ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 4 (2016). С. 3-23.

УДК 517.5

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.И. АБДУЛНАГИМОВ, А.С. КРИВОШЕЕВ

Аннотация. В работе рассматриваются ряды экспонент с комплексными показателями, вещественные и мнимые части которых являются целыми числами. Доказывается, что любая функция аналитическая в окрестности замыкания ограниченной выпуклой области комплексной плоскости раскладывается в ряд указанного вида, сходящийся внутри этой области абсолютно и равномерно на компактных подмножествах. Этот результат основан на построении регулярного подмножества с любой заданной угловой плотностью последовательности всех комплексных чисел, вещественные и мнимые части которых являются целыми числами.

Ключевые слова: аналитическая функция, ряд экспонент, регулярное множество, плотность последовательности.

Mathematics Subject Classification 30D10

1. Введение

Пусть $\Lambda_{\mathbb{Z}} = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – перенумерованная (каким-либо образом) в порядке не убывания модулей последовательность всех комплексных чисел с целочисленными координатами: $\lambda_k = m + il, m, l \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{m,l\in\mathbb{Z}} d_{m,l} e^{(m+il)z}. \tag{1.1}$$

Предположим, что он сходится в каждой точке некоторого открытого подмножества $E \subset \mathbb{C}$. Нетрудно заметить, что для последовательности $\Lambda_{\mathbb{Z}} = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ верны соотношения

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{|\lambda_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\sqrt{k}} = 0.$$

Тогда согласно результатам из работы [1] (теоремы 3.1 и 4.1) ряд (1.1) сходится в выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$, которая содержит выпуклую оболочку множества E. Область D определяется при помощи формулы Коши-Адамара для рядов экспонент (см. [1], теорема 4.1):

$$D = \{z \in \mathbb{C} : Re(z\xi) < h(\xi), |\xi| = 1\},$$

$$h(\xi) = \inf \varliminf_{j\to\infty} \frac{\ln(1/|d_{m(k(j)),l(k(j))}|)}{\lambda_{k(j)}}, \quad \lambda_k = m(k) + il(k),$$

где инфимум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{k(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности $\Lambda_{\mathbb{Z}}$ таким, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|$ сходится к точке ξ, когда $j \to \infty$. При этом ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах области D (см. [1], теорема 3.1). Следовательно, его сумма $g(z)$ является функцией аналитической в области D.

Таким образом, если ряд (1.1) сходится на открытом подмножестве $E \subset \mathbb{C}$, то он сходится в выпуклой области D, содержащей E, к функции функцией аналитической в D.

A.I. Abdulnagimov, A.S. Krivosheyev, Representation of analytic functions.

Поступила 17 апреля 2016 г.

В данной работе решается в некотором смысле обратная задача представления любой функции аналитической в окрестности замыкания произвольной фиксированной ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ рядом (1.1), сходящимся в D.

Благодаря классическому результату А.Ф. Леонтьева (см. [2], гл. IV, §6, теорема 4.6.4) о представлении функций аналитических в окрестности замыкания ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ указанную задачу удается свести к задаче построения регулярного множества с заданной угловой плотностью (см. [3], гл. II, §1), которое является частью последовательности $\Lambda_{\mathbb{Z}}$.

Во втором параграфе (теоремы 2.1 и 2.2) последняя задача полностью решается. На этой основе в третьем параграфе (теорема 3.2) доказывается, что любая функция аналитическая в окрестности замыкания произвольной фиксированной ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ раскладывается в ряд (1.1), сходящийся абсолютно и равномерно на компактных подмножествах области D.

2. Построение регулярного множества

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – неубывающая по модулю последовательность комплексных чисел такая, что $|\lambda_k| \to \infty$. Обозначим через $n(r,\Lambda)$ – число точек λ_k, попавших в круг $B(0,r)$ с центром в начале координат и радиуса $r > 0$. Нижней и верхней плотностью Λ называются соответственно величины:

$$\underline{n}(\Lambda) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r}, \quad \overline{n}(\Lambda) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r}.$$

Говорят, что последовательность Λ имеет плотность $n(\Lambda)$ (измерима), если $\underline{n}(\Lambda) = \overline{n}(\Lambda) = n(\Lambda) < +\infty$. Имеем:

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{k}{|\lambda_k|} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n(|\lambda_k|+1,\Lambda)}{|\lambda_k|} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n(|\lambda_k|+1,\Lambda)}{|\lambda_k|+1} \leqslant \overline{n}(\Lambda).$$

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{k}{|\lambda_k|} \geq \varliminf_{k\to\infty} \frac{n(|\lambda_k|-1,\Lambda)}{|\lambda_k|} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{n(|\lambda_k|-1,\Lambda)}{|\lambda_k|-1} \geq \underline{n}(\Lambda).$$

Таким образом, если последовательность Λ измерима, то

$$n(\Lambda) = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{|\lambda_k|}.$$

Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in [-2\pi, 2\pi), \varphi_2 - \varphi_1 \in (0, 2\pi]$. Такие значения φ_1, φ_2 будем называть допустимыми. Положим

$$\Gamma(\varphi_1,\varphi_2)(\Gamma(\varphi_1,\varphi_2]) = \{\lambda = te^{i\varphi} : \varphi \in (\varphi_1,\varphi_2)((\varphi_1,\varphi_2]), t > 0\}.$$

Символом $\Lambda(\varphi_1,\varphi_2)(\Lambda(\varphi_1,\varphi_2])$ обозначим последовательность, состоящую из всех пар $\{\lambda_k, n_k\}$ таких, что $\lambda_k \in \Gamma(\varphi_1,\varphi_2)(\Gamma(\varphi_1,\varphi_2])$.

Лемма 2.1. *Пусть φ_1, φ_2 – допустимые и $\gamma > 0$. Существует $R_0 > 0$ такое, что любой интервал $(R, R+\gamma)$ при $R > R_0$ содержит модуль $|\lambda_k|$ некоторой точки $\lambda_k \in \Lambda_{\mathbb{Z}}(\varphi_1,\varphi_2)$.*

Доказательство. Пусть p, m – целые числа такие, что луч Γ с началом в нуле, проходящий через точку с координатами (m,p), лежит (за исключением начала) в угле $\Gamma(\varphi_1,\varphi_2)$. Такие p, m можно подобрать, взяв подходящее приближение числа $\operatorname{tg}\varphi$ ($\varphi \in (\varphi_1,\varphi_2) \setminus \{\pi k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ выбирается произвольно) дробями p/m.

Луч Γ состоит из диагоналей прямоугольников, вершины которых являются точками последовательности $\Lambda_{\mathbb{Z}}$, а длины их сторон равны $|p|$ и $|m|$. Он содержит точки $\lambda_{k(s)}$, $s = 1, 2, \ldots$, последовательности $\Lambda_{\mathbb{Z}}(\varphi_1,\varphi_2)$, расположенные на расстоянии h друг от друга. Последнее совпадает с длинами диагоналей указанных прямоугольников. Точки $\lambda_{k(s)}$ имеют координаты (sm, sp), $s = 1, 2, \ldots$ Пусть ς_s – прямая, перпендикулярная лучу Γ и проходящая через точку $\lambda_{k(s)}$, $s \geq 1$. Она также состоит из диагоналей прямоугольников, вершины которых являются точками последовательности $\Lambda_{\mathbb{Z}}$, а длины их сторон равны $|p|$ и $|m|$. Для каждого $s \geq 1$ прямая ς_s содержит точки $\lambda_{k(s,j)}$, $j \in \mathbb{Z}$, последовательности $\Lambda_{\mathbb{Z}}$. Они имеют вид $\lambda_{k(s,j)} = \lambda_{k(s)} + jhe^{i(\varphi_0+\pi/2)}$, $j \in \mathbb{Z}$, где φ_0 определяется из равенства $\operatorname{tg}\varphi_0 = p/m$.

Поскольку луч $\Gamma \setminus \{0\}$ лежит в угле $\Gamma(\varphi_1, \varphi_2)$, то для некоторого числа $\beta > 0$ каждая точка $\lambda_{k(s,j)}$ с условием $0 \leqslant j \leqslant \beta_s$ и $s \geq 1$ принадлежит последовательности $\Lambda_{\mathbb{Z}}(\varphi_1, \varphi_2)$. Пусть $s \geq 1$ и j_s – максимальный номер $j \geq 0$, удовлетворяющий неравенству $j \leqslant \beta_s$.

Рассмотрим набор $|\lambda_{k(s,j)}|$, $j = 0, 1, \ldots, j_s$. Величина $|\lambda_{k(s,j)}|$ является гипотенузой прямоугольного треугольника с вершинами $0, \lambda_{k(s)}$ и $\lambda_{k(s,j)}$. Длина $|\lambda_{k(s)} - \lambda_{k(s,j)}|$ одного из его катетов является возрастающей функцией по параметру $j \geq 0$ (она равна jh). Поэтому верны неравенства

$$|\lambda_{k(s,0)}| < |\lambda_{k(s,1)}| < \cdots < |\lambda_{k(s,j_s)}|.$$

Имеем: $|\lambda_{k(s,0)}| = |\lambda_{k(s)}| = \sqrt{(sm)^2 + (sp)^2} = s\sqrt{m^2 + s^2} = sh$ и при $j \geq 0$

$$|\lambda_{k(s,j+1)}| - |\lambda_{k(s,j)}| = \sqrt{|\lambda_{k(s)}|^2 + ((j+1)h)^2} - \sqrt{|\lambda_{k(s)}|^2 + (jh)^2} =$$

$$= \sqrt{(sh)^2 + ((j+1)h)^2} - \sqrt{(sh)^2 + (jh)^2} = h(\sqrt{s^2 + (j+1)^2} - \sqrt{s^2 + j^2}) =$$

$$= h\sqrt{s^2 + j^2}\left(\sqrt{1 + \frac{2j+1}{s^2 + j^2}} - 1\right).$$

Верна оценка $\ln\sqrt{1+x} \leqslant x/2$. Следовательно,

$$\sqrt{1+x} \leqslant e^{x/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} \leqslant 1 + \frac{x}{2} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{1-x} \leqslant 1 + x$$

для всех $x \in [0, 1/4]$. Отсюда с учетом предыдущего получаем:

$$|\lambda_{k(s,j+1)}| - |\lambda_{k(s,j)}| \leqslant h\sqrt{s^2 + j^2}\frac{2j+1}{s^2 + j^2} = h\frac{2j+1}{\sqrt{s^2 + j^2}} = h\frac{2j+1}{s\sqrt{1 + (j/s)^2}} \leqslant h\frac{2j+1}{s}.$$

Выберем номер s_0 такой, что $h/s_0 < \gamma/2$. Тогда

$$|\lambda_{k(s,j+1)}| - |\lambda_{k(s,j)}| < \gamma, \quad j \leqslant \frac{s\gamma}{4h}, \quad s \geq s_0.$$

Пусть $\alpha = \min\{\beta, s\gamma/4h\}$ и $\widetilde{j}_s$ – максимальный номер $j \geq 0$, удовлетворяющий неравенству $j \leqslant \beta s$. Тогда $\widetilde{j}_s \leqslant j_s$. Поэтому все точки $\lambda_{k(s,j)}$, $j = \overline{0, \widetilde{j}_s}$, $s \geq 1$, принадлежат последовательности $\Lambda_{\mathbb{Z}}(\varphi_1, \varphi_2)$. Кроме того, верны неравенства

$$|\lambda_{k(s,j+1)}| - |\lambda_{k(s,j)}| < \gamma, \quad j = \overline{0, \widetilde{j}_s}, \quad s \geq s_0. \tag{2.1}$$

Оценим снизу величину $|\lambda_{k(s,\widetilde{j}_s)}|$. В силу выбора номера $\widetilde{j}_s$ Имеем:

$$|\lambda_{k(s,\widetilde{j}_s)}| = \sqrt{|\lambda_{k(s)}|^2 + (\widetilde{j}_s h)^2} = \sqrt{(sh)^2 + ((\beta s - 1)h)^2} = sh\sqrt{1 + \left(\frac{\beta s - 1}{s}\right)^2}.$$

Поскольку

$$\lim_{s\to\infty} \frac{s}{s+1}\sqrt{1 + \left(\frac{\beta s - 1}{s}\right)^2} = \sqrt{1 + \beta^2} > 1,$$

то найдется номер $s_1 \geq s_0$ такой, что

$$|\lambda_{k(s,\widetilde{j}_s)}| > sh + +h, \quad s \geq s_1.$$

Таким образом, для каждого $s \geq s_1$ мы имеем возрастающий набор чисел $|\lambda_{k(s,j)}|$, $j = \overline{0, \widetilde{j}_s}$, такой, что $\lambda_{k(s,j)} \in \Lambda_{\mathbb{Z}}(\varphi_1, \varphi_2)$ для всех $j = \overline{0, \widetilde{j}_s}$. Первое из этих чисел совпадает с sh, а последнее строго больше $sh + h$. Отсюда с учетом (2.1) следует, что любой интервал $(R, R + \gamma)$, пересекающий полуинтервал $[sh, sh + h)$, содержит хотя бы одно из чисел этого набора. Полагая теперь $R_0 = s_1 h$, мы тем самым завершаем доказательство леммы.

Пусть $\Lambda^1 = \{\lambda_k^1\}_{k=1}^{\infty}$ и $\Lambda^2 = \{\lambda_j^2\}_{j=1}^{\infty}$. Будем говорить, что Λ^1 является подпоследовательностью Λ^2 (писать $\Lambda^1 \subset^2$), если существует набор индексов $j(k)$, $k \geq 1$, такой, что $\lambda_k^1 = \lambda_{j(k)}^2$, $k \geq 1$. Если $\lambda_k^1 \neq \lambda_j^2$, $k, j \geq 1$, то под объединением $\Lambda^1 \bigcup \Lambda^2$ последовательностей Λ^1 и Λ^2 будем понимать последовательность, состоящую из всех элементов λ_k^1, λ_j^2, $k, j \geq 1$.

Доказательство следующего утверждения опирается на метод, изложенный при доказательстве леммы 5 в работе [4] (см. также [5], лемма 2).

Лемма 2.2. *Пусть φ_1, φ_2 – допустимые, $\delta > 0$ и $\Lambda^0 = \{\lambda_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ имеет плотность $\tau_0 \geq 0$ (возможно Λ^0 – пустая). Предположим, что $\tau > \tau_0$. Тогда существует последовательность $\Lambda^1 = \{\lambda_j^1\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \Lambda_{\mathbb{Z}}(\varphi_1, \varphi_2)$, имеющая плотность $\tau - \tau_0$ и такая, что*

$$\big||\lambda_j^1| - |\lambda_k^0|\big| \geq \frac{1}{2\tau} - \frac{\delta}{2}, \ \ k, j \geq 1, \ \ |\lambda_{j+1}^1| - |\lambda_j^1| \geq \frac{1}{\tau} - \delta, \ \ j \geq 1. \tag{2.2}$$

(если Λ^0 – пустая, то первое неравенство в (2.2) опускается).

Доказательство. Пусть $\alpha = 1/\tau$. Положим $\gamma = \min\{\delta, \alpha\}$. Согласно лемме 2.1 найдется натуральное число p_0 такое, что любой интервал $(R, R+\gamma)$ при $R \geq p_0\alpha$ содержит модуль $|\xi_m|$ некоторой точки $\xi_m \in \Lambda_{\mathbb{Z}}(\varphi_1, \varphi_2)$. Последовательность Λ^1 будем искать в виде объединения $\Lambda^1 = \bigcup_{p \geq p_0} \Lambda_p^1$. Построим по индукции множества Λ_p^1, $p \geq p_0$. Предварительно символом N_p обозначим общее число точек множеств Λ_s^1, $s = \overline{p_0, p}$.

Пусть $p = p_0$. Если полуинтервал $[p\alpha, (p+1)\alpha)$ содержит хотя бы один элемент последовательности $\{|\lambda_k^0|\}_{k=1}^{\infty}$, то полагаем $\Lambda_p^1 = \emptyset$. В противном случае в качестве Λ_p^1 возьмем множество, состоящее из одной точки $\xi_m \in \Lambda_{\mathbb{Z}}(\varphi_1, \varphi_2)$, модуль $|\xi_m|$ которой принадлежит интервалу

$$\left(\frac{2p+1}{2}\alpha - \frac{\gamma}{2}, \frac{2p+1}{2}\alpha + \frac{\gamma}{2}\right). \tag{2.3}$$

Хотя бы одна такая точка ξ_m существует в силу определения числа p_0 (если их несколько, то произвольным образом выберем одну из них).

Пусть теперь $p > p_0$. Предположим, что мы уже построили множества Λ_s^1 для всех $s = \overline{p_0, p-1}$. Определим Λ_p^1. Если выполнено неравенство

$$N_{p-1} + n((p+1)\alpha, \Lambda^0) - n(p_0\alpha, \Lambda^0) \geq p + 1 - p_0, \tag{2.4}$$

то полагаем $\Lambda_p^1 = \emptyset$. Если же

$$N_{p-1} + n((p+1)\alpha, \Lambda^0) - n(p_0\alpha, \Lambda^0) < p + 1 - p_0, \tag{2.5}$$

то в качестве Λ_p^1 возьмем множество, состоящее из какой-нибудь одной точки $\xi_m \in \Lambda_{\mathbb{Z}}(\varphi_1, \varphi_2)$, модуль $|\xi_m|$ которой принадлежит интервалу (2.3). Как и выше, хотя бы одна подобная точка ξ_m существует.

Таким образом, мы построили последовательность Λ^1. Покажем, что она искомая. Положим $\Lambda = \Lambda^0 \bigcup \Lambda^1$ и докажем, что Λ имеет плотность τ.

Докажем вначале, что для всех $l > p_0$ выполнены неравенства

$$l - p_0 \leqslant n(l\alpha, \Lambda) - n(p_0\alpha, \Lambda) \leqslant \max\{l - p_0, N_{l-2} + n(l\alpha, \Lambda^0) - n(p_0\alpha, \Lambda^0)\}, \tag{2.6}$$

где для удобства полагаем $N_{p_0-1} = 0$.

Если для $p = l-1$ верно (2.4), то по построению $\Lambda^1_{l-1} = \emptyset$. Поэтому $N_{l-1} = N_{l-2}$. Следовательно,

$$n(l\alpha,\Lambda) - n(p_0\alpha,\Lambda) = N_{l-1} + n(l\alpha,\Lambda^0) - n(p_0\alpha,\Lambda^0) = N_{l-2} + n(l\alpha,\Lambda^0) - n(p_0\alpha,\Lambda^0),$$

т.е. правое неравенство в (2.6) верно. Если же выполнено (2.5), то по построению Λ^1_{l-1} состоит из одной точки. Поэтому $N_{l-1} = N_{l-2}+1$. Следовательно, в силу (2.5) имеем:

$$n(l\alpha,\Lambda) - n(p_0\alpha,\Lambda) = N_{l-1} + n(l\alpha,\Lambda^0) - n(p_0\alpha,\Lambda^0) =$$
$$= N_{l-2} + 1 + n(l\alpha,\Lambda^0) - n(p_0\alpha,\Lambda^0) < l - p_0 + 1 \leqslant l - p_0.$$

Таким образом, правое неравенство в (2.6) верно и в этом случае.

Докажем теперь левое неравенство. Применим индукцию. Если полуинтервал $[p_0\alpha,(p_0+1)\alpha)$ содержит хотя бы один элемент последовательности $\{|\lambda^0_k|\}_{k=1}^\infty$, то

$$n((p_0+1)\alpha,\Lambda) - n(p_0\alpha,\Lambda) \geq n((p_0+1)\alpha,\Lambda^0) - n(p_0\alpha,\Lambda^0) \geq 1 = p_0 + 1 - p_0,$$

т.е. левое неравенство в (2.6) в этом случае верно. Если же полуинтервал $[p_0\alpha,(p_0+1)\alpha)$ не содержит ни одного элемента последовательности $\{|\lambda^0_k|\}_{k=1}^\infty$, то по построению множество $\Lambda^1_{p_0}$ состоит из одной точки. Поэтому

$$n((p_0+1)\alpha,\Lambda) - n(p_0\alpha,\Lambda) \geq n((p_0+1)\alpha,\Lambda^1) - n(p_0\alpha,\Lambda^1) = N_{p_0} = 1 = p_0 + 1 - p_0.$$

Таким образом, левое неравенство в (2.6) верно при $l = p_0+1$. Предположим, что оно верно для всех $l = \overline{p_0+1,p}$ и докажем, что тогда оно верно и при $l = p+1$.

Если для $p = l-1$ верно (2.4), то

$$n(l\alpha,\Lambda) - n(p_0\alpha,\Lambda) = n((p+1)\alpha,\Lambda) - n(p_0\alpha,\Lambda) = N_p + n((p+1)\alpha,\Lambda^0) - n(p_0\alpha,\Lambda^0) \geq$$
$$\geq N_{p-1} + n((p+1)\alpha,\Lambda^0) - n(p_0\alpha,\Lambda^0) \geq p + 1 - p_0 = l - p_0,$$

т.е. левое неравенство в (2.6) верно в этом случае. Пусть теперь для $p = l-1$ верно (2.5). Тогда по построению Λ^1_p состоит из одной точки, т.е. $N_p = N_{p-1}+1$. По допущению индукции $n(p\alpha,\Lambda) - n(p_0\alpha,\Lambda) \geq p - p_0$. Следовательно,

$$n(l\alpha,\Lambda) - n(p_0\alpha,\Lambda) = n((p+1)\alpha,\Lambda) - n(p_0\alpha,\Lambda) = n(p\alpha,\Lambda) - n(p_0\alpha,\Lambda) +$$
$$+ n((p+1)\alpha,\Lambda) - n(p\alpha,\Lambda) \geq p - p_0 + n((p+1)\alpha,\Lambda^1) - n(p\alpha,\Lambda^1) =$$
$$= p - p_0 + N_p - N_{p-1} = p - p_0 + 1 = l - p_0.$$

Таким образом, неравенства (2.6) полностью доказаны.

Используя левое неравенство в (2.6), получаем:

$$\underline{n}(\Lambda) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r} \geq \varliminf_{l\to\infty} \frac{n(l\alpha,\Lambda)}{(l+1)\alpha} = \varliminf_{l\to\infty} \frac{n(l\alpha,\Lambda)}{l\alpha} =$$
$$= \varliminf_{l\to\infty} \frac{n(l\alpha,\Lambda) - n(p_0\alpha,\Lambda) + n(p_0\alpha,\Lambda)}{l\alpha} = \varliminf_{l\to\infty} \frac{n(l\alpha,\Lambda) - n(p_0\alpha,\Lambda)}{l\alpha} \geq \varliminf_{l\to\infty} \frac{l-p_0}{l\alpha} =$$
$$= \varliminf_{l\to\infty} \frac{l}{l\alpha} = \frac{1}{\alpha} = \tau.$$

Отсюда имеем: $\underline{n}(\Lambda) \geq \tau$. Докажем теперь неравенство $\overline{n}(\Lambda) \leqslant \tau$.

Пусть $r_j \to \infty$ последовательность, реализующая верхний предел в определении величины $\overline{n}(\Lambda)$, и $l(j)$, $j \geq 1$, – минимальное натуральное число, такое, что $l(j)\alpha \geq r_j$. Если $n(l\alpha,\Lambda) - n(p_0\alpha,\Lambda) > l - p_0$ для всех $l > p_0$, то в силу правого неравенства в (2.6) и определений N_l имеем:

$$n(l\alpha,\Lambda) - n(p_0\alpha,\Lambda) \leqslant N_{l-2} + n(l\alpha,\Lambda^0) - n(p_0\alpha,\Lambda^0) = n((l-1)\alpha,\Lambda) - n(p_0\alpha,\Lambda) +$$
$$+ n(l\alpha,\Lambda^0) - n((l-1)\alpha,\Lambda^0) \leqslant N_{l-3} + n((l-1)\alpha,\Lambda^0) - n(p_0\alpha,\Lambda^0) +$$
$$+ n(l\alpha,\Lambda^0) - n((l-1)\alpha,\Lambda^0) = n((l-2)\alpha,\Lambda) - n(p_0\alpha,\Lambda) +$$
$$+ n(l\alpha,\Lambda^0) - n((l-2)\alpha,\Lambda^0) \leqslant \cdots \leqslant N_{p_0-1} + n((p_0+1)\alpha,\Lambda^0) - n(p_0\alpha,\Lambda^0) +$$

$$+n(l\alpha,\Lambda^0)-n((p_0+1)\alpha,\Lambda^0)=n(l\alpha,\Lambda^0)-n(p_0\alpha,\Lambda^0).$$

Отсюда, учитывая, что Λ^0 имеет плотность $\tau_0<\tau$, получаем:

$$\overline{n}(\Lambda)=\lim_{j\to\infty}\frac{n(r_j,\Lambda)}{r_j}\leqslant\varlimsup_{j\to\infty}\frac{n(l(j)\alpha,\Lambda)}{(l(j)-1)\alpha}=\varlimsup_{j\to\infty}\frac{n(l(j)\alpha,\Lambda)-n(p_0\alpha,\Lambda)+n(p_0\alpha,\Lambda)}{l(j)\alpha}=$$

$$=\varlimsup_{j\to\infty}\frac{n(l(j)\alpha,\Lambda)-n(p_0\alpha,\Lambda)}{l(j)\alpha}\leqslant\varlimsup_{j\to\infty}\frac{n(l(j)\alpha,\Lambda^0)-n(p_0\alpha,\Lambda^0)}{l(j)\alpha}=\varlimsup_{j\to\infty}\frac{n(l(j)\alpha,\Lambda^0)}{l(j)\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\overline{n}(\Lambda^0)=\tau_0<\tau.$$

Это противоречит неравенству $\underline{n}(\Lambda)\geq\tau$. Следовательно, $n(l\alpha,\Lambda)-n(p_0\alpha,\Lambda)\leqslant l-p_0$ хотя бы для одного номера $l>p_0$. Таким образом, найдется j_0 такое, что для каждого $j\geq j_0$ существует максимальное натуральное число $m(j)$, удовлетворяющее условиям: $m(j)\leqslant l(j)$ и $n(m(j)\alpha,\Lambda)-n(p_0\alpha,\Lambda)\leqslant m(j)-p_0$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $m(j)/l(j)$ сходится к некоторому числу $\gamma\in[0,1]$. Используя правое неравенство в (2.6), как и выше, получаем оценку

$$n(l(j)\alpha,\Lambda)-n(p_0\alpha,\Lambda)\leqslant n((l(j)-1)\alpha,\Lambda)-n(p_0\alpha,\Lambda)+n(l(j)\alpha,\Lambda^0)-n((l(j)-1)\alpha,\Lambda^0)\leqslant$$

$$\leqslant\cdots\leqslant n(m(j)\alpha,\Lambda)-n(p_0\alpha,\Lambda)+n(l(j)\alpha,\Lambda^0)-n(m(j)\alpha,\Lambda^0).$$

Отсюда с учетом выбора номера $m(j)$ имеем:

$$\overline{n}(\Lambda)\leqslant\varlimsup_{j\to\infty}\frac{n(l(j)\alpha,\Lambda)}{(l(j)-1)\alpha}=\varlimsup_{j\to\infty}\frac{n(l(j)\alpha,\Lambda)}{l(j)\alpha}=\varlimsup_{j\to\infty}\frac{n(l(j)\alpha,\Lambda)-n(p_0\alpha,\Lambda)}{l(j)\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\varlimsup_{j\to\infty}\frac{n(m(j)\alpha,\Lambda)-n(p_0\alpha,\Lambda)}{l(j)\alpha}+\varlimsup_{j\to\infty}\frac{n(l(j)\alpha,\Lambda^0)-n(m(j)\alpha,\Lambda^0)}{l(j)\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\varlimsup_{j\to\infty}\frac{m(j)-p_0}{l(j)\alpha}+\varlimsup_{j\to\infty}\frac{n(l(j)\alpha,\Lambda^0)-n(m(j)\alpha,\Lambda^0)}{l(j)\alpha}=\frac{\gamma}{\alpha}+\varlimsup_{j\to\infty}\frac{n(l(j)\alpha,\Lambda^0)-n(m(j)\alpha,\Lambda^0)}{l(j)\alpha}.$$

Если $\gamma=0$, то

$$\overline{n}(\Lambda)\leqslant\varlimsup_{j\to\infty}\frac{n(l(j)\alpha,\Lambda^0)-n(m(j)\alpha,\Lambda^0)}{l(j)\alpha}\leqslant\varlimsup_{j\to\infty}\frac{n(l(j)\alpha,\Lambda^0)}{l(j)\alpha}\leqslant\overline{n}(\Lambda^0)=\tau_0<\tau.$$

Это противоречит неравенству $\underline{n}(\Lambda)\geq\tau$. Следовательно, $\gamma>0$. Выберем $\delta'>0$ такое, что $\gamma-\delta'>0$. Положим $\delta=1-\gamma+\delta'$. Тогда $\delta\in(0,1)$ и $m(j)>(1-\delta)l(j)$, $j\geq j_1$. Поэтому

$$\overline{n}(\Lambda)\leqslant\frac{\gamma}{\alpha}+\varlimsup_{j\to\infty}\frac{n(p(j)\alpha,\Lambda^0)-n((1-\delta)p(j)\alpha,\Lambda^0)}{p(j)\alpha}.$$

Поскольку последовательность Λ^0 имеет плотность τ_0, то

$$\varlimsup_{j\to\infty}\frac{n(p(j)\alpha,\Lambda^0)-n((1-\delta)p(j)\alpha,\Lambda^0)}{p(j)\alpha}=\lim_{j\to\infty}\frac{n(p(j)\alpha,\Lambda^0)-((1-\delta)p(j)\alpha,\Lambda^0)}{p(j)\alpha}=$$

$$=\lim_{j\to\infty}\frac{n(p(j)\alpha,\Lambda^0)}{p(j)\alpha}-\lim_{j\to\infty}\frac{n((1-\delta)p(j)\alpha,\Lambda^0)}{p(j)\alpha}=\tau_0-(1-\delta)\tau_0=\delta\tau_0.$$

Таким образом,

$$\overline{n}(\Lambda)\leqslant\frac{\gamma}{\alpha}+\delta\tau_0=\tau\gamma+(1-\gamma+\delta')\tau_0.$$

Так как $\delta'>0$ может быть сколь угодно малым, то $\overline{n}(\Lambda)\leqslant\tau\gamma+(1-\gamma)\tau_0$. Отсюда с учетом неравенств $\tau_0<\tau$ и $\underline{n}(\Lambda)\geq\tau$ получаем: $\overline{n}(\Lambda)=\tau$ и $\gamma=1$. В частности, это означает, что последовательность Λ имеет плотность τ. Тогда

$$n(\Lambda^1)=\lim_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda^1)}{r}=\lim_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda)-n(r,\Lambda^0)}{r}=\lim_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda)}{r}-\lim_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda^0)}{r}=\tau-\tau_0,$$

т.е. Λ^1 имеет плотность $\tau-\tau_0$.

Остается доказать неравенства (2.2). По построению каждый полуинтервал $[p\alpha,(p+1)\alpha)$, $p=0,1,\dots$ содержит не более одного элемента последовательности $\{|\lambda^1_j|\}_{j=1}^\infty$. При этом, если полуинтервал $[p\alpha,(p+1)\alpha)$, $p=0,1,\dots$ содержит число $|\lambda^1_j|$, то оно лежит на интервале (2.3). Следовательно, $|\lambda^1_{j+1}|-|\lambda^1_j|\ge\alpha-\gamma=1/\tau-\gamma\ge1/\tau-\delta$, $j\ge1$, т.е. правое неравенство в (2.2) выполнено.

Докажем теперь левое. Имеем:

$$n((p+1)\alpha,\Lambda)-n(p_0\alpha,\Lambda)=n((p+1)\alpha,\Lambda^1)-n(p_0\alpha,\Lambda^1)+$$
$$+n((p+1)\alpha,\Lambda^0)-n(p_0\alpha,\Lambda^0)=n((p+1)\alpha,\Lambda^1)-n(p\alpha,\Lambda^1)+n(p\alpha,\Lambda^1)-$$
$$-n(p_0\alpha,\Lambda^1)+n((p+1)\alpha,\Lambda^0)-n(p_0\alpha,\Lambda^0)=n((p+1)\alpha,\Lambda^1)-n(p\alpha,\Lambda^1)+$$
$$+N_{p-1}+n((p+1)\alpha,\Lambda^0)-n(p_0\alpha,\Lambda^0). \tag{2.7}$$

Кроме того,

$$n((p+1)\alpha,\Lambda)-n(p_0\alpha,\Lambda)=n(p\alpha,\Lambda)-n(p_0\alpha,\Lambda)+$$
$$+n((p+1)\alpha,\Lambda^1)-n(p\alpha,\Lambda^1)+n((p+1)\alpha,\Lambda^0)-n(p_0\alpha,\Lambda^0). \tag{2.8}$$

Предположим, что полуинтервал $[p\alpha,(p+1)\alpha)$ содержит одновременно некоторое число $|\lambda^1_j|$ и хотя бы один элемент последовательности $\{|\lambda^0_k|\}_{k=1}^\infty$. Тогда

$$n((p+1)\alpha,\Lambda^1)-n(p\alpha,\Lambda^1)=1,\quad n((p+1)\alpha,\Lambda^0)n(p_0\alpha,\Lambda^0)\ge1.$$

Отсюда с учетом (2.8) и левого неравенства в (2.6) получаем:

$$n((p+1)\alpha,\Lambda)-n(p_0\alpha,\Lambda)\ge n(p\alpha,\Lambda)-n(p_0\alpha,\Lambda)+2\ge p-p_0+2>p+1-p_0.$$

Поэтому в силу правого неравенства в (2.6) имеем:

$$n((p+1)\alpha,\Lambda)-n(p_0\alpha,\Lambda)\leqslant N_{p-1}+n((p+1)\alpha,\Lambda^0)-n(p_0\alpha,\Lambda^0).$$

Вместе с (2.7) это дает нам равенство

$$n((p+1)\alpha,\Lambda^1)-n(p\alpha,\Lambda^1)=0,$$

которое означает, что полуинтервал $[p\alpha,(p+1)\alpha)$ не содержит ни одного элемента последовательности $\{|\lambda^1_j|\}_{j=1}^\infty$. Получили противоречие с предположением.

Таким образом, если полуинтервал $[p\alpha,(p+1)\alpha)$ содержит некоторое число $|\lambda^1_j|$, то он не содержит ни одного элемента последовательности $\{|\lambda^0_k|\}_{k=1}^\infty$. По построению $|\lambda^1_j|$ принадлежит интервалу (2.3). Следовательно,

$$\big||\lambda^1_j|-|\lambda^0_k|\big|\ge\frac{\alpha}{2}-\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2\tau}-\frac{\gamma}{2}\ge\frac{1}{2\tau}-\frac{\delta}{2},\quad k\ge1.$$

Это дает нам первое неравенство в (2.2). Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть $\delta>0$ и $\varphi_1\in[-2\pi,0)$, $\varphi_1<\varphi_2<\dots<\varphi_n<\varphi_{n+1}=\varphi_1+2\pi$, $\tau_1,\dots,\tau_n\ge0$ и $\tau=\tau_1+\dots+\tau_n>0$. Существует последовательность $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что $\Lambda\subseteq\Lambda_{\mathbb Z}$, $n(\Lambda(\varphi_s,\varphi_{s+1}])=\tau_s$, $s=\overline{1,n}$, и*

$$|\lambda_{k+1}|-|\lambda_k|\ge\frac{1}{2\tau}-\delta,\quad k\ge1. \tag{2.9}$$

Доказательство. Положим $\tau_0=0$ и $\Lambda_0=\emptyset$. Последовательность $\Lambda\subseteq\Lambda_{\mathbb Z}$ будем искать в виде объединения $\Lambda_1\bigcup\dots\bigcup\Lambda_n$. Построим, используя индукцию, последовательности $\Lambda_s\subseteq\Lambda_{\mathbb Z}(\varphi_s,\varphi_{s+1})$, $s=\overline{1,n}$, удовлетворяющие следующим условиям: последовательность $\Lambda_s=\{|\lambda^s_k|\}_{k=1}^\infty$ имеет плотность τ_s и при $\tau_s>0$ верны неравенства

$$\big||\lambda^s_l|-|\lambda^j_k|\big|\ge\frac{1}{2\widetilde\tau_s}-\frac{\delta}{2},\quad k,l\ge1,j=\overline{1,s-1},\quad |\lambda^s_{k+1}|-|\lambda^s_k|\ge\frac{1}{\widetilde\tau_s}-\delta,k\ge1, \tag{2.10}$$

где $\widetilde\tau_s=\tau_1+\dots+\tau_s$ (если $\Lambda_0\bigcup\dots\bigcup\Lambda_{s-1}=\emptyset$, то первое неравенство в (2.10) опускается). Если же $\tau_s=0$, то $\Lambda_s=\emptyset$.

Пусть $s=1$. Если $\tau_1=0$, то полагаем $\Lambda_1=\emptyset$. В противном случае по лемме 2.2 существует последовательность $\Lambda_1=\{|\lambda_k^1|\}_{k=1}^\infty\subseteq\Lambda_{\mathbb{Z}}(\varphi_1,\varphi_2)$, имеющая плотность $\widetilde{\tau}_1-\tau_0=\tau_1$ и такая, что выполнено (2.10).

Предположим, что требуемые последовательности Λ_j, $j=\overline{1,s-1}$, уже построены. В лемме 2.2 в качестве Λ_0 возьмем объединение $\Lambda_1\bigcup\ldots\bigcup\Lambda_{s-1}$. Тогда согласно этой лемме существует последовательность $\Lambda_s=\{\lambda_k^s\}_{k=1}^\infty\subseteq\Lambda_{\mathbb{Z}}(\varphi_j,\varphi_{j+1})$, имеющая плотность $\tau_s=\widetilde{\tau}_s-\widetilde{\tau}_{s-1}$ и такая, что верно (2.10). Таким образом, мы построили последовательность $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty\subseteq\Lambda_{\mathbb{Z}}$, для которой $n(\Lambda(\varphi_s,\varphi_{s+1}])=n(\Lambda_s)=\tau_s$, $s=\overline{1,n}$. Поскольку $\tau\geq\widetilde{\tau}_s$, $s=\overline{1,n}$, то для нее выполнено (2.9). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь более точные характеристики последовательности $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$.

Нижней и верхней плотностями Λ в угле $\Gamma(\varphi_1,\varphi_2)$ называются соответствующие плотности последовательности $\Lambda(\varphi_1,\varphi_2)$.

Говорят (см. [3], гл. II, §1), что Λ имеет угловую плотность $n(\Lambda,\varphi_1,\varphi_2)<+\infty$ (при порядке один), если для всех допустимых φ_1,φ_2 за исключением, быть может, счетного множества Φ_Λ верно равенство $\underline{n}(\Lambda(\varphi_1,\varphi_2))=\overline{n}(\Lambda(\varphi_1,\varphi_2))=n(\Lambda,\varphi_1,\varphi_2)$. Число $\widetilde{\varphi}\in\Phi_\Lambda\setminus\{-2\pi\}$ тогда и только тогда, когда $\inf\limits_{\varphi>0}\overline{n}(\Lambda(\widetilde{\varphi}-\varphi,\widetilde{\varphi}+\varphi))>0$, где φ достаточно мало. Число -2π принадлежит или не принадлежит Φ_Λ одновременно с $\widetilde{\varphi}=0$.

Символом Σ обозначим класс неубывающих на $[-2\pi,2\pi]$ функций $\omega(\varphi)$, обладающих следующими свойствами: $\omega(0)=0$, ω непрерывна слева, $\omega(\varphi)=\omega(\varphi-2\pi)-\omega(-2\pi)$, $\varphi\in[0,2\pi)$. Через $\Phi(\omega)$ обозначим множество точек разрыва функции ω.

Пусть Λ имеет угловую плотность. Тогда она единственным образом определяет функцию $\omega_\Lambda\in\Sigma$ по правилу: для $\varphi_1,\varphi_2\in(-2\pi,0)\setminus\Phi_\Lambda$, $\varphi\in(\varphi_1,\varphi_1+2\pi)\setminus\Phi_\Lambda$

$$\omega_\Lambda(\varphi_1)=-\lim_{\varphi_2\to0}n(\Lambda,\varphi_1,\varphi_2),\quad \omega_\Lambda(\varphi)=n(\Lambda,\varphi_1,\varphi)+\omega_\Lambda(\varphi_1).$$

Точнее говоря, ω_Λ единственным образом продолжается до функции из класса Σ, причем продолжение не зависит от φ_1. Нетрудно заметить, что множества Φ_Λ и $\Phi(\omega_\Lambda)$ совпадают. Из определения ω_Λ следует равенство $n(\Lambda,\varphi_1,\varphi_2)=\omega_\Lambda(\varphi_2)-\omega_\Lambda(\varphi_1)$ для любых допустимых $\varphi_1,\varphi_2\notin\Phi_\Lambda=\Phi(\omega_\Lambda)$. При этом $n(\Lambda)=\omega_\Lambda(\varphi+2\pi)-\omega_\Lambda(\varphi)$, $\varphi\in[-2\pi,0)$. Будем говорить, что последовательность Λ имеет угловую плотность $\omega\in\Sigma$, если она имеет угловую плотность и $\omega_\Lambda=\omega$.

Лемма 2.4. *Пусть $\omega\in\Sigma$ и Λ таковы, что для некоторого $\varphi_1\in(-2\pi,0)\setminus\Phi(\omega)$ и всех $\varphi,\psi\notin\Phi(\omega)$ с условием $\varphi_1\leqslant\varphi<\psi\leqslant\varphi_1+2\pi$ последовательность $\Lambda(\varphi,\psi]$ имеет плотность и $n(\Lambda(\varphi,\psi])=\omega(\psi)-\omega(\varphi)$. Тогда Λ имеет угловую плотность ω.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\varphi}_1,\widetilde{\varphi}_2\notin\Phi_\Lambda$ являются допустимыми. В зависимости от расположения точек $\widetilde{\varphi}_1,\widetilde{\varphi}_2$ на отрезке $[-2\pi,2\pi]$ возможны несколько ситуаций. Изучим две из них. Остальные рассматриваются аналогично.

1. $\widetilde{\varphi}_2=\varphi_1$. В этом случае $\Lambda(\widetilde{\varphi}_1,\widetilde{\varphi}_2)=\Lambda(\widetilde{\varphi}_1+2\pi,\varphi_1+2\pi)\subseteq\Lambda(\widetilde{\varphi}_1+2\pi,\varphi_1+2\pi]$. По условию $(\varphi_1+2\pi)\notin\Phi(\omega)$. Покажем, что $(\widetilde{\varphi}_1+2\pi)\notin\Phi(\omega)$. Поскольку $\widetilde{\varphi}_1\notin\Phi_\Lambda$, то

$$\inf_{\varphi>0}\overline{n}(\Lambda(\widetilde{\varphi}_1+2\pi-\varphi,\widetilde{\varphi}_1+2\pi+\varphi))=\inf_{\varphi>0}\overline{n}(\Lambda(\widetilde{\varphi}_1-\varphi,\widetilde{\varphi}_1+\varphi))=0.$$

Пусть $\psi_l\to0$ такая, что $(\widetilde{\varphi}_1+2\pi\pm\psi_l)\notin\Phi(\omega)$, $l\geq1$. Тогда с учетом условия имеем:

$$\omega(\widetilde{\varphi}_1+2\pi+\psi_l)-\omega(\widetilde{\varphi}_1+2\pi-\psi_l)=n(\Lambda(\widetilde{\varphi}_1)+2\pi-\psi_l,\widetilde{\varphi}_1+2\pi+\psi_l])\leqslant$$
$$\leqslant\overline{n}(\Lambda(\widetilde{\varphi}_1+2\pi-2\psi_l,\widetilde{\varphi}_1+2\pi+2\psi_l))\to0,\quad l\to\infty.$$

Так как ω не убывает, то отсюда следует требуемое. Поэтому согласно определению верхней плотности и условию с учетом леммы 2.1 получаем

$$\overline{n}(\Lambda(\widetilde{\varphi}_1,\widetilde{\varphi}_2))\leqslant\overline{n}(\Lambda(\widetilde{\varphi}_1+2\pi,\widetilde{\varphi}_2+2\pi])=\omega(\varphi_1+2\pi)-\omega(\widetilde{\varphi}_1+2\pi).$$

С другой стороны, по сходным соображениям верно неравенство

$$\underline{n}(\Lambda(\widetilde{\varphi}_1,\widetilde{\varphi}_2))\geq\underline{n}(\Lambda(\widetilde{\varphi}_1+2\pi,\varphi_1+2\pi-\psi_l])=\omega(\varphi_1+2\pi-\psi_l)-\omega(\widetilde{\varphi}_1+2\pi),\quad l\geq1.$$

где $0 < \psi_l \to 0$ и $(\varphi_1 + 2\pi - \psi_l) \notin \Phi(\omega)$. Отсюда, используя непрерывность ω в точке $\varphi_1 + 2\pi$ и предыдущее неравенство, находим, что $\Lambda(\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2)$ имеет плотность $\omega(\varphi_1 + 2\pi) - \omega(\widetilde{\varphi}_1 + 2\pi) = = \omega(\varphi_1) - \omega(\widetilde{\varphi}_1) = \omega(\widetilde{\varphi}_2) - \omega(\widetilde{\varphi}_1)$.

2. $\widetilde{\varphi}_2 > \varphi_1$, $\widetilde{\varphi}_1 < \varphi_1$. Как и выше показывается, что $\widetilde{\varphi}_2, \widetilde{\varphi}_1 + 2\pi \notin \Phi(\omega)$ и $\Lambda(\varphi_1, \widetilde{\varphi}_2)$ имеет плотность $\omega(\widetilde{\varphi}_2) - \omega(\varphi_1)$. Тогда с учетом условия имеем:

$$n(\Lambda(\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2)) = n(\Lambda(\widetilde{\varphi}_1, \varphi_1]) + n(\Lambda(\varphi_1, \widetilde{\varphi}_2)) = n(\Lambda(\widetilde{\varphi}_1 + 2\pi, \varphi_1 + 2\pi]) + n(\Lambda(\varphi_1, \widetilde{\varphi}_2)) =$$
$$= \omega(\varphi_1 + 2\pi) - \omega(\widetilde{\varphi}_1 + 2\pi) + \omega(\widetilde{\varphi}_2) - \omega(\varphi_1) = \omega(\widetilde{\varphi}_2) - \omega(\widetilde{\varphi}_1).$$

Отсюда с учетом непрерывности ω в точке φ_1 вытекает, что $\varphi_1 \notin \Phi_\Lambda$.

Таким образом, Λ имеет угловую плотность $n(\Lambda, \widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2) = \omega(\widetilde{\varphi}_2) - \omega(\widetilde{\varphi}_1)$. Остается доказать, что $\omega_\Lambda = \omega$. С учетом последнего это следует непосредственно из определения ω_Λ, непрерывности слева функции ω и равенства $\omega(0) = 0$. Лемма доказана.

Доказательство следующего утверждения опирается на метод, изложенный при доказательстве теоремы 2.1 в работе [6].

Теорема 2.1. *Пусть $\omega \in \Sigma$ и $\delta > 0$. Существует последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \Lambda_\mathbb{Z}$ с угловой плотностью ω такая, что*

$$|\lambda_{k+1}| - |\lambda_k| \geq \frac{1}{2(\omega_\Lambda(\varphi_1 + 2\pi) - \omega_\Lambda(\varphi_1))} - \delta, \quad k \geq 1, \tag{2.11}$$

где $\varphi_1 \in (-2\pi, 0) \setminus \Phi(\omega)$ выбирается произвольно.

Доказательство. Прежде всего, построим специальный набор последовательностей $\Lambda^j \subseteq \Lambda_\mathbb{Z}$, $j \geq 1$. Затем «склеим» из частей Λ^j последовательность Λ, имеющую требуемую угловую плотность. Пусть $\varphi_1 \in (-2\pi, 0) \setminus \Phi(\omega)$. Для каждого $j \geq 1$ фиксируем набор чисел $\varphi_s^j \notin \Phi(\omega)$, $s = \overline{1, s(j)}$, таких, что $\varphi_1^j = \varphi_1$, $\varphi_1^j < \varphi_2^j < \cdots < \varphi_{s(j)}^j < \varphi_1 + 2\pi = \varphi_{s(j)+1}^j$ и $\varphi_{s+1}^j - \varphi_s^j < 1/j$, $s = \overline{1, s(j)}$. По лемме 2.3 для каждого $j \geq 1$ существует последовательность $\Lambda^j = \{\lambda_k^j\}_{k=1}^\infty \subseteq \Lambda_\mathbb{Z}$ такая, что

$$n(\Lambda^j(\varphi_s^j, \varphi_{s+1}^j]) = \tau_s^j = \omega(\varphi_{s+1}^j) - \omega(\varphi_s^j), \quad s = \overline{1, s(j)}, \quad j \geq 1. \tag{2.12}$$

$$|\lambda_{k+1}^j| - |\lambda_k^j| \geq \alpha = \frac{1}{2\tau} - \delta, \quad k \geq 1, \tag{2.13}$$

где $\tau = \tau_1^j + \cdots + \tau_{s(j)}^j$. Из (2.12) получаем: $n(\Lambda^j) = \tau = \omega_\Lambda(\varphi_1 + 2\pi) - \omega_\Lambda(\varphi_1)$.

Пусть $j \geq 1$. В силу (2.12) найдется число $R_j > 0$, удовлетворяющее условию

$$\left| \frac{n(r, \Lambda^j(\varphi_s^j, \varphi_{s+1}^j])}{r} - (\omega(\varphi_{s+1}^j) - \omega(\varphi_s^j)) \right| < \frac{1}{js(j)}, \quad s = \overline{1, s(j)}, \quad r \geq R_j. \tag{2.14}$$

Можно считать, что

$$R_{j+1} \geq 2R_j, \quad R_{j+1} - \alpha > R_j, \quad j \geq 1. \tag{2.15}$$

Пусть $\Lambda^{j,j}$ — набор всех элементов последовательности Λ^j, которые лежат в кольце $\{\lambda \in \mathbb{C} : R_j \leqslant |\lambda| < R_{j+1} - \alpha\}$. Положим $\Lambda = \bigcup_{j \geq 1} \Lambda^{j,j}$. По построению $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \Lambda_\mathbb{Z}$. В силу (2.13) условие (2.11) выполняется для точек множеств $\Lambda^{j,j}$, $j \geq 1$. Также по построению $|\lambda_k^j| - |\lambda_n^l| \geq \alpha$, если $j \neq l$ и $\lambda_k^j \in \Lambda^{j,j}$, $\lambda_n^l \in \Lambda^{l,l}$. Отсюда следует, что условие (2.11) выполнено для последовательности Λ. Остается показать, что Λ имеет угловую плотность ω.

Фиксируем числа $\varphi, \psi \notin \Phi(\omega)$ такие, что $\varphi_1 \leqslant \varphi < \psi \leqslant \varphi_1 + 2\pi$. Докажем равенство $n(\Lambda(\varphi, \psi]) = \omega(\psi) - \omega(\varphi)$. Пусть $r > 0$ и номер $j(r)$ такой, что $R_{j(r)-1} < r \leqslant R_{j(r)}$. По построению для каждого номера j_0 и всех $r > R_{j_0}$ имеем:

$$n(r, \Lambda(\varphi, \psi]) = n(R_{j_0}, \Lambda(\varphi, \psi]) + \sum_{j=j_0}^{j(r)-2} \big(n(R_{j+1} - \alpha, \Lambda^j(\varphi, \psi]) - n(R_j, \Lambda^j(\varphi, \psi])\big) +$$

$$+n(t(r),\Lambda^{j(r)-1}(\varphi,\psi])-n(R_{j(r)-1},\Lambda^{j(r)-1}(\varphi,\psi]). \qquad (2.16)$$

где $t(r)=\min\{r,R_{j(r)}-\alpha\}$.

Для каждого $j\geq 1$ найдутся номера $1\leqslant i(j)\leqslant l(j)\leqslant s(j)$ такие, что верны вложения

$$\bigcup_{s=i(j)+1}^{l(j)-1}\Gamma(\varphi_s^j,\varphi_{s+1}^j]\subseteq\Gamma(\varphi,\psi]\subseteq\bigcup_{s=i(j)}^{l(j)}\Gamma(\varphi_s^j,\varphi_{s+1}^j]$$

(для конечного числа номеров j может оказаться, что $i(j)+1>l(j)-1$; в этом случае левое вложение отсутствует). Тогда имеем:

$$\sum_{s=i(j)+1}^{l(j)-1}\left(n(r,\Lambda^j(\varphi_s^j,\varphi_{s+1}^j])-n(\widetilde{r},\Lambda^j(\varphi_s^j,\varphi_{s+1}^j])\right)\leqslant n(r,\Lambda^j(\varphi,\psi])-n(\widetilde{r},\Lambda^j(\varphi,\psi])\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{s=i(j)}^{l(j)}\left(n(r,\Lambda^j(\varphi_s^j,\varphi_{s+1}^j])-n(\widetilde{r},\Lambda^j(\varphi_s^j,\varphi_{s+1}^j])\right),\quad 0<\widetilde{r}<r. \qquad (2.17)$$

Пусть $1\leqslant i\leqslant l\leqslant s(j)$ и $r>\widetilde{r}\geq R_j$. В силу (2.14) верно неравенство

$$\left|\sum_{s=i}^{l}\left(n(r,\Lambda^j(\varphi_s^j,\varphi_{s+1}^j])-n(\widetilde{r},\Lambda^j(\varphi_s^j,\varphi_{s+1}^j])\right)-(r-\widetilde{r})\sum_{s=i}^{l}\left(\omega(\varphi_{s+1}^j)-\omega(\varphi_s^j)\right)\right|\leqslant\frac{2r}{j}.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{s=i}^{l}\left(n(r,\Lambda^j(\varphi_s^j,\varphi_{s+1}^j])-n(\widetilde{r},\Lambda^j(\varphi_s^j,\varphi_{s+1}^j])\right)-(r-\widetilde{r})\left(\omega(\varphi_l^j)-\omega(\varphi_i^j)\right)\right|\leqslant\frac{2r}{j}.$$

Отсюда с учетом (2.17) получаем:

$$(r-\widetilde{r})\left(\omega(\varphi_{l(j)-1}^j)-\omega(\varphi_{i(j)+1}^j)\right)-2r/j\leqslant n(r,\Lambda^j(\varphi,\psi])-n(\widetilde{r},\Lambda^j(\varphi,\psi])\leqslant$$

$$\leqslant(r-\widetilde{r})\left(\omega(\varphi_{l(j)}^j)-\omega(\varphi_{i(j)}^j)\right)+2r/j,\quad j\geq 1,\quad r>\widetilde{r}\geq R_j. \qquad (2.18)$$

Пусть $\varepsilon>0$. В силу непрерывности ω в точках ψ и φ найдется $\delta>0$ такое, что

$$|\omega(\widetilde{\psi})-\omega(\widetilde{\varphi})-(\omega(\psi)-\omega(\varphi))|<\varepsilon,\quad\forall\widetilde{\psi},\widetilde{\varphi}:|\widetilde{\psi}-\psi|<\delta,|\widetilde{\varphi}-\varphi|<\delta. \qquad (2.19)$$

Выберем номер $j_0\geq\max\{1/\delta,1/\varepsilon\}$. Тогда с учетом (2.16), (2.18), (2.19) и (2.15) имеем:

$$n(r,\Lambda(\varphi,\psi])\geq n(R_{j_0},\Lambda(\varphi,\psi])+\sum_{j=j_0}^{j(r)-2}\left((R_{j+1}-\alpha-R_j)(\omega(\varphi_{l(j)}^j)-\omega(\varphi_{i(j)}^j))-\frac{2R_{j+1}}{j}\right)+$$

$$+(t(r)-R_{j(r)-1})(\omega(\varphi_{l(j(r)-1)}^{j(r)-1})-\omega(\varphi_{i(j(r)-1)}^{j(r)-1}))-\frac{2t(r)}{j(r)-1}\geq n(R_{j_0},\Lambda(\varphi,\psi])+$$

$$+\sum_{j=j_0+1}^{j(r)-1}\left((R_{j+1}-\alpha-R_j)(\omega(\psi)-\omega(\varphi)-\varepsilon)-\frac{2R_{j+1}}{j}\right)+$$

$$+(t(r)-R_{j(r)-1})(\omega(\psi)-\omega(\varphi)-\varepsilon)-\frac{2t(r)}{j(r)-1}\geq n(R_{j_0},\Lambda(\varphi,\psi])+$$

$$+(\omega(\psi)-\omega(\varphi)-\varepsilon)\left(\sum_{j=j_0}^{j(r)-2}(R_{j+1}-\alpha-R_j)+t(r)-R_{j(r)-1}\right)-\sum_{j=j_0}^{j(r)-2}\frac{2R_{j+1}}{j}-$$

$$-\frac{2t(r)}{j(r)-1}\geq n(R_{j_0},\Lambda(\varphi,\psi])+(\omega(\psi)-\omega(\varphi)-\varepsilon)(r-R_{j_0}-\alpha j(r))-6\varepsilon r,\quad r>R_{j_0}.$$

Следовательно,

$$\underline{n}(\Lambda(\varphi,\psi]) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda(\varphi,\psi])}{r} \geq \omega(\psi)-\omega(\varphi)-\varepsilon-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\alpha j(r)}{r}-6\varepsilon.$$

В силу выбора номера $j(r)$ и (2.15) верны неравенства $r > R_{j(r)-1} \geq 2^{j(r)-2}R_1$. Поэтому $\underline{n}(\Lambda(\varphi,\psi]) \geq \omega(\psi)-\omega(\varphi)-7\varepsilon$. Так как $\varepsilon>0$ – любое, то $\underline{n}(\Lambda(\varphi,\psi]) \geq \omega(\psi)-\omega(\varphi)$. Аналогично получаем оценку сверху: $\overline{n}(\Lambda(\varphi,\psi]) \leqslant \omega(\psi)-\omega(\varphi)$. Таким образом, верны равенства $\underline{n}(\Lambda(\varphi,\psi]) = \overline{n}(\Lambda(\varphi,\psi]) = n(\Lambda(\varphi,\psi]) = \omega(\psi)-\omega(\varphi)$. Отсюда по лемме 2.4 находим, что Λ имеет угловую плотность ω. Теорема доказана.

Напомним, что последовательность $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется правильно распределенным множеством (см. [1], гл. II, §1) при порядке один, если она имеет угловую плотность и выполнено условие Линделефа, т.е. существует $\lim\limits_{r\to\infty} N(r,\Lambda)$, где

$$N(r,\Lambda) = \sum_{|\lambda_k|<r}\frac{1}{\lambda_k}.$$

В следующих утверждениях дается ответ на вопрос, как последовательность с угловой плотностью "превратить"в правильно распределенное множество.

Пусть Λ имеет угловую плотность. Будем говорить, что Λ — последовательность общего вида, если существуют $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3 \in [-\pi,\pi)$ такие, что $\varphi_1<\varphi_2<\varphi_3$, $\varphi_2-\varphi_1<\pi$, $\varphi_3-\varphi_2<\pi$, $\varphi_1+2\pi-\varphi_3<\pi$ и

$$n(\Lambda(\varphi_j-\varphi,\varphi_j+\varphi))>0, \quad j=1,2,3, \quad \varphi\in(0,\pi/2).$$

Отметим, что функция, стоящая слева в этом неравенстве и зависящая от φ, является неубывающей. Поэтому достаточно, чтобы неравенство выполнялось на некоторой последовательности $\varphi=\psi_{j,p}\to 0$.

Лемма 2.5. *Пусть $a>1$, $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\mathbb{C}\ni\gamma_m\to 0$, $m\to\infty$. Предположим, что Λ — последовательность общего вида. Тогда существует последовательность нулевой плотности $T\subset\Lambda$ такая, что*

$$\sum_{m=1}^{l}\gamma_m - N(a^{l+1},T)\to 0, \quad l\to\infty.$$

Доказательство. Пусть $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ — числа, участвующие в определении последовательности общего вида. Положим

$$\varphi_0 = 4^{-1}\min\{\pi-(\varphi_2-\varphi_1);\pi-(\varphi_3-\varphi_2);\pi-(\varphi_1+2\pi-\varphi_3)\}<\pi/4.$$

Отметим важное свойство чисел $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$. Для любой прямой, проходящей через начало координат, и для любой из двух полуплоскостей, образованных этой прямой, существует $j=1,2,3$ такое, что угол $\Gamma_j=\Gamma(\varphi_j-2\varphi_0,\varphi_j+2\varphi_0)$ лежит в этой полуплоскости.

Множество T будем искать в виде $T=\bigcup_{m=1}^{\infty}T_m$, где $T_m=\{t_l\}_{l=\widetilde{p}(m-1)+1}^{\widetilde{p}(m)}=\{\lambda_{k(m,p)}\}_{p=1}^{p(m)}$ – некоторое подмножество Λ, лежащее в кольце $K(m)=\{\xi : a^m<|\xi|\leqslant a^{m+1}\}$. Возможно, что $T_m=\emptyset$ (т.е. $p(m)=0$, $\widetilde{p}(m)=\widetilde{p}(m-1)$) для некоторых m.

Положим $\widetilde{p}(0)=p(0)=0$, $\gamma_0(0)=0$, $\gamma_m(0)=\gamma_{m-1}(p(m-1))+\gamma_m$, $m\geq 1$,

$$\gamma_m(p)=\gamma_m(0)-\sum_{\mu=\widetilde{p}(m-1)+1}^{\widetilde{p}(m-1)+p}\frac{1}{t_\mu}, \quad p=\overline{1,p(m)}. \tag{2.20}$$

Пусть $\widetilde{\Gamma}_j=\Gamma(\varphi_j-\varphi_0,\varphi_j+\varphi_0)$, $j=1,2,3$, $\Pi(\varphi)=\{\xi\in\mathbb{C} : Re(\xi e^{i\varphi}\}>0$, $\varphi(m,p)$ — аргумент числа $\gamma_m(p)$ и $j(m,p)$, $m\neq 0$, – номер, такой, что $\Gamma_{j(m,p)}\subset\Pi(\varphi(m,p))$.

Для каждого $m\geq 1$ выберем набор $T_m=\{t_l\}_{l=\widetilde{p}(m-1)+1}^{\widetilde{p}(m-1)+p(m)}$ такой, что

1) $p(m)$ – минимальное неотрицательное целое число, для которого либо $|\gamma_m(p(m))| \leqslant (a^m \sin\varphi_0)^{-1}$, либо множество $K(m) \bigcap \Gamma_{j(m,p(m))}$ не содержит точек последовательности $\Lambda \setminus T_m$.

2) Для каждого $p = \overline{1, p(m)}$ число $t_{\widetilde{p}(m-1)+p}$ – произвольный элемент $\lambda_{k(m,p)} \in \Lambda \setminus T_{m,p-1}$ (где $T_{m,0} = \emptyset$ и $T_{m,p-1} = \{\lambda_{k(m,s)}\}_{s=1}^{p-1}$, $p > 1$), принадлежащий пересечению $K(m) \bigcap \widetilde{\Gamma}_{j(m,p-1)}$.

Таким образом, множество $T = \bigcup_{m=1}^{\infty} T_m$ определено. Найдем оценку сверху для номеров $p(m) > 0$. Прежде всего, докажем, что справедливо неравенство:

$$|\gamma_m(p)| \leqslant |\gamma_m(p-1)| - 2^{-1} a^{-m-1} \sin\varphi_0, \quad p = \overline{1, p(m)}. \tag{2.21}$$

Согласно (2.20) имеем: $\gamma_m(p) = \gamma_m(p-1) - (\lambda_{k(m,p)})^{-1}$. Тогда по теореме косинусов

$$|\gamma_m(p)|^2 = |\gamma_m(p-1)|^2 + |\lambda_{k(m,p)}|^{-2} - 2|\gamma_m(p-1)||\lambda_{k(m,p)}|^{-1} \cos\alpha,$$

где α – тот из двух углов между векторами $\gamma_m(p-1)$ и $(\lambda_{k(m,p)})^{-1}$, который не превосходит $\pi/2 - \varphi_0$ (такой существует, т.к. $\lambda_{k(m,p)} \in \widetilde{\Gamma}_{j(m,p-1)}$). Поскольку $\lambda_{k(m,p)} \in K(m)$, а в силу 1) верно неравенство $|\gamma_m(p-1)| > (a^m \sin\varphi_0)^{-1}$, то

$$|\gamma_m(p-1)|^2 - |\gamma_m(p)|^2 \geq 2|\gamma_m(p-1)||\lambda_{k(m,p)}|^{-1} \sin\varphi_0 - |\lambda_{k(m,p)}|^{-2} =$$
$$= |\gamma_m(p-1)||\lambda_{k(m,p)}|^{-1} \left(2\sin\varphi_0 - (|\lambda_{k(m,p)}||\gamma_m(p-1)|)^{-1}\right) \geq$$
$$\geq |\gamma_m(p-1)||\lambda_{k(m,p)}|^{-1} (2\sin\varphi_0 - \sin\varphi_0) \geq |\gamma_m(p-1)| a^{-m-1} \sin\varphi_0.$$

В частности, $|\gamma_m(p-1)| > |\gamma_m(p)|$. Следовательно,

$$2|\gamma_m(p-1)|(|\gamma_m(p-1)| - |\gamma_m(p)|) \geq$$
$$\geq (|\gamma_m(p-1)| + |\gamma_m(p)|)(|\gamma_m(p-1)| - |\gamma_m(p)|) \geq |\gamma_m(p-1)| a^{-m-1} \sin\varphi_0.$$

Отсюда получаем неравенство (2.21). Применяя его $p(m)$ раз, имеем:

$$0 \leqslant |\gamma_m(p(m))| \leqslant |\gamma_m(0)| - 2^{-1} a^{-m-1} p(m) \sin\varphi_0, \quad m \geq 1. \tag{2.22}$$

(Для $p(m) = 0$ неравенство тривиально). Поэтому

$$p(m) \leqslant 2a^{m+1} (\sin\varphi_0)^{-1} |\gamma_m(0)|, \quad m \geq 1. \tag{2.23}$$

Покажем теперь, что

$$\gamma_l(p(l)) = \sum_{m=1}^{l} \gamma_m - N(a^{l+1}, T) \to 0, \quad l \to \infty. \tag{2.24}$$

По условию $n(\Lambda(\varphi_j - \varphi_0, \varphi_j + \varphi_0)) > 0$, $j = 1, 2, 3$. Тогда

$$\lim_{m\to\infty} \frac{n(a^{m+1}, \Lambda(\varphi_j - \varphi_0, \varphi_j + \varphi_0)) - n(a^m, \Lambda(\varphi_j - \varphi_0, \varphi_j + \varphi_0))}{a^{m+1}} =$$
$$= n(\Lambda(\varphi_j - \varphi_0, \varphi_j + \varphi_0)) - a^{-1} n(\Lambda(\varphi_j - \varphi_0, \varphi_j + \varphi_0)) > 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно, существуют число $\tau > 0$ и номер m_0 такие, что

$$n(a^{m+1}, \Lambda(\varphi_j - \varphi_0, \varphi_j + \varphi_0)) - n(a^m, \Lambda(\varphi_j - \varphi_0, \varphi_j + \varphi_0)) \geq a^{m+1}, \ \ j = 1, 2, 3, \ \ m \geq m_0.$$

Отсюда с учетом (2.22) и 1), 2) получаем

$$|\gamma_m(p(m))| \leqslant \max\{(a^m \sin\varphi_0)^{-1}, |\gamma_m(0)| - 2^{-1}\tau \sin\varphi_0\}, \quad m \geq m_0. \tag{2.25}$$

Согласно условию леммы можно считать, что

$$|\gamma_m| + (a^{m-1} \sin\varphi_0)^{-1} \leqslant 4^{-1}\tau \sin\varphi_0, \quad m \geq m_0. \tag{2.26}$$

Предположим, что $|\gamma_m(p(m))| > (a^m \sin\varphi_0)^{-1}$ для всех $m \geq m_0$. Тогда из (2.25), (2.26) и определения $\gamma_m(0)$ имеем:

$$|\gamma_l(p(l))| \leqslant |\gamma_l(0)| - 2^{-1}\tau \sin\varphi_0 \leqslant |\gamma_{l-1}(p(l-1))| + |\gamma_l| - 2^{-1}\tau \sin\varphi_0 \leqslant$$
$$\leqslant |\gamma_{l-1}(p(l-1))| - 4^{-1}\tau \sin\varphi_0 \leqslant \cdots \leqslant |\gamma_{m_0}(p(m_0))| - 4^{-1}\tau(l - m_0) \sin\varphi_0.$$

При больших номерах l правая часть здесь становится отрицательной. Получили противоречие. Таким образом, существует $m_1 \geq m_0$ такое, что $|\gamma_{m_1}(p(m_1))| \leqslant (a^{m_1}\sin\varphi_0)^{-1}$. Тогда в силу (2.26) получаем

$$|\gamma_{m_1+1}(0)| - 2^{-1}\tau\sin\varphi_0 \leqslant |\gamma_{m_1}(p(m_1))| + |\gamma_{m_1+1}| - 2^{-1}\tau\sin\varphi_0 \leqslant 0.$$

Следовательно, с учетом (2.25) имеем: $|\gamma_{m_1+1}(p(m_1+1))| \leqslant (a^{m_1+1}\sin\varphi_0)^{-1}$. Это означает, что (2.24) верно. Остается показать, что T имеет нулевую плотность. Согласно (2.23), (2.24), условию леммы и определению $\gamma_m(0)$ имеем:

$$\frac{p(m)}{a^m} \leqslant \frac{2a|\gamma_m(0)|}{\sin\varphi_0} \leqslant \frac{2a(|\gamma_{m-1}(p(m-1))| + |\gamma_m|)}{\sin\varphi_0} \to 0, \quad m\to\infty.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существует номер $m(\varepsilon)$ такой, что $p(m) \leqslant \varepsilon a^m$, $m \geq m(\varepsilon)$. Пусть $r > a^{m(\varepsilon)}$ и номер $m(r)$ выбран так, что $a^{m(r)} \leqslant r < a^{m(r)+1}$. Тогда

$$\frac{n(r,T)}{r} = \frac{n(a^{m(\varepsilon)},T)}{r} + \frac{n(a^{m(r)+1},T) - n(a^{m(\varepsilon)},T)}{r} \leqslant \frac{n(a^{m(\varepsilon)},T)}{r} +$$
$$+\frac{p(m(\varepsilon)) + \cdots + p(m(r))}{a^{m(r)}} \leqslant \frac{n(a^{m(\varepsilon)},T)}{r} + \varepsilon\frac{a^{m(\varepsilon)} + \cdots + a^{m(r)}}{a^{m(r)}}.$$

Отсюда следует, что $\overline{n}(T) \leqslant \varepsilon a/(a-1)$. Так как $\varepsilon > 0$ любое, то лемма доказана.

Лемма 2.6. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ *имеет плотность* $\tau \geq 0$, $a > 1$, $r_2 > r_1 > 0$ *и* $r_2/r_1 \leqslant a$. *Тогда имеет место представление*

$$\sum_{r_1\leqslant|\lambda_k|<r_2} \frac{1}{|\lambda_k|} = \tau\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \varepsilon(r_1,r_2), \quad \varepsilon(r_1,r_2)\to 0, \quad r_1\to\infty, \quad r_2 > r_1 > 0, \quad r_2/r_1 \leqslant a,$$

(т.е. $\varepsilon(r_1,r_2) \to 0$, $r_1 \to \infty$, *равномерно по* $r_2 : r_2 > r_1 > 0, r_2/r_1 \leqslant a$*)*

Замечание. Если в кольце $r_1 \leqslant |\lambda| < r_2$ нет точек λ_k, то считаем, что левая часть в этом равенстве равна нулю.

Доказательство: Считаем, что $n(r,\Lambda) \to +\infty$, $r \to \infty$ (в противном случае утверждение леммы становится тривиальным).

Пусть $\tau = 0$. Так как $r_2/r_1 \leqslant a$, то

$$\sum_{r_1\leqslant|\lambda_k|<r_2} \frac{1}{|\lambda_k|} \leqslant \frac{1}{r_1}\left(n(ar_1,\Lambda) - n(r_1,\Lambda)\right) \to 0, \quad r_1\to\infty.$$

Пусть теперь $\tau > 0$. Согласно представлению Л. Эйлера имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \beta + \beta(n), \quad \beta(n)\to 0, \quad n\to\infty, \tag{2.27}$$

где β – постоянная Эйлера. По условию Λ имеет плотность τ, т.е. справедливы равенства:

$$|\lambda_k| = k/(\tau+\delta(k)), k\to\infty, \quad n(r,\Lambda) = \tau r + \varepsilon(r)r, \varepsilon(r)\to 0, r\to\infty. \tag{2.28}$$

Отсюда с учетом (2.27) получаем

$$\sum_{r_1\leqslant|\lambda_k|<r_2} \frac{1}{|\lambda_k|} = \sum_{r_1\leqslant|\lambda_k|<r_2} \frac{\tau+\delta(k)}{k} = \tau\sum_{k=n(r_1,\Lambda)+1}^{n(r_2,\Lambda)} \frac{1}{k} + \sum_{k=n(r_1,\Lambda)+1}^{n(r_2,\Lambda)} \frac{\delta(k)}{k} =$$

$$= \tau\ln\frac{n(r_2,\Lambda)}{n(r_1,\Lambda)} + \tau\left(\beta(n(r_2,\Lambda)) - \beta(n(r_1,\Lambda))\right) + \sum_{k=n(r_1,\Lambda)+1}^{n(r_2,\Lambda)} \frac{\delta(k)}{k} =$$

$$= \tau\ln\frac{r_2}{r_1} + \tau\left(\ln\frac{\tau+\varepsilon(r_2)}{\tau+\varepsilon(r_1)} + \beta(n(r_2,\Lambda)) - \beta(n(r_1,\Lambda))\right) + \sum_{k=n(r_1,\Lambda)+1}^{n(r_2,\Lambda)} \frac{\delta(k)}{k}.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Согласно (2.27) и (2.28) выберем номер k_0 такой, что $|\delta(k)| \leqslant \varepsilon$, $\beta(n)| \leqslant \varepsilon$, $k, n \geq k_0$. Согласно (2.28) выберем еще $r(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left|\ln \frac{\tau+\varepsilon(r_2)}{\tau+\varepsilon(r_1)}\right| \leqslant \varepsilon, \quad n(r_1,\Lambda) \geq k_0, \quad r_2 > r_1 > r(\varepsilon).$$

Тогда

$$|\varepsilon(r_1,r_2)| \leqslant 3\varepsilon\tau + \varepsilon \sum_{k=n(r_1,\Lambda)+1}^{n(ar_1,\Lambda)} \frac{1}{k} \leqslant 3\varepsilon\tau + \varepsilon(\ln a + 3\varepsilon), \;\; r_2 > r_1 > r(\varepsilon), \quad r_2/r_1 \leqslant a.$$

Лемма доказана.

Пусть K — выпуклый компакт. Он единственным образом задает функцию из класса Σ при помощи длины дуги его границы ∂K. Для каждого $\varphi \in \mathbb{R}$ через $L(\varphi, K)$ обозначим пересечение опорной прямой

$$l(\varphi,K) = \{z : Re(ze^{-i\varphi}) = H(\varphi,K)\}, \qquad H(\varphi,K) = \sup_{z\in K} Re(ze^{-i\varphi}),$$

и границы ∂K ($H(\varphi,K)$ — опорная функция компакта K). Множество $L(\varphi,K)$ является либо точкой, которую обозначим $z(\varphi,K)$, либо отрезком. Множество $\Psi(K)$ направлений φ, для которых $L(\varphi,K)$ — отрезок, не более чем счетное. Пусть $\varphi_1,\varphi_2 \notin \Psi(K)$, $\varphi_2-\varphi_1 \in (0,2\pi)$, и $s(\varphi_1,\varphi_2,K)$ — длина дуги ∂K, соединяющей точки $z(\varphi_1,K)$ и $z(\varphi_2,K)$, движение по которой от $z(\varphi_1,K)$ к $z(\varphi_2,K)$ осуществляется в положительном направлении (против часовой стрелки). Пусть $\varphi_1,\varphi_2 \in (-2\pi,0)\setminus\Psi(K)$, $\varphi \in (\varphi_1,\varphi_1+2\pi)\setminus\Psi(K)$. Функция

$$\omega(\varphi_1,K) = -\lim_{\varphi_2\to 0} s(\varphi_1,\varphi_2,K), \quad \omega(\varphi,K) = s(\varphi_1,\varphi,K) + \omega(\varphi_1,K)$$

единственным образом продолжается до функции из класса Σ, причем продолжение не зависит от φ_1. Нетрудно заметить, что множества $\Psi(K)\bigcap[-2\pi,2\pi)$ и $\Phi(\omega(\cdot,K))$ совпадают.

Пусть $\varphi_s \notin \Phi(K)$, $s=\overline{1,p}$, такие, что $\varphi_1 \in (-2\pi,0)$ и $\varphi_1 < \cdots < \varphi_p < \varphi_1+2\pi = \varphi_{p+1}$. Положим $a_s = z(\varphi_s,K)$, $s=\overline{1,p+1}$. Рассмотрим выпуклый многоугольник Ω с вершинами $a_1,\ldots,a_p,a_{p+1}=a_1$, вписанный в компакт K. Отметим, что некоторые вершины с соседними номерами могут совпадать между собой. Символом e_s обозначим единичную внешнюю нормаль к $\partial\Omega$ во внутренних точках (когда они есть) отрезка $[a_s,a_{s+1}]$ (отметим, что для некоторого $\varphi(s) \in (\varphi_s,\varphi_{s+1})$ верно равенство $e_s = e^{i\varphi(s)}$). Если $a_s = a_{s+1}$, то под e_s будем понимать произвольным образом выбранный вектор $e^{i\varphi}$, где $\varphi \in (\varphi_s,\varphi_{s+1})$. Следующее утверждение имеет простой геометрический смысл.

Лемма 2.7. *Верно равенство*

$$\sum_{s=1}^{p} |a_{s+1}-a_s| e_s = 0.$$

Доказательство. Имеем:

$$\sum_{s=1}^{p} |a_{s+1}-a_s| e_s = \sum_{s=1}^{p} (a_{s+1}-a_s) e^{-i\pi/2} = 0.$$

Замечание. Из леммы 2.7 следует, что для $\omega = \omega(\cdot,K)$ верно равенство

$$\int_0^{2\pi} e^{i\varphi} d\omega(\varphi) = 0. \tag{2.29}$$

Обратно, пусть $\omega \in \Sigma$ удовлетворяет этому равенству. Тогда (см. [3], гл. I, §17, теорема 24, [2], гл. I, §2, теорема 1.2.4) функция

$$H(\varphi) = A\cos\varphi + B\sin\varphi - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi-2\pi}^{\varphi}(\varphi-\theta)\sin(\varphi-\theta)d\omega(\theta),$$

совпадает с опорной функцией $H(\varphi, K)$ выпуклого компакта K (для различных $A, B \in \mathbb{R}$ компакты получаются друг из друга при помощи сдвига). При этом $\omega(\theta) \equiv \omega(\theta, K)$.

Символом Σ_0 обозначим подкласс всех функций $\omega \in \Sigma$, удовлетворяющих (2.29).

Лемма 2.8. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет угловую плотность $\omega_\Lambda \in \Sigma_0$. Тогда для любых $a > 1$, $r_2 > r_1 > 0$ и $r_2/r_1 \leqslant a$*

$$\mathcal{N}(r_2, \Lambda) - \mathcal{N}(r_1, \Lambda) = \varepsilon(r_1, r_2) \to 0, \quad r_1 \to \infty.$$

Доказательство. По условию $\omega_\Lambda \in \Sigma_0$. Тогда, как отмечено выше, найдется выпуклый компакт K такой, для которого верно тождество $\omega_\Lambda \equiv \omega(\varphi, K)$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ такое, что

$$|e^{i\varphi} - e^{i\theta}| \leqslant \varepsilon/(4s(K)\ln a), \quad \forall \varphi, \theta : |\varphi - \theta| < \delta,$$

где $s(K) = \omega_\Lambda(\varphi_1 + 2\pi) - \omega_\Lambda(\varphi_1)$ — длина границы компакта K. Выберем теперь числа $\varphi_s \notin \Phi(\omega_\Lambda)$, $s = \overline{1,p}$, $\varphi_1 \in (-2\pi, 0)$, $\varphi_1 < \cdots < \varphi_p < \varphi_1 + 2\pi = \varphi_{p+1}$, удовлетворяющие условиям: 1) $\varphi_{s+1} - \varphi_s < \delta$, $s = \overline{1,p}$, 2) $s(K) - P(\Omega) < \varepsilon/(4\ln a)$, где $P(\Omega)$ — периметр выпуклого многоугольника Ω с вершинами $a_1, \ldots, a_p, a_{p+1} = a_1$, $a_s = z(\varphi_s, K)$, $s = \overline{1,p+1}$.

Пусть $\lambda_k = |\lambda_k|e^{i\psi_k}$, $\psi_k \in (\varphi_1, \varphi_1 + 2\pi]$, $k \geq 1$, и $\varphi(s) \in (\varphi_s, \varphi_{s+1})$, $s = \overline{1,p}$, такие, что вектор $e_s = e^{i\varphi(s)}$ является внешней нормалью к $\partial\Omega$ во внутренних точках отрезка $[a_s, a_{s+1}]$ (если таких нет, то $\varphi(s) \in (\varphi_s, \varphi_{s+1})$ выбирается произвольно). Тогда в силу условия 1) и выбора $\delta > 0$ имеем:

$$\left|\sum_{\psi_k \in (\varphi_s, \varphi_{s+1}], r_1 \leqslant |\lambda_k| < r_2}\left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{|\lambda_k|e^{i\varphi(s)}}\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4s(K)\ln a}\sum_{\psi_k \in (\varphi_s, \varphi_{s+1}], r_1 \leqslant |\lambda_k| < r_2}\frac{1}{|\lambda_k|}.$$

Поскольку $n(\Lambda(\varphi_s, \varphi_{s+1}]) = \omega_\Lambda(\varphi_{s+1}) - \omega_\Lambda(\varphi_s)$, то отсюда с учетом леммы 2.6 получаем

$$\left|\sum_{\psi_k \in (\varphi_s, \varphi_{s+1}], r_1 \leqslant |\lambda_k| < r_2}\left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{|\lambda_k|e^{i\varphi(s)}}\right)\right| \leqslant \frac{\epsilon(\omega_\Lambda(\varphi_{s+1}) - \omega_\Lambda(\varphi_s))}{4s(K)} + \varepsilon_s(r_1, r_2),$$

где $r_2 > r_1 > 0$, $r_2/r_1 \leqslant a$ и $\varepsilon_s(r_1, r_2) \to 0$, $r_1 \to \infty$. Таким образом,

$$\sum_{s=1}^{p}\left|\sum_{\psi_k \in (\varphi_s, \varphi_{s+1}], r_1 \leqslant |\lambda_k| < r_2}\left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{|\lambda_k|e^{i\varphi(s)}}\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \widetilde{\varepsilon}(r_1, r_2) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.30}$$

где $r_2 > r_1 > r_0(\varepsilon)$, $\frac{r_2}{r_1} \leqslant a$.

Пусть $\omega_\Lambda(\varphi_{s+1}) - \omega_\Lambda(\varphi_s) = |a_{s+1} - a_s| + \gamma_s$. Используя снова лемму 2.6 и применяя лемму 2.7, имеем:

$$\sum_{s=1}^{p}\sum_{\psi_k \in (\varphi_s, \varphi_{s+1}], r_1 \leqslant |\lambda_k| < r_2}\frac{\overline{e}_s}{|\lambda_k|} = \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\sum_{s=1}^{p}\overline{e}_s(|a_{s+1} - a_s| + \gamma_s) + \hat{\varepsilon}(r_1, r_2) =$$

$$= \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\sum_{s=1}^{p}\overline{e}_s\gamma_s + \hat{\varepsilon}(r_1, r_2), \quad \hat{\varepsilon}(r_1, r_2) \to\to 0, \quad r_1 \to \infty.$$

Отсюда с учетом (2.30) и условия 2) получаем

$$\mathcal{N}(r_2, \Lambda) - \mathcal{N}(r_1, \Lambda) = \varepsilon(r_1, r_2),$$

$$|\varepsilon(r_1,r_2)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\left|\sum_{s=1}^{p} \overline{e}_s\gamma_s\right| + |\hat{\varepsilon}(r_1,r_2)| \leqslant \frac{3\varepsilon}{4} + \ln a(s(K) - P(\Omega)) \leqslant \varepsilon,$$

где $r_2 > r_1 > \widetilde{r}_0(\varepsilon)$, $r_2/r_1 \leqslant a$. Это завершает доказательство леммы.

Пусть $\omega \in \Sigma$. Будем говорить, что ω — функция общего вида, если существуют $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in [-\pi, \pi)$ такие, что $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$, $\varphi_2 - \varphi_1 < \pi$, $\varphi_3 - \varphi_2 < \pi$, $\varphi_1 + 2\pi - \varphi_3 < \pi$ и

$$\omega(\varphi_j + \varphi) - \omega(\varphi_j - \varphi) > 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \varphi \in (0, \pi/2).$$

Если Λ имеет угловую плотность ω, то нетрудно заметить, что Λ — последовательность общего вида тогда и только тогда, когда $\omega = \omega_\Lambda$ — функция общего вида. Пусть K — выпуклый компакт. Легко показать, что $\omega(\varphi, K)$ — функция общего вида в том и только том случае, когда К является замыканием ограниченной выпуклой области. Предположим, что верно тождество $\omega(\varphi) \equiv \omega(\varphi, K)$. Если K — точка, то $\omega(\varphi) \equiv 0$. Если K — отрезок, то ω на $[0, 2\pi]$ принимает ровно три попарно различных значения. В остальных случаях (т.е. когда К является замыканием области) ω принимает более трех попарно различных значений на отрезке $[0, 2\pi]$. Если $\omega \in \Sigma_0$, то, как отмечалось выше, существует выпуклый компакт K, для которого верно тождество $\omega(\varphi) \equiv \omega(\varphi, K)$.

Таким образом, если $\omega \in \Sigma_0$, то ω — функция общего вида тогда и только тогда, когда она принимает более трех попарно различных значений на отрезке $[0, 2\pi]$.

Лемма 2.9. *Пусть $\widetilde{\Lambda}$ имеет угловую плотность $\omega_{\widetilde{\Lambda}} \in \Sigma_0$ и $\omega_{\widetilde{\Lambda}}$ — функция общего вида. Тогда существует последовательность $\Lambda \subseteq \widetilde{\Lambda}$ с угловой плотностью $\omega_\Lambda = \omega_{\widetilde{\Lambda}}$ такая, что $\mathcal{N}(r, \Lambda) \to 0$, $r \to +\infty$.*

Доказательство. Положим

$$\gamma_1 = \mathcal{N}(2^2, \widetilde{\Lambda}), \quad \gamma_m = \mathcal{N}(2^{m+1}, \widetilde{\Lambda}) - \mathcal{N}(2^m, \widetilde{\Lambda}), \quad m \geq 2.$$

Так как $\omega_{\widetilde{\Lambda}} \in \Sigma_0$, то по лемме 2.8 $\gamma_m \to 0$, $m \to \infty$. По условию $\omega_{\widetilde{\Lambda}}$ — функция общего вида. Следовательно, $\widetilde{\Lambda}$ — последовательность общего вида. Тогда по лемме 2.5 существует последовательность нулевой плотности $T \subset \widetilde{\Lambda}$ такая, что

$$\sum_{m=1}^{l} \gamma_m - \mathcal{N}(2^{l+1}, T) \to 0, \quad l \to \infty.$$

Отсюда с учетом определения γ_m получаем: $\mathcal{N}(2^l, \widetilde{\Lambda}) - \mathcal{N}(2^l, T) \to 0$, $l \to \infty$. Пусть $\Lambda \subseteq \widetilde{\Lambda}$ — последовательность, дополняющая T до $\widetilde{\Lambda}$, т.е. $\widetilde{\Lambda} = \Lambda \bigcup T$. Тогда в силу предыдущего имеем: $\mathcal{N}(2^l, \Lambda) \to 0$, $l \to +\infty$. Для каждого $r > 0$ выберем номер $l(r)$ из условия $2^{l(r)} \leqslant r < 2^{l(r)+1}$. По доказанному и лемме 2.8. имеем:

$$N(r, \Lambda) = N(2^{l(r)}, \Lambda) + (\mathcal{N}(r, \Lambda) - \mathcal{N}(2^{l(r)}, \Lambda)) \to 0, \quad r \to +\infty.$$

Поскольку T имеет нулевую плотность, то последовательность Λ имеет угловую плотность $\omega_\Lambda = \omega_{\widetilde{\Lambda}}$. При этом верно вложение. Лемма доказана.

Теорема 2.2. *Пусть $\delta > 0$ и $\omega \in \Sigma_0$ — функция общего вида. Тогда существует последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \Lambda_{\mathbb{Z}}$ с угловой плотностью $\omega_\Lambda = \omega$ такая, что*

$$|\lambda_{k+1}| - |\lambda_k| \geq \alpha = \frac{1}{2(\omega_\Lambda(\varphi_1 + 2\pi) - \omega_\Lambda(\varphi_1))} - \delta, \quad k \geq 1, \tag{2.31}$$

где $\varphi_1 \in (-2\pi, 0) \setminus \Phi(\omega)$ выбирается произвольно, и $\mathcal{N}(r, \Lambda) \to 0$, $r \to +\infty$.

Доказательство. По теореме 2.1 существует последовательность $\widetilde{\Lambda} = \{\widetilde{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \Lambda_{\mathbb{Z}}$ с угловой плотностью $\omega_{\widetilde{\Lambda}} = \omega$ такая, что

$$|\widetilde{\lambda}_{k+1}| - |\widetilde{\lambda}_k| \geq \alpha, \quad k \geq 1, \tag{2.32}$$

Согласно лемме 2.9 найдем последовательность $\Lambda \subseteq \widetilde{\Lambda} \subseteq \Lambda_{\mathbb{Z}}$ с угловой плотностью $\omega_\Lambda = \omega_{\widetilde{\Lambda}} = \omega$, удовлетворяющую условию $\mathcal{N}(r, \Lambda) \to 0$, $r \to +\infty$. Остается заметить, что неравенства (2.31) выполнены для $\Lambda \subseteq \widetilde{\Lambda}$ в силу (2.32). Теорема доказана.

Замечание. Последовательность $\Lambda \subseteq \Lambda_{\mathbb{Z}}$, существование которой доказывается в теореме 2.2, является регулярным множеством (и, в частности, правильно распределенным).

3. Представление аналитических функций

Правильно распределенные множества тесно связаны с функциями регулярного роста. Пусть f — целая функция экспоненциального типа, т.е. существуют $A > 0$ и $B > 0$ такие, что

$$\ln |f(\lambda)| \leqslant A + B|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Верхним индикатором f (или просто индикатором) называется функция

$$h_f(\lambda) = \varlimsup_{t \to \infty} \frac{\ln |f(t\lambda)|}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Индикатор h_f является выпуклой положительно однородной порядка один функцией. При этом $h_f(e^{i\varphi})$ совпадает с опорной функцией $H(\varphi, K)$ некоторого выпуклого компакта K, называемого индикаторной диаграммой f (см., [3], гл. I, §19). Компакт комплексно сопряженный с K называется сопряженной диаграммой функции f.

Говорят (см. [3], гл. III), что f имеет регулярный рост, если

$$h_f(\lambda) = \lim_{t \to \infty, t \notin E} \frac{\ln |f(t\lambda)|}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где E — множество нулевой относительной меры на луче $(0, +\infty)$, т.е. мера Лебега его пересечения с интервалом $(0, r)$ бесконечна мала по сравнению с r при $r \to +\infty$. Регулярность роста функции f равносильна асимптотическому равенству

$$\ln |f(\lambda)| = h_f(\lambda) + \alpha(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lim_{|\lambda| \to \infty, \lambda \notin \mathcal{I}_f} \alpha(\lambda)/|\lambda| = 0,$$

где $\mathcal{I}_f$ — некоторое C^0 — множество. Напомним (см. [3], гл. II, §1), что $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$ называется C^0 — множеством, если его можно покрыть кругами $B(z_j, r_j)$, $j \geq 1$, такими, что

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{r} \sum_{|z_j| < r} r_j = 0.$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $f(\lambda, \Lambda)$ — каноническое произведение:

$$f(\lambda, \Lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \exp \frac{n_k \lambda}{\lambda_k}.$$

Функция $f(\lambda, \Lambda)$ имеет регулярный рост тогда и только тогда (см. [3], гл. III, §3, теорема 4 и гл. II, §1, теорема 2), когда Λ — правильно распределенное множество. При этом его угловая плотность ω_Λ принадлежит множеству Σ_0. Если K — индикаторная диаграмма функции $f(\lambda, \Lambda)$, то (см. [3], гл. II, §1, формула (2.07)) $\omega_\Lambda(\theta) \equiv \omega(\theta, K)/2\pi$ и $h_f(e^{i\varphi}) \equiv H(\varphi, K)$.

Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $H(\overline{D})$ — пространство функций, аналитических в окрестности ее замыкания $\overline{D}$. Хорошо известны условия А.Ф. Леонтьева (см. [2], гл. IV, §6, теорема 4.6.4.) представления функций $g \in H(\overline{D})$ в виде ряда

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D, \tag{3.1}$$

в случае, когда Λ является множеством простых нулей целой функции f экспоненциального типа, сопряженная диаграмма которой совпадает с $\overline{D}$. Этих условий два: регулярность роста функции f и оценка снизу модуля ее производных в точках λ_k

$$\ln|f'(\lambda_k)| \geq h_f(\lambda_k) - \varepsilon_k|\lambda_k|, \quad 0 < \varepsilon_k \to 0, \quad k \to \infty.$$

Приведем достаточные условия представления (3.1) для произвольной последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ (она не обязана быть нулевым множеством какой-либо целой функции), которые формулируются только лишь в терминах геометрических характеристик Λ и D. Для этого нам потребуется «локальная» характеристика последовательности Λ, введенная в работе [7].

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Рассмотрим функцию

$$q_\Lambda(z, w, \delta) = \prod_{\lambda_k \in B(w, \delta|w|)} \frac{z - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}.$$

В случае, когда круг $B(w, \delta|w|)$ не содержит ни одной точки λ_k, полагаем $q_\Lambda(z, w, \delta) \equiv 1$. Модуль функции $q_\Lambda(z, w, \delta)$ можно интерпретировать как меру сгущения точек $\lambda_k \in B(w, \delta|w|)$ около z. Величина $\ln|q_\Lambda(z, w, \delta)|/|w|$ аналогична по смыслу логарифму среднего геометрического (среднему арифметическому логарифмов) нормированных расстояний от $\lambda_k \in B(w, \delta|w|)$ до z. Если $\delta \in (0, 1)$, то модуль каждого сомножителя из определения q_Λ в круге $B(w, \delta|w|)$ оценивается сверху величиной $2(3(1-\delta))^{-1}$. Поэтому для $\delta \in (0, 1/3)$ он не превосходит единицы. Положим

$$q_\Lambda^m(z, \delta) = \prod_{\lambda_k \in B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|), k \neq m} \frac{z - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}, \quad S_\Lambda = \lim_{\delta \to 0} \overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{\ln|q_\Lambda^m(\lambda_m, \delta)|}{|\lambda_m|}.$$

Из определения величины S_Λ следует неравенство $S_\Lambda \leqslant 0$ (см. [7]).

Лемма 3.1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — нулевое множество целой функции f экспоненциального типа и регулярного роста. Предположим, что $S_\Lambda = 0$. Тогда*

$$\ln|f'(\lambda_k)| \geq h_f(\lambda_k) - \varepsilon_k|\lambda_k|, \quad 0 < \varepsilon_k \to 0, \quad k \to \infty. \tag{3.2}$$

Доказательство. Регулярность роста функции f означает, что

$$\ln|f(\lambda)| = h_f(\lambda) + \alpha(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lim_{|\lambda| \to \infty, \lambda \notin \mathcal{I}_f} \alpha(\lambda)/|\lambda| = 0, \tag{3.3}$$

где $\mathcal{I}_f$-C^0 — множество. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем $R > 0$ такое, что

$$\alpha(\lambda) \geq -\varepsilon|\lambda|, \quad \lambda \in \mathcal{I}_f, \quad |\lambda| \geq R. \tag{3.4}$$

Индикатор $h_f(\lambda)$ является выпуклой функцией, а потому непрерывен. Пользуясь его равномерной непрерывностью на компактных подмножествах, найдем $\delta_0 \in (0, 1/3)$, для которого верно неравенство

$$|h_f(\lambda) - h_f(w)| \leqslant \varepsilon, \quad w \in B(\lambda, \delta_0), \quad |\lambda| = 1. \tag{3.5}$$

Согласно условию и определению величины S_Λ выберем $\delta \in (0, \delta_0)$ и номер k_0 такие, что

$$|\lambda_k| \geq 2R, \quad \ln|q_\Lambda^k(\lambda_k, \delta)| \geq -\varepsilon|\lambda_k|, \quad k \geq k_0. \tag{3.6}$$

Учитывая, наконец, что $\mathcal{I}_f$ является C^0 — множеством, можно считать выполненным следующее: для каждого $k \geq k_0$ общая сумма исключительных кружков из $\mathcal{I}_f$, пересекающих $B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$, не превосходит $\delta|\lambda_k|/4$. Тогда в силу (3.3), (3.4) и (3.6) для каждого $k \geq k_0$ найдется $\alpha_k \in (1/2, 1)$ такое, что

$$\ln|f(\lambda)| \geq h_f(\lambda) - \varepsilon|\lambda|, \quad \lambda \in \partial B(\lambda_k, \alpha_k\delta|\lambda_k|).$$

Отсюда, учитывая положительную однородность индикатора и (3.5), получаем:

$$\ln|f(\lambda)| \geq h_f(\lambda_k) - 3\varepsilon|\lambda_k|, \quad \lambda \in \partial B(\lambda_k, \alpha_k\delta|\lambda_k|), \quad k \geq k_0. \tag{3.7}$$

Согласно условию функция $\ln|(f(\lambda)/q_\Lambda(\lambda,\lambda_k,\delta)|$ — гармоническая в круге $B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|)$. Так как $\delta<1/3$, то функция $\ln|q_\Lambda(\lambda,\lambda_k,\delta)|$ не положительна в этом круге. Поэтому, используя (3.7) и принцип минимума для гармонических функций, имеем:

$$\ln|h_k(\lambda_k)|\geq h_f(\lambda_k)-3\varepsilon|\lambda_k|,\quad k\geq k_0.$$

Отсюда и (3.6) получаем:

$$\ln|f'(\lambda_k)|=\ln|h_k(\lambda_k)|+\ln|q^k_\Lambda(\lambda_k,\delta)|-\ln(3\delta|\lambda_k|)\geq h_f(\lambda_k)-5\varepsilon|\lambda_k|,\quad k\geq k_1.$$

Лемма доказана.

Замечания. 1. Оценка (3.2) влечет за собой равенство $S_\Lambda=0$. При этом регулярность роста функции f не требуется (см. доказательство следствия 4.2 в работе [8]).

2. Вопрос о том, следует ли регулярность роста f из оценки (3.2) остается открытым. Ответ на него составляет содержание проблемы А.Ф. Леонтьева.

3. Только лишь равенство $S_\Lambda=0$ не влечет за собой оценку (3.2) (см. пример в конце работы [9]).

Теорема 3.1. *Пусть D — ограниченная выпуклая область и $\widetilde{\Lambda}=\{\widetilde{\lambda}_k\}_{k=1}^\infty$ имеет угловую плотность. Предположим, что $S_{\widetilde{\Lambda}}=0$ и выполнено равенство $\omega_{\widetilde{\Lambda}}(\varphi)\equiv\omega(\varphi,\widetilde{K})/2\pi$, где $\widetilde{K}$ — комплексно сопряженный к $\overline{D}$ компакт. Тогда в области D каждая функция $g\in H(\overline{D})$ представляется рядом*

$$g(z)=\sum_{k=1}^\infty\widetilde{d}_k e^{\widetilde{\lambda}_k z},\quad z\in D. \tag{3.8}$$

Доказательство. Поскольку D — область, то $\omega(\psi,\widetilde{K})\in\Sigma_0$ (см. замечание к лемме 2.7) и $\omega(\psi,\widetilde{K})$ — функция общего вида. Тогда согласно лемме 2.9 существует правильно распределенное множество $\Lambda\subseteq\widetilde{\Lambda}$ с угловой плотностью $\omega_\Lambda=(2\pi)^{-1}\omega(\cdot,\widetilde{K})$. В начале параграфа отмечалось, что в этом случае каноническая функция $f(\lambda,\Lambda)$ имеет регулярный рост, а ее индикаторная диаграмма (см. замечание к лемме 2.7) совпадает с некоторым сдвигом $\widetilde{K}-z_0$ компакта $\widetilde{K}$.

Положим $f(\lambda)=f(\lambda,\Lambda)e^{\lambda\bar{z}_0}$. Тогда функция f имеет регулярный рост, а ее сопряженная диаграмма совпадает с $\overline{D}$. По условию $S_\Lambda=0$. Так как $\Lambda\subseteq\widetilde{\Lambda}$, то согласно определению все сомножители, образующие функцию $q^m_\Lambda(z,\delta)$, входят в число сомножителей, образующих функцию $q^m_{\widetilde{\Lambda}}(z,\delta)$. Модуль каждого из них при $\delta\in(0,1/3)$ не превосходит единицы. Отсюда следует неравенство $S_\Lambda\geq S_{\widetilde{\Lambda}}=0$. Выше отмечалось, что всегда $S_\Lambda=0$. Поэтому $S_\Lambda=0$.

Таким образом, можно применить лемму 3.1. Согласно ей имеет место оценка (3.2). Следовательно, по теореме 4.6.4. из книги [2] каждая функция $g\in H(\overline{D})$ представляется в области D рядом (3.1), а, значит, и рядом (3.8). Теорема доказана.

Замечание. Пусть $\{K_p\}_{p=1}^\infty$ — последовательность выпуклых компактов в области D, которая строго исчерпывает ее, т.е. $K_p\subset intK_{p+1}$, $p\geq1$, (символ *int* означает внутренность множества) и $D=\bigcup_{p=1}^\infty K_p$. Для каждого $p\geq1$ введем банахово пространство последовательностей комплексных чисел

$$Q_p=\{d=\{d_k\}:||d||_p=\sup_{k\geq1}|d_k|\exp H_{K_p}(\lambda_k)<\infty\}.$$

Пусть $Q(D,\Lambda)=\bigcap_{p\geq1}Q_p$ наделено топологией проективного предела. Согласно лемме 2.3 из работы [1] поточечная сходимость ряда (3.1) в области D влечет за собой включение $d=\{d_k\}\in Q(D,\Lambda)$. Кроме того, по теореме 3.1 этой работы (аналог теоремы Абеля для степенных рядов) верно неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |d_k| \max_{z\in K_p} |e^{\lambda_k z}| \leqslant C_p ||d||_{p+2}, \quad p \geq 1,$$

где $C_p > 0$ не зависит от $d = \{d_k\} \in Q_p$. В частности, это означает, что ряд (3.1) ((3.8)) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из области D.

Лемма 3.2. *Пусть $\alpha > 0$ и $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию*

$$|\lambda_{k+1}| - |\lambda_k| \geq \alpha, \quad k \geq 1. \tag{3.9}$$

Тогда $S_\Lambda = 0$.

Доказательство. Пусть $m \geq 1$ и $\delta \in (0, 1/3)$. С учетом (3.9) для каждого $\lambda_k \in B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|)$ имеем:

$$\delta|\lambda_m| > |\lambda_m - \lambda_k| \geq ||\lambda_m| - |\lambda_k|| \geq |m-k|\alpha.$$

Следовательно, верны неравенства $(1-\delta)|\lambda_m| < |\lambda_k| < (1+\delta)|\lambda_m|$. Через $l(m,\delta)$ обозначим максимальное натуральное число, для которого $l(m,\delta)\alpha < \delta|\lambda_m|$. Тогда величина $l\alpha/3\delta|\lambda_k|$ не превосходит единицы для всех $l = \overline{1, l(m,\delta)}$. Поэтому из предыдущего получаем (учитываем еще, что $s! \geq (s/3)^s$)

$$|q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)| \geq \prod_{\lambda_k\in B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|), k\neq m} \frac{|\lambda_m - \lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|} \geq \prod_{\lambda_k\in B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|), k\neq m} \frac{|m-k|\alpha}{3\delta|\lambda_k|} \geq$$

$$\geq \prod_{l=1}^{l(m,\delta)} \left(\frac{l\alpha}{3\delta|\lambda_k|}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{(1+\delta)3\delta|\lambda_m|}\right)^{2l(m,\delta)} (l(m,\delta)!)^2 \geq \left(\frac{l(m,\delta)\alpha}{(1+\delta)9\delta|\lambda_m|}\right)^{2l(m,\delta)}.$$

Таким образом, согласно определению $l(m,\delta)$ имеем:

$$S_\Lambda \geq \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{m\to\infty} \frac{2l(m,\delta)}{|\lambda_m|} \ln \frac{l(m,\delta)\alpha}{(1+\delta)9\delta|\lambda_m|} \geq \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{m\to\infty} \frac{2l(m,\delta)}{|\lambda_m|} \ln \frac{\delta|\lambda_m| - \alpha}{(1+\delta) = 9\delta|\lambda_m|} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{m\to\infty} \frac{2l(m,\delta)}{|\lambda_m|} \ln \frac{1}{(1+\delta)9} \geq \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{m\to\infty} \frac{2\delta|\lambda_m|}{\alpha|\lambda_m|} \ln \frac{1}{(1+\delta)9} = 0.$$

Поскольку всегда $S_\Lambda \leqslant 0$, то лемма доказана.

Теорема 3.2. *Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$. Тогда каждая функция $g \in H(\overline{D})$ представляется рядом*

$$g(z) = \sum_{m,l\in\mathbb{Z}} d_{m,l} e^{(m+il)z}, \quad z \in D. \tag{3.10}$$

При этом $\{d_{m,l}\} \in Q(D, \Lambda_\mathbb{Z})$ и ряд (3.10) сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах области D.

Доказательство. Пусть $\widetilde{K}$ — комплексно сопряженный к $\overline{D}$ компакт. Поскольку D — область, то $\omega(\psi, \widetilde{K}) \in \Sigma_0$ (см. замечание к лемме 2.7) и $\omega(\psi, \widetilde{K})$ — функция общего вида. Тогда по теореме 2.2 с учетом леммы 3.2 существует последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1} \subseteq \Lambda_\mathbb{Z}$ с угловой плотностью $\omega_\Lambda = (2\pi)^{-1}\omega(\cdot, \widetilde{K})$ такая, что $S_\Lambda = 0$. По теореме 3.1 каждая функция $g \in H(\overline{D})$ представляется в области D рядом (3.1), а, значит, и рядом (3.10), где полагаем $d_{m,l} = d_k$, если $(m+il) = \lambda_k \in \Lambda$, и $d_{m,l} = 0$, если $(m+il) \notin \Lambda$. При этом согласно замечанию к теореме 3.1 ряд (3.10) сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах области D. Кроме того, $\{d_k\} \in Q(D, \Lambda)$. Отсюда и определения коэффициентов $d_{m,l}$ следует, что $\{d_{m,l}\} \in Q(D, \Lambda_\mathbb{Z})$. Теорема доказана.

Замечания. 1. Согласно теореме Абеля для рядов экспонент из работы [1] (теорема 3.1) ряд (3.10) сходится в выпуклой области (возможно не ограниченной) абсолютно и равномерно на ее компактных подмножествах. Эта область определяется при помощи формулы Коши-Адамара для рядов экспонент ([1], теорема 4.1).

2. Из леммы 2.5 работы [1] следует, что для каждого набора коэффициентов $\{d_{m,l}\} \in Q(D, \Lambda_{\mathbb{Z}})$ сумма $g(z)$ ряда (3.10) является функцией аналитической в области D (но не обязательно в окрестности $\overline{D}$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кривошеева О.А. *Область сходимости рядов экспоненциальных мономов* // Уфимский математический журнал. 2011. Т.3. №2. С. 43–56.
2. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976.
3. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат, 1956.
4. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Замкнутость множества сумм рядов Дирихле* // Уфимский математический журнал. 2013. Т.5. №3. С. 96–120.
5. Абдулнагимов А.И., Кривошеев А.С. *Правильно распределенные подпоследовательности на прямой* // Уфимский математический журнал. 2015. Т.7. №1. С. 3–12.
6. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Фундаментальный принцип и базис в инвариантном подпространстве* // Матем. заметки. 2016. Т.95. №5. С. 684–697.
7. Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Известия РАН. Серия математическая. 2004. Т.68. №2. С. 71–136.
8. Кривошеева О.А. *Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости* // Алгебра и анализ. 2011. Т.23. №2. С. 162–205.
9. Кривошеева О.А., Кривошеев А.С. *Особые точки суммы ряда Дирихле на прямой сходимости* // Функц. анализ и его прилож. 2015. Т.49. №2. С. 54–69.

Айдар Ирекович Абдулнагимов,
ФБГОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет»,
ул. К. Маркса, 12, корпус 1
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: buffonishe@mail.ru

Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru