ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 3 (2016). С. 49-58.

УДК 517.9

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА НА ОСНОВЕ ЕГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО КОЛЬЦА ЛИ

А.В. ЖИБЕР, С.Н. КАМАЕВА

Аннотация. В работе рассматривается схема построения точных решений уравнения синус-Гордона, основанная на ограничении структуры характеристического кольца Ли. Подробно иследован случай, когда размерность пространства коммутаторов длины 6 равна 1.

Ключевые слова: солитоны, векторные поля, кольцо Ли.

Mathematics Subject Classification: 34A05, 35B06

1. Введение

Известно, что метод обратной задачи теории рассеяния позволяет строить точные решения уравнения синус-Гордона

$$u_{xy} = e^{u} + e^{-u}, \tag{1}$$

так называемые солитоны (см., например [1], [2]).

В настоящей работе рассматривается альтернативный подход к построению точных решений уравнения (1) на основе характеристического кольца Ли.

Характеристическое кольцо A уравнения (1) порождается векторными полями см. [3].

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y} + \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial u_1} + D(f) \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots, X_2 = \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1}.$$

Здесь $\bar{u}_1 = u_y$, $u_1 = u_x$, $u_2 = u_{xx}, \ldots$, $f = e^u + e^{-u}$, а D — оператор полного дифференцирования по переменной x. Пусть L_n — линейное пространство коммутаторов, образующих длины $n-1$, $n = 2, 3, \ldots$. Тогда характеристическое кольцо Ли A представимо в виде

$$A = \sum_{i=2}^{\infty} L_i.$$

Положим

$$\mathfrak{L}_n = \sum_{i=2}^{n} L_i.$$

A.V. Zhiber, S.N. Kamaeva, Construction of exact solution to Sine-Gordon equation on the base of its characteristic Lie ring.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-2007).
Поступила 6 июля 2016 г.

Полное описание структуры кольца Ли A приведено в [3]. Для кольца A в частности справедливы формулы

$$dimL_n = \begin{cases} 2, & \text{при } n = 2k; \\ 1, & \text{при } n = 2k-1. \end{cases}, k = 3, 4, ...,$$
$$dimL_2 = 2, dimL_3 = 1, dimL_4 = 1, dimL_5 = 1.$$

Точные решения уравнения (1) N-го порядка возникают, если на пространство $\mathfrak{L}_{2N}$ наложить условие

$$dim\mathfrak{L}_{2N} = dim\mathfrak{L}_{2N-1} + 1.$$

В работе исследуется случай $N = 3$. В общей ситуации $dim\mathfrak{L}_6 = 7$ и линейное пространство $\mathfrak{L}_6$ порождается векторными полями $X_1, X_2, X_3 = [X_2, X_1], X_5 = [X_1, X_3]$, $X_7 = [X_1, X_5], X_8 = [X_2, X_7], X_9 = [X_1, X_7]$. При этом всегда $dim\mathfrak{L}_i = i, i = 2, 3, 4, 5$ и справедливы формулы

$$\begin{aligned} [D, X_3] = -f'X_2, [D, X_5] = f'X_3 - fX_1, \\ [D, X_7] = f'X_5, [D, X_8] = fX_5, [D, X_9] = -fX_8 + f'X_7, \end{aligned} \tag{2}$$

где D — оператор полного дифференцирования по переменной x. Полное описание нахождения этих значений можно найти в работе [3].

Исследуем два случая $dim\mathfrak{L}_6 = 6$ и $dim\mathfrak{L}_6 = 5$.

2. Характеристическое кольцо Ли в случае $dim\mathfrak{L}_6 = 6$.

В этом разделе мы получим условия на решение уравнения синус-Гордона, когда $dim\mathfrak{L}_6 = 6$, то есть, $dimL_6 = 1$. А именно рассмотрим два случая:

1) Векторные поля $X_1, X_2, X_3, X_5, X_7, X_9$ – линейно независимы, а X_8 является их линейной комбинацией.

2) Векторные поля $X_1, X_2, X_3, X_5, X_7, X_8$ – линейно независимы, а X_9 является их линейной комбинацией.

Пусть выполняется первый случай, то есть

$$X_8 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_3 + \alpha_3 X_5 + \alpha_4 X_7 + \alpha_5 X_9,$$

тогда

$$[D, X_8] = [D, \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_3 + \alpha_3 X_5 + \alpha_4 X_7 + \alpha_5 X_9].$$

По свойству коммутаторов последнее соотношение можно записать в виде

$$\begin{aligned} [D, X_8] = \alpha_1[D, X_1] + D(\alpha_1)X_1 + \alpha_2[D, X_3] + D(\alpha_2)X_3 + \alpha_3[D, X_5] + D(\alpha_3)X_5 + \\ + \alpha_4[D, X_7] + D(\alpha_4)X_7 + \alpha_5[D, X_9] + D(\alpha_5)X_9. \end{aligned}$$

Используя формулы (2), получим

$$\begin{aligned} [D, X_8] = -\alpha_1 fX_2 + D(\alpha_1)X_1 - \alpha_2 f'X_2 + D(\alpha_2)X_3 + \alpha_3 f'X_3 - \alpha_3 fX_1 + \\ + D(\alpha_3)X_5 + \alpha_4 f'X_5 + D(\alpha_4)X_7 - \alpha_1\alpha_5 fX_1 - \alpha_2\alpha_5 fX_3 - \alpha_3\alpha_5 fX_5 - \\ - \alpha_4\alpha_5 fX_7 - \alpha_5\alpha_5 fX_9 + \alpha_5 f'X_7 + D(\alpha_5)X_9. \end{aligned}$$

Но с другой стороны

$$[D, X_8] = fX_5,$$

поэтому можно приравнять коэффициенты при независимых операторах X_i и получить систему уравнений

$$D(\alpha_1) - \alpha_3 f - \alpha_1\alpha_5 f = 0, \tag{3}$$
$$-\alpha_1 f - \alpha_2 f' = 0, \tag{4}$$
$$D(\alpha_2) + \alpha_3 f' - \alpha_2\alpha_5 f = 0, \tag{5}$$
$$D(\alpha_3) + \alpha_4 f' - \alpha_3\alpha_5 f = f, \tag{6}$$
$$D(\alpha_4) + \alpha_5 f' - \alpha_4\alpha_5 f = 0, \tag{7}$$
$$D(\alpha_5) - \alpha_5\alpha_5 f = 0. \tag{8}$$

Таким образом справедливо утверждение:

Лемма 1. *Если $X_1, X_2, X_3, X_5, X_7, X_9$ линейно независимы, а X_8 является их линейной комбинацией, то справедливы соотношения (3) - (8).*

Исследуем систему уравнений (3)–(8). Если $\alpha_5 = 0$, то эти уравнения перепишутся в виде

$$D(\alpha_1) - \alpha_3 f = 0, \tag{9}$$
$$-\alpha_1 f - \alpha_2 f' = 0, \tag{10}$$
$$D(\alpha_2) + \alpha_3 f' = 0, \tag{11}$$
$$D(\alpha_3) + \alpha_4 f' = f, \tag{12}$$
$$D(\alpha_4) = 0. \tag{13}$$

Легко проверить, что случай $\alpha_1\alpha_2 = 0$ не реализуется. Пусть теперь $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$. Выразим α_2 в уравнении (10) через α_1

$$\alpha_2 = -\frac{\alpha_1 f}{f'}, \tag{14}$$

и продифференцируем его, учитывая, что $1 - \frac{f^2}{f'^2} = -\frac{4}{f'^2}$, будем иметь

$$D(\alpha_2) = -D(\alpha_1)\frac{f}{f'} + \frac{4u_1\alpha_1}{f'^2}.$$

Учитывая последнее равенство и соотношение (9) и (11) получаем, что

$$\alpha_3 = \frac{u_1\alpha_1}{f'}. \tag{15}$$

Теперь из (15) и (9) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{D(\alpha_1)}{\alpha_1} = \frac{u_1 f}{f'},$$

решение которого имеет вид

$$\alpha_1 = \phi(y) f'. \tag{16}$$

Отсюда, используя формулы (14) и (15), найдем

$$\alpha_2 = -\phi(y) f. \tag{17}$$
$$\alpha_3 = u_1\phi(y). \tag{18}$$

А из уравнения (12) следует, что

$$\alpha_4 = \frac{f - u_2\phi(y)}{f'}. \tag{19}$$

Осталось показать, что $D(\alpha_4) = 0$. Для этого надо решить следующее уравнение

$$D\left(\frac{f - u_2\phi(y)}{f'}\right) = 0.$$

Продифференцируем его и выразим

$$\phi(y) = -\frac{4u_1}{u_3 f' - u_1 u_2 f}. \tag{20}$$

Поскольку $D(\phi(y)) = 0$, то, применив оператов D к правой части (20), получим

$$\frac{u_1 u_4 f' - u_2 u_3 f' - u_1^3 u_2 f'}{u_3^2 f'^2 - 2u_1 u_2 u_3 f^2 + u_1^2 u_2 f^2} = 0,$$

которое выполняется, если только

$$u_1 u_4 - u_2 u_3 - u_1^3 u_2 = 0. \tag{21}$$

Таким образом, из соотношений (16)–(21) следует справедливость следующего предложения:

Теорема 1. *Если* $\alpha_5 = 0$*, то решение системы уравнений (3)–(8) имеет вид* $\alpha_1 = \frac{-4u_1 f'}{u_3 f' - u_1 u_2 f}$, $\alpha_2 = \frac{4u_1 f}{u_3 f' - u_1 u_2 f}$, $\alpha_3 = \frac{-4u_1^2}{u_3 f' - u_1 u_2 f}$, $\alpha_4 = \frac{u_3 f - u_1 u_2 f'}{u_3 f' - u_1 u_2 f}$, *и при этом справедливо равенство (21).*

Случай, когда $\alpha_4 = 0$ приводит к соотношению

$$u_3 f - u_1 u_2 f' = 0, \tag{22}$$

решение которого в силу уравнения (1) имеет вид

$$u = u(x + y).$$

Далее рассмотрим уравнение (21). Для этого перепишем его в виде

$$u_4 = \frac{u_2 u_3}{u_1} + u_1^2 u_2, \tag{23}$$

и применим к нему оператор $\bar{D}$ в силу уравнения (1).

Если расписать каждую производную по отдельности

$$\bar{D}u_1 = u_x y = e^u + e^{-u},$$
$$\bar{D}u_2 = Df = (e^u - e^{-u})u_1,$$
$$\bar{D}u_3 = D^2 f = (e^u + e^{-u})u_1^2 + (e^u - e^{-u})u_2,$$

$$\bar{D}u_4 = D^3 f = (e^u - e^{-u})u_1^3 + (e^u - e^{-u})u_3 + 3(e^u + e^{-u})u_1 u_2, \tag{24}$$

то правая часть уравнения (23) примет вид

$$u_3(e^u - e^{-u}) + \frac{u_2^2}{u_1}(e^u - e^{-u}) + u_1^3(e^u - e^{-u}) + 3u_1 u_2(e^u + e^{-u}) - \frac{u_2 u_3}{u_1^2}(e^u + e^{-u}).$$

Приравняем последнее соотношение к (24) и после некоторых не сложных преобразований получим

$$u_3 = u_1 u_2 \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}. \tag{25}$$

Уравнение (25) совпадает с (22). Таким образом, решение $u(x, y)$ уравнения (25), удовлетворяющее уравнению (1), имеет вид

$$u = u(x, y),$$

то есть

$$u'' = f(u). \tag{26}$$

Нетрудно показать, что решения уравнения (26) удовлетворяют уравнениям (22) и (23). Таким образом, в первом случае 1) при условии $\alpha_5 = 0$ решения уравнения синус-Гордона (1) задаются уравнением (26).

Пусть теперь $\alpha_5 \neq= 0$, тогда из уравнения (8) получаем, что

$$\alpha_5 = \frac{1}{P(y) - \bar{u}_1}, \tag{27}$$

где $P(y)$ функция, зависящая от y.

Если $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0$, то из (3)–(7) получаем, что $\alpha_4 = \frac{f}{f'}$. Поскольку $D(\alpha_4) = -4\frac{u_1}{f'^2}$, то соотношение (7) перепишется в виде

$$\frac{-4u_1(P(y) - \bar{u}_1) + f'^3 - f^2 f'}{(P(y) - \bar{u}_1)f'^2} = 0.$$

Следовательно, имеем равенство

$$f' + u_1(P(y) - \bar{u}_1) = 0.$$

Нетрудно показать, что в этом случае $u_2 = 0$. Из этого следует, что $u = const$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq= 0$. Если выразить α_2 и α_3 через α_1, то будем иметь те же самые соотношения (14) и (15). Подставляя их в (3), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{D(\alpha_1}{\alpha_1}) = \frac{u_1 f}{f'} + \frac{f}{P(y) - \bar{u}_1}.$$

Его решение имеет вид

$$\alpha_1 = \frac{c_1(y)f')}{P(y) - \bar{u}_1}. \tag{28}$$

Следовательно, формулы (14) и (15) перепишутся в виде

$$\alpha_2 = -\frac{c_1(y)f}{P(y) - \bar{u}_1}, \alpha_3 = \frac{u_1 c_1(y)}{P(y) - \bar{u}_1}. \tag{29}$$

Осталось найти α_4 из уравнения (6)

$$\alpha_4 = \frac{f}{f'} - \frac{u_2 c_1(y)}{(P(y) - \bar{u}_1)f'}. \tag{30}$$

Осталось рассмотреть уравнение (7). Для этого вычислим

$$D(\alpha_4) = \frac{-4u_1}{f'^2} - \frac{u_3 c_1(y)}{(P(y) - \bar{u}_1)f'} + \frac{u_1 u_2 f c_1(y)}{(P(y) - \bar{u}_1)f'^2} - \frac{u_2 f c_1(y)}{(P(y) - \bar{u}_1)f'},$$

и подставим полученное в (7). Тогда справедливо соотношение

$$c_1(y)(u_1 u_2 f - u_3 f') = 4f' + 4u_1(P(y) - \bar{u}_1). \tag{31}$$

Пусть $c_1(y) = 0$ или $u_1 u_2 f - u_3 f' = 0$, тогда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = \frac{f}{f'}$, и справедливо

$$P(y) = \bar{u}_1 - \frac{f'}{u_1}.$$

Но поскольку

$$D(P(y)) = \frac{u_2 f'}{u_1^2} = 0,$$

то этот случай не реализуется, так как из него следует, что $u_2 = 0$.

Рассмотрим другой случай. То есть пусть $c_1(y)$ и $u_1 u_2 f - u_3 f'$ одновременно не равны нулю. Тогда из свойств x – характеристического кольца следует, что α_i может зависеть только от производных по x функции u, поэтому решение существует только тогда, когда

$$P(y) - \bar{u}_1 = B(u, u_1, u_2, ...). \tag{32}$$

Подставим (32) в формулу (31) и выразим $c_1(y)$

$$c_1(y) = \frac{4f' + 4u_1 B}{u_1 u_2 f - u_3 f'},$$

используя то, что $D(c_1(y)) = 0$, можно продифференцировать последнее равенство и найти B. То есть

$$B(u_1u_4 - u_2u_3 - u_1^3u_2) - u_1^2u_2f' + u_4f' - u_2^2f = 0.$$

Таким образом, если $u_1u_4 - u_2u_3 - u_1^3u_2 \neq 0$, можно выразить B и применить к нему оператор дифференцирования D. Тогда, учитывая, что

$$D(B) = -f, \tag{33}$$

получим обыкновенное дифференцирования уравнения вида

$$u_2u_5 - u_3u_4 - 3u_1u_2^3 = 0, \tag{34}$$

осталось рассмотреть случай, когда $\alpha_4 = 0$. Легко проверить, что тогда справедливы формулы (28)-(29) и следующее тождество

$$u_2c_1(y) - f(P(y) - \bar{u}_1) = 0$$

Исследуем его. Для этого выразим $c_1(y)$ и продифференцируем. В итоге получим

$$B(u_1u_2f' - u_3f) = u_2f^2.$$

Используя это соотношение, нетрудно показать, что уравнение (8) не выполняется. Поэтому случай $\alpha_4 = 0$ не реализуется.

Таким образом, была доказана теорема:

Теорема 2. *Если $\alpha_5 \neq 0$, то решение системы уравнений (3)-(8) имеет вид* $\alpha_1 = \frac{4u_2f'}{u_1^2u_2f' - u_4f' + u_2^2f}$, $\alpha_2 = \frac{-4u_2f}{u_1^2u_2f' - u_4f' + u_2^2f}$, $\alpha_3 = \frac{4u_1u_2}{u_1^2u_2f' - u_4f' + u_2^2f}$, $\alpha_4 = \frac{u_1^2u_2f - u_4f + u_2^2f'}{u_1^2u_2f' - u_4f' + u_2^2f}$, $\alpha_5 = \frac{u_1u_4 - u_2u_3 + u_1^3u_2}{u_1^2u_2f' - u_4f' + u_2^2f}$ *и справедливо соотношение (35).*

Рассмотрим задачу построения решения системы уравнений (34), (1). При этом предполагается, что выполнено условие

$$u_1u_4 - u_2u_3 - u_1^3u_2 \neq 0. \tag{35}$$

Исключая случай

$$u_2 = 0, \tag{36}$$

уравнение (34) можно записать следующим образом

$$D\left(\frac{u_4}{u_2}\right) - \frac{3}{2}D(u_1^2) = 0,$$

то есть

$$u_4 = \frac{3}{2}u_1^2u_2 + \psi(y)u_2. \tag{37}$$

здесь $\psi(y)$ – произвольная функция. Итак, уравнения (34) и (37) эквивалентны. Отметим, что решения уравнения (36) удовлетворяют обоим уравнениям (34) и (37), и при этом нарушено условие (35).

Далее к левой и правой части уравнения (37) применим оператор $\bar{D}$ и, учитывая формулы

$$D\bar{D}u = e^u + e^{-u},$$

$$D^2\bar{D}u = (e^u - e^{-u})u_1,$$

$$D^3\bar{D}u = (e^u + e^{-u})u_1^2 + (e^u - e^{-u})u_2,$$

$$D^4\bar{D}u = (e^u + e^{-u})u_1^3 + (e^u - e^{-u})u_3 + 3(e^u + e^{-u})u_1u_2,$$

будем иметь

$$u_3 = \frac{1}{2}u_1^3 + \frac{\psi'(y)u_2}{e^u - e^{-u}} + \psi(y)u_1. \tag{38}$$

Отметим, что решение u системы (34), (1) удовлетворяет уравнению (38). С другой стороны, уравнение (37) эквивалентно уравнению

$$u_3 = \frac{1}{2}u_1^3 + \psi(y)u_1 + p(y). \tag{39}$$

Итак, решение u системы (38), (1) удовлетворяет одновременно и уравнению (38) и уравнению (39). Следовательно, это решение удовлетворяет уравнению

$$\frac{\psi'(y)u_2}{e^u - e^{-u}} = h(y). \tag{40}$$

Если $\psi(y) \neq= 0$, то

$$u_2 = \frac{h(y)}{\psi'(y)}(e^u - e^{-u}), \tag{41}$$

и следовательно,

$$u_1^2 = 2\frac{h(y)}{\psi'(y)}(e^u + e^{-u}) + \omega(y), \tag{42}$$

с другой стороны, из (41) следует, что

$$u_3 = \frac{h(y)}{\psi'(y)}(e^u + e^{-u})u_1. \tag{43}$$

Теперь подставим производные (42) к (43) в уравнение (39) и получим

$$(\frac{1}{2}\omega(y) + \psi(y))u_1 + h(y) = 0. \tag{44}$$

Если $\frac{1}{2}\omega(y) + \psi(y) = 0$, то из (44) следует, что $h(y) = 0$, и тогда из (41) имеем (36). Если $\frac{1}{2}\omega(y) + \psi(y) \neq 0$, то из (44) получаем, что

$$u_1 = -\frac{h(y)}{\frac{1}{2}\omega(y) + \psi(y)},$$

следовательно, приходим к уравнению (36).

Если $\psi'(y) = 0$, то $\psi(y) \equiv c_2(y)$, где $c_2(y)$ – постоянная, и из (40) получаем, что $h(y) = 0$. Тогда уравнения (38) и (39) принимают вид

$$u_3 = \frac{1}{2}u_1^3 + c_2(y)u_1.$$

Вычислим выражение (35)

$$\left(\frac{3}{2}u_1^2u_2 + c_2(y)\right)u_1 - u_2\left(\frac{1}{2}u_1^3 + c_2(y)u_1\right) - u_1^3u_2 = 0.$$

Итак, условие (35) нарушено. Следовательно, случай $\alpha_5 \neq 0$ не реализуется.

Рассмотрим случай 2). Тогда

$$X_9 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_3 + \beta_3 X_5 + \beta_4 X_7 + \beta_5 X_8. \tag{45}$$

Аналогично первому случаю получим систему

$$
\begin{aligned}
D(\beta_1) - \beta_3 f &= 0, && (46)\\
-\beta_1 f - \beta_2 f' &= 0, && (47)\\
D(\beta_2) + \beta_3 f' &= 0, && (48)\\
D(\beta_3) + \beta_4 f' + \beta_5 f &= 0, && (49)\\
D(\beta_4) &= f', && (50)\\
D(\beta_5) &= -f. && (51)
\end{aligned}
$$

Покажем, что этот случай можно свести к предыдущему. Легко видеть, что в уравнении (51) $\beta_5 \neq 0$. Следовательно, X_8 можно записать

$$X_8 = -\frac{\beta_1}{\beta_5}X_1 - \frac{\beta_2}{\beta_5}X_3 - \frac{\beta_3}{\beta_5}X_5 - \frac{\beta_4}{\beta_5}X_7 + \frac{1}{\beta_5}X_9. \qquad (52)$$

Пусть в соотношении (52) $X_1, X_2, X_3, X_5, X_7, X_9$ линейно зависимы, а X_9 можно выразить через X_1, X_2, X_3, X_5, X_7. Это значит, что и X_8 можно выразить через них. Следовательно, $X_1, X_2, X_3, X_5, X_7, X_8$ лиейно зависимы, что противоречит заданному условию.

3. Характеристическое кольцо Ли в случае $dim\mathfrak{L}_6 = 5$.

В этом параграфе исследуется решение уравнения синус-Гордона, для которого алгебра конечномерна и ее размерность равна 5. То есть рассмотрим случай, когда X_1, X_2, X_3, X_5, X_7 – линейно независимы, а X_8 и X_9 являются их линейной комбинацией. То есть

$$X_9 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_3 + \lambda_3 X_5 + \lambda_4 X_7$$

и

$$X_8 = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_3 + \mu_3 X_5 + \mu_4 X_7.$$

Тогда справедливо равенство

$$[D, X_9] = [D, \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_3 + \lambda_3 X_5 + \lambda_4 X_7] = f X_5$$

и

$$[D, X_8] = [D, \mu_1 X_1 + \mu_2 X_3 + \mu_3 X_5 + \mu_4 X_7] = -f X_8 + f' X_7.$$

Используя формулы (2), раскроем коммутаторы, и получим систему уравнений

$$D(\lambda_1) - \lambda_3 f = 0, \tag{53}$$

$$-\lambda_1 f - \lambda_2 f' = 0, \tag{54}$$

$$D(\lambda_2) + \lambda_3 f' = 0, \tag{55}$$

$$D(\lambda_3) + \lambda_4 f' = f, \tag{56}$$

$$D(\lambda_4) = 0, \tag{57}$$

$$D(\mu_1) - \mu_3 f = -\lambda_1 f, \tag{58}$$

$$-\mu_1 f - \mu_2 f' = 0, \tag{59}$$

$$D(\mu_2) + \mu_3 f' = -\lambda_2 f, \tag{60}$$

$$D(\mu_3) + \mu_4 f' = -\lambda_3 f, \tag{61}$$

$$D(\mu_4) = -\lambda_4 f + f'. \tag{62}$$

Легко видеть, что уравнения (53)–(57) совпадают с уравнениями (9)–(13). Значит, для них верны условия теоремы 1. Поэтому, можно считать, что коэффициенты λ_i найдены. Найдем μ_i, при $i = 1, \ldots, 4$.

Из формул (59) и (60) выпишем

$$\mu_2 = -\frac{\mu_1 f}{f'}, \tag{63}$$

$$\mu_3 = \frac{\mu_1 u_1}{f'}. \tag{64}$$

Подставим (64) в (58). Получим неоднородное дифференциальное уравнение вида

$$D(\mu_1) - u_1 \mu_1 \frac{f}{f'} = -f f' \varphi(y),$$

решение которого дается формулой

$$\mu_1 = f' c(y) - \bar{u}_1 f \varphi(y).$$

Тогда из формул (61), (63) и (64) можно найти остальные коэффициенты. А именно

$$\mu_2 = -f c(y) - \bar{u}_1 f \varphi(y), \tag{65}$$

$$\mu_3 = u_1 c(y) - u_1 \bar{u}_1 f \varphi(y), \tag{66}$$

$$\mu_4 = \frac{\bar{u}_1 u_2 \varphi(y) - u_2 c(y)}{f'}. \tag{67}$$

Уравнение (62) с учетом формул (19), (67) примет вид

$$c(y) = \bar{u}_1\varphi(y) + \frac{4f'}{u_3 f' - u_1 u_2 f}.$$

Просмотрим все возможные случаи его решения. Нетрудно показать, что из условия $c(y) = 0$ следует, что $u_2 = 0$. Если $c(y) \neq 0$, то, учитывая уравнение (21), получаем

$$u_2^2 f + u_1^2 u_2 f' - u_4 f' = 0. \tag{68}$$

Теперь из (21) и (68) будем иметь

$$u_3 f' - u_1 u_2 f = 0.$$

Последнее не выполняется . Итак, справедливо утверждение:

Лемма 2. *Если размерность характеристического кольца Ли равна 5, то уравнение синус-Гордона не имеет решений.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов: Метод обратной задачи.* Под ред. С.П. Новикова М.: Наука, 1980. 290 с.
2. Тахтанжян Л.А., Фаддеев Л.Д. *Гамильтонов подход в теории солитонов.* М.: Наука, 1986. 320 с.
3. Жибер А.В., Муртазина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б. *Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения.* М. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. 376 с.

Анатолий Васильевич Жибер,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: zhiber@mail.ru

Сабина Назировна Камаева,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: sabbi@mail.ru