ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 3 (2016). С. 126-134.

УДК 515.168.5+517.986.32

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ДЕЙСТВИЯМИ ДИСКРЕТНЫХ ГРУПП НА МНОГООБРАЗИЯХ С КРАЕМ

А.Ю. САВИН, Б.Ю. СТЕРНИН

Аннотация. Для действия дискретной группы G на гладком компактном многообразии M с краем рассматривается класс операторов, порожденный псевдодифференциальными операторами на M и операторами сдвига, ассоциированными с действием группы. Для эллиптических операторов из этого класса устанавливается классификация с точностью до стабильных гомотопий и показывается, что группа стабильных гомотопических классов таких задач изоморфна K-группе скрещенного произведения алгебры непрерывных функций на кокасательном расслоении внутренности многообразия и группы G, действующей на этой алгебре автоморфизмами.

Ключевые слова: эллиптический оператор, гомотопическая классификация, K-теория, скрещенное произведение, G-оператор.

Mathematics subject classification (2010): Primary 58J32; Secondary 58J40, 46L80, 35S15

1. Введение

Проблема индекса в эллиптической теории состоит в том, чтобы выразить индекс эллиптического оператора в терминах топологических инвариантов символа оператора и многообразия, на котором он определяется [1]. Важную роль при этом играет получение гомотопической классификации операторов, т.е. вычисление группы (стабильных) гомотопических классов эллиптических операторов на многообразии. Польза от этого вычисления состоит в том, что гомотопические инварианты операторов и, в частности, индекс, являются функционалами на этой группе гомотопических классов.

Гомотопическая классификация была впервые получена на гладком замкнутом многообразии в [1], где было показано, что группа стабильных гомотопических классов эллиптических операторов изоморфна топологической K-группе с компактными носителями $K_c(T^*M)$ кокасательного расслоения многообразия. Затем гомотопическая классификация была получена для многих других интересных классов эллиптических операторов. Так, в [2] показано, что гомотопическая классификация классических краевых задач на многообразии с краем получается в терминах группы $K_c(T^*M^\circ)$, отвечающей внутренности $M^\circ = M\setminus\partial M$ многообразия с краем. Получена также гомотопическая классификация эллиптических операторов в алгебре Буте де Монвеля на многообразии с краем [3, 4]. Гомотопическая классификация также была получена для многих классов многообразий

A.Yu. Savin, B.Yu Sternin, Homotopy classification of elliptic problems associated with discrete group actions on manifolds with boundary.

Работа частично поддержана грантами РФФИ (проекты 15-01-08392 и 16-01-00373), Минобрнауки РФ соглашение № 02.a03.21.0008, а также грантом Немецкого научно-исследовательского общества.

Поступила 18 мая 2016 г.

с особенностями [5]–[7]. Рассматривались приложения классификации: к вычислению препятствий типа Атьи–Ботта [8] к существованию эллиптических задач на многообразиях с особенностями; к описанию двойственности Пуанкаре на многообразиях с особенностями и др. [9]–[13].

Имеется интересный класс эллиптических задач, ассоциированных с действиями групп на многообразиях (см. монографии и обзоры [14]–[17] и цитированную в них литературу). Для этих задач на гладком замкнутом многообразии была получена гомотопическая классификация в терминах K-группы $K_0(C_0(T^*M) \rtimes G)$ скрещенного произведения алгебры непрерывных функций на кокасательном расслоении T^*M и группы G, действующей на этой алгебре автоморфизмами. Последняя K-группа может быть вычислена в топологических терминах для многих групп G, благодаря отображению (изоморфизму) Баума–Конна [18].

Цель работы — получить гомотопическую классификацию эллиптических псевдодифференциальных операторов, ассоциированных с действием дискретной группы на многообразии с краем. Отметим, что теория общих псевдодифференциальных операторов на многообразии с краем исследована в работах [19]–[21]. В данной работе мы опираемся на описание соответствующей C^*-алгебры таких операторов, данное в работе [22]. Мы показываем, что группа стабильных гомотопических классов таких эллиптических задач изоморфна K-группе $K_0(C_0(T^*M^\circ) \rtimes G)$ скрещенного произведения, отвечающего внутренности многообразия.

2. Постановка задачи

2.1. Псевдодифференциальные операторы на многообразии с краем. В этом пункте мы напоминаем основные сведения о структуре алгебры псевдодифференциальных операторов на многообразии с краем из работы [22]. Пусть M — гладкое компактное многообразие с краем $X = \partial M$. Мы будем считать, что выбрана некоторая воротниковая окрестность U края, т.е. диффеоморфизм

$$U \simeq X \times [0,1), \tag{1}$$

при котором край X переходит в подмногообразие $X \times \{0\}$. Далее в качестве локальных координат в окрестности края будем выбирать (y,t), где y — координаты на X, а $t \in [0,1)$.

Через $\Psi(M) \subset \mathcal{B}L^2(M)$ обозначим C^*-алгебру псевдодифференциальных операторов нулевого порядка на M, вообще говоря, без свойства трансмиссии [22], действующих в пространстве L^2 на многообразии. Алгебру Калкина обозначим через $\Sigma = \Psi(M)/\mathcal{K}$. Здесь и ниже через $\mathcal{K}$ мы обозначаем идеал компактных операторов. Напомним необходимые нам сведения об алгебре Σ, которые установлены в цитированной работе. Имеется символьное отображение

$$\sigma = (\sigma_{int}, \sigma_b) : \Sigma \longrightarrow C(S^*M) \oplus C(S^*X, \mathcal{B}L^2(\mathbb{R}_+)), \tag{2}$$

компоненты которого называются внутренним и граничным символом соответственно. При этом C^*-алгебра граничных символов, которую обозначим через

$$\Sigma_b = \mathrm{Im}\sigma_b \subset C(S^*X, \mathcal{B}L^2(\mathbb{R}_+)),$$

имеет следующую дополнительную символьную структуру: на ней определено отображение внутреннего символа

$$\sigma'_{int} : \Sigma_b \longrightarrow C(S^*M|_X);$$

меллиновского символа

$$\sigma_M : \Sigma_b \longrightarrow C(X \times \overline{\mathbb{R}});$$

имеет место точная последовательность C^*-алгебр

$$0 \longrightarrow C(S^*X, \mathcal{M}_0) \longrightarrow \Sigma_b \xrightarrow{\sigma_M} C(X \times \overline{\mathbb{R}}) \longrightarrow 0,$$

где $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{B}L^2(\mathbb{R}_+)$ — идеал, состоящий из граничных символов с нулевым меллиновским символом. Отметим, что граничные символы, отвечающие этому идеалу, удовлетворяют условию трансмиссии, а сам этот идеал совпадает с идеалом, рассмотренным в [3] в теореме 2. В частности, в цитированной работе установлено, что этот идеал имеет тривиальные K-группы:

$$K_*(\mathcal{M}_0) = 0. \tag{3}$$

В локальных координатах (y, t) в окрестности края граничный символ получается из оператора замораживанием его коэффициентов в точке края и применением преобразования Фурье $y \to \eta$. При этом получается оператор в пространстве с координатами η, t, который представляет собой семейство с параметрами η операторов, действующих в пространстве L^2-функций на полупрямой $\mathbb{R}_+$ с координатой t. Это семейство и есть граничный символ.

Далее, меллиновский символ $\sigma_M(a)$ граничного символа $a \in \Sigma_b$ определяется следующим образом. Граничный символ a является семейством операторов на полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+$. Тогда нуль $0 \in \overline{\mathbb{R}}_+$ рассматривается как коническая точка и меллиновский символ есть просто конормальный символ рассматриваемого оператора в этой точке. Другими словами, у оператора a замораживаются коэффициенты в нуле и делается преобразование Меллина $t \to p$. При этом граничный символ переходит в оператор умножения на функцию от переменной p, которая и есть по определению меллиновский символ оператора.

2.2. G-псевдодифференциальные операторы на многообразии с краем. Предположим дополнительно, что задано действие дискретной группы G на M диффеоморфизмами. Мы будем предполагать, что группа является аменабельной [23]. С действием группы на многообразии ассоциирован класс нелокальных операторов, которые называются G-операторами [17, 24]. Дадим определение этих операторов в рассматриваемой ситуации.

Группа G действует на многообразии и, следовательно, действует при помощи соответствующих замен переменных автоморфизмами на C^*-алгебре $C(M)$ непрерывных функций на многообразии M, а также на алгебре $\Psi(M)$ псевдодифференциальных операторов. С действием на алгебре $\Psi(M)$ ассоциировано C^*-скрещенное произведение [16],[24]

$$\Psi(M) \rtimes G.$$

В силу аменабельности группы скрещенное произведение определено однозначно. Элементы этой C^*-алгебры являются семействами $\{D_g\}_{g\in G}$ псевдодифференциальных операторов $D_g \in \Psi(M)$, параметризованных группой G. Такому семейству мы сопоставим так-называемый G-оператор

$$D = \sum_{g\in G} D_g U_g : L^2(M) \longrightarrow L^2(M), \tag{4}$$

где

$$U_g : u(x) \longmapsto \left(\frac{(g^{-1})^*\mu}{\mu}(x) \right)^{1/2} u(g^{-1}x)$$

— унитарное представление группы при помощи взвешенных операторов сдвига в пространстве $L^2(M)$. Здесь μ — форма объёма на M, определяющая скалярное произведение в пространстве $L^2(M)$. При этом сумма в (4) корректно определена для финитных по g семейств и продолжается на всё скрещенное произведение в силу универсального свойства скрещенных произведений (подробнее см. [17, 24]), и таким образом определено представление

$$\begin{array}{ccc} \Psi(M) \rtimes G & \longrightarrow & \mathcal{B}L^2(M) \\ \{D_g\} & \longmapsto & D = \sum_{g\in G} D_g U_g \end{array}$$

скрещенного произведения в пространстве $L^2(M)$. Для получаемых операторов вводится понятие символа

$$\sigma(D) = \{\sigma(D_g)\}_{g\in G} \in \Sigma \rtimes G,$$

условие эллиптичности формулируется как условие обратимости символа в указанной алгебре (в цитированных работах вводятся также и более явные характеризации этого условия), показывается, что эллиптические операторы являются фредгольмовыми.

Кроме скалярных операторов (4), можно также рассматривать и соответствующие матричные операторы. Заметим, однако, что гомотопическую классификацию более естественно проводить в терминах более широкого класса операторов, чем операторы (4) или даже матричные операторы, который является аналогом операторов, действующих в сечениях расслоений (см. [1] в классическом случае). А именно, мы рассматриваем класс операторов вида

$$D : \mathrm{Im}P_1 \longrightarrow \mathrm{Im}P_2, \qquad \mathrm{Im}P_{1,2} \subset L^2(M, \mathbb{C}^N), \tag{5}$$

действующих между образами матричных проекторов

$$P_{1,2} \in \mathrm{Mat}_N(C(M) \rtimes G)$$

(т.е. выполнены соотношения $(P_1)^2 = P_1, (P_2)^2 = P_2$) с компонентами из алгебры $C(M)\rtimes G$, причём

$$D \in \mathrm{Mat}_N(\Psi(M) \rtimes G)$$

— матричный оператор с компонентами из скрещенного произведения $\Psi(M) \rtimes G$. Проекторы P_1, P_2 и операторы D удовлетворяют соотношению

$$P_2 D P_1 = D P_1,$$

которое означает, что оператор D переводит образ проектора P_1 в образ проектора P_2. Для операторов вида (5) естественно вводится понятие символа и эллиптичности и справедлива теорема фредгольмовости (см. абстрактную конструкцию в [5]).

2.3. Задача о гомотопической классификации. Через $\mathrm{Ell}(M, G)$ обозначим абелеву группу стабильных гомотопических классов эллиптических операторов вида (5). Напомним кратко (подробнее см. [5]), что два оператора такого типа называются стабильно гомотопными, если существует непрерывная гомотопия эллиптических операторов $(D_t, P_{1,t}, P_{2,t})$, соединяющая прямые суммы этих операторов с некоторыми тривиальными операторами. При этом тривиальным оператором называется оператор вида (5), в котором оператор D имеет компоненты в подалгебре

$$C(M) \rtimes G \subset \Psi(M) \rtimes G.$$

Стандартным образом проверяется, что стабильная гомотопность является отношением эквивалентности на множестве эллиптических операторов вида (5).

Цель работы — получить стабильную гомотопическую классификацию, т.е. вычислить группу $\mathrm{Ell}(M, G)$ в терминах топологических инвариантов действия группы на многообразии.

3. Основной результат

Основной результат настоящей работы состоит в приводимой ниже теореме. Чтобы сформулировать эту теорему, дадим определение допустимого действия.

Определение 1. Действие группы G на многообразии M с краем будем называть *допустимым*, если выполнено одно из следующих двух условий:

1) либо для любого элемента $g \in G$ индуцированное действие на кокасательном расслоении при помощи кодифференциалов

$$\partial g = (dg^t)^{-1} : T^*M \longrightarrow T^*M, \text{ где } dg : TM \to TM \text{ — дифференциал,}$$

над краем (т.е. при $t = 0$) равно

$$\partial g|_{t=0} = \begin{pmatrix} \partial(g|_X) & 0 \\ 0 & id \end{pmatrix} : T^*X \oplus \mathbb{R} \longrightarrow T^*X \oplus \mathbb{R}, \qquad (6)$$

где используем разложение

$$T^*M|_X \simeq T^*X \oplus \mathbb{R},$$

которое отвечает воротниковой окрестности (1). Другими словами, кодифференциал при $t = 0$ действует тождественно по нормальному направлению к краю, а по касательным к краю направлениям совпадает с кодифференциалом сужения действия на край;

2) либо для произвольной C^*-алгебры A, на которой действует группа G, из тривиальности её K-групп $K_*(A) = 0$ следует, что тривиальны также и K-группы скрещенного произведения $K_*(A \rtimes G) = 0$.

Отметим, что допустимыми являются: произвольное действие конечной группы или, более общим образом, произвольное изометрическое действие (в этом случае выполнено условие 1)); произвольное действие группы $\mathbb{Z}^n$ при всех n (в этом случае выполнено условие 2), в чём несложно убедиться, пользуясь последовательностью Пимзнера–Войкулеску [25]).

Теорема 1. *Пусть действие группы G на многообразии M допустимо. Тогда имеет место изоморфизм групп*

$$\operatorname{Ell}(M, G) \simeq K_0\big(C_0(T^*M^\circ) \rtimes G\big), \qquad (7)$$

где $M^\circ = M \setminus X$ — внутренность многообразия, при этом на кокасательном расслоении T^*M° рассматривается следующее действие группы G:

$$(x, \xi) \in T^*M \longmapsto \left(gx, |\xi| \frac{\partial g \xi}{|\partial g \xi|} \right) \in T^*M,$$

где нормы ковекторов вычисляются по отношению к некоторой фиксированной метрике на многообразии.

Изоморфизм (7) можно трактовать следующим образом (ср. [8, 2, 3]): группа $\operatorname{Ell}(M, G)$ изоморфна аналогичной группе для более узкого (и простого) класса операторов, которые являются изоморфизмами над краем, а произвольный оператор стабильно гомотопен оператору из этого класса.

Замечание 1. Для тривиальной группы $G = \{e\}$ эта теорема даёт изоморфизм

$$\mathrm{Ell}(M, \{e\}) \simeq K_0(C_0(T^*M^\circ)) \simeq K_c(T^*M^\circ),$$

что согласуется с результатами по классификации классических краевых задач и псевдодифференциальных операторов со свойством трансмиссии [2]–[4].

Замечание 2. Для многих дискретных групп K-группа скрещенного произведения в (7) может быть вычислена в топологических терминах, пользуясь отображением Баума–Конна с коэффициентами (см. [18]). Например: 1) для конечной группы G мы получаем изоморфизм

$$K_0(C_0(T^*M^\circ) \rtimes G) \simeq K_0^G(M)$$

с чётной группой G-эквивариантных K-гомологий многообразия M; 2) для группы $G = \mathbb{Z}^n$ имеем

$$K_0(C_0(T^*M^\circ) \rtimes \mathbb{Z}^n) \simeq K_0(M \times \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n),$$

где в правой части соотношения стоит группа K-гомологий фактор пространства произведения $M \times \mathbb{R}^n$ по диагональному действию группы $\mathbb{Z}^n$ (диагональное действие является свободным и собственным, поэтому фактор-пространство является гладким многообразием).

Замечание 3. В случае, когда действие группы является изометрическим, теорему 1 можно применить для того, чтобы доказать формулу индекса. С этой целью надо только построить топологический индекс, пользуясь методами из [16, 26]. Эти вопросы планируется рассмотреть в другом месте.

4. Доказательство основной теоремы

Далее будет дано доказательство теоремы 1.

1. Сначала выразим группу $\mathrm{Ell}(M, G)$ стабильных гомотопических классов эллиптических операторов в терминах K-группы некоторой C^*-алгебры, ассоциированной с алгеброй символов. А именно, в силу результатов работы [5] имеем изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Ell}(M, G) \simeq K_0\big(\mathrm{Con}(C(M) \rtimes G \to \Sigma \rtimes G)\big) = K_0\big(\mathrm{Con}(C(M) \to \Sigma) \rtimes G\big), \tag{8}$$

где для гомоморфизма $f : A \to B$ C^*-алгебр A и B через

$$\mathrm{Con}(A \to B) = \{(a, b(t)) \in A \oplus C[0,1) \otimes B \mid f(a) = b(0)\}$$

обозначен конус этого гомоморфизма.

2. Рассмотрим идеалы

$$C_0(M^\circ) \subset C(M), \qquad \Sigma_0 = C_0(S^*M^\circ) \subset \Sigma, \tag{9}$$

состоящие из функций и символов, обращающихся в нуль на границе. Идеалы в (9) дают нам короткую точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Con}(C_0(M^\circ) \to \Sigma_0) \rtimes G \xrightarrow{i} \mathrm{Con}(C(M) \to \Sigma) \rtimes G \to \mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_b) \rtimes G, \tag{10}$$

скрещенных произведений конусов соответствующих отображений, где через $\Sigma_b \subset C(S^*X, \mathcal{B}L^2(\mathbb{R}_+))$ обозначена алгебра граничных символов. Из точной последовательности в K-теории

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow K_{*+1}(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_b) \rtimes G) \xrightarrow{\partial} \\ \longrightarrow K_*(\mathrm{Con}(C_0(M^\circ) \to \Sigma_0) \rtimes G) \xrightarrow{i_*} K_*(\mathrm{Con}(C(M) \to \Sigma) \rtimes G) \longrightarrow \\ \longrightarrow K_*(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_b) \rtimes G) \to \ldots, \end{aligned} \tag{11}$$

отвечающей короткой последовательности (10), следует, что вложение i индуцирует изоморфизм K-групп, если K-группы конуса $\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_b) \rtimes G$ тривиальны.

Теперь мы предположим, что действие группы допустимо в смысле определения 1 и выполнено условие 1). Случай, когда выполнено условие 2), будет рассмотрен ниже. Тогда имеет место изоморфизм C^*-алгебр

$$\mathrm{Con}(C_0(M^\circ) \to \Sigma_0) \rtimes G \simeq C_0(T^*M^\circ) \rtimes G \tag{12}$$

и, следовательно, изоморфизм их K-групп. Этот изоморфизм вместе с изоморфизмом i_* в (11) даст нам утверждение теоремы.

Итак, для доказательства теоремы достаточно установить тривиальность K-групп конуса

$$\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_b) \rtimes G. \tag{13}$$

В силу точной последовательности для конуса в K-теории (см., напр., [27]), конус (13) имеет тривиальные K-группы, если вложение

$$C(X) \rtimes G \longrightarrow \Sigma_b \rtimes G, \tag{14}$$

с которым он ассоциирован, индуцирует изоморфизм в K-теории.

3. Отображение меллиновского символа

$$\sigma_M : \Sigma_b \to C(X \times \overline{\mathbb{R}})$$

даёт короткую точную последовательность C^*-алгебр

$$0 \to (C(S^*X) \otimes \mathcal{M}_0) \rtimes G \longrightarrow \Sigma_b \rtimes G \xrightarrow{\sigma_M} C(X \times \overline{\mathbb{R}}) \rtimes G \longrightarrow 0, \tag{15}$$

где $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{B}L^2(\mathbb{R}_+)$ — идеал, состоящий из граничных символов с нулевым меллиновским символом. Здесь мы отметим изоморфизм C^*-алгебр

$$(C(S^*X) \otimes \mathcal{M}_0) \rtimes G \simeq (C(S^*X) \rtimes G) \otimes \mathcal{M}_0, \tag{16}$$

который следует из того, что по предположению группа G действует тривиально по переменной t, т.е. даёт тождественное отображение на алгебре $\mathcal{M}_0$. Далее алгебра $\mathcal{M}_0$ совпадает с идеалом, рассмотренным в работе [3], в которой было установлено, что этот идеал имеет тривиальные K-группы. Отсюда (в силу формулы Кюннета) мы получаем также, что алгебра (16) имеет тривиальные K-группы, и в силу точности последовательности в K-теории для пары (15) получаем, что меллиновский символ индуцирует изоморфизм K-групп

$$\sigma_{M*} : K_*(\Sigma_b \rtimes G) \longrightarrow K_*(C(X \times \overline{\mathbb{R}}) \rtimes G) \simeq K_*(C(X) \rtimes G). \tag{17}$$

Далее очевидно, что вложение (14) определяет правое обратное отображение к отображению σ_M. Следовательно, так как σ_{M*} — изоморфизм в K-теории, то и указанное вложение также определяет изоморфизм в K-теории.

4. Итак, мы установили, что вложение (14) индуцирует изоморфизм K-групп, следовательно, его конус (13) имеет тривиальные K-группы. Поэтому вложение i в (10) индуцирует изоморфизм K-групп, и мы получаем окончательно с учётом (8) и (12):

$$\begin{aligned}\mathrm{Ell}(M,G) \simeq K_0\big(\mathrm{Con}(C(M) \to \Sigma) \rtimes G\big) \overset{i_*^{-1}}{\simeq} K_0(\mathrm{Con}(C_0(M^\circ) \to \Sigma_0) \rtimes G) \simeq \\ \simeq K_0(C_0(T^*M^\circ) \rtimes G).\end{aligned}$$

Теорема 1 доказана для случая, когда выполнено условие допустимости 1).

5. Докажем теперь утверждение теоремы для действий, удовлетворяющих условию допустимости 2). Для таких действий доказательство производится также, как в предыдущем случае, кроме следующего отличия: формула (16) уже не имеет места, т.к. действие группы не является тождественным на алгебре $\mathcal{M}_0$; однако, в силу формулы Кюннета, имеем

$$K_*(C(S^*X)\otimes\mathcal{M}_0)=0,$$

откуда, в силу указанного выше условия на группу, получаем тривиальность K-групп скрещенного произведения

$$K_*\big((C(S^*X)\otimes\mathcal{M}_0)\rtimes G\big)=0.$$

Остальные части доказательства повторяются в этом случае без изменений.

Теорема 1 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. F. Atiyah and I. M. Singer. *The index of elliptic operators I.* Ann. of Math., 87:484–530, 1968.
2. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. *О проблеме гомотопической классификации эллиптических краевых задач.* Докл. АН, 377(2):165–169, 2001.
3. S. T. Melo, R. Nest, and E. Schrohe. *C^*-structure and K-theory of Boutet de Monvel's algebra.* J. Reine Angew. Math., 561:145–175, 2003.
4. S. T. Melo, Th. Schick, and E. Schrohe. *A K-theoretic proof of Boutet de Monvel's index theorem for boundary value problems.* J. Reine Angew. Math., 599:217–233, 2006.
5. A. Savin. *Elliptic Operators on Manifolds with Singularities and K-homology.* K-theory, 34(1):71–98, 2005.
6. Назайкинский В. Е., Савин А.Ю., Стернин Б. Ю. *О гомотопической классификации эллиптических операторов на стратифицированных многообразиях.* Изв. РАН. Сер. матем., 71(6):91–118, 2007.
7. Назайкинский В. Е., Савин А.Ю., Стернин Б. Ю. *О гомотопической классификации эллиптических операторов на многообразиях с углами.* Докл. АН, 413(1):16–19, 2007.
8. M. F. Atiyah and R. Bott. *The index problem for manifolds with boundary.* In Bombay Colloquium on Differential Analysis, pages 175–186, Oxford, 1964. Oxford University Press.
9. R. Melrose and F. Rochon. *Index in K-theory for families of fibred cusp operators.* K-Theory, 37(1-2):25–104, 2006.
10. Назайкинский В. Е., Савин А.Ю., Стернин Б. Ю. *Некоммутативная геометрия и классификация эллиптических операторов.* СМФН, 29(1):131–164, 2008.
11. Назайкинский В. Е., Савин А.Ю., Стернин Б. Ю. *Индекс Атьи–Ботта на стратифицированных многообразиях.* СМФН, 34:100–108, 2009.
12. J.-M. Lescure. *Elliptic symbols, elliptic operators and Poincaré duality on conical pseudomanifolds.* J. K-Theory, 4(2):263–297, 2009.
13. B. Monthubert and V. Nistor. *A topological index theorem for manifolds with corners.* Compos. Math., 148(2):640–668, 2012.
14. A. Antonevich and A. Lebedev. *Functional-Differential Equations. I. C^*-Theory.* Number 70 in Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Longman, Harlow, 1994.
15. A. B. Antonevich and A. V. Lebedev. *Functional equations and functional operator equations. A C^*-algebraic approach.* In Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society, Vol. VI, volume 199 of Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, pages 25–116, Providence, RI, 2000. Amer. Math. Soc.
16. V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, and B. Yu. Sternin. *Elliptic theory and noncommutative geometry*, volume 183 of *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
17. A. Savin and B. Sternin. *Elliptic theory for operators associated with diffeomorphisms of smooth manifolds.* In Pseudo-Differential Operators, Generalized Functions and Asymptotics, volume 231 of Operator Theory: Advances and Applications, pages 1–26. Birkhäuser, 2013.

18. P. Baum, A. Connes, and N. Higson. *Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras.* In C^*-algebras: 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993), volume 167 of Contemp. Math., pages 240–291. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
19. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. *Системы интегральных уравнений на полуоси с ядрами зависящими от разности аргументов.* УМН, 13(2):3–72, 1958.
20. Вишик М. И., Эскин Г. И. *Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения.* УМН, 22(1):15–76, 1965.
21. Эскин Г. И. *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.* Наука, Москва, 1973.
22. S. Rempel and B.-W. Schulze. *Parametrices and boundary symbolic calculus for elliptic boundary problems without the transmission property.* Math. Nachr., 105:45–149, 1982.
23. A. L. T. Paterson. *Amenability*, volume 29 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
24. A. Antonevich, M. Belousov, and A. Lebedev. *Functional differential equations. II. C^*-applications. Parts 1, 2.* Number 94, 95 in Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Longman, Harlow, 1998.
25. M. Pimsner and D. Voiculescu. *Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-product C^*-algebras.* J. Oper. Theory, 4:93–118, 1980.
26. Федосов Б. В. *Теоремы об индексе.* В Итоги науки и техники, № 65 в Современные проблемы математики, с. 165–268. ВИНИТИ, Москва, 1991.
27. B. Blackadar. *K-Theory for Operator Algebras.* Number 5 in Mathematical Sciences Research Institute Publications. Cambridge University Press, 1998. Second edition.

Антон Юрьевич Савин,
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, 6,
117198, г. Москва, Россия
Leibniz Universität Hannover,
Welfengarten 1,
D - 30167 Hannover, Germany
E-mail: antonsavin@mail.ru

Борис Юрьевич Стернин,
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, 6,
117198, г. Москва, Россия
Leibniz Universität Hannover,
Welfengarten 1,
D - 30167 Hannover, Germany
E-mail: sternin@mail.ru