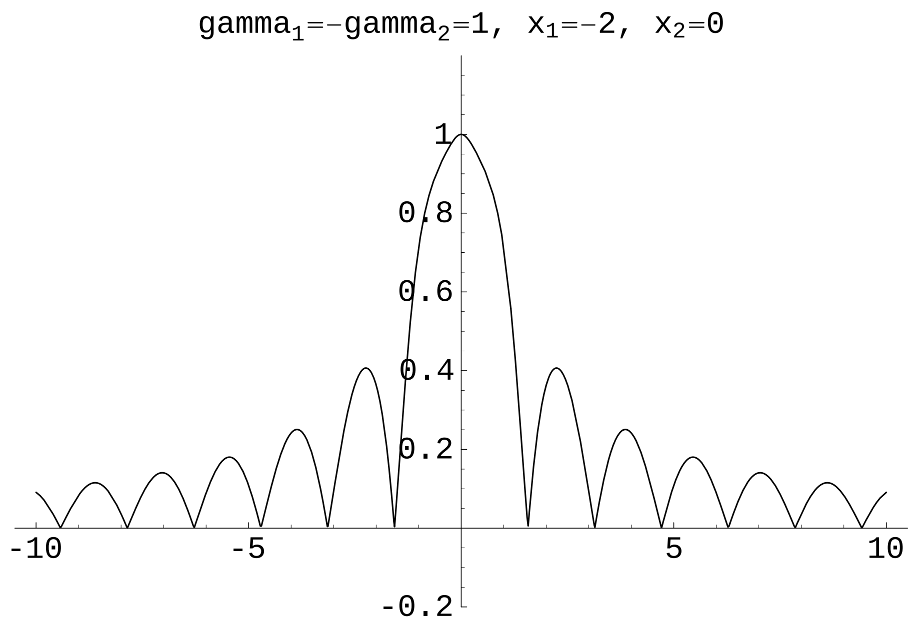

Рис. 1. График $|\frac{b}{a}|(k)$ на мнимой оси.

Напомним теперь для полноты картины известные формулы, связанные с кусочно-постоянным потенциалом q_ε в виде прямоугольной ямы, который в пределе $\varepsilon \to 0$ переходит в дельта-функцию с коэффициентом γ:

$$q(x) = q_\varepsilon(x) = \frac{\gamma}{\varepsilon} = -h, \quad x \in [-\varepsilon, 0] \stackrel{def}{=} I_\varepsilon.$$

Функция Йоста $\psi_\varepsilon(x,k)$ и её производная определяются внутри I_ε следующей формулой:

$$e^{k\varepsilon}\psi(x,k) = \operatorname{ch} z(x+\varepsilon) + \frac{k}{z}\operatorname{sh} z(x+\varepsilon), \quad -\varepsilon \le x \le 0,$$
$$e^{k\varepsilon}\psi_x(x,k) = k\operatorname{ch} z(x+\varepsilon) + z\operatorname{sh} z(x+\varepsilon), \quad z^2 = k^2 - h.$$

В частности при $k=0$ $(z = i\sqrt{h})$ мы имеем

$$\psi\Big|_{k=0} = \begin{cases} \cos(x+\varepsilon)\sqrt{h}, & -\varepsilon \le x \le 0, \\ \cos(\varepsilon\sqrt{h}) - x\sqrt{h}\sin(\varepsilon\sqrt{h}), & x > 0, \end{cases}$$

что, как уже отмечалось, позволяет определить, число собственных значений в зависимости от величины ε. С другой стороны, эти собственные значения определяются нулями в правой полуплоскости (5) целой функции $2ka(k)$, где:

$$a(k)e^{k\varepsilon} = \operatorname{ch} z\varepsilon + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{z} + \frac{z}{k}\right)\operatorname{sh}(z\varepsilon), \quad b(k)e^{k\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{z} - \frac{z}{k}\right)\operatorname{sh}(z\varepsilon).$$

В качестве приближенного решения ϕ интегрального уравнения (4) можно использовать первую итерацию

$$\phi(x,k) \approx 1 + \int_{-\infty}^{x} R(x-x',k)q(x')dx' = \begin{cases} \frac{\gamma_1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{x} R(x-x',k)dx', & x \in [-\varepsilon, 0] \\ \gamma_1 R(x+\varepsilon,k), & x \ge -\varepsilon \end{cases}.$$

Верхняя строка здесь соответствует «яме», а нижняя дельтаобразному потенциалу $q(x)=\gamma_1\delta(x+\varepsilon)$, для которого первое приближение даёт точное решение интегрального уравнения.

В качестве первого примера применим преобразование (2) к дельтаобразному потенциалу (8) с двумя узлами:

$$q(x)=\gamma_1\delta(x-x_1)+\gamma_2\delta(x-x_2),\quad x_{21}=x_2-x_1>0. \tag{18}$$

Полагая для упрощения формул $x_2=0$, находим, что

$$\psi(x,k)=\begin{cases}(1+\frac{\gamma_1}{2k})e^{kx}-\frac{\gamma_1}{2k}e^{2kx_1}e^{-kx}, & x_1\le x\le 0,\\ a(k)e^{kx}+b(k)e^{-kx}, & x\ge 0\end{cases} \tag{19}$$

где

$$a(k)=1+\frac{\gamma_1}{2k}+\frac{\gamma_2}{2k}+\frac{\gamma_1\gamma_2}{4k^2}[1-e^{2kx_1}],\quad -b(k)=e^{2kx_1}\frac{\gamma_1}{2k}+\frac{\gamma_2}{2k}+\frac{\gamma_1}{2k}\frac{\gamma_2}{2k}(1-e^{2kx_1}). \tag{20}$$

Таким образом,

$$D\log\psi(x,k)=\frac{\psi'(x,k)}{\psi(x,k)}=k\frac{(1+\frac{\gamma_1}{2k})e^{2kx}+\frac{\gamma_1}{2k}e^{2kx_1}}{(1+\frac{\gamma_1}{2k})e^{2kx}-\frac{\gamma_1}{2k}e^{2kx_1}},\quad x_1<x<0, \tag{21}$$

и скачки этой кусочно-непрерывной функции в узлах дельта-функций равны, соответственно, γ_1 и γ_2:

$$\frac{\psi'(x,k)}{\psi(x,k)}\Big|_{x=x_1-0}^{x=x_1+0}=\gamma_1,\quad k\frac{a(k)-b(k)}{a(k)+b(k)}=\gamma_2+D\log\psi(-0,k).$$

Преобразованная функция $\hat\psi$ из формулы (2) остаётся при этом непрерывной и удовлетворяет уравнению Шредингера (1) с потенциалом

$$\hat q(x)=-\gamma_1\delta(x-x_1)-\gamma_2\delta(x)-\left(k_0^2-\left(\frac{e^{2k_0x}(2k_0+\gamma_1)+e^{2k_0x_1}\gamma_1}{e^{2k_0x}(2k_0+\gamma_1)-e^{2k_0x_1}\gamma_1}\right)^2\right),\ x\in[x_1,0], \tag{22}$$

при любом выборе достаточно большого значения $k_0>0$. Однако, для того чтобы преобразованный потенциал остался финитным, нужно выбрать в качестве k_0 максимальный корень $a(k)$ в правой полуплоскости (5). При $N=2$ длину интервала $[x_1,0]$ можно фиксировать за счёт масштабирования γ_j и полагая, например, $\gamma_1=\gamma_2=-1,\quad x_1=-1$, мы находим единственный вещественный корень $k_0\approx 0.63923$ у функции $a(k)$ в полуплоскости (5). Потенциал (22) является при таком выборе k_0 финитным, но все коэффициенты γ_j при дельта функциях изменяют знак.

Замечание 1. Включение в теорию преобразований Дарбу дельтаобразных потенциалов существенно расширяет возможности этой теории и приводит к интересной задаче о решениях уравнений

$$f_j'+f_{j+1}'=f_j^2-f_{j+1}^2+\lambda_j-\lambda_{j+1},\quad j\in\mathbb{Z} \tag{23}$$

так называемой одевающей цепочки, допускающих заданные разрывы γ_j первого рода в фиксированных заранее точках x_j. Рассматриваемые далее решения этих уравнений описывают композицию преобразований Дарбу (2) и соответствуют перемножению матриц (24) (см. ниже). Напомним [5], что гладкие, периодические по дискретной переменной j, решения одевающей цепочки описывают конечнозонные потенциалы, включая естественно и потенциалы Баргмана.

Как уже говорилось, при использовании нулей второго коэффициента $b(k)$, для того чтобы потенциал оставался вещественным, используются пары комплексно сопряжённых нулей и двойное преобразование Дарбу. Рассмотрим суперпозицию преобразований Дарбу вида (2) и соответствующее произведение матриц:

$$F_j := \begin{pmatrix} f_j\ , & -1 \\ \lambda - \lambda_j - f_j^2, & f_j \end{pmatrix}, \quad \det F_j = \lambda - \lambda_j. \tag{24}$$

В случае $F_2F_1 = \Phi$ находим

$$\Phi = \begin{pmatrix} f_1 g + \lambda_1 - \lambda & -g \\ \lambda g - \lambda_1 f_2 - \lambda_2 f_1 - g f_1 f_2 & f_2 g + \lambda_2 - \lambda \end{pmatrix}, \quad g = f_1 + f_2.$$

Легко видеть, что элементы произвольного произведения $\Phi = (\Phi_{ij})$ матриц (2) удовлетворяют в общем случае следующим уравнениям:

$$\frac{d}{dx}\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \hat{q}(x) - \lambda & 0 \end{pmatrix} \Phi - \Phi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(x) - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi = [\Phi_{ij}] \tag{25}$$

$$\begin{cases} \Phi_{11}' = \Phi_{21} - (q(x) - \lambda)\Phi_{12} \\ \Phi_{22}' = (\hat{q}(x) - \lambda)\Phi_{12} - \Phi_{21} \end{cases}, \qquad \begin{cases} \Phi_{12}' = \Phi_{22} - \Phi_{11} \\ \Phi_{21}' = \hat{q}(x)\Phi_{11} - q(x)\Phi_{22} + \lambda(\Phi_{22} - \Phi_{11}) \end{cases}. \tag{26}$$

В рассматриваемом случае двойного преобразования Дарбу мы имеем в силу этих уравнений

$$\Phi_{12} = -g(x), \quad \Phi_{11} = h(x) - \lambda, \quad \Phi_{22} = -g' + \Phi_{11}, \quad \Phi_{21} = h' + g(\lambda - q), \quad \hat{q} = q - 2g', \tag{27}$$

и поэтому

$$\Phi_{11}\Phi_{22} = \lambda^2 - (2h - g')\lambda - g'h + h^2, \quad \Phi_{12}\Phi_{21} = g^2(q - \lambda) - gh'.$$

Так как определитель

$$\det \Phi = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + h^2 + gh' - g'h - g^2 q = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

не зависит от x мы получаем окончательно

$$\begin{gathered} 2h = g^2 + g' + \lambda_1 + \lambda_2, \quad \left(\frac{h}{g}\right)^2 + \left(\frac{h}{g}\right)' = q(x) + \frac{\lambda_1\lambda_2}{g^2}, \quad f_1 = \frac{h}{g} - \frac{\lambda_1}{g} \\ g = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{f_1 - f}, \quad \frac{h}{g} = \frac{f_1\lambda_2 - \lambda_1 f}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad f' + f^2 = q(x) - \lambda_2. \end{gathered} \tag{28}$$

Нетрудно проверить, что при $\lambda_2 \neq \lambda_1$ указанные выше формулы для g и g/h и два уравнения Риккати

$$f' + f^2 = q(x) - \lambda_2, \quad f_1' + f_1^2 = q(x) - \lambda_1 \tag{29}$$

для исходного уравнения Шредингера $L\psi = \lambda\psi$ гарантируют выполнение двух уравнений (28) и наоборот. На языке операторов преобразования из работы [5] это соответствует (см. (1), (2)) формулам

$$\begin{gathered} \hat{L} \circ A = A \circ L, \quad A = D^2 + a_1 D + a_2, \quad A = (D - f_2)(D - f_1), \\ (\hat{q} - D^2)A = A(q - D^2), \quad A = D^2 - gD + h - q, \quad A\psi = -g\psi' + (h - \lambda)\psi. \end{gathered} \tag{30}$$

Возвращаясь к потенциалу с двумя узлами и формулам (19), (20), приведём пример двойного преобразования Дарбу в случае двух вещественных собственных значений.

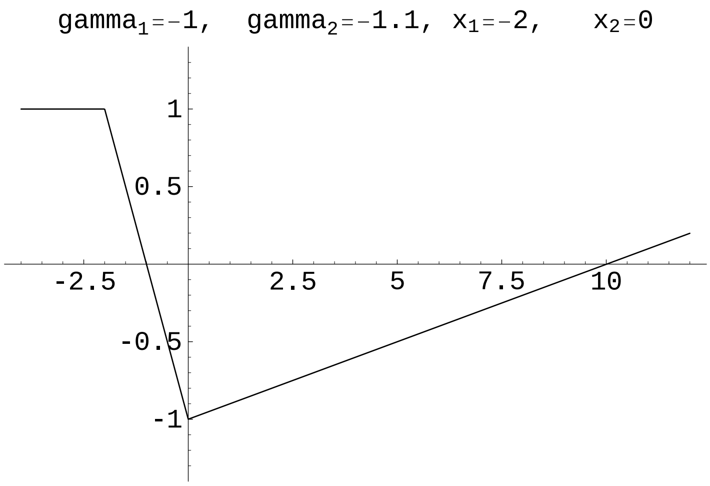

Рис. 2. График $\psi(x)\Big|_{k=0}$.

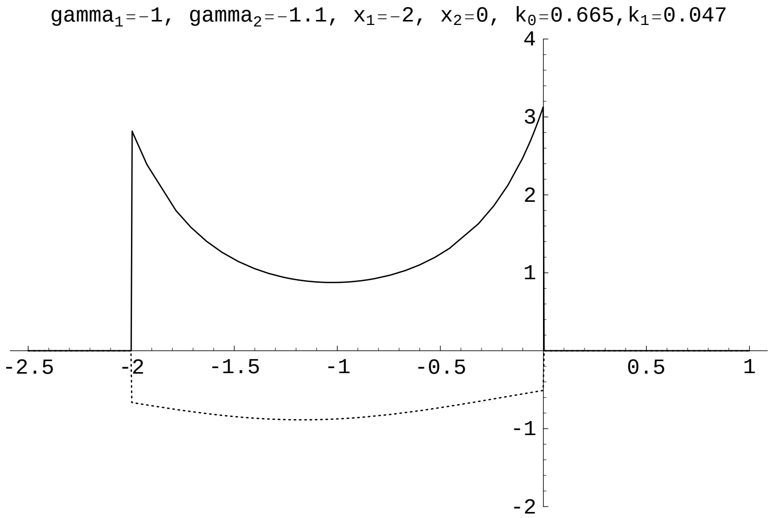

Рис. 3. Графики $\hat{q}(x)+q(x)$(заштрихованный) и $\hat{\hat{q}}(x)-q(x)$

Пример 1. При $\gamma_1 = -1$, $\gamma_2 = -1.1$, $x_1 = -2$, график $\psi(x,0)$, имеет два нуля. Два вещественных нуля функции $a(k)$ находятся численно:

$$a(k) = 0, \quad k_1 \approx 0.665, \quad k_2 \approx 0.047.$$

На рис. 3 представлен график преобразованного потенциала после однократного и двукратного Дарбу.

Покажем, что в случае вырождения ($\lambda_2 = \lambda_1$) двойное Дарбу нарушает финитность потенциала.

Лемма 1. Пусть $\lambda_2 = \lambda_1$, $\Phi_{12} = -g(x)$ и $\Phi_{11} = h(x) - \lambda$. Тогда уравнения (26), (27) эквивалентны при $q(x) = f_1' + f_1^2 + \lambda_1$ следующим соотношениям:

$$g' + g^2 = 2gf_1, \quad h = f_1 g + \lambda_1, \quad \hat{q} = q - 2g'. \tag{31}$$

◀ Действительно, из (28) следует, что

$$h = f_1 g + \lambda_1, \quad g' + g^2 + \lambda_2 = 2f_1 g + \lambda_1, \quad f_1' + f_1^2 + \lambda_1 = q.$$

Полагая здесь $\lambda_2 = \lambda_1$, получаем утверждение леммы. ▶

Заметим в дополнение к Лемме 1, что вспомогательное решение f уравнения Риккати (29) находится при $\lambda_2=\lambda_1$ методом вариации постоянных:

$$f_1=\frac{\varphi_1'}{\varphi_1},\quad f=f_1+u\Rightarrow\left(\frac{1}{u}\right)'=2f_1\frac{1}{u}+1,\quad u=\frac{z'}{z},\quad z'=\frac{1}{\varphi_1^2},$$
$$\varphi=\varphi_1 z\Rightarrow\varphi'=\varphi_1'z+\frac{1}{\varphi_1},\quad\varphi''=\varphi_1''z=(q-\lambda_1)\varphi. \tag{32}$$

Здесь φ_1 произвольное решение исходного уравнения $\varphi_1''=(q-\lambda_1)\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_1 z$, найденное нами второе решение этого же уравнения. В результате однократного преобразования (2) с $f=f_1$ мы находим:

$$(D-f_1)\varphi_1=0,\quad(D-f_1)\varphi=\frac{1}{\varphi_1},\quad\left(\frac{1}{\varphi_1}\right)''=(q_1-\lambda_1)\frac{1}{\varphi_1},\quad q_1=q-2f_1'.$$

Таким образом, $v_1=-f_1$ является решением нового уравнения Риккати $v'+v^2=q_1-\lambda$, и аналогично (32) мы находим дополнительное решение v в виде суммы:

$$v=-f_1+u,\quad u'+u^2=2uf_1\Rightarrow v+f_1=\frac{\varphi_1^2}{z},\quad z'=\varphi_1^2.$$

Это, естественно, приводит к формулам из Леммы 1.

Подводя итоги, сформулируем следующее утверждение:

Для вещественных, финитных потенциалов композиция преобразований Дарбу, соответствующих матрицам (24)*, позволяет избавиться от нулей целой функции* $2ka(k)$ *расположенных в правой полуплоскости* (5)*, и конечного числа нулей целой функции* $2kb(k)$*, не лежащих на вертикальной оси. Во втором случае применяется двойное Дарбу, использующее комплексно сопряжённые решения уравнений Риккати* (29) *и формулы* (28)*.*

Замечание 2. В условиях Леммы 1 функции $f_j,\ j=1,\ 2$ из формул (24) удовлетворяют соотношениям

$$(f_1+f_2)'=f_1^2-f_2^2,\quad f_2=\frac{z'}{z}-\frac{\varphi_1'}{\varphi_1},\quad z'=\varphi_1^2,\quad f_1=\frac{\varphi_1'}{\varphi_1}.$$

и уравнения (31) позволяют переписать одевающую цепочку из Замечания 1 в терминах z_j

$$g_j=\frac{z_j'}{z_j},\quad z_j'=\varphi_j^2,\quad q_{j+1}=q_j-2g_j'.$$

Роль уравнения Риккати играет при этом известное в спектральной теории уравнение третьего порядка с "производной Шварца"

$$q(x)+k^2=\frac{1}{2}\frac{z_{xxx}}{z_x}-\frac{1}{4}\left(\frac{z_{xx}}{z_x}\right)^2,\quad z_x=\varphi^2. \tag{33}$$

2.1. Нули на мнимой оси. Выясним сначала вопрос о характере поведения целой функции $2kb(k)$ на мнимой оси $k=i\xi$ в зависимости от параметров дельтаобразного потенциала (8). Предполагая $x_N=0$ и фиксируя равным ε расстояние между соседними узлами, введем для краткости вспомогательные обозначения

$$\hat\gamma_j=\frac{\gamma_j}{2k},\quad e_j=e^{2kx_j},\quad\bar e_j=e^{-2kx_j},\quad e=e_j\bar e_{j+1}=e^{-2k\varepsilon}. \tag{34}$$

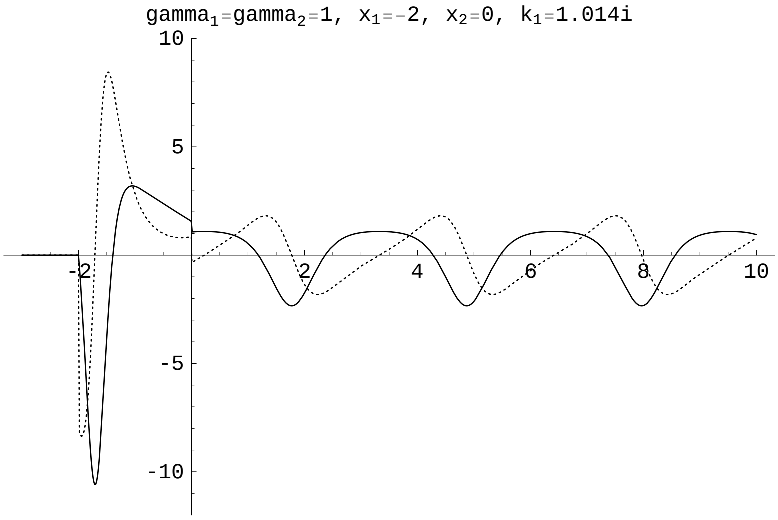

Рис. 4. Графики $Re\ \hat{q}(x)$ и $Im\ \hat{q}(x)$ (заштрихованный) при мнимом нуле $b(k)$

Перемножив матрицы рассеяния дельтаобразных потенциалов (см. [2]), мы находим, например при $N = 3$, что:

$$-b(k) = \hat{\gamma}_3(1+\hat{\gamma}_1)(1+\hat{\gamma}_2) + e^2\hat{\gamma}_1(1-\hat{\gamma}_2)(1-\hat{\gamma}_3) + e\hat{\gamma}_2(1+\hat{\gamma}_1)(1-\hat{\gamma}_3) - e\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2\hat{\gamma}_3,$$
$$e_1 b(-k) = \hat{\gamma}_1(1+\hat{\gamma}_2)(1+\hat{\gamma}_3) + e^2\hat{\gamma}_3(1-\hat{\gamma}_1)(1-\hat{\gamma}_2) + e\hat{\gamma}_2(1-\hat{\gamma}_1)(1+\hat{\gamma}_3) - e\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2\hat{\gamma}_3.$$

Так как $\bar{b}(k) = b(-k)$ на мнимой оси, то условие $\gamma_1 = \gamma_3$ гарантирует, что $b(i\xi) = 0 \Leftrightarrow \bar{b}(i\xi) = 0$, и что $e_1 b(-k) = -\bar{e}_N b(k)$. Очевидно (см. (13)), что последнее условие выполняется для всех *чётных с точностью до сдвига* дельтаобразных потенциалов (8), и что для таких потенциалов задача о нулях целой функции $2kb(k)$ на мнимой оси сводится к задаче о нулях тригонометрических квазимногочленов с вещественными коэффициентами. Задача о структуре множества нулей таких квазимногочленов исследовалась численно в работе [3]. В приведённом ниже примере эти нули образуют целочисленную решётку с точностью до выбора ε в формуле (34).

Пример 2. При $N = 2$, корни $b(k)$ определяются, в силу (20), следующим простым уравнением

$$e^{2kx_1} = \frac{1+2k/\gamma_1}{1-2k/\gamma_2} \Rightarrow e^{2kx_1} = 1, \quad \text{если } \gamma_1+\gamma_2 = 0. \tag{35}$$

При $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$ корни уравнения $e^{2kx_1} = 1$ образуют регулярную решётку на мнимой оси и

$$\frac{b(k)}{a(k)} = (1+\beta_1 k)\frac{\exp 2kx_1 - 1}{\beta_1^2 k^2 + \exp 2kx_1 - 1}, \quad \beta_1 = \frac{2}{\gamma_1}, \quad k = i\xi.$$

Преобразование Фурье этой функции на мнимой оси и соответствующее решение интегрального уравнения (17) (ср. [4]) приводит по-видимому к дельтаобразному потенциалу с двумя узлами в точках x_1 и $x_2 = 0$.

Как уже отмечалось в конце §1, преобразования Дарбу, связанные с парой (15), расположенных на мнимой оси нулей целой функции $2kb(k)$, выводит за рамки класса вещественных финитных потенциалов и приводит к потенциалам с носителем на полуоси, аналогичным, показанному на рис. 4. Этот график описывает применение Леммы 1 в рассматриваемом случае (35). Вид преобразованного потенциала $\hat{q} = q - 2g'$ находится при помощи функции $g(x)$, которая определяется как решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка (см. Лемму 1):

$$g' + g^2 = 2f_1 g, \quad f_1' + f_1^2 + \lambda_1 = q, \quad g(x_1) = 2k_1,\ f_1(x_1) = k_1, \quad \lambda_1 = -k_1^2.$$

Для уточнения деталей привлекается функция

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} e^{kx} + \frac{\gamma_1}{k} sh(kx), \ x_1 \le x \le 0 \\ a(k)e^{kx}, \quad x > 0, \quad k \equiv k_1, \ b(k_1) = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\hat{q}(x) = 0$ при $x < x_1$ и что при $x > x_1$ всё можно выразить в терминах этой функции φ_1 (см. Замечание 2).

2.2. Благодарности. За интерес к работе и полезные замечания благодарим В.Э. Адлера и Р.Ч. Кулаева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шабат А.Б. *Обратная спектральная задача для дельтаобразных потенциалов* // Письма ЖЭТФ. 2015. Т. 102, № 9. С. 705–708.
2. Шабат А.Б. *Теория рассеяния для дельтаобразных потенциалов* // Теор. Мат. Физ. 2015. **183**(1). С. 105–119.
3. Бадахов М.Ш., Веремеенко О.Ю., Шабат А.Б. *Об асимптотике обобщенных собственных значений оператора Шредингера* // Владикавк. мат. журн. 2014. **16**(4). С. 34–40.
4. Evg. Korotyaev *Inverse scattering on the real line* // Inverse Problems. 2005. **21**. С. 325–341.
5. Веселов А.П., Шабат А.Б. *Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шредингера* // Функц. Анализ и его прилож. 1993. **27**(2). С. 1–21.
6. V.Bargman *Remarks on the determination of a central field of force from the elastic scattering phase shifts* // Phys. Rev. 75, № 2. 1949. P. 301–303.

Мухтар Шамильевич Бадахов,
КЧГУ им. У. Д. Алиева,
ул. Ленина, 23,
369200, г. Карачаевск, Россия
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: badahov92@mail.ru

Алексей Борисович Шабат,
ИТФ РАН им. Л. Д. Ландау,
просп. Академика Семенова, д. 1-А
142432, г. Черноголовка, Россия
КЧГУ им. У. Д. Алиева,
ул. Ленина, 23,
369200, г. Карачаевск, Россия
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: shabatab@mail.ru