ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 3 (2016). С. 160-175.

УДК 517.9

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМ ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Б.Х. ТУРМЕТОВ

Аннотация. В работе исследуется вопросы разрешимости одной краевой задачи для неоднородного полигармонического уравнения. В качестве граничного оператора рассматривается оператор дифференцирования дробного порядка в смысле Адамара. Рассматриваемая задача является обобщением известной задачи Неймана.

Ключевые слова: полигармоническое уравнение, дробная производная, задача Неймана,оператор Адамара.

Mathematics Subject Classification: 35L75, 35Q53, 37K10, 37K35

1. Введение

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ – n-мерный единичный шар, $n \geq 2$, $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ – единичная сфера. Далее, пусть $u(x)$ – гладкая функция в шаре Ω, $r = |x|, \theta = x/r$, $\delta = r\frac{d}{dr}$ – оператор Дирака, где $\frac{d}{dr} = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x_j}{r}\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Для любого $\alpha > 0$ следующее выражение

$$J^\alpha[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^r \left(\ln\frac{r}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{u(s\theta)}{s} ds \tag{1}$$

называется оператором интегрирования порядка α в смысле Адамара [1].

В дальнейшем будем считать, что $J^0[u](x) = u(x)$.

После замены переменных $\xi = sr$ интеграл (1) представляется в виде

$$J^\alpha[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{\xi}\right)^{\alpha-1} \frac{u(\xi x)}{\xi} d\xi. \tag{2}$$

Заметим, что оператор J^α неприменим к непрерывным функциям $u(x)$, при $u(0) \neq 0$, поскольку интеграл $\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{\xi}\right)^{\alpha-1} \xi^{-1} d\xi$ расходится. Поэтому для любого $\alpha \in (\ell-1, \ell], \ell = 1, 2, ...$ в качества оператора дифференцирования дробного порядка мы рассмотрим следующую модификацию оператора Адамара

$$D^\alpha[u](x) = J^{\ell-a}\left[\delta^\ell[u]\right](x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\ell-\alpha)} \int\limits_0^r \left(\ln\frac{r}{s}\right)^{\ell-1-\alpha} \left(s\frac{d}{ds}\right)^\ell [u](s\theta)\frac{ds}{s}.$$

B.Kh. Turmetov, On solvability of a boundary value problem for an inhomogeneous polyharmonic equation with a fractional order boundary operator.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МОН РК (грант №0819/GF4).

Поступила 24 августа 2015 г.

Пусть $0 < \alpha \le 1, m = 1, 2, ...$ Рассмотрим в области Ω следующую задачу

$$(-\Delta)^m u(x) = f(x), x \in \Omega \tag{3}$$

$$D^{\alpha+k}[u](x) = g_k(x), x \in \partial\Omega, k = 0, 1, ..., m-1. \tag{4}$$

Решением задачи (3)-(4) назовем функцию $u(x) \in C^{2m}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, для которой $D^{\alpha+k}[u](x) \in C(\overline{\Omega}), k = 0, 1, ..., m-1$, и удовлетворяющую уравнению (3) и граничным условиям (4) в классическом смысле.

Отметим, что краевые задачи с граничными операторами дробного порядка для эллиптических уравнений второго порядка исследовались в работах [2]–[10]. Приложения краевых задач для эллиптических уравнений с граничными операторами дробного порядка рассмотрены в работах [11]–[13]. Аналоги задачи Неймана для бигармонического и полигармонического уравнения в случае граничных операторов целого порядка изучались в работах [15]–[19], а в случае граничных операторов дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля, Капуто и Адамара-Маршо в работах [20]–[23].

Так как $J^0[u](x) = u(x)$, то в случае $\alpha = 1$ оператор D^1 совпадает с оператором δ, а $D^k = \delta^k \equiv \left(r\frac{d}{dr}\right)^k$. В работе [20] доказано, что для оператора $\left(r\frac{d}{dr}\right)^k$ верно равенство

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^k = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{i}(-1)^{i-j}\frac{j^n}{j!(i-j)!}\right)r^i\frac{\partial^i}{\partial r^i} \equiv \sum_{i=1}^{k}a_i^{(k)}r^i\frac{\partial^i}{\partial r^i}, k = 1, 2, ...$$

.

Известно также (см., например, [17]), что

$$r^i\frac{d^i}{dr^i}\bigg|_{\partial\Omega} = r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}-1\right)...\left(r\frac{d}{dr}-i+1\right)\bigg|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^i u(x)}{\partial\nu^i}\bigg|_{\partial\Omega},$$

где ν – вектор внешней нормали к границе области Ω. Следовательно, в случае $\alpha = 1$ задача (3)–(4) является некоторым аналогом задачи Неймана для уравнения (3).

2. Вспомогательные утверждения

В этом пункте мы исследуем некоторые свойства операторов J^α и D^α.

Лемма 1. *Пусть* $0 < \alpha$, $0 < \lambda < 1$ *и* $u(x) \in C^{\lambda+p}(\bar{\Omega}), p = 0, 1, ...$ *Тогда, если* $u(0) = 0$, *то функция* $J^\alpha[u](x)$ *также принадлежит классу* $C^{\lambda+p}(\bar{\Omega})$ *и выполняется равенство* $J^\alpha[u](0) = 0$.

Доказательство. Пусть $u(0) = 0$. Тогда

$$|J^\alpha[u](x)| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\left(\ln\frac{1}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{|u(sx)|}{s}ds \le \frac{C}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\left(\ln\frac{1}{s}\right)^{\alpha-1}s^{\lambda-1}ds.$$

Так как интеграл $\int_0^1\left(\ln\frac{1}{s}\right)^{\alpha-1}s^{\lambda-1}ds$ сходится, то $|J^\alpha[u](x)| \le C$, где $C \equiv const$, и поэтому функция $J^\alpha[u](x)$ определена. Далее, обозначим $h(x) = J^\alpha[u](x)$. Тогда для любых $x, y \in \bar{\Omega}$ имеем

$$|h(x) - h(y)| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\left(\ln\frac{1}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{|u(sx) - u(sy)|}{s}ds \le$$

$$\le \frac{C|x-y|^\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\left(\ln\frac{1}{s}\right)^{\alpha-1}s^{\lambda-1}ds \le C|x-y|^\lambda.$$

Аналогичным образом, для любого мультииндекса β с $|\beta| \le p$ получаем

$$\left|D^\beta h(x) - D^\beta h(y)\right| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|D^\beta u(sx) - D^\beta u(sy)|}{s} ds \le C|x-y|^\lambda.$$

Кроме того,

$$J^\alpha[u](0) = \lim_{x\to 0} J^\alpha[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{s}\right)^{\alpha-1} s^{-1} \lim_{x\to 0} u(sx) ds = 0.$$

□

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $0 < \alpha \le 1,\ 0 < \lambda < 1$ *и* $u(x) \in C^{\lambda+p+1}\left(\bar\Omega\right)$. *Тогда* $D^\alpha[u](x) \in C^{\lambda+p}\left(\bar\Omega\right)$ *и выполняется равенство* $D^\alpha[u](0) = 0$.

Лемма 3. *Пусть* $0 < \alpha, \lambda < 1$ *и* $u(x) \in C^{\lambda+1}\left(\bar\Omega\right)$. *Тогда*

1) для любого $x \in \bar\Omega$ *справедливо равенство*

$$J^\alpha\left[D^\alpha[u]\right](x) = u(x) - u(0); \tag{5}$$

2) если $u(0) = 0$, *то для любого* $x \in \bar\Omega$ *справедливо равенство*

$$D^\alpha\left[J^\alpha[u]\right] = u(x). \tag{6}$$

Доказательство. Если $u(x) \in C^{\lambda+1}\left(\bar\Omega\right)$, то по лемме 2.2, получаем $D^\alpha[u](x) \in C^\lambda\left(\bar\Omega\right)$ и $D^\alpha[u](0) = 0$. Тогда в классе таких функций оператор J^α определен и

$$J^\alpha\left[D^\alpha[u]\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^r \left(\ln\frac{r}{s}\right)^{\alpha-1} D^\alpha[u](s\theta)\frac{ds}{s} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^r \left(\ln\frac{r}{s}\right)^{\alpha-1} \int\limits_0^s \left(\ln\frac{s}{\tau}\right)^{-\alpha} \delta[u](\tau\theta)\frac{d\tau}{\tau}\frac{ds}{s} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^r \frac{du(\tau\theta)}{d\tau} \int\limits_s^r \left(\ln\frac{r}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{\tau}\right)^{-\alpha}\frac{ds}{s} d\tau.$$

Легко показать, что

$$\int\limits_s^r \left(\ln\frac{r}{\tau} - \ln\frac{s}{\tau}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{\tau}\right)^{-\alpha} d\left(\ln\frac{s}{\tau}\right) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)}.$$

Тогда

$$J^\alpha\left[D^\alpha[u]\right](x) = \int\limits_0^r \frac{du(\tau\theta)}{d\tau} d\tau = u(x) - u(0).$$

Равенство (5) доказано.

Далее, так как $u(0) = 0$, то по лемме 2.1 функция $J^\alpha[u](x)$ определена в области $\bar\Omega$ и

$$D^\alpha\left[J^\alpha[u]\right](x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^r \left(\ln\frac{r}{s}\right)^{-\alpha} s\frac{d}{ds} J^\alpha[u](s\theta)\frac{ds}{s} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} r \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{1}{1-\alpha} \left(\ln \frac{r}{s}\right)^{1-\alpha} \frac{d}{ds} J^\alpha[u](s\theta) ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{1-\alpha} \left(\ln \frac{r}{s}\right)^{1-\alpha} J^\alpha[u](s\theta) \Big|_{s=0}^{s=r} + \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s}\right)^{-\alpha} J^\alpha[u](s\theta) ds \right] =$$

$$= r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s}\right)^{-\alpha} J^\alpha[u](s\theta) ds \right] = r \frac{d}{dr} \left[J^{1-\alpha}[J^\alpha[u]] \right](x).$$

Так как $J^{1-\alpha} \cdot J^\alpha = J^1$, то

$$D^\alpha \left[J^\alpha[u] \right](x) = r \frac{d}{dr} \int_0^r u(s\theta) \frac{ds}{s} = r \frac{u(r\theta)}{r} = u(x).$$

□

Лемма 4. *Пусть* $(-\Delta)^m u(x) = f(x)$, *где* $f(x)$ *гладкая функция в* $\bar{\Omega}$. *Тогда справедливо равенство*

$$(-\Delta)^m D^\alpha[u](x) = F(x), x \in \Omega, \tag{7}$$

где

$$F(x) = |x|^{-2m} D^\alpha \left[|x|^{2m} f(x) \right]. \tag{8}$$

Доказательство. Используя равенство (2) для функции $D^\alpha[u](x)$, имеем

$$D^\alpha[u](x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{-\alpha} s \frac{d}{ds}[u](sx) \frac{ds}{s}.$$

Легко показать, что

$$\Delta^m \left[s \frac{d}{ds}[u](sx) \right] = s^{2m} \left(s \frac{d}{ds} + 2m \right) f(sx).$$

Кроме того,

$$s^{2m} \left(s \frac{d}{ds} + 2m \right) f(sx) = s \frac{d}{ds} \left[s^{2m} f(sx) \right].$$

Применяя к функции $D^\alpha[u](x)$ оператор Δ^m, получим

$$\Delta^m D^\alpha[u](x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{-\alpha} s \frac{d}{ds}[s^{2m} f(sx)] \frac{ds}{s} =$$

$$= \frac{r^{-2m}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{-\alpha} \frac{d}{ds}[(sr)^{2m} f(sx)] ds = |x|^{-2m} D^\alpha \left[|x|^{2m} f(x) \right] = F(x).$$

□

Лемма 5. *Для функции $F(x)$ имеет место представление*

$$F(x) = \left(r\frac{d}{dr} + 2m\right) f_{1-\alpha}(x), \tag{9}$$

где

$$f_{1-\alpha}(x) = |x|^{-2m} J^{1-\alpha}\left[|x|^{2m} f(x)\right]. \tag{10}$$

Доказательство. После замены переменных $sr = \xi$ из представления (8) получим

$$F(x) = \frac{|x|^{-2m}}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^r \left(\ln\frac{r}{\xi}\right)^{-\alpha} \frac{d}{d\xi}\left[\xi^{2m} f(\xi\theta)\right] d\xi =$$

$$= \frac{|x|^{-2m}}{\Gamma(1-\alpha)} r\frac{d}{dr}\left[\int\limits_0^r \frac{1}{1-\alpha}\left(\ln\frac{r}{\xi}\right)^{1-\alpha} \frac{d}{d\xi}\left[\xi^{2m} f(\xi\theta)\right] d\xi\right] =$$

$$= \frac{|x|^{-2m}}{\Gamma(1-\alpha)} r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{1-\alpha}\left(\ln\frac{r}{\xi}\right)^{1-\alpha} \xi^{2m} f(\xi\theta)\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=r} + \int\limits_0^r \left(\ln\frac{r}{\xi}\right)^{-\alpha} \xi^{2m} f(\xi\theta)\frac{d\xi}{\xi}\right] =$$

$$= |x|^{-2m} r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^r \left(\ln\frac{r}{\xi}\right)^{-\alpha} \xi^{2m} f(\xi\theta)\frac{d\xi}{\xi}\right] =$$

$$= |x|^{-2m} r\frac{d}{dr}\left[\frac{|x|^{2m}}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{s}\right)^{-\alpha} s^{2m} f(sx)\frac{ds}{s}\right].$$

Обозначим

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{s}\right)^{-\alpha} s^{2m} f(sx)\frac{ds}{s}.$$

Очевидно, что

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{s}\right)^{-\alpha} s^{2m} f(sx)\frac{ds}{s} = |x|^{-2m} J^{1-\alpha}\left[|x|^{-2m} f(x)\right].$$

Тогда

$$F(x) = |x|^{-2m} r\frac{d}{dr}\left[|x|^{2m} f_{1-\alpha}(x)\right] = \left(r\frac{d}{dr} + 2m\right) f_{1-\alpha}(x),$$

т.е. верно равенство (9). □

Следующее утверждение доказано в работе [22].

Лемма 6. *Пусть $0 < \alpha \le 1$, и $D^{\alpha+k}u(x), k = 1, 2, ...$ существует. Тогда справедливо равенство*

$$D^{\alpha+k}[u](x) = \left(r\frac{d}{dr}\right)^k D^{\alpha}[u](x). \tag{11}$$

3. Исследование некоторых свойств решения задачи типа Дирихле

Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} (-\Delta)^m v\left(x\right) = F\left(x\right), x \in \Omega, \\ \delta^k\left[v\right]\left(x\right) = g_k\left(x\right),\ x \in \partial\Omega,\ k = 0, 1, ..., m-1. \end{cases} \tag{12}$$

Пусть функции $V(x)$ и $w(x)$ являются решениями следующих задач

$$\begin{cases} (-\Delta)^m V\left(x\right) = F\left(x\right), x \in \Omega, \\ \delta^k\left[V\right]\left(x\right) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ k = 0, 1, ..., m-1, \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} (-\Delta)^m w\left(x\right) = 0, x \in \Omega, \\ \delta^k\left[w\right]\left(x\right) = g_k\left(x\right),\ x \in \partial\Omega,\ k = 0, 1, ..., m-1. \end{cases} \tag{14}$$

Тогда $v(x) = V(x) + w(x)$.

Лемма 7. *Пусть* $0 < \lambda < 1$ *и* $F\left(x\right) \in C^{\lambda+p-2m}\left(\bar{\Omega}\right), p \geq 2m$. *Тогда*
1) решение задачи (13) *существует, единственно и принадлежит классу* $C^{\lambda+p}\left(\overline{\Omega}\right)$;
2) если функция $F(x)$ *представляется в виде*

$$F(x) = \left(r\frac{d}{dr} + 2m\right) g(x), \tag{15}$$

то справедливо равенство

$$V\left(0\right) = \frac{1}{4^{m-1}\left((m-1)!\right)^2 \omega_n} \int\limits_{\partial\Omega} \left(1 - |y|^2\right)^{m-1} g(y) d\xi. \tag{16}$$

Доказательство. В пункте 1 мы показали, что краевые условия задачи (13) эквиваленты условиям

$$\delta^k\left[V\right]\left(x\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} \frac{\partial^i V(x)}{\partial \nu^i}, x \in \partial\Omega.$$

Тогда задача (13) эквивалентна задаче Дирихле для уравнения $(-\Delta)^m = F(x), x \in \Omega$. Известно (см., например, [24]), что если $F\left(x\right) \in C^{\lambda+p-2m}(\bar{\Omega})$, то решение задачи Дирихле существует, единственно и принадлежит классу $C^{\lambda+p}(\bar{\Omega})$. Первое утверждение леммы доказано.

Известно также (см., например, [15]), что решение задачи Дирихле представляется в виде

$$V\left(x\right) = \int\limits_{\Omega} G_{m,n}\left(x, y\right) F\left(y\right) dy, \tag{17}$$

где $G_{m,n}\left(x, y\right)$ – функция Грина задачи Дирихле.

Отметим, что явный вид функции $G_{m,n}\left(x, y\right)$ построен в работах [25]–[27]. Например, в работе [25] показано, что $G_{m,n}\left(x, y\right)$ имеет вид

$$G_{m,n}\left(x, y\right) = K_{m,n} |x-y|^{2m-n} \int\limits_{1}^{a(x,y)} \left(t^2 - 1\right)^{m-1} t^{1-n} dt, \tag{18}$$

где

$$a(x, y) = \frac{\left| x|y| - \frac{y}{|x|} \right|}{|x-y|}, K_{m,n} = \frac{1}{4^{m-1}\left((m-1)!\right)^2 n e_n}, e_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}.$$

Используя равенство $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, коэффициент $K_{m,n}$ можно представит в виде

$$K_{m,n} = \frac{1}{4^{m-1}\left((m-1)!\right)^2 n}\frac{2\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{n/2}} = \frac{1}{4^{m-1}\left((m-1)!\right)^2\omega_n}.$$

В дальнейшем нам понадобится значение функции $G_{m,n}(x,y)$ в точке $x=0$. Из представления (18) имеем

$$G_{m,n}(0,y) = K_{m,n}|y|^{2m-n}\int\limits_1^{|y|^{-1}}\left(t^2-1\right)^{m-1}t^{1-n}dt.$$

Обозначим последний интеграл через $I_{m,n}$. Вычислим значение этого интеграла. Если $n \neq 2(i+1), i=0,1,...,m-1$, то

$$I_{m,n} = \int\limits_1^{|y|^{-1}}\left(t^2-1\right)^{m-1}t^{1-n}dt = \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-1-i}C_{m-1}^i\int\limits_1^{|y|^{-1}}t^{2i+1-n}dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-1-i}C_{m-1}^i\left.\frac{t^{2(i+1)-n}}{2(i+1)-n}\right|_{t=1}^{t=|y|^{-1}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-1-i}C_{m-1}^i\frac{1}{2(i+1)-n}\left[|y|^{n-2(i+1)}-1\right].$$

Пусть

$$d_{m,n,i} = (-1)^{m-1-i}C_{m-1}^i\frac{1}{2(i+1)-n}.$$

Если n принимает одну из значений $n=2(k+1), k=0,1,...,m-1$, то в этом случае

$$I_{m,n} = \sum_{i=0,i\neq k}^{m-1}(-1)^{m-1-i}C_{m-1}^i\int\limits_1^{|y|^{-1}}t^{2i+1-n}dt + (-1)^{m-1-k}C_{m-1}^k\int\limits_1^{|y|^{-1}}t^{-1}dt =$$

$$= \sum_{i=0,i\neq k}^{m-1}d_{m,n,i}\left[|y|^{n-2(i+1)}-1\right] + (-1)^{m-1-k}C_{m-1}^k\ln\frac{1}{|y|}.$$

Тогда при $n\neq 2(i+1), i=0,1,...,m-1$ имеем

$$G_{m,n}(0,y) = K_{m,n}\left[\sum_{i=0}^{m-1}d_{m,n,i}\left[|y|^{2m-2(i+1)}-|y|^{2m-n}\right]\right], \tag{19}$$

а для остальных значений n

$$\begin{gathered}G_{m,n}(0,y) = K_{m,n}\left[\sum_{i=0,i\neq k}^{m-1}d_{m,n,i}\left[|y|^{2m-2(i+1)}-|y|^{2m-n}\right]\right]+\\ +K_{m,n}(-1)^{m-1-k}C_{m-1}^k|y|^{2m-n}\ln\frac{1}{|y|}.\end{gathered} \tag{20}$$

Тогда в случае $n\neq 2(i+1), i=0,1,...,m-1$ из равенства (19) и представления (15) следует

$$V\left(0\right)=K_{m,n}\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{i=0}^{m-1}d_{m,n,i}\left[|y|^{2m-2(i+1)}-|y|^{2m-n}\right]\right]\left(\rho\frac{d}{d\rho}+2m\right)g(y)dy.$$

Переходя к сферическим координатам $y=(\rho,\xi)$, где ξ – угловые координаты, последний интеграл выразим в виде

$$V\left(0\right)=K_{m,n}\int\limits_{|\xi|=1}\int\limits_{0}^{1}\rho^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{m-1}d_{m,n,i}\left[\rho^{2m-2(i+1)}-\rho^{2m-n}\right]\right]\left(\rho\frac{d}{d\rho}+2m\right)g(\rho,\xi)d\rho d\xi=$$

$$=K_{m,n}\int\limits_{|\xi|=1}[J_1(\rho,\xi)+J_2(\rho,\xi)]d\xi,$$

где

$$J_1(\rho,\xi)=\sum_{i=0}^{m-1}d_{m,n,i}\int\limits_{0}^{1}\rho^{n-1}\left[\rho^{2m-2(i+1)}-\rho^{2m-n}\right]\rho\frac{d}{d\rho}g(\rho,\xi)d\rho,$$

$$J_2(\rho,\xi)=2m\left[\sum_{i=0}^{m-1}d_{m,n,i}\int\limits_{0}^{1}\rho^{n-1}\left[\rho^{2m-2(i+1)}-\rho^{2m-n}\right]g(\rho,\xi)d\rho\right].$$

Интегрируя по частям $J_1(\rho,\xi)$, получаем

$$J_1=\sum_{i=0}^{m-1}d_{m,n,i}\int\limits_{0}^{1}\left[-\left(2m+n-2(i+1)\right)\rho^{2m+n-1-2(i+1)}+2m\rho^{2m-1}\right]g(\rho,\xi)d\rho=$$

$$=\sum_{i=0}^{m-1}d_{m,n,i}\int\limits_{0}^{1}\rho^{n-1}\left[-\left(2m+n-2(i+1)\right)\rho^{2m-2(i+1)}+2m\rho^{2m-n}\right]g(\rho,\xi)d\rho.$$

Отсюда

$$J_1(\rho,\xi)+J_2(\rho,\xi)=\int\limits_{0}^{1}\rho^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-1-i}C_{m-1}^{i}\rho^{2(m-i-1)}g(\rho,\xi)d\rho=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}\rho^{n-1}\left(1-\rho^2\right)^{m-1}g(\rho,\xi)d\rho.$$

Следовательно,

$$V\left(0\right)=K_{m,n}\int\limits_{|\xi|=1}\int\limits_{0}^{1}\rho^{n-1}\left(1-\rho^2\right)^{m-1}g(\rho,\xi)d\rho d\xi=$$

$$=\frac{1}{4^{m-1}((m-1)!)^2\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega}\left(1-|y|^2\right)^{m-1}g(y)d\xi.$$

Если n принимает одну из значений $n=2(k+1), k=0,1,...,m-1$, то в силу равенства (20) как и в первом случае, получаем

$$v(0)=K_{m,n}\left[\sum_{i=0,i\neq k}^{m-1}d_{m,n,i}\int\limits_{\Omega}\left[|y|^{2m-2(i+1)}-|y|^{2m-n}\right]\left(\rho\frac{d}{d\rho}+2m\right)g(y)dy\right]+$$

$$+K_{m,n}(-1)^{m-1-k}C_{m-1}^{k}\int\limits_{\Omega}|y|^{2m-n}\ln\frac{1}{|y|}\left(\rho\frac{d}{d\rho}+2m\right)g(y)dy=$$

$$=K_{m,n}\int\limits_{|\xi|=1}[J_{1,1}(\rho,\xi)+J_{2,1}(\rho,\xi)]d\xi.$$

Здесь

$$J_{1,1}(\rho,\xi)=\sum_{i=0,i\neq k}^{m-1}d_{m,n,i}\int\limits_{0}^{1}\rho^{n-1}\left[\rho^{2m-2(i+1)}-\rho^{2m-n}\right]\rho\frac{d}{d\rho}g(\rho,\xi)d\rho+$$

$$+(-1)^{m-1-k}C_{m-1}^{k}\int\limits_{0}^{1}\rho^{n-1}\left(\rho^{2m-n}\ln\frac{1}{\rho}\right)\rho\frac{d}{d\rho}g(\rho,\xi)d\rho,$$

$$J_{2,1}(\rho,\xi)=2m\left[\sum_{i=0}^{m-1}d_{m,n,i}\int\limits_{0}^{1}\rho^{n-1}\left[\rho^{2m-2(i+1)}-\rho^{2m-n}\right]g(\rho,\xi)d\rho\right]+$$

$$+2m(-1)^{m-1-k}C_{m-1}^{k}\int\limits_{0}^{1}\rho^{n-1}\left(\rho^{2m-n}\ln\frac{1}{\rho}\right)g(\rho,\xi)d\rho.$$

Интегрируя по частям $J_{1,1}(\rho,\xi)$, получаем

$$J_{1,1}=\sum_{i=0,i\neq k}^{m-1}d_{m,n,i}\int\limits_{0}^{1}\rho^{n-1}\left[-\left(2m+n-2(i+1)\right)\rho^{2m-2(i+1)}+2m\rho^{2m}\right]g(\rho,\xi)d\rho-$$

$$-(-1)^{m-1-k}C_{m-1}^{k}2m\int\limits_{0}^{1}\rho^{n-1}\left(\rho^{2m-n}\ln\frac{1}{\rho}\right)g(\rho,\xi)d\rho+$$

$$+(-1)^{m-1-k}C_{m-1}^{k}\int\limits_{0}^{1}\rho^{n-1}\rho^{2m-n}g(\rho,\xi)d\rho.$$

Тогда

$$J_{1,1}(\rho,\xi)+J_{2,1}(\rho,\xi)=\int\limits_{0}^{1}\rho^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-1-i}C_{m-1}^{i}\rho^{2(m-i-1)}g(\rho,\xi)d\rho=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}\rho^{n-1}\left(1-\rho^{2}\right)^{m-1}g(\rho,\xi)d\rho.$$

Значит, и в этом случае верно равенство (16). $\square$

Теперь исследуем задачу (14). Пусть A матрица вида

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 4 & \dots & 2\left(m-1\right) \\ 0 & 2^2 & 4^2 & \dots & \left[2\left(m-1\right)\right]^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2^{m-1} & 4^{m-1} & & \left[2\left(m-1\right)\right]^{m-1} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Обозначим через Δ_j, $j=0,1,...,m-1$ определитель матрицы, получающийся из матрицы A вычеркиванием 1-го столбца и $j+1$ строки. В частности $\Delta_0=|A|=\det A$. Легко показать, что $|A|\neq 0$.

Лемма 8. *Пусть* $0<\lambda<1$ *и* $g_k\left(x\right)\in C^{\lambda+p-k}\left(\partial\Omega\right)$, $p\geq m-1, k=0,1,...,m-1$. *Тогда*
1) решение задачи (14) *существует, единственно и принадлежит классу* $C^{\lambda+p}\left(\overline{\Omega}\right)$*;*
2) для решения задачи (14) *справедливо равенство*

$$w\left(0\right)=-\frac{1}{\omega_n|A|}\sum_{j=0}^{m-1}\int\limits_{\partial\Omega}(-1)^{j+1}\Delta_j\cdot g_j\left(x\right)dS_x. \tag{22}$$

Доказательство. Покажем, что задача (14) эквивалентна задаче Дирихле для уравнения $(-\Delta)^m w\left(x\right)=0$. В пункте 1 мы показали, что если ν вектор внешней нормали к сфере $\partial\Omega$, то для всех $x\in\partial\Omega$ имеет место равенство

$$\left.\frac{\partial^k w(x)}{\partial r^k}\right|_{\partial\Omega}=r^k\left.\frac{\partial^k w(x)}{\partial r^k}\right|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial^k w(x)}{\partial\nu^k}\right|_{\partial\Omega}, k=1,2,\dots .$$

Тогда при значении $k=1$ имеем $\delta\left[w\right]\left(x\right)=r\frac{\partial w}{\partial r}$, и поэтому из условия $\delta\left[w\right]\left(x\right)|_{\partial\Omega}=g_1\left(x\right)$ следует

$$\left.\frac{\partial w}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=g_1\left(x\right)\equiv\varphi_1\left(x\right).$$

При $k=2$ имеем

$$\delta^2\left[w\right]\left(x\right)=\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 w\left(x\right)=r^2\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+r\frac{\partial w}{\partial r}.$$

Тогда в силу граничного условия $\delta^2\left[w\right]|_{\partial\Omega}=g_2$ получаем
$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial\nu^2}\right|_{\partial\Omega}=g_2\left(x\right)-\frac{\partial w}{\partial r}\big|_{\partial\Omega}=g_2\left(x\right)-g_1\equiv\varphi_2\left(x\right)$.
В общем случае, используя равенство

$$\delta^k\left[w\right]\left(x\right)=\sum_{i=0}^{k}a_i^{(k)}\frac{\partial^i w(x)}{\partial\nu^i}, x\in\partial\Omega,$$

получаем

$$\delta^k\left[w\right]\left(x\right)=r^k\frac{\partial^k w}{\partial r^k}+\sum_{i=1}^{k-1}a_i^{(k)}r^i\frac{\partial^i w}{\partial r^i}.$$

Используя граничные условия $\delta^k\left[w\right]\left(x\right)|_{\partial\Omega}=g_k\left(x\right)$ задачи (14), для $\frac{\partial^k v}{\partial\nu^k}\left(x\right)$ получаем

$$\frac{\partial^k v}{\partial\nu^k}|_{\partial\Omega}=g_k\left(x\right)-\sum_{i=0}^{k-1}b_{i,k}g_i\left(x\right)\equiv\varphi_k\left(x\right), k=2,3,...,m-1,$$

где коэффициенты $b_{i,k}$ зависят от $a_i^{(k)}$, $i<k$. Таким образом, задача (14) эквивалентна задаче Дирихле:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^m w(x) = 0 \\ \frac{\partial^k w}{\partial \nu^k}(x)\,|_{\partial\Omega} = \varphi_k(x)\,,\ k = 0, 1, ..., m-1 \end{array} \right. .$$

Очевидно, что при $g_k(x) \in C^{\lambda+p-k}(\partial\Omega)$ функции $\varphi_k(x)$ также принадлежат классу $C^{\lambda+p-k}(\partial\Omega)$. Тогда из известного утверждения для задачи Дирихле [24] следует, что решение задачи (14) существует, единственно и принадлежит классу $C^{\lambda+p}\left(\overline{\Omega}\right)$. Первое утверждение леммы доказано.

Переходим к доказательству второго утверждения. Пусть $w(x)$ – решение задачи (14). Так как функция $w(x)$ полигармоническая, то существуют гармонические в области Ω функции $w_j(x)$, $j = \overline{0, m-1}$ такие, что

$$w(x) = w_0(x) + |x|^2 w_1(x) + ... + |x|^{2(m-1)} w_{m-1}(x)\,. \tag{23}$$

Применим оператор $\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^\ell$, $\ell = 1, 2, ..., m-1$ к функциям вида $|x|^{2j} w_j(x)$. Тогда для любых $1 \le \ell \le m-1$ и $0 \le j \le m-1$ найдем

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^\ell \left[|x|^{2j} w_j(x)\right] = \sum_{i=1}^{\ell} a_i^{(\ell)} r^i \frac{\partial^i}{\partial r^i}\left[r^{2j} w_j(x)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} a_i^{(\ell)} r^i \sum_{p=0}^{i} C_i^p \frac{\partial^p r^{2j}}{\partial r^p} \frac{\partial^{i-p} w_j(x)}{\partial r^{i-p}} = \sum_{i=1}^{\ell} a_i^{(\ell)} r^i \sum_{p=0}^{i} C_i^p d_{i,j}^{(p)} r^{2j-p} \frac{\partial^{i-p} w_j(x)}{\partial r^{i-p}},$$

где

$$d_{i,j}^{(p)} = \left\{ \begin{array}{l} 0, p > 2j \\ 1,\ p = 0 \\ 2j(2j-1)\ ...\ (2j-p+1)\,,\ p \le 2j \end{array} \right. .$$

Таким образом, функцию $\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^\ell \left[r^{2j} w_j(x)\right]$ можно представить в виде

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^\ell \left[|x|^{2j} w_j(x)\right] = |x|^{2j} h_{j,\ell}(x)\,, \tag{24}$$

где

$$h_{j,l}(x) = \sum_{i=1}^{\ell} a_i^{(\ell)} \sum_{p=0}^{i} C_i^p d_{i,j}^{(p)} r^{i-p} \frac{\partial^{i-p} w_j(x)}{\partial r^{i-p}}. \tag{25}$$

Так как при гармонической функции $w_j(x)$ функции $r^{i-p}\frac{\partial^{i-p} w_j(x)}{\partial r^{i-p}}$ также являются гармоническими в Ω, то при всех $j = 0, ..., m-1$, $\ell = 1,\ ...,\ m-1$ функции $h_{j,\ell}(x)$ гармонические в Ω. С другой стороны, разлагая функции $w_j(x)$, $j = \overline{0, m-1}$ в ряд вида

$$w_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} w_{k,j}^{(i)} H_k^{(i)}(x)$$

и применяя оператор $\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^\ell$, $\ell = 1, 2, ..., m-1$ к функциям $|x|^{2j} w_j(x)$ для всех $x \in \Omega$, получаем

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^\ell \left[|x|^{2j} w_j(x)\right] = |x|^{2j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} (k+2j)^\ell w_{k,j}^{(i)} H_k^{(i)}(x) = |x|^{2j} h_{j,\ell}(x)\,.$$

Следовательно, при $|x| < 1$ имеет место представление

$$h_{\ell,j}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} (k+2j)^\ell w_{k,j}^{(i)} H_k^{(i)}(x). \tag{26}$$

Таким образом, для полигармонической функции $\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^\ell w(x)$, получаем

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^l w\left(x\right)=h_{0,l}\left(x\right)+\left|x\right|^2 h_{i,e}\left(x\right)+...+\left|x\right|^{2(m-1)}h_{m-1,l}\left(x\right),$$

где гармонические функции $h_{j,\ell}\left(x\right)$ определяются равенством (3.14) и разлагаются в ряд вида (26). Рассмотрим гармонические в области Ω функции

$$\left\{\begin{array}{l} z_0\left(x\right)=w_0\left(x\right)+w_1\left(x\right)+...+w_{m-1}\left(x\right)\\ z_\ell\left(x\right)=h_{0,\ell}\left(x\right)+h_{1,\ell}\left(x\right)+...+h_{m-1,\ell}\left(x\right),\ \ell=1,2,...,m-1\end{array}\right. . \tag{27}$$

Очевидно, что

$$z_\ell\left(x\right)|_{\partial\Omega}=h_{0,\ell}\left(x\right)+h_{1,\ell}\left(x\right)+...+h_{m-1,\ell}\left(x\right)|_{\partial\Omega}=g_\ell\left(x\right),\ \ell=\overline{0,m-1}.$$

Тогда функции $z_\ell\left(x\right)$ можно представить в виде интеграла Пуассона

$$z_\ell\left(x\right)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{1-\left|x\right|^2}{\left|x-y\right|^n}g_\ell\left(y\right)dS_y.$$

Отсюда, для любого $\ell=0,1,...,m-1$

$$z_\ell\left(0\right)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega}g_\ell\left(y\right)dS_y. \tag{28}$$

Из разложения (26) следует

$$h_{\ell,j}\left(0\right)=\sum_{\ell=1}^{h_0}\left(2j\right)^\ell w_{0,j}^{(i)}H_0^{(i)}=\left(2j\right)^\ell w_j\left(0\right),\ \ell\geq 1.$$

Тогда из равенств (27) получаем систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} w_0 & + & w_1 & + & \cdots & + & w_{m-1} & =z_0\\ 0\cdot w_0 & + & 2\cdot w_1 & + & \cdots & + & 2(m-1)\cdot w_{m-1} & =z_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0\cdot w_0 & + & 2^{m-1}\cdot w_1 & + & \cdots & + & \left[2(m-1)\right]^{m-1}\cdot w_{m-1} & =z_{m-1}.\end{array}\right. \tag{29}$$

Матрица этой системы имеет вид (21). Далее, из представления (23) следует, что $w\left(0\right)=w_0\left(0\right)$. Покажем, что значение $w_0\left(0\right)$ выражается через комбинации интегралов функции $g_j\left(x\right)$, $j=\overline{0,m-1}$ по сфере $\partial\Omega$. Действительно, так как $|A|=\det A\neq 0$, то по правилу Крамера значение $w_0\left(0\right)$ находим из системы (29) по формуле

$$w_0\left(0\right)=\frac{\Delta_z}{|A|}, \tag{30}$$

где через Δ_z обозначен определитель

$$\Delta_z=\left|\begin{array}{ccccc} z_0\left(0\right) & 1 & 1 & ... & 1\\ z_1\left(0\right) & 2 & 4 & ... & 2\left(m-1\right)\\ z_2\left(0\right) & 2^2 & 4^2 & ... & \left[2\left(m-1\right)\right]^2\\ . & . & . & ... & .\\ z_{m-1}\left(0\right) & 2^{m-1} & 4^{m-1} & ... & \left[2\left(m-1\right)\right]^{m-1}\end{array}\right|$$

Очевидно, что $\Delta_z=-\sum\limits_{j=0}^{m-1}\left(-1\right)^{j+1}\Delta_j\cdot z_j\left(0\right)$. А так как $z_j\left(0\right)$ определяются из (28), то

$$\Delta_z=-\frac{1}{\omega_n}\sum_{j=0}^{m-1}\int\limits_{\partial\Omega}\left(-1\right)^{j+1}\Delta_j\cdot g_j\left(x\right)dS_x.$$

Теперь из равенства (30) следует, что

$$w\left(0\right)=w_0\left(0\right)=\frac{\Delta_z}{|A|}=-\frac{1}{\omega_n|A|}\sum_{j=0}^{m-1}\int\limits_{\partial\Omega}(-1)^{j+1}\Delta_j\cdot g_j\left(x\right)dS_x.$$

Значит, верно равенство (22). □

Из леммы 3.1 и 3.2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 9. *Пусть* $0<\lambda<1$, $g_k\left(x\right)\in C^{\lambda+p-k}\left(\partial\Omega\right)$, $k=0,1,...,m-1$ *и* $F\left(x\right)\in C^{\lambda+p-2m}\left(\bar{\Omega}\right)$. *Тогда*

1) решение задачи (12) *существует, единственно и принадлежит классу* $C^{\lambda+p}\left(\overline{\Omega}\right)$*;*

2) если функция $F(x)$ *представляется в виде* (15)*, то для выполнения равенства* $v(0)=0$ *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\int\limits_{\Omega}\left(1-|y|^2\right)^{m-1}g(y)d\xi=\frac{4^{m-1}((m-1)!)^2}{|A|}\sum_{j=0}^{m-1}\int\limits_{\partial\Omega}(-1)^{j+1}\Delta_j\cdot g_j\left(x\right)dS_x. \tag{31}$$

4. Основное утверждение

В этом пункте мы приведем основное утверждение относительно задачи (3)-(4).

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1. *Пусть* $0<\alpha\leq 1$, $0<\lambda<1$, $g_k\left(x\right)\in C^{\lambda+m-1-k}\left(\partial\Omega\right)$, $k=0,1,...,m-1$ *и* $f\left(x\right)\in C^{\lambda+1}\left(\overline{\Omega}\right)$. *Тогда для разрешимости задачи* (3)-(4) *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\int\limits_{\Omega}\left(1-|y|^2\right)^{m-1}f_{1-\alpha}(y)dy=\sum_{j=0}^{m-1}\int\limits_{\partial\Omega}a_{j,m}g_j\left(x\right)dS_x, \tag{32}$$

где

$$f_{1-\alpha}(x)=|x|^{-2m}J^{1-\alpha}\left[|x|^{2m}f(x)\right],a_{j,m}=\frac{4^{m-1}((m-1)!)^2}{|A|}\cdot(-1)^{j+1}\Delta_j,$$

$|A|$– *определитель матрицы* A *из равенства* (21), Δ_j, $j=0,1,...,m-1$, – *определители матриц, получающихся из матрицы* A *вычеркиванием 1-го столбца и* $j+1$ *строки.*

Если решение задачи существует, то оно принадлежит классу $C^{\lambda+m-1}(\overline{\Omega})$, *единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде*

$$u(x)=C+J^{\alpha}[v](x), \tag{33}$$

где $v\left(x\right)$ – *решение задачи* (12) *с функцией* $F(x)=|x|^{-2m}D^{\alpha}\left[|x|^{2m}f(x)\right]$ *и удовлетворяющий дополнительному условию* $v\left(0\right)=0$.

Доказательство. Предположим, что решение задачи (3)–(4) существует, и это $u\left(x\right)$. Применим к функции $u\left(x\right)$ оператор D^{α} и обозначим $v\left(x\right)=D^{\alpha}\left[u\right]\left(x\right)$. Находим условия, которым удовлетворяет функция $v\left(x\right)$. Во-первых, по утверждению леммы 2.2 выполняется равенство $v(0)=0$. Далее, по лемме 2.5 имеет место представление (11) т.е.

$$D^{\alpha+k}[u](x)=\left(r\frac{d}{dr}\right)^k\left[D^{\alpha}[u]\right](x)\equiv\delta^k[v](x).$$

Тогда,

$$v\left(x\right)|_{\partial\Omega}=D^{\alpha}\left[u\right]\left(x\right)|_{\partial\Omega}=g_0(x),$$
$$\delta^k[v](x)\big|_{\partial\Omega}=D^{\alpha+k}[u](x)\big|_{\partial\Omega}=g_k(x),k=1,2,....$$

И наконец, применяя к равенству $v(x) = D^{\alpha}[u](x)$ оператор $(-\Delta)^m$ в силу формулы (7) из леммы 2.3, получаем

$$(-\Delta)^m v\,(x) = (-\Delta)^m D^{\alpha}\,[u]\,(x) = F(x),$$

где $F(x)$ определяется равенством (8).

Таким образом, если $u\,(x)$ – решение задачи (3)-(4), то для функции $v\,(x) = D^{\alpha}\,[u]\,(x)$ получаем задачу (12) с функцией $F(x) = |x|^{-2m} D^{\alpha}\left[|x|^{2m} f\right](x)$. Кроме того, так как $D^{\alpha}\,[u]\,(0) = 0$, то функция $v\,(x)$ должна удовлетворять условию $v\,(0) = 0$. По лемме 3.3 при выполнении условий теоремы решение задачи (12) существует, единственно и принадлежит классу $C^{\lambda+m-1}\left(\overline{\Omega}\right)$. А для того чтобы выполнялось условие $v\,(0) = 0$, необходимо выполнения условия (31), которое в нашем случае имеет вид (32).

Следовательно, если решение задачи (3)-(4) существует, то необходимо выполнение условия (32). Покажем, что условие (32) является и достаточным для существования решения задачи (3)-(4).

Действительно, пусть в задаче (12) функция $F(x)$ представляется в виде $F(x) = |x|^{-2m} D^{\alpha}\left[|x|^{2m} f\right](x)$. Тогда при выполнении условии $f(x) \in C^{\lambda+1}\left(\bar{\Omega}\right)$ имеем, $F(x) \in C^{\lambda}\left(\bar{\Omega}\right)$ и если $g_k\,(x) \in C^{\lambda+m-1-k}\,(\partial\Omega)$, $k = 0, 1, ..., m-1$, то по лемме 3.3, $v\,(x)-$ решение задачи (12) существует, единственно и принадлежит классу $C^{\lambda+m-1}\left(\overline{\Omega}\right)$. Если выполняется условие (32), то это решение дополнительно удовлетворяет условию $v\,(0) = 0$. Поэтому в классе таких функций оператор J^{α} определен, и следовательно можно рассмотреть функцию $C + J^{\alpha}\,[v]\,(x)$. Обозначим эту функцию через $u(x)$, т.е. рассмотрим функцию $u(x) = C + J^{\alpha}[v](x)$. Покажем, что данная функция удовлетворяет всем условиям задачи (3)-(4).

Действительно, так как $v(0) = 0$, то по лемме 2.1 функция $J^{\alpha}\,[v]\,(x)$ принадлежит классу $C^{\lambda+m-1}\left(\overline{\Omega}\right)$. Применяя к этой функции оператор $(-\Delta)^m$, получим

$$(-\Delta)^m u\,(x) = (-\Delta)^m[C] + (-\Delta)^m J^{\alpha}\,[v]\,(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{s}\right)^{\alpha-1} s^{2m-1} (-\Delta)^m v\,(sx)\,ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{s}\right)^{\alpha-1} s^{2m} F\,(sx)\,\frac{ds}{s} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{s}\right)^{\alpha-1} s^{2m} |sx|^{-2m} D^{\alpha}\left[|x|^{2m} f\right](sx)\,\frac{ds}{s} =$$

$$= |x|^{-2m} J^{\alpha}\left[D^{\alpha}\left[|x|^{2m} f\right]\right](x).$$

Далее, в силу равенства (5)

$$J^{\alpha}\left[D^{\alpha}\left[|x|^{2m} f\right]\right](x) = |x|^{2m} f(x) - \left.|x|^{2m} f(x)\right|_{x=0} = |x|^{2m} f(x).$$

Тогда $(-\Delta)^m J^{\alpha}\,[v]\,(x) = f(x)$, т.е. функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (3). Кроме того, из условия (6) вытекает

$$D^{\alpha}\,[u]\,(x) = D^{\alpha}\,[J^{\alpha}\,[v] + C]\,(x) = D^{\alpha}\,[J^{\alpha}\,[v]]\,(x) = v\,(x)\,.$$

Следовательно,

$$D^{\alpha}\,[u]\,(x)\left.\right|_{\partial\Omega} = v\,(x)\left.\right|_{\partial\Omega} = g_1\,(x)\,,$$

$$D^{\alpha+k}\left[u\right](x)\left|_{\partial\Omega}\right. = \left(r\frac{d}{dr}\right)^{k} D^{\alpha}\left[u\right](x)\left|_{\partial\Omega}\right. = \left(r\frac{d}{dr}\right)^{k} v\left(x\right)\left|_{\partial\Omega}\right. = g_{k}\left(x\right), k = 1, 2, ...$$

□

Рассмотрим условия разрешимости задачи (3)-(4) для некоторых частных случаев.

Пример 1. *Если $m = 1$, то получаем краевую задачу для уравнения Пуассона. Так как в этом случае $|A| = \Delta_0 = 1$, то условие разрешимости задачи имеет вид*

$$\int\limits_{\Omega} f_{1-\alpha}(y)dy = \int\limits_{\partial\Omega} g_0\left(y\right)dS_y.$$

Если $\alpha = 1$, то $f_0(y) \equiv f(y)$ и тогда получаем условие разрешимости классической задачи Неймана для уравнения Пуассона.

Пример 2. *Пусть $m = 2$, тогда*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, |A| = 2, \Delta_z = \begin{vmatrix} z_0 & 1 \\ z_1 & 2 \end{vmatrix}, \Delta_0 = 2, \Delta_1 = 1,$$

$$a_{0,2} = \frac{4}{2}\cdot(-1)\,\Delta_0 = -4, a_{1,2} = \frac{4}{2}\cdot(-1)^2\Delta_1 = 2.$$

Тогда условие разрешимости задачи имеет вид

$$\int\limits_{\Omega} \frac{(1-|y|^2)}{2} f_{1-\alpha}(y)dy = \int\limits_{\partial\Omega} \left[g_1(y) - 2g_0(y)\right]dS_x.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A.Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* Elsevier. North-Holland. Mathematics studies. 2006. 539 p.
2. Berdyshev A.S., Turmetov B.Kh., Kadirkulov B. J. *Некоторые свойства и применения интегродифференциальных операторов типа Адамара-Маршо в классе гармонических функций* // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53, № 4. С. 752–764.
3. V.Karachik, B.Turmetov, B.Torebek. *On some integro-differential operators in the class of harmonic functions and their applications* // Siberian Advances in Mathematics. 2012. V. 22, № 2. P. 115–134.
4. Киране М., Татар Н.-е. *Отсутствие локальных и глобальных решений эллиптических систем с дробными по времени динамическими краевыми условиями* // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, № 3. С. 593–605.
5. Киране М., Татар Н.-е. *Отсутствие решений уравнения Лапласа с динамическим краевым условием дробного типа* // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, № 5. С. 1056–1064.
6. M.Krasnoschok, N. Vasylyeva *On a nonclassical fractional boundary-value problem for the Laplace operator* //Journal of Differential Equations. 2014. V. 257 (6). P. 1814–1839.
7. B.Torebek, B.Turmetov. *On solvability of a boundary value problem for the Poisson equation with the boundary operator of a fractional order* //Boundary Value Problems. 2013. V. 2013: N.93. doi:10.1186/1687-2770-2013-93.
8. Турметов Б. *Об одной краевой задаче для гармонического уравнения* // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 8. С. 1089–1092.
9. Турметов Б. *О гладкости решения одной краевой задачи с граничным оператором дробного порядка* // Математические труды. 2005. Т. 7, № 1. С. 189–199.
10. Турметов Б., Торебек Б. *Модифицированные операторы Баврина и их применения.* Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 2. С. 240–250.

11. T.Akhmedov, E.Veliev, M.Ivakhnychenko. *Fractional operators approach in electromagnetic wave reflection problems* //Journal of electromagnetic waves and applications. 2007, V. 21, № 13. P. 1787–1802.
12. Ахмедов Т., Велиев Е., Ивахченко М. *Граничные условия с дробными производными в задачах теории дифракции* //Доклады НАН Азербайджана. 2009. Т. 65, № 2. С. 61–68.
13. E.Veliev, M. Ivakhnychenko, *Fractional boundary conditions in plane wave diffraction on a strip* // Progress in Electromagnetics Research. 2008.V. 79. P. 443–462.
14. Бицадзе А. *О некоторых свойствах полигармонических функций* // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 5. С. 825–831.
15. Кангужин Б., Кошанов Б. *Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2, № 2. С. 41–52.
16. V. Karachik, B. Turmetov, A. Bekayeva. *Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball* // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2012. V. 81,№ 3. P. 487–495.
17. V. Karachik. *Solvability Conditions for the Neumann Problem for the Homogeneous Polyharmonic Equation*// Differential Equations. 2014. V. 50, № 11. P. 1449–1456.
18. V. Karachik. *On solvability conditions for the Neumann problem for a polyharmonic equation in the unit ball* // Journal of Applied and Industrial Mathematics.2014. V. 8, № 1. P. 63–75.
19. B. Turmetov, R. Ashurov. *On solvability of the Neumann boundary value problem for a non-homogeneous polyharmonic equation in a ball* //Boundary Value Problems. 2013. V. 2013:162 doi:10.1186/1687-2770-2013-162.
20. Бекаева А., Карачик В., Турметов Б. *О разрешимости некоторых краевых задач для полигармонического уравнения с граничным оператором Адамара-Маршо* // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 7. С. 15–29.
21. A. Berdyshev, A. Cabada, B. Turmetov. *On solvability of a boundary value problem for a nonhomogeneous biharmonic equation with a boundary operator of a fractional order* // Acta Mathematica Scientia. 2014. V. 34B(6). P. 1695–1706.
22. A. Berdyshev, A. Cabada, B. Turmetov. *On Solvability of Some Boundary Value Problem for Polyharmonic Equation with Boundary Operator of a Fractional Order* // Applied Mathematical Modelling. 2015. V. 39. P. 45–45.
23. B. Turmetov *Solvability of fractional analogues of the Neumann problem for a nonhomogeneous biharmonic equation* // Electronic Journal of Differential Equations. 2015.V. 2015, № 82. P. 1–21.
24. S.Agmon, A. Duglas, L. Nirenberg. *Estimates Near the Boundary for Elliptic Partial. Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions* I. Communications on Pure Appl. Math. 1959. V. 12. P. 623–727.
25. F. Gazzola, H.-Ch. Grunau, S. Guido. *Polyharmonic Boundary Value Problems* Springer-Verlag, Berlin, 2010.429 p.
26. Kal'menov T. S, Suragan D. *On a new method for constructing the green function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation* Differential Equations. 2012.V. 48,№ 3. P. 441–445.
27. T. Kal'menov, B. Koshanov, M. Nemchenko. *Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere* //Complex Variables and Elliptic Equations.2008. V. 53(2). P. 177–183.

Батирхан Худайбергенович Турметов,
Институт математики и математического моделирования,
ул. Пушкина, 125,
050010, г. Алматы, Казахстан и
Международный казахско-турецкий униврерстутет им. А. Ясави,
ул. Б. Саттарханова, 29,
161200, г. Туркестан, Казахстан
E-mail: `turmetovbh@mail.ru`