ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 3 (2016). С. 141-159.

УДК 517.9

КВАНТОВЫЕ АСПЕКТЫ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ТРЕТЬЕГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ И ВРЕМЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ МОРСА

Б.И. СУЛЕЙМАНОВ

Аннотация. В терминах решений уравнений изомонодромных деформаций для третьего уравнения Пенлеве выписано совместное решение трех линейных уравнений в частных производных. Первое из них есть квантовый аналог линеаризации одной из форм третьего уравнения Пенлеве, второе – аналог временного уравнения Шредингера, определяемого гамильтоновой структурой этого обыкновенного дифференциального уравнения, а третье – уравнение первого порядка, с коэффициентами, явно зависящими от решений третьего уравнения Пенлеве. Для автономной редукции третьего уравнения Пенлеве это совместное решение задает решения временного квантовомеханического уравнения Шредингера, эквивалентного временному уравнению Шредингера с известным потенциалом Морса. Данные решения одновременно удовлетворяют линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям с коэффициентами, явно зависящими от решений соответствующей классической автономной гамильтоновой системы. Показано, что условие глобальной ограниченности конструируемых решений уравнения Шредингера по пространственной переменной связано с определением этих решений классической гамильтоновой системы согласно варианту правила Бора – Зоммерфельда старой квантовой механики.

Ключевые слова: квантование, линеаризация, гамильтониан, временное уравнение Шредингера, уравнения Пенлеве, изомонодромные деформации, потенциал Морса.

Mathematics Subject Classification: 34M55

1. Введение

1.1. Все шесть канонических уравнений Пенлеве могут быть получены из гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\lambda'_\tau = H'_\mu(\tau,\lambda,\mu), \quad \mu'_\tau = -H'_\lambda(\tau,\lambda,\mu), \tag{1}$$

с квадратичными по импульсам μ гамильтонианами

$$H(\tau,\lambda,\mu) = \alpha(\tau,\lambda)\mu^2 + \beta(\tau,\lambda)\mu + \gamma(\tau,\lambda) \tag{2}$$

после исключения из них μ [1]–[4]. Компоненты λ и μ решений соответствующих систем (1) входят в коэффициенты линейных уравнений метода изомонодромных деформаций (ИДМ)

$$V''_{\zeta\zeta} = P(\zeta,\tau,\lambda,\lambda'_\tau)V, \quad V'_\tau = B(\zeta,\tau,\lambda,\lambda'_\tau)V'_\zeta - \frac{B_\zeta(\zeta,\tau,\lambda,\lambda'_\tau)}{2}V, \tag{3}$$

B.I. Suleimanov, Quantum aspects of the integrability of the third Painlevé equation and a non-stationary time Schrödinger equation with the Morse potential.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00078).

Поступила 28 марта 2016 г.

совместных на решениях $\lambda(\tau)$ соответствующего уравнения Пенлеве. (Существуют различные варианты L, A пар вида (3). Но из результатов статей [5]–[10] напрашивается предположение о том, что все эти пары являются явными заменами, включающими, вообще говоря, преобразования типа Фурье-Лапласа, сводятся к парам, выписанным в [11]).

1.2. На этом связь гамильтонианов уравнений Пенлеве с их L, A парами метода ИДМ не исчерпывается: для всех решений $\lambda(\tau)$ каждого из уравнений Пенлеве существуют [12] гамильтонианы $H = H_j(\tau, \lambda, \mu) \quad (j = 1, \dots, 6)$ вида (2), такие, что $\lambda(\tau)$ есть компонента решения системы (1), и такие, что у уравнений

$$\Psi'_\tau = H(\tau, \zeta, \frac{\partial}{\partial\zeta})\Psi \tag{4}$$

есть решения, которые явными формулами $\Psi = S(\tau, \zeta, \lambda(\tau), \lambda'_\tau(\tau))V$ определяются через совместные решения пар (3), выписанных в [11]. Эти эволюционные уравнения, схожие с квантовомеханическими временными уравнениями Шредингера ($\hbar = 2\pi h$, где h – постоянная Планка)

$$i\hbar\Psi'_t = H(t, \zeta, -i\hbar\frac{\partial}{\partial\zeta})\Psi, \tag{5}$$

следуя терминологии статьи [9], далее будем называть «квантованиями» уравнений Пенлеве. Тем самым L, A пары (3) уравнений Пенлеве определяют [9] своего рода процедуру разделения переменных, позволяющую строить частные решения соответствующих уравнений (4) в терминах решений линейных ОДУ с коэффициентами, явно зависящими от ζ и от решений $\lambda(\tau)$ нелинейных ОДУ Пенлеве.

Для третьего и пятого уравнений Пенлеве в формулах [12] имеются неточности, хотя и довольно просто исправляемые. Основная часть статьи начинается с раздела **2**, в котором с помощью удобных для для дальнейшего выкладок и формул упомянутые неточности [12] исправляются для предмета нашей статьи – третьего уравнения Пенлеве (a, b, c, d – произвольные комплексные постоянные)

$$\lambda''_{\tau\tau} = \frac{(\lambda'_\tau)^2}{\lambda} - \frac{\lambda'_\tau}{\tau} + \frac{2\lambda^2}{\tau^2}(d + 2a\lambda) + \frac{2b}{\tau} - \frac{4c}{\lambda}. \tag{6}$$

1.3. После [12] тема связей решений линейных уравнений ИДМ с эволюционными уравнениями квантовой теории затрагивалась в ряде работ [9], [13]–[30] (в том числе, начиная с [19], изучаются и возможности построения с помощью уравнений ИДМ решений известных уравнений квантовой теории поля). В частности, А. В. Забродин и А. В. Зотов [14] факт справедливости связи, описанной в пункте **1.2**, положили в основу проведенной ими классификации изомонодромных (то есть, допускающих применение ИДМ) гамильтоновых систем ОДУ (1), (2). В результате этой классификации фактически было установлено, что при некоторых дополнительных ограничениях представление этих гамильтоновых систем в виде условий совместности уравнения

$$\Psi'_\tau = \frac{1}{2}\Psi''_{\zeta\zeta} + U(\zeta, \tau)\Psi \tag{7}$$

с линейным уравнением в частных производных первого порядка

$$\Psi'_\tau = B(\zeta, \tau, \lambda, \lambda'_\tau)\Psi'_\zeta + C(\zeta, \tau, \lambda, \lambda'_\tau)\Psi \tag{8}$$

возможно лишь в случаях, когда координатная составляющая λ этих систем удовлетворяет одному из уравнений Пенлеве. Классификация, проведенная в [14], показывает, что использование «квантований» (4) в принципе может быть положено в одну из основ нового определения изомонодромных гамильтоновых систем вида (1), (2).

Правда, на взгляд автора данной работы, в этой классификации А. В. Забродина и А. В. Зотова имеется недостаток, относящийся к упомянутым дополнительным условиям на коэффициенты уравнений (7), (8). Скажем, вместо дополнительных условий из

[14] можно потребовать независимость от λ'_τ коэффициента $B(\zeta,\tau,\lambda,\lambda'_\tau)$ в уравнении (8), считая в то же время этот коэффициент и потенциал U в уравнении (7) локально аналитическими функциями своих аргументов, и рассматривая $\lambda(\tau)$ и $\lambda'_\tau(\tau)$ как независимые переменные. При данном условии уравнения (7) и (8) оказываются совместными лишь на конечном множестве гамильтоновых систем (1), (2), эквивалентного известному списку ОДУ Пенлеве. (Рассуждения, показывающие справедливость этого утверждения, не так уж просты и не коротки. Но поскольку их итог в основном лишь повторяет результат классификации А. В. Забродина и А. В. Зотова, то подробное описание данных рассуждений не представляется автору нужным.) Однако, например, априорное требование независимости B от λ'_τ не выглядит естественным. Дополнительные требования из [14] в этом плане выглядят заметно лучше, но все же части из них полной естественности также не достает. Свои недостатки, о которых сказано, например, в замечании **3** работы [31], присущи и другим определениям уравнениям типа Пенлеве. Поэтому проведение классификации изомонодромных гамильтоновых систем ОДУ вида (1), (2), основанной на естественных постулатах, по-прежнему представляется достаточно актуальной задачей.

Для проведения такой классификации в [16] наряду с эволюционным уравнением

$$Q'_\tau = \frac{1}{2}Q''_{zz} + [U(z,\tau) + \Gamma(\tau,\varphi,\varphi'_\tau)]Q \tag{9}$$

было предложено использовать уравнение вида

$$\begin{aligned} Q''_{\tau\tau} = A(\tau,z,\varphi)Q''_{zz} + D(\tau,z,\varphi)(Q'_z)'_\tau + [E_1(\tau,z,\varphi)\varphi'_\tau + E_0(\tau,z,\varphi)]Q'_\tau + \\ + [F_1(\tau,z,\varphi)\varphi'_\tau + F_0(\tau,z,\varphi)]Q'_z + [J_2(\tau,z,\varphi)(\varphi'_\tau)^2 + J_1(\tau,z,\varphi)\varphi'_\tau + J_0(\tau,z,\varphi)]Q, \end{aligned} \tag{10}$$

которое должно быть совместно с (9) на решениях ОДУ

$$\varphi''_{\tau\tau} = f(\tau,\varphi).$$

(С помощью замены

$$\varphi = \int_{\lambda_*}^{\lambda} \frac{d\nu}{\sqrt{\alpha(\tau,\nu)}}, \qquad \lambda_* - const$$

к такому виду приводятся ОДУ второго порядка

$$\lambda''_{\tau\tau} = \frac{\alpha'_\lambda(\tau,\lambda)}{2\alpha(\tau,\lambda)}(\lambda'_\tau)^2 + \frac{\alpha'_\tau(\tau,\lambda)}{\alpha(\tau,\lambda)}\lambda'_\tau + M(\tau,\lambda) \tag{11}$$

на компоненты $\lambda(\tau)$ гамильтоновых систем (1), (2). А к эволюционным уравнениям вида (9) также с помощью явных преобразований легко сводятся «квантования» (4) этих гамильтоновых систем.) Коэффициенты U, A, D, E_k, F_k, J_k уравнений (9), (10) предполагаются локально аналитическими функциями своих аргументов.

Как уже отмечалось в [16], для всех уравнений Пенлеве справедливо утверждение о совместности на решениях соответствующих ОДУ (11) эволюционного уравнения (9) с уравнением (10), коэффициенты которого A, D, F_k есть тождественные нули (то есть с линейным ОДУ второго порядка с независимой переменной t). Но естественность предположения о виде уравнения (10) иллюстрировалась в [16] рассмотрением ряда ОДУ Пенлеве, для которых именно такой вид имеют совместные с (9) уравнения, явными заменами сводящиеся к «квантовым» линеаризациям этих ОДУ (уравнениям, возникающим после применения процедуры, введенной в рассмотрение в той же работе [16]).

В разделе **3** показывается, что решения «квантований» ОДУ (6), построенные в разделе **2**, являются также точными решениями уравнений, эквивалентных «квантовой» линеаризации одной из форм третьего уравнения Пенлеве. И тем самым вновь подтверждается естественность предположения о совместности уравнений вида (9) и (10) для изомонодромных гамильтоновых систем (1), (2).

1.4. В ситуации общего положения решения уравнений Пенлеве трансцендентны – они не представляются ни в квадратурах, ни в терминах известных классических специальных функциях. Но, как известно, для определенных значений параметров, входящих в часть из уравнений Пенлеве, подобные представления возможны. При этом явным образом решаются и уравнения ИДМ (3), и, значит, становится возможным построение явных частных решений соответствующих эволюционных уравнений (4). А для ряда автономных редукций уравнений Пенлеве с помощью их L, A пар оказывается возможным и построение явных решений временных квантовомеханических уравнений Шредингера (5).

В разделе **4** данной статьи таким образом построены решения временных уравнений Шредингера

$$i\hbar\Psi'_t = -\hbar^2\frac{\zeta^2\Psi''_{\zeta\zeta}}{2} - \alpha(2\zeta - \zeta^2)\Psi \quad (\alpha > 0 - const). \tag{12}$$

Заменами

$$\zeta = \exp(-x), \quad \Psi = \zeta^{\frac{1}{2}}\exp\left(-i\frac{\hbar t}{8}\right)G(x,t) \tag{13}$$

это уравнение сводится к уравнению Шредингера

$$i\hbar G'_t = -\hbar^2\frac{G''_{xx}}{2} + \alpha(\exp(-2x) - 2\exp(-x))G \tag{14}$$

с хорошо известным потенциалом Морса.

Уравнение Шредингера (14) определяется гамильтонианом

$$H(q,p) = H_M(q,p) = \frac{p^2}{2} + \alpha(\exp(-2q) - 2\exp(-q)) \tag{15}$$

автономной гамильтоновой системы

$$q'_t = H'_p(q,p), \qquad p'_t = -H'_q(q,p), \tag{16}$$

исключение из которой импульса p дает ОДУ

$$q''_{tt} = 2\alpha(\exp(-2q) - \exp(-q)), \tag{17}$$

точечно эквивалентное частному случаю третьего уравнения Пенлеве (6)

$$\lambda''_{\tau\tau} = \frac{(\lambda'_\tau)^2}{\lambda} - \frac{\lambda'_\tau}{\tau} + \frac{4a\lambda^2}{\tau^2}(\lambda - 1). \tag{18}$$

Конструируемые ниже решения уравнения Шредингера (12) одновременно удовлетворяют уравнению первого порядка

$$\Psi'_t = K(\hbar,t,\zeta,q(t),p(t))\Psi'_\zeta + M(\hbar,t,\zeta,q(t),p(t))\Psi, \tag{19}$$

коэффициенты которых зависят от решений систем (15), (16): эти коэффициенты явным образом выражаются через коэффициенты P и B пары уравнений ИДМ (3) для третьего уравнения Пенлеве из [11].

Среди данных решений выделена дискретная серия Ψ_n $(n = 1,2,\dots)$, представители которой обращаются в нуль при $\zeta = 0$ и при $\zeta \to \infty$. Как показано в конце раздела **4** статьи, это условие среди периодических решений гамильтоновых систем (15), (16), не равных тождественно нулю, выделяет в точности те же, что и *старый* вариант формулы Бора – Зоммерфельда [32, Гл. I, §15, формула (17)]

$$\oint p(q)dq = 2n\pi\hbar \qquad (n = 1,2,\dots,\infty), \tag{20}$$

в которой интегрирование ведется по периодической траектории со значением энергии $H = const$.

Замечание 1. Для широкого класса гамильтонианов энергии

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} + U(q), \tag{21}$$

включающем гамильтониан (15), современный вариант правила Бора–Зоммерфельда записывается формулой

$$\oint p(q)dq = 2(n+1/2)\pi\hbar \qquad (n = 0, 1, \ldots, \infty)$$

– посредством ее задается главный член асимптотики при $\hbar \to 0$ дискретного спектра $H = H_n$ линейного дифференциального оператора $H(\zeta, -i\hbar\frac{\partial}{\partial\zeta})$.

2. «Квантования» уравнения $PIII$

2.1. Пара уравнений ИДМ (3) для третьего уравнения Пенлеве (6), выписанная в [11], задается коэффициентами

$$B = \frac{\lambda\zeta}{\tau(\zeta-\lambda)}, \quad P = \frac{c\tau^2}{\zeta^4} - \frac{b\tau}{\zeta^3} + \frac{s(\tau)}{\zeta^2} + \frac{d}{\zeta} + a + \frac{3}{4(\zeta-\lambda)^2} - \frac{\lambda + \tau\lambda'_\tau}{2\lambda\zeta(\zeta-\lambda)}, \tag{22}$$

где

$$s(\tau) = \frac{\tau^2(\lambda'_\tau)^2}{4\lambda^2} + \frac{b\tau}{\lambda} - a\lambda^2 - \frac{c\tau^2}{\lambda^2} - d\lambda - 1/4.$$

Формулами

$$s(\tau) = \tau H_{(3)}(\tau, \lambda, \mu) - 1/4$$

и

$$s(\tau) = \tau H_{(III)}(\tau, \lambda, \mu)$$

функция s выражается через гамильтонианы

$$H = H_{(3)} = \frac{\lambda^2\mu^2}{\tau} + \frac{b}{\lambda} - \frac{a\lambda^2}{\tau} - \frac{c\tau}{\lambda^2} - \frac{d\lambda}{\tau} \tag{23}$$

и, соответственно,

$$H = H_{(III)} = \frac{\lambda^2\mu^2 + \lambda\mu}{\tau} + \frac{b}{\lambda} - \frac{a\lambda^2}{\tau} - \frac{c\tau}{\lambda^2} - \frac{d\lambda}{\tau} \tag{24}$$

двух гамильтоновых систем (1), исключение из которых импульсов μ приводит к ОДУ (6).

Замена

$$V = \frac{\zeta}{\sqrt{(\zeta-\lambda)}}\Phi$$

совместные решения уравнений (3) с коэффициентами (22) переводит в совместные решения пары уравнений

$$\zeta^2\Phi''_{\zeta\zeta} + \zeta\Phi'_\zeta = \frac{\lambda}{\zeta-\lambda}\left(\zeta\Phi'_\zeta - \frac{\tau\lambda'_\tau - \lambda}{2\lambda}\Phi\right) + \\ + \left(\frac{c\tau^2}{\zeta^2} - \frac{b\tau}{\zeta} + d\zeta + a\zeta^2 + s(\tau) - \frac{\tau\lambda'_\tau}{2\lambda} + \frac{1}{2}\right)\Phi, \tag{25}$$

$$\tau\Phi'_\tau = \frac{\lambda}{\zeta-\lambda}\left(\zeta\Phi'_\zeta - \frac{\tau\lambda'_\tau - \lambda}{2\lambda}\Phi\right), \tag{26}$$

которые, следовательно, удовлетворяют и эволюционному уравнению

$$\tau\Phi'_\tau = \zeta^2\Phi''_{\zeta\zeta} + \zeta\Phi'_\zeta - \left(\frac{c\tau^2}{\zeta^2} - \frac{b\tau}{\zeta} + d\zeta + a\zeta^2 + s(\tau) - \frac{\tau\lambda'_\tau}{2\lambda} + \frac{1}{2}\right)\Phi. \tag{27}$$

В свою очередь, решения последнего уравнения формулами (τ_* – постоянная)

$$\Phi = \left(\frac{\lambda}{\zeta}\right)^{1/2} \tau^{-1/4} \exp\left(-\int\limits_{\tau_*}^{\tau} \left(\frac{s(\nu)}{\nu}\right) d\nu\right) \Psi \tag{28}$$

и

$$\Phi = \left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^{1/2} \exp\left(-\int\limits_{\tau_*}^{\tau} \left(\frac{s(\nu)}{\nu}\right) d\nu\right) G \tag{29}$$

связаны с решениями эволюционных уравнений

$$\Psi'_\tau = \frac{\zeta^2 \Psi''_{\zeta\zeta}}{\tau} - \left(\frac{c\tau}{\zeta^2} - \frac{b}{\zeta} + \frac{d\zeta + a\zeta^2}{\tau}\right)\Psi \tag{30}$$

и, соответственно,

$$G'_\tau = \frac{\zeta^2 G''_{\zeta\zeta} + \zeta G'_\zeta}{\tau} - \left(\frac{c\tau}{\zeta^2} - \frac{b}{\zeta} + \frac{d\zeta + a\zeta^2}{\tau}\right) G. \tag{31}$$

За счет операторного соотношения

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\zeta - \zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} = 1$$

каждое из двух последних эволюционных уравнений можно символически записать в виде «квантования» вида (4) третьего уравнения Пенлеве (6) согласно любому из двух гамильтонианов (23), (24) гамильтоновых систем (1). Как видим, при выписывании такого сорта «квантований» имеется некоторая свобода, связанная, с справедливостью данного операторного соотношения.

2.2. Отметим, что с точки зрения согласованности «квантующих» подстановок

$$\lambda(\tau) \to \zeta, \qquad \mu(\tau) \to \frac{\partial}{\partial\zeta} \tag{32}$$

из двух решений разных «квантований» вида (4) согласно гамильтоновой системе (1), (23), описанных в п. **2.1**, решение Ψ уравнения (30) предпочтительнее, чем решение G уравнения (31).

В самом деле, из уравнения (26) и замен (28), (29) следует, что Ψ и G есть решения уравнений первого порядка

$$\left(\tau\Psi'_\tau + \left[-\frac{(\tau\lambda'_\tau)^2}{4\lambda^2} + \frac{\tau\lambda'_\tau}{2\lambda} + a\lambda^2 + d\lambda - \frac{b\tau}{\lambda} + \frac{c\tau^2}{\lambda^2}\right]\Psi\right)(\zeta - \lambda) = \lambda\left(\zeta\Psi'_\zeta - \frac{\tau\lambda'_\tau}{2\lambda}\Psi\right) \tag{33}$$

и, соответственно,

$$\left(\tau G'_\tau + \left[-\frac{(\tau\lambda'_\tau)^2}{4\lambda^2} + \frac{\tau\lambda'_\tau}{2\lambda} + a\lambda^2 + d\lambda - \frac{b\tau}{\lambda} + \frac{c\tau^2}{\lambda^2} - \frac{1}{4}\right] G\right)(\zeta - \lambda) = \lambda\left[\zeta G'_\zeta + \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau\lambda'_\tau}{2\lambda}\right) G\right]. \tag{34}$$

На каждой из кривых $\zeta = \lambda(\tau)$ для решения Ψ уравнения (33) имеет место тождество

$$\Psi'_\zeta \equiv \frac{\lambda'_\tau(\tau)}{2\lambda^2(\tau)}\Psi, \tag{35}$$

где функция $\frac{\lambda'_\tau}{2\lambda^2}$ совпадает с импульсом μ гамильтоновой системы (1), (23). Для решения же G уравнения (34) на таких кривых справедливо тождество

$$G'_\zeta \equiv \left(\frac{\lambda'_\tau(\tau)}{2\lambda^2(\tau)} - \frac{1}{2\lambda(\tau)}\right) G, \tag{36}$$

а не тождество

$$G'_\zeta \equiv \frac{\lambda'_\tau(\tau)}{2\lambda^2(\tau)} G.$$

С другой стороны, функция $(\frac{\lambda'_\tau}{2\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda})$ совпадает с импульсом μ гамильтоновой системы (1), (24). Поэтому те же тождества (35) и (36) показывают, что с точки зрения согласованности «квантующих» подстановок (32) из построенных решений двух «квантований» (4) согласно этой гамильтоновой системе, решение G, наоборот, предпочтительнее, чем Ψ.

3. «Квантовая» линеаризация уравнения Пенлеве III

3.1. Каждому ОДУ вида (11) можно сопоставить гамильтонову систему (1), (2) с координатой $\lambda = \lambda(\tau)$. Все такие ОДУ допускают квантовой аналог процедуры линеаризации, введенную в рассмотрение в работе [16]. Данная процедура, зависящая от двух фиксированных чисел ε и k, предполагает осуществление двух последовательных действий, которые применяются к результату линеаризации

$$\Lambda''_{\tau\tau} = [2K(\tau,\lambda)\lambda' + L(\tau,\lambda)]\,\Lambda'_\tau + [K'_\lambda(\tau,\lambda)(\lambda')^2 + L'_\lambda(\tau,\lambda)\lambda'_\tau + M'_\lambda(\tau,\lambda)]\Lambda \qquad (37)$$

ОДУ (11). Здесь

$$K(\tau,\lambda) = \frac{\alpha'_\lambda(\tau,\lambda)}{2\alpha(\tau,\lambda)}, \qquad L(\tau,\lambda) = \frac{\alpha'_\tau(\tau,\lambda)}{\alpha(\tau,\lambda)},$$

α и M – локально аналитические функции своих аргументов. Эти действия таковы:

а) замена в некоторых местах правой части линейного ОДУ (37) классических координат $\lambda(\tau)$ и импульсов $\mu(\tau)$ гамильтоновой системы (1), (2) на их квантовые аналоги – на x и, соответственно, на дифференциальный оператор $k\frac{\partial}{\partial x}$ (k – $const$);

б) замена в (37) производных $\frac{\partial^m \Lambda}{\partial \tau^m}$ на $\varepsilon^m \frac{\partial^m \Phi}{\partial \tau^m}$ $(m = 0, 1, 2)$.

Конечно, действие а) жестко не определено. Однако, в любом случае «квантовая» линеаризация любого уравнения (11) , получаемая в результате этих двух действий, с помощью явной замены обязательно сводится к уравнению вида (10). Данная замена может быть выбрана так, чтобы «квантование» (4) согласно гамильтониану (2) сводились ею к эволюционному уравнению, имеющим вид (9).

В [16] для ряда уравнений Пенлеве было отмечено следующее обстоятельство:

любое решение каждого из этих уравнений представимо в качестве координаты λ гамильтоновой системы (1),(2), для которой имеется «квантование» (4) и такая «квантовая» линеаризация данного ОДУ Пенлеве, что соответствующие уравнения (7) и (10) имеют совместное решение, явно выраженное через совместное решение пары уравнений ИДМ (3) для этого ОДУ Пенлеве.

Упомянутый ряд ОДУ Пенлеве содержит в себе:

– ОДУ (a, b, c, d – произвольная постоянные)

$$\lambda''_{\tau\tau} = a_4(2\lambda^3 + \tau\lambda) + a_3(6\lambda^2 + \tau) + a_2\lambda + a_1,$$

которое в качестве частных случаев содержит первое и второе ОДУ Пенлеве;

– четвертое ОДУ Пенлеве;

– ОДУ Пенлеве типа 34. (Неточечными заменами это ОДУ сводится ко второму уравнению Пенлеве – по поводу квантовых аспектов интегрируемости ОДУ Пенлеве типа 34 см. также статью [9]).

В этом разделе будет показано, что к данному ряду может быть причислено и ОДУ

$$y''_{\theta\theta} = \frac{(y'_\theta)^2}{y} - 2d - \frac{4a}{y} - 2by^2\exp(\theta) + 4cy^3\exp(2\theta), \qquad (38)$$

представляющего собой одну из форм третьего канонического уравнения Пенлеве. Оно из уравнения (6) возникает в результате точечной замены

$$\lambda = \frac{1}{y}, \qquad \tau = \exp(\theta). \qquad (39)$$

Решение этого уравнения задает координату y и импульс $\omega = \frac{y'_\theta}{2y^2}$ гамильтоновой системы

$$y'_\theta = H'_\omega(\theta, y, \omega), \quad \omega'_\theta = -H'_y(\theta, y, \omega), \tag{40}$$

с гамильтонианом

$$H(\theta, y, \omega) = H_{III}(\theta, y, \omega) = y^2\omega^2 - cy^2\exp(2\theta) + by\exp(\theta) - \frac{d}{y} - \frac{a}{y^2}. \tag{41}$$

3.2. Линеаризация ОДУ (38) имеет вид

$$Y''_{\theta\theta} = \frac{2y'_\theta}{y}Y'_\theta + \left(-\frac{(y'_\theta)^2}{y^2} + \frac{4a}{y^2} - 4by\exp(\theta) + 12cy^2\exp(2\theta)\right)Y. \tag{42}$$

Далее заметим, что совместное решение $\Phi(\zeta, \lambda, \mu)$ уравнений (26), (27) удовлетворяет также следующему линейному ОДУ второго порядка по переменной τ:

$$\Phi''_{\tau\tau} = \left(\frac{\lambda'_\tau}{\lambda} - \frac{1}{\tau}\right)\Phi'_\tau + \left(\frac{a\lambda^2}{\tau^2} - \frac{b}{\zeta\tau} + \frac{c(\lambda + 2\zeta)}{\zeta^2\lambda}\right)\Phi. \tag{43}$$

В самом деле, учитывая справедливость (27), в результате дифференцирования уравнения (26) по переменной ζ, получим тождество

$$\tau\Phi''_{\tau\zeta} = -\frac{(\lambda + \tau\lambda'_\tau)}{2\lambda\zeta}\tau\Phi'_\tau + \left(\frac{d\lambda}{\zeta} + \frac{a\lambda(\zeta + \lambda)}{\zeta} + \frac{b\tau}{\zeta^2} - \frac{c\tau^2(\lambda + \zeta)}{\zeta^3\lambda}\right)\Phi. \tag{44}$$

Из этого тождества и результата дифференцирования уравнения (26) по переменной τ непосредственно следует справедливость ОДУ (43).

И обратно, совместные решения уравнений (26) и (43) удовлетворяют также ОДУ (2) и уравнению (27).

Совместное решение уравнений (2)–(27), (43), (44) с помощью замен

$$\Phi = \left(\frac{\lambda}{\zeta}\right)^{1/2}W, \quad \zeta = \frac{1}{\rho} \tag{45}$$

и замены (39) задает совместное решение следующих четырех линейных уравнений

$$\left(W'_\theta - \frac{y'_\theta}{2y}W\right)(\rho - y) = \rho\left(\rho W'_\rho - \frac{y'_\theta}{2y}W\right), \tag{46}$$

$$W'_\theta = \rho^2 W''_{\rho\rho} + 2\rho W'_\rho - \left(c\rho^2\exp(2\theta) - b\rho\exp(\theta) + \frac{a}{\rho^2} + \frac{d}{\rho} + \right.$$
$$\left. + \frac{(y'_\theta)^2}{4y^2} - cy^2\exp(2\theta) + by\exp(\theta) - \frac{a}{y^2} - \frac{d}{y}\right)W =$$
$$= \rho^2 W''_{\rho\rho} + 2\rho W'_\rho - \left(c\rho^2\exp(2\theta) - b\rho\exp(\theta) + \frac{a}{\rho^2} + \frac{d}{\rho} + H_{III}(\theta, y, \omega)\right)W,$$

$$\rho^2 W''_{\rho\theta} = \frac{y'_\theta}{2y}\rho^2 W'_\rho - \frac{y'_\theta}{2y}\rho W'_\theta +$$
$$+ \left(\frac{(y'_\theta)^2\rho}{4y^2} - \frac{d\rho}{y} - \frac{a(\rho + y)}{y^2} - b\exp(\theta)\rho^2 + c\exp(2\theta)(\rho^2 y + \rho^3)\right)W,$$

$$W''_{\theta\theta} = \left(\frac{(y'_\theta)^2}{4y^2} - \frac{d}{y} - \frac{a}{y^2} - b\exp(\theta)(\rho + y) + c\exp(2\theta)(\rho^2 + 2\rho y + 2y^2)\right)W,$$

где функции H_{III} и $\omega = y'_\theta/(2y^2)$ задают гамильтониан и, соответственно, импульс гамильтоновой системы (40), (41). Следствием двух последних из них является справедливость для значения $\varepsilon = 2$ уравнения

$$\varepsilon^2 W''_{\theta\theta} = 2\varepsilon\rho W''_{\rho\theta} + \varepsilon\frac{y'_\theta}{y}W'_\theta - 2\frac{y'_\theta\rho}{y}W'_\rho + \left(\frac{4a}{\rho y} - 4b\exp(\theta)y + 4c\exp(2\theta)(\rho y + 2y^2)\right)W. \tag{48}$$

Из последнего же уравнения линеаризация формы третьего уравнения Пенлеве (42) возникает в результате формальных подстановок

$$\rho \to y, \quad \frac{\partial}{\partial \rho} \to \omega = \frac{y'_\theta}{2y^2}, \quad \varepsilon^m \frac{\partial^m W}{\partial \theta^m} \to \frac{\partial^m Y}{\partial^m \theta} \quad (m = 0, 1, 2).$$

Поэтому уравнение в частных производных (48) представляет собой одну из возможных «квантовых» линеаризаций формы (38) ОДУ Пенлеве III.

Из вида замен (39), (45) и следует, что решения Ψ «квантования» (30) формы третьего уравнения Пенлеве (6) согласно гамильтониану (23) удовлетворяют также эволюционному уравнению

$$\Psi'_\theta = \rho^2 \Psi''_{\rho\rho} + 2\rho \Psi'_\rho - \left(c\rho^2 \exp(2\theta) - b\rho \exp(\theta) + \frac{a}{\rho^2} + \frac{d}{\rho} \right) \Psi.$$

Данное эволюционное уравнение символически можно записать в виде «квантования»

$$\Psi'_\theta = H_{III}(\theta, \rho, \frac{\partial}{\partial \rho})\Psi$$

формы третьего уравнения Пенлеве (38), определяемой гамильтоновой системой (40), (41). Таким образом, совместность эволюционного уравнения (3), получающегося из этого «квантования» совсем простой явной заменой, с «квантовой» линеаризацией (48) формы (38) третьего ОДУ Пенлеве, действительно имеет место.

3.3. Из справедливости для W уравнения первого порядка (46) следует, что на кривых $\rho = y(\theta)$, определяемых координатой y гамильтоновой системы (40), (41), справедливо тождество $W'_\rho \equiv \frac{y'_\theta}{2y^2} W = \omega(\theta) W$, где функция ω есть импульс этой гамильтоновой системы.

Решение каждого из остальных канонических уравнений Пенлеве (а также уравнения Пенлеве типа 34) также представимо в качестве координаты гамильтоновой системы (1), (2), для которой имеется «квантование» (4) согласно гамильтониану (2) с таким решением $\Psi(t, \zeta)$, что:

– явная замена вида $\Psi = S(\tau, \zeta, \lambda(\tau), \lambda'_\tau(\tau))V$ выражает его через совместные решения V пар уравнений ИДМ (3) для ОДУ Пенлеве на координату λ;

– с помощью опять-таки явных замен (включая замену независимой пространственной переменной) оно сводится к функции Q, являющейся совместным решением уравнений вида (9) и (10);

– на кривых $\zeta = \lambda(\tau)$ решение Ψ удовлетворяет тождеству $\Psi'_\zeta \equiv \mu(\tau)\Psi$.

По этой причине предположение о совместности линейных уравнений (9), (10) можно, как указывалось в [16], дополнить еще и предположением о справедливости для совместностного решения этих уравнений тождества

$$(Q'_z - [\varphi'_\tau \nu(\tau, \varphi) + \xi(\tau, \varphi)]Q)\,|_{z=\varphi(\tau)} \equiv 0,$$

где ν и ξ есть локально аналитические функции своих аргументов. Выше было показано, что некоторые из квантовых аспектов интегрируемости общего случая третьего уравнения Пенлеве подтверждают не только справедливость, но и естественность обоих этих предположений.

4. Временное уравнение Шредингера с потенциалом Морса

4.1. После точечной замены

$$\lambda = \exp(-q), \qquad \tau = \exp(\theta) \tag{49}$$

третье уравнение Пенлеве (6) принимает вид

$$q''_{\theta\theta} = -2\exp(-q)(d + 2a\exp(-q)) - 2b\exp(\theta + q) + 4c\exp(2(\theta + q)).$$

Редукция же этой формы уравнения Пенлеве

$$b = c = 0, \qquad d = -2a \tag{50}$$

дает автономное ОДУ

$$q''_{\theta\theta} = -4a(\exp(-2q) - \exp(-q)). \tag{51}$$

Это ОДУ при вещественных положительных a заменами

$$t = -\frac{2i}{\hbar}\theta, \quad a = \frac{2\alpha}{\hbar^2} \tag{52}$$

сводится к ОДУ (17)(по поводу физических приложений решений ОДУ (17) см. [33].)

Используя только что описанную редукцию и результаты предыдущих разделов, ниже строятся совместные решения $G(\hbar, t, x)$ уравнения Шредингера (14) и линейного уравнения в частных производных первого порядка

$$(\exp(-x) - \exp(-q))\left(2G'_t - \frac{i\hbar G}{4} + \frac{2iH_M G}{\hbar} - q'_t G\right) = \exp(-q)\left[i\hbar\left(\frac{G}{2} - G'_x\right) + q'_t G\right], \tag{53}$$

с коэффициентами, явно выраженными через решения $(q(t)$,$p(t))$ системы (15), (16). Вплоть до конца данного раздела далее нами будут иметься ввиду лишь периодические решения этой системы, отличные от тривиального решения $p(t) = 0, \quad q(t) = 0$. Для данных периодических решений справедливы [34, Гл. III, §23, рис. 3], неравенства

$$0 < -H_M < \alpha, \quad -\alpha \leqslant \alpha(\exp(-2q) - 2\exp(-q)) < H_M(p, q). \tag{54}$$

Эти решения уравнения Шредингера заменами (13) связаны с решениями уравнений Шредингера (12), которые определяются консервативной гамильтоновой системой

$$\lambda'_t = H'_\mu(\lambda, \mu), \qquad \mu'_t = -H'_\lambda(\lambda, \mu), \tag{55}$$

с гамильтонианом

$$H(\lambda, \mu) = H_{MM}(\lambda, \mu) = \frac{\lambda^2\mu^2}{2} - \alpha(2\lambda - \lambda^2). \tag{56}$$

4.2. В случае (50) ОДУ (43) принимает вид

$$\Phi''_{\tau\tau} = (\frac{\lambda'_\tau}{\lambda} - \frac{1}{\tau})\Phi'_\tau + \frac{a\lambda^2}{\tau^2}\Phi, \tag{57}$$

коэффициенты которого зависят от решений $\lambda(\tau)$ автономного ОДУ (18), являющегося редукцией третьего уравнения Пенлеве (6). При этом уравнения (27), (30) и (31) сводятся к более простым уравнениям

$$\tau\Phi'_\tau = \zeta^2\Phi''_{\zeta\zeta} + \zeta\Phi'_\zeta + \left[2a\zeta - a\zeta^2 - \frac{(\tau\lambda'_\tau)^2}{4\lambda^2} - \frac{\tau\lambda'_\tau}{2\lambda} + 1/4 - 2a\lambda + a\lambda^2\right]\Phi, \tag{58}$$

$$\tau\Psi'_\tau = \zeta^2\Psi''_{\zeta\zeta} + [2a\zeta - a\zeta^2]\Psi, \tag{59}$$

$$\tau G'_\tau = \zeta^2 G''_{\zeta\zeta} + \zeta G'_\zeta + [2a\zeta - a\zeta^2]G. \tag{60}$$

После замены τ на переменную θ согласно формуле (49) ОДУ (18) переходит в автономное ОДУ

$$\lambda''_{\theta\theta} = \frac{(\lambda'_\theta)^2}{\lambda} + 4a\lambda^2(\lambda - 1),$$

(из ОДУ (51) оно получается заменой $\lambda = \exp(-q)$), а уравнение первого порядка (26), ОДУ (57) и эволюционные уравнения (58) – (60) переходят, соответственно, в уравнения

$$\Phi'_\theta = \frac{\lambda}{\zeta - \lambda}\left(\zeta\Phi'_\zeta - \frac{\lambda'_\theta - \lambda}{2\lambda}\Phi\right), \tag{61}$$

$$\Phi''_{\theta\theta} = \frac{\lambda'_\theta}{\lambda}\Phi'_\theta + a\lambda^2\Phi, \tag{62}$$

$$\Phi'_\theta = \zeta^2 \Phi''_{\zeta\zeta} + \zeta \Phi'_\zeta + [2a\zeta - a\zeta^2 - \frac{(\lambda'_\theta)^2}{4\lambda^2} - \frac{\lambda'_\theta}{2\lambda} + 1/4 - 2a\lambda + a\lambda^2]\Phi,$$

$$\Psi'_\theta = \zeta^2 \Psi''_{\zeta\zeta} + [2a\zeta - a\zeta^2]\Psi,$$

$$G'_\theta = \zeta^2 G''_{\zeta\zeta} + \zeta G'_\zeta + [2a\zeta - a\zeta^2]G. \tag{63}$$

При редукции (50) гамильтониан (23) принимает вид

$$H = H_r(\tau, \lambda, \mu) = \frac{\lambda^2\mu^2 - a\lambda^2 + 2a\lambda}{\tau}. \tag{64}$$

Определяемая им гамильтонова система (1) после замены τ на независимую переменную θ согласно формуле (49) переходит в консервативную гамильтонову систему

$$\lambda_\theta = K'_\mu, \quad \mu'_\theta = -K'_\lambda \tag{65}$$

с независящим от времени θ гамильтонианом

$$K_{III} = \lambda^2\mu^2 - a\lambda^2 + 2a\lambda = \tau H_r(\tau, \lambda, \mu). \tag{66}$$

Из первого уравнения этой гамильтоновой системы следует, что

$$\mu\lambda = \frac{\lambda'_\theta}{2\lambda}. \tag{67}$$

Согласно (66) и (67) формулу (29) можно переписать в виде

$$G(\theta, \zeta) = Const\lambda^{-1/2} \exp\left((K_{III} + 1/4)\theta\right)\Phi(\theta, \zeta), \tag{68}$$

4.3. Уравнение Шредингера (14) и эволюционное уравнение (63) связаны друг с другом заменами

$$t = -\frac{2i}{\hbar}\theta, \quad x = -\ln\zeta, \quad a = \frac{2\alpha}{\hbar^2}. \tag{69}$$

Из формул (67) и (69) следует, что система (65), (66) после замен

$$\lambda(\theta) = \exp(-q(t)), \qquad \hbar\lambda\theta\mu(\theta) = p(t)$$

переходит в гамильтонову систему (16) с гамильтонианом (15)

$$H_M = -\frac{\hbar^2}{2} K_{III}.$$

ОДУ (62) легко решается: замена

$$\Phi = \lambda^{1/2}\Upsilon \tag{70}$$

сводит ОДУ (62) к линейному ОДУ

$$\Upsilon''_{\theta\theta} = \Delta^2\Upsilon \tag{71}$$

с постоянным положительным (в силу первого из неравенств (54)) коэффициентом

$$\Delta^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda'_\theta}{\lambda}\right)^2 - a\lambda^2 + 2a\lambda = K_{III} = -\frac{2H_M}{\hbar^2} \tag{72}$$

и общим решением

$$\Upsilon(\theta, \zeta) = R_+(\zeta)\exp(\Delta\theta) + R_-(\zeta)\exp(-\Delta\theta). \tag{73}$$

Далее отдельно рассмотрим два участка, которые отличаются друг от друга знаком нелинейных ОДУ

$$\frac{\lambda'_\theta}{2\lambda} = \pm\sqrt{\Delta^2 + a\lambda^2 - 2a\lambda} \tag{74}$$

для $\lambda(\theta)$. Их вещественнозначные решения задаются формулами

$$\delta_{\pm}\exp\left(\mp 2\Delta\theta\right)=\frac{\Delta^2-a\lambda+\Delta\sqrt{\Delta^2+a\lambda^2-2a\lambda}}{\lambda}, \tag{75}$$

зависящими от постоянных $\delta\pm$.

Замечание 2. Мы предполагаем выполнение неравенств

$$a>K_{III}>0,\quad -a\leqslant a(\lambda^2-2\lambda)+K_{III}<0, \tag{76}$$

которые эквиваленты неравенствам (54). Соотношения (69), (72), (76) означают, что для вещественных значений t обе части ОДУ (74) чисто мнимы. Разделяя в равенствах (75) вещественные и мнимые части, нетрудно выписать и зависимость периодических вещественных траекторий $q(t)$ от вещественной независимой переменной t. Но в дальнейшем нам эта зависимость не понадобится.

4.4. Функции Υ наряду с ОДУ (71) удовлетворяют также уравнению

$$(\zeta-\lambda)\Upsilon'_{\theta}=\lambda\zeta\Upsilon'_{\zeta}+(\frac{\lambda}{2}-\zeta\frac{\lambda'_{\theta}}{2\lambda})\Upsilon, \tag{77}$$

в которое после замены (70) переводится линейное уравнение (61).

В п. **5.1** будет показано, что тождественное равенство нулю одной из функций $R\pm$ в представлении (73) возможно лишь для случая тривиального решения $p=0, q=0$ гамильтоновой системы (15), (16). Поэтому далее в этом разделе считается, что $R\pm(\zeta)\not\equiv 0$.

Подставим в уравнение (77) вместо $\lambda'_{\theta}/(2\lambda)$ правую часть ОДУ (74), а вместо $\Upsilon(\theta,\zeta)$ правую часть равенства (73). Приравнивая в результатах этих подстановок члены при различных степенях $\sqrt{\Delta^2+a\lambda^2-2a\lambda}$ и при различных степенях λ, получаем, что функции R_+ и R_- удовлетворяют следующим системам линейных уравнений:

1) – системе уравнений

$$\begin{gathered}\Delta\zeta R'_-(\zeta)+(a\zeta+\frac{\Delta}{2}-\Delta^2)R_-=\delta_+\zeta R_+,\\ \delta_+(\Delta\zeta R'_+(\zeta)+(-a\zeta+\frac{\Delta}{2}+\Delta^2)R_+)=a(\Delta^2-a)\zeta R_-\end{gathered} \tag{78}$$

в случае ОДУ (74) со знаком $+$;

2) – системе уравнений

$$\begin{gathered}\Delta\zeta R'_+(\zeta)+(-a\zeta+\frac{\Delta}{2}+\Delta^2)R_+=-\delta_-\zeta R_-,\\ \delta_-(\Delta\zeta R'_-(\zeta)+(a\zeta+\frac{\Delta}{2}-\Delta^2)R_-)=-a(\Delta^2-a)\zeta R_+\end{gathered} \tag{79}$$

в случае ОДУ (74) со знаком $-$.

Как из системы (78), так и из системы (79) следует, что функции $R_{\pm}$ удовлетворяют следующим линейным уравнениям второго порядка:

$$\zeta^2R''_{\pm}+\zeta R'_{\pm}+(-a\zeta^2+2a\zeta-(\Delta\pm\frac{1}{2})^2)R_{\pm}=0. \tag{80}$$

Заменами

$$\xi=2\sqrt{a}\zeta,\quad R_{\pm}=exp(-\xi/2)\xi^{\Delta\pm 1/2}F_{\pm}(\xi) \tag{81}$$

уравнения (80) сводятся к ОДУ

$$\xi F''_{\pm}+(2(\Delta\pm 1/2)+1-\xi)F'_{\pm}+(\sqrt{a}-\frac{1}{2}-\Delta\mp\frac{1}{2})F_{\pm}=0, \tag{82}$$

решения которых определяют вырожденные гипергеометрические функции.

4.5. Окончательно построенные решений $G(\hbar,t,x)$ уравнения Шредингера (14) записываются в виде

$$G(\hbar,t,x)=\exp\left((\Delta^2+1/4)\theta\right)\Upsilon(\theta,\zeta)=$$

$$= \exp((\Delta + 1/2)^2\theta)R_+(\xi) + \exp((\Delta - 1/2)^2\theta)R_-(\xi), \tag{83}$$

где функции $R_\pm$ связаны друг с другом соотношениями (78), (79).

Они представляет собой суммы пар его известных решений вида $\exp(-iEh/t)R(x)$ с постоянными E. Не очевидный нюанс состоит в том, что функции (83) удовлетворяют также линейному уравнению в частных производных (53), в которое заменами (49), (68), (69) и (70) переводится уравнение (61). Коэффициенты же уравнения (53) уже определяются классическими траекториями гамильтоновой системы (15), (16). То есть, на самом деле построенные решения (83) уравнения Шредингера (12) описывают для этой системы такое квантово-классическое соответствие, которое до работы [16] (и, несколько ранее, в кратком сообщении [15]) ни для каких квантовомеханических уравнений Шредингера не отмечалось.

Аналогичное квантово-классическое соответствие для гамильтоновой системы (55), (56) описывают решения Ψ уравнений Шредингера (12), которые из решений (83) уравнений (14) получаются заменой (13) – эти решения Ψ удовлетворяют также уравнению в частных производных первого порядка

$$(\zeta - \lambda)\left(2\Psi'_t + \frac{\lambda'_t}{\lambda}\Psi + \frac{2iH_{MM}\Psi}{\hbar}\right) = \lambda\left(i\hbar\zeta\Psi'_\zeta - \frac{\lambda'_t}{\lambda}\Psi\right). \tag{84}$$

4.6. Гамильтоновы системы (55), (56) и (15), (16) эквиваленты: они связаны преобразованием

$$\lambda = \exp(-q), \qquad \mu = -p\exp(q), \qquad H_M = H_{MM}. \tag{85}$$

(Осуществление этого преобразования в уравнении (84) позволяет записать его в виде (19).) Но аналитические свойства соответствующих решений уравнений Шредингера (12) и (14) различны.

Из замены (13) видно, что при $\zeta \to 0$ (то есть при $x \to \infty$) решения Ψ уравнений (12) ведут себя глаже, чем связанные с ними этой заменой решения G уравнений (14). Как будет показано ниже в п. **4.7** и **4.8**, данное обстоятельство оказывается довольно существенным при рассмотрении естественного вопроса о выделении подмножеств построенных решений G и Ψ уравнений Шредингера, которые состоят из глобально ограниченных по пространственным переменным функций. Таким образом, исходя из конструкций данной работы при квантовании гамильтоновой системы (16) с гамильтонианом энергии (15) наиболее естественное действие, сопоставляющее ей уравнение Шредингера (14) не является оптимальным –предпочтительнее сначала гамильтонову системы (15), (16) преобразованием (85) перевести в эквивалентную ей систему (55), (56). И уже для этой гамильтоновой системы рассматривать соответствующие ей решения уравнения Шредингера (12).

Замечание 3. Последнее после перехода к пространственной переменной $x = -\ln\zeta$ принимает форму уравнения

$$i\hbar\Psi'_t = -\hbar^2\frac{\Psi''_{xx} + \Psi'_x}{2} + \alpha(\exp(-2x) - 2\exp(-x))\Psi.$$

Задача символической записи этого уравнения в виде квантовомеханического уравнения Шредингера (5), определяемого непосредственно гамильтоновой системой (15), (16), представляется довольно затруднительной.

Замечание 4. Из уравнения (84) следует, что на кривой $\zeta = \lambda(t)$, определяемой координатной компонентой $\lambda(t)$ гамильтоновой системы (55), (56) при конкретном значении гамильтониана H_{MM}, для решений (83), (13) уравнений Шредингера (12), имеет место тождество $i\hbar\Psi'_\zeta \equiv \mu(t)\Psi$, где $\mu(t)$ есть импульсная компонента системы (55), (56) при этом значении H_{MM}. То есть на таких кривых действие квантовомеханического оператора импульса на построенные решения $\Psi(t, x, \hbar)$ лишь знаком отличается от результата умножения этих решений на соответствующие классические импульсы. Решения $G(t, x, \hbar)$ уравнений Шредингера (14), связанные с данными решениями $\Psi(t, x, \hbar)$ уравнений (12) заменой (13), подобным свойством не обладают: из уравнения (53) следует, что на кривой $z = q(t)$, определяемой координатной компонентой $q(t)$ гамильтоновой системы (15), (16), справедливо тождество $i\hbar G'_t \equiv \left(\frac{i\hbar}{2} + q'_t\right) G$, а вовсе не тождество $i\hbar G'_t \equiv q'_t G$.

4.7 Условие обращения в нуль при $x \to \pm\infty$ решений (83) уравнения (14) в коэффициентах уравнения (53) выделяет дискретную серию значений $H_{M,n}$ соответствующих гамильтонианов (15). Эта серия значений определяется согласно старому варианту правила Бора–Зоммерфельда:

в силу неравенств (54) из формулы (20) следует, что соответствующие значения $H_{M,n}$ гамильтонианов (15) определяются решениями последовательности уравнений $(e_n = (1 + H_{M,n}/\alpha)^{1/2})$

$$\oint p(q)dq = 2\sqrt{2} \int\limits_{-\ln[1+e_n]}^{-\ln[1-e_n]} \sqrt{H_{M,n} - \alpha(\exp(-2q) - 2\exp(-q))}dq =$$

$$= 2\sqrt{2\alpha} \int\limits_{1-e_n}^{1+e_n} \frac{(e_n^2 - 1 - r^2 + 2r)^{1/2}}{r} dr =$$

$$= 2\sqrt{2\alpha}(\int\limits_{1-e_n}^{1+e_n} \frac{dr}{(e_n^2 - 1 - r^2 + 2r)^{1/2}} + (e_n^2 - 1) \int\limits_{1-e_n}^{1+e_n} \frac{dr}{r(e_n^2 - 1 - r^2 + 2r)^{1/2}}) =$$

$$= -2\sqrt{2\alpha}(\arcsin \frac{1-r}{e_n} - (1 - e_n^2)^{1/2} \arcsin \frac{e_n^2 - 1 + r}{re_n})|_{1-e_n}^{1+e_n} =$$

$$= 2\sqrt{2\alpha}\pi(1 + \sqrt{-H_{M,n}/\alpha}) = 2\pi n\hbar, \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

То есть

$$H_{M,n} = -(\sqrt{\alpha} - n\hbar/\sqrt{2})^2, \tag{86}$$

где $n \in \mathbf{N}$ меняются от 1 до значения, при котором еще $\sqrt{2\alpha} > n\hbar$.

Отличие лишь в том, что для обращающихся в нуль при $x \to \pm\infty$ совместных решений (83) уравнений (14) и (53) натуральные n в формуле (86) меняются от 1 до значения, при котором еще $\sqrt{2\alpha} > (n + 1/2)\hbar$.

4.8. В самом деле, наложим ограничения на коэффициенты линейных ОДУ (80), потребовав, чтобы существовали решения этих ОДУ, которые стремятся к нулю как при $\zeta \to 0$, так и при $\zeta \to \infty$. Как уже указывалось, заменами (81) уравнения (80) сведятся к ОДУ (82) на вырожденную гипергеометрическую функцию. Согласно [34, гл.III, §23, задача 4, формула (2)] необходимым и достаточным условием существования ограниченных при $\xi \to 0$ уравнений (82), которые при $\xi \to \infty$ не растут быстрее некоторой степени ξ, является выполнение, соответственно, соотношений

$$\Delta \pm \frac{1}{2} = \sqrt{a} - n - \frac{1}{2}, \quad \sqrt{a} > n + \frac{1}{2},$$

справедливых при целых неотрицательных n (при этом функции $F_\pm(\xi, n)$ есть полиномы).

Из них следует, что для глобальной ограниченности по переменной x решений (83) временного уравнения Шредингера (14), которые задаются функциями (81), связанными соотношениями (78), (79), необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$\Delta = \sqrt{a} - n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \sqrt{a} > n + \frac{1}{2}.$$

Первое из этих ограничений эквивалентно формуле (86), а оставшееся означает, что неотрицательные целые значения n при этом изменяются на множестве, описанном в последнем абзаце пункта **4.7**.

А вот для совместных решений Ψ уравнения Шредингера (12) и уравнения первого порядка (84), которые из решений (83), получаются заменами (13), требование их стремления к нулю при $\zeta \to 0$ и при $\zeta \to \infty$ среди периодических решений гамильтоновой системы (15), (16) (отличных от $\lambda(t) = 1, \mu(t) = 0$) в коэффициентах уравнения (84) выделяет уже множество классических таекторий, в точности совпадающее с множеством, описанным во втором абзаце п. 4.7.

5. Заключительные замечания

5.1. Рассмотрим решения линейного ОДУ (71) вида

$$\Upsilon = R_\pm(\zeta)\exp(\pm\Delta\theta). \tag{87}$$

Требование удовлетворения такими решениями также линейному уравнению первого порядка (77) влечет за собой необходимость справедливости соотношений

$$\pm\,\Delta(\zeta - \lambda) = \lambda\frac{\zeta R'_\pm(\zeta)}{R_\pm(\zeta)} + \frac{\lambda}{2} - \zeta\frac{\lambda'_\theta}{2\lambda}, \tag{88}$$

дифференцирование которых по переменной ζ позволяет сделать вывод о том, что при этом

$$\frac{\lambda'_\theta}{2\lambda^2} \pm \frac{\Delta}{\lambda} = \left(\frac{\zeta R'_\pm(\zeta)}{R_\pm(\zeta)}\right)'_\zeta = \vartheta_\pm,$$

где $\vartheta_\pm$ – некоторые постоянные. А значит, функции $R_\pm$ должны быть решениями линейных ОДУ ($\upsilon_\pm$ – постоянные)

$$\frac{\zeta R'_\pm(\zeta)}{R_\pm(\zeta)} = \vartheta_\pm\zeta + \epsilon_\pm. \tag{89}$$

Подстановка этого выражения в уравнение (88) наряду с ОДУ

$$\frac{\lambda'_\theta}{2\lambda} \pm \Delta = \vartheta_\pm\lambda \tag{90}$$

дает также формулы

$$\epsilon_\pm = -\frac{1}{2} \mp \Delta. \tag{91}$$

Первые части замен (49) и (52) ОДУ (90) переводят в ОДУ

$$\frac{iq'_t}{\hbar} = \vartheta_\pm\exp(-q) \mp \Delta. \tag{92}$$

Эти ОДУ в сочетании с формулой

$$\Delta^2 = -\frac{2}{\hbar^2}H_M = -\frac{2}{\hbar^2}\left[\frac{(q'_t)^2}{2} + \alpha(\exp(-2q) - 2\exp(-q))\right]$$

для гамильтониана H_M гамильтоновой системы (15), (16) означают справедливость двойного равенства

$$-\frac{(q'_t)^2}{\hbar^2} = \Delta^2 + \frac{2\alpha}{\hbar^2}(\exp(-2q) - 2\exp(-q)) = \Delta^2 \mp 2\vartheta_\pm\Delta\exp(-q) + \vartheta_\pm^2\exp(-2q).$$

Предположим, что $q_t \not\equiv 0$. Тогда из этого двойного равенства в качестве следствия получим равенства

$$\Delta = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\hbar}, \qquad \vartheta_\pm = \pm\Delta, \tag{93}$$

гарантирующих, в частности, вещественность правой и чистую мнимость левых частей ОДУ (92) для всех вещественнозначных $q(t)$.

Таким образом, для таких функций q удовлетворение функциями (87) как ОДУ (71), так и линейному уравнению (77) возможно лишь для тривиального решения

$$p(t) = q_t'(t) \equiv 0, \qquad q(t) \equiv 0$$

гамильтоновой системы (15), (16). Для этого случая наряду с равенством (91) с необходимостью также следует (см. ОДУ (89), (90)) справедливость равенств (93) и вывод о том, что функции $R_\pm$ имеют вид

$$R_\pm(\zeta) = R_\pm^0 \zeta^{-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{2\alpha}}{\hbar}} \exp(\pm \frac{\sqrt{2\alpha}}{\hbar} \zeta),$$

где $R_\pm^0$ – постоянные.

Такой вид этих функций для случая $q(t) \equiv 0$ является, очевидно, и достаточным условием одновременного удовлетворения функциями (87) линейным уравнениям (71), (77). Замены (13), (68), (69) и (70) позволяют по получившимся функциям (87) построить соответствующие решения уравнений Шредингера (12) и (14).

Условию обращения этих решений в нуль при $\zeta \to \infty$ (то есть, при $x \to -\infty$) из двух возможных вариантов удовлетворяет лишь один:

хорошо известные [34, гл.III, §23, задача 4] решения

$$G = Const \exp\left(\frac{it\alpha}{\hbar}\left(1 - \frac{\hbar}{2\sqrt{2\alpha}}\right)^2\right) \exp\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2\alpha}}{\hbar}\right) x\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{2\alpha}}{\hbar} \exp(-x)\right)$$

уравнения Шредингера (14), которые стремятся к нулю при $x \to \infty$ лишь в случае справедливости неравенства $2\sqrt{2\alpha} > \hbar$,

и, соответственно, решения

$$\Psi = Const \exp\left(\frac{it\alpha}{\hbar}\left(1 - \frac{\hbar}{\sqrt{2\alpha}}\right)\right) \zeta^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\hbar}} \exp\left(-\frac{\sqrt{2\alpha}}{\hbar}\zeta\right)$$

уравнения Шредингера (12). Эти решения Ψ стремятся к нулю при $\zeta \to 0$ уже без всяких дополнительных ограничений на величину положительной постоянной α.

5.2. Аналогичным образом наряду с совместными (на решениях ОДУ (23)) решениями (26) уравнений (20), (24) и (25) статьи [16] (в данном пункте имеется ввиду обозначения и нумерация из этой статьи) можно рассмотреть и их совместные решения вида

$$V = \exp(\pm\tau) A_\pm(z).$$

Такие решения существуют лишь в случае тривиального решения $q \equiv 0$ ОДУ (23). Для существования таких совместных решений уравнений (20), (24) и (25) необходимо и достаточно, чтобы функции $A_\pm(z)$ имели вид

$$A_\pm(z) = Const \exp\left(\pm \frac{z^2}{2}\right).$$

Условие стремления к нулю при $x \to \pm\infty$ соответсвующих решений временного уравнения Шредингера для гармоничесокго осциллятора

$$i\hbar\Psi_t' = -\frac{\hbar^2}{2}\Psi_{xx}'' + \frac{x^2}{2}\Psi$$

среди двух возможных вариантов оставляет лишь один – его известные решения вида

$$\Psi = Const \exp\left(\frac{it}{2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\hbar}\right).$$

5.3. В кратком сообщении [15] отмечалось, что использование уравнений ИДМ (3) для пятого уравнения Пенлеве позволяет построить новые явные решения уравнения эволюционного уравнения, которое сводится к уравнению Шредингера

$$i\hbar\Psi'_t = -\hbar^2\frac{\Psi''_{xx}}{2} + U(x)\Psi, \tag{94}$$

определяемого гамильтоноианом энергии (21) автономной гамильтоновой системы (16) с гладким потенциалом

$$U(q) = -\frac{\alpha}{\operatorname{ch}^2 q} \tag{95}$$

(иногда называемым [35, гл.II, задача 39] модифицированным потенциалом Пешля–Теллера):

Эти решения уравнения Шредингера одновременно удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям в частных производных (19), коэффициенты K и M которых определяются решениями гамильтновой системы (16),(95). Условие стремления к нулю при $x \to \pm\infty$ данных совместных решений уравнения Шредингера (94),(95) и соответствующего линейного уравнения (19) среди вещественных периодических решений $(\lambda(t), \mu(t))$ гамильтоновой системы (16),(95), задающих коэффициенты K и M уравнения (19), вновь выделяет те, что определяются согласно старому варианту формулы Бора-Зоммерфельда (20).

Уравнения ИДМ (3) для пятого уравнения Пенлеве можно также использовать для построения явных решений уравнений Шредингера (94), определяемых гамильтонианом энергии (21) гамильтоновой системой (16) с негладким потенциалом Пешля–Теллера (см. [35, гл.II, задача 39])

$$U(q) = Const\left[\frac{a}{\sin^2 q} + \frac{b}{\cos^2 q}\right], \tag{96}$$

где $a > 1$ и $b > 1$. Эти явные решения (гладкие при $-\pi < x < \pi$) также одновременно удовлетворяют линейному уравнению первого порядка вида (19) с коэффициентами, зависящими от решений гамильтоновой системы (16), (96). Условие обращения в нуль при $x \to \pm\pi$ данных явных решений уравнения Шредингера (94),(96) среди вещественных периодических решений системы (16), (96) также выделяет подмножество тех, что определяются согласно старому варианту формулы Бора–Зоммерфельда (20).

Подробное (и уточненное) изложение результатов, бегло описанных в этом пункте, автор планирует представить в будущем в виде отдельной статьи.

5.4 Актуальна задача описания таких не зависящих от времени потенциалов $U(x)$, для которых уравнения Шредингера (94) допускают решения типа тех, о которых выше шла речь в разделе **4** и в п. **5.1**–**5.3**. Заслуживает в связи с этим обстоятельством внимания идея рассмотрения класса потенциалов $U(x)$, выделенного в работе [29].

Но, по мнению автора, такому ограничению на множество возможных потенциалов $U(x)$ опять-таки не достает естественности. Возможно, более перспективной с точки зрения удовлетворения требованию естественности для решения задачи, описанной в предыдущем абзаце, будет использование дополнительного к уравнению Шредингера (94) линейного уравнения типа (10) с привлечением, возможно, и ряда других естественных ограничений.(Например, требования справедливости для соответствующих совместных решений Ψ тождества типа последней выделенной формулы раздела **3** настоящей статьи).

5.5 На сегодняшний день известен довольно обширный список изомонодромных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, с которым можно ознакомиться по работам [36]–[39]. (Этот список считается полным [39].) Описание «квантований» таких систем, которые бы имели решения, явно записываемые через решения соответсвующих уравнений ИДМ пока лишь начато в недавних работах [17] и [18]. Здесь еще многое предстоит понять и сделать. Похоже на то, что ключевую роль при описании таких «квантований» должны сыграть замены типа (21) из [17]. (Немного в иных целях такая замена ранее использовалась Д. П. Новиковым в статье [19] – см. также формулу (2.3.36) в статье [40]).

К сожалению, пока довольно мало известно о множестве изомонодромных гамильтоновых систем с числом степеней свободы больше, чем 2. И совсем нигде не предъявлены «квантования» таких систем с решениями, которые явно выписаны через решения уравнений ИДМ.

Интересными представляются также вопрос о возможных автонономных редукциях этих изомонодромных систем и вопрос о возможности построения новых решений соответствующих временных квантовомеханических уравнений Шредингера с использованием уравнений ИДМ для этих систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Malmquist *Sur les equations differentielles du second ordre don't l'integral general a ses points critiquest fixes* // Ark. Mat. Astr. Fys. 1922–23. V. 17. P. 1–89.
2. Лукашевич Н. А. *О функциях, определяемых одной системой дифференциальных уравнений* // Дифф. уравнен. 1969. Т. 5. № 1. С. 379–381.
3. K. Okamoto *Polinomial Hamiltonians associated with Painlevé equations*, // Proc. Japan Acad. 1980. V. 56A. P. 264–268.
4. Цегельник В. В. *Гамильтонианы, ассоциированные с третьим и пятым уравнениями Пенлеве* // ТМФ. 2010. Т. 162. № 1. С. 69-74.
5. A. A. Kapaev, E. Hubert *A note on the Lax pairs for Painlevé quations* // J. Phys. A. 1999. V. 32. № 46. P. 8145–8156.
6. A. A. Kapaev *Lax pairs for Painlevé equations* // CRM Proc. Lecture Notes. 2002. V. 31. P. 37–42.
7. J. Harnad, *Dual isomonodromic deformations and moment maps to loop algebras* //Commun. Math. Phys. 1994. V. 166. № 2. P. 337-365.
8. J. Harnad, A. R. Its, *Integrable Fredholm operators and dual isomonodromic deformations* //Commun. Math. Phys. 2002. V. 226. № 3. P. 497–530.
9. Сулейманов Б. И., *"Квантования" второго уравнения Пенлеве и проблема эквивалентности его $L-A$ - пар* // ТМФ. 2008. Т. 156. № 3. С. 364–378.
10. N. Joshi, A. V. Kitaev, P. A. Treharne, *On the linearization of the first and second Painlevé equations* // J. Phys. A. 2009. V. 42. № 5. 05528, 18 pp.
11. R. Garnier, *Sur des equations differentielles du troisieme ordre dont l'integrale generale est uniforme et sur une classe d'equations nouvelles d'ordre superieur dont l'integrale generale a ses points critiques fixes* // Ann. Sci. Ecole Normale Sup (3). 1912. V. 29. P. 1–126.
12. Сулейманов Б. И. *Гамильтоновость уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций* // Дифф. уравн. 1994. Т. 30. № 5. С. 791–796.
13. A. Zabrodin, A. Zotov, *Quantum Painlevé-Calogero correspondence* // J. Math. Phys. 2012. V. 53. 073507. 19 pp.
14. A. Zabrodin, A. Zotov *Classical-quantum correspondence and functional relations for Painlevé equations* // Constr. Approx. 2015. V. 41. Iss. 3. P. 385—423 , arXiv: 1212.5813.
15. Сулейманов Б. И. *Квантование некоторых автономных редукций уравнений Пенлеве и старая квантовая теория.*// Тезисы международной конференции, посвященной памяти И.Г. Петровского "23-е совместное заседание Московского математического общества и семинара имени И.Г.Петровского Москва, 2011. С. 356–357.
16. Сулейманов Б. И. *«Квантовая» линеаризация уравнений Пенлеве как компонента их $L-A$ пар* // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4. № 2. С. 127–135.
17. Сулейманов Б. И. *«Квантования» высших гамильтоновых аналогов уравнений Пенлеве I и II с двумя степенями свободы* //Функциональный анализ и его приложения. 2014. Т. 48. Вып. 3. С. 52–62.
18. Новиков Д. П., Сулейманов Б. И. *«Квантования» изомонодромной гамильтоновой системы Гарнье с двумя степенями свободы*// ТМФ. 2016. Т. 187. № 1. С. 39–57.

19. Новиков Д. П. *О системе Шлезингера с матрицами размера* 2×2 *и уравнении Белавина — Полякова — Замолодчикова* // ТМФ. 2009. Т. 161. № 2. С. 191–203.
20. D. P. Novikov *A monodromy problem and some functions connected with Painlevé 6* // Intrenational Conference "Painleve equations and Related Topics". Proceedings of International Conference. St.-Petrsburg, Euler International Mathematical Institute. 2011. P. 118–121.
21. Новиков Д. П., Романовский Р. К., Садовничук С. Г. *Некоторые новые методы конечнозонного интегрирования солитонных уравнений* Наука. Новосибирск, 2013. 251 с.
22. A. Bloemendal, B. Virag *Limits of spiked random matrices I* // Probability Theory and Related Fields. 2013. V. 156 Is. 3-4. 795–825.
23. Зотов А. В., Смирнов А. В. *Модификация расслоений, эллиптические интегрируемые системы и связанные задачи* // ТМФ. 2013. Т. 177. №$\tilde{1}$. С. 3—67.
24. Левин А. М., Ольшанецкий М. А., Зотов А. В. *Классификация изомонодромных задач на эллиптических кривых* // УМН. 2014 Т.69. Вып. 1(415) С. 39—124.
25. H. Nagoya *Hypergeometric solutions to Schrödinger equation for the quantum Painlevé equations* // J. Math. Phys. 2011. V. 52. № 8. 16 pp.
26. H. Nagoya, Y. Yamada, *Symmetries of quantum Lax equations for the Painlevé equations* // Annales Henri Poincare. 2014. V. 15. Iss. 3. P. 313–344.
27. I. Rumanov, *Classical integrability for beta-ensembles and general Fokker-Planck equations* // J. Math. Phys. 2015. V. 56. № 1. 16 pp.
28. H. Rosengren, *Special polynomials related to the supersymmetric eight-vertex model: a summary* Commun. Math. Phys. 2015. V. 349. № 3. P. 1143–1170.
29. A. M. Grundland, D. Riglioni *Classical-quantum correspondence for shape-invariant systems* // J. Phys. A. 2015. V. 48. № 24. P. 245201–245215.
30. R. Conte, I. Dornic *The master Painlevé VI heat equation* // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2014. V. 352. Iss. 10. P. 803–806.
31. Славянов С. Ю. *Структурная теория специальных функций* //ТМФ. 1999. Т. 119. № 1. С. 3–19.
32. Мессиа А., *Квантовая механика* Том 1. М: Наука. 1978. 480 с.
   1965. 368 с.
33. Астапенко В. А., Ромадановский М. С. *Возбуждение осциллятора Морзе сверхкоротким чирпированным импульсом* ЖЭТФ. 2010. Т. 137. Вып. 3. С. 429-436.
34. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Квантовая механика. Нерелятивисткая теория* Наука. М. 1974. 752 с.
35. Флюгге З., *Задачи по квантовой механике* Том 1. М.: Мир. 1974. 344 с.
36. H. Kimura *The deneration of the Two Dimensional Garnier System and the Polynomial Hamiltonian Structure* // Annali di Matematica pura et applicata (IV). 1989. V. CLV. P. 25-74.
37. H. Kawakami, A. Nakamura, H. Sakai, *Toward a classification of* 4*-dimensional Painlevé-type equations* // Contemporary Mathematics. 2013. **5933** (2013), P. 143-161.
38. H. Kawakami, A. Nakamura, H. Sakai, *Degeneration scheme of* 4*-dimensional Painlevé-type equations*// arXiv:1209.3836. 2012.
39. A. Nakamura *Autonomous limit of* 4*-dimensional Painlevé-type equations and degeneration of curves of genus two* //arXiv:1505.00885. 2015.
40. M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo, *Holonomic quantum fields* // Publ. Rims Kyoto Uiv. 1979. V. 15. P. 201–278.

Булат Ирекович Сулейманов
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: bisul@mail.ru