

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕСТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Р.Х. КАРИМОВ, Л.М. КОЖЕВНИКОВА, А.А. ХАДЖИ

Аннотация. Для некоторого класса эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями установлены оценки, характеризующие скорость убывания при $|x| \rightarrow \infty$ решений задачи Дирихле в неограниченных областях.

Ключевые слова: анизотропное эллиптическое уравнение, нестепенные нелинейности, пространство Соболева-Орлича, неограниченная область.

Mathematics Subject Classification: 35J62

ВВЕДЕНИЕ

Пусть Ω — произвольная неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}_n$, $n \geq 2$. Для анизотропных квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(x, u, \nabla u))_{x_\alpha} - a_0(x, u, \nabla u) = 0, \quad x \in \Omega; \quad (0.1)$$

$$u \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (0.2)$$

Предполагается, что функции $a_\alpha(x, s_0, s)$, $\alpha = 0, \dots, n$, измеримы по $x \in \Omega$ для $\mathbf{s} = (s_0, s) = (s_0, s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}_{n+1}$, непрерывны по $\mathbf{s} \in \mathbb{R}_{n+1}$ для почти всех $x \in \Omega$. Пусть существуют положительные числа \hat{a}, \hat{A} и измеримые неотрицательные функции $\psi(x), \Psi(x)$, такие, что для п.в. $x \in \Omega$ и $\mathbf{s} = (s_0, s), \mathbf{t} = (t_0, t) \in \mathbb{R}_{n+1}$, $\mathbf{s} \neq \mathbf{t}$ справедливы неравенства:

$$\sum_{\alpha=0}^n a_\alpha(x, s_0, s) s_\alpha \geq \bar{a} \sum_{\alpha=0}^n B_\alpha(s_\alpha) - \psi(x); \quad (0.3)$$

$$\sum_{\alpha=0}^n \bar{B}_\alpha(a_\alpha(x, s_0, s)) \leq \hat{A} \sum_{\alpha=0}^n B_\alpha(s_\alpha) + \Psi(x); \quad (0.4)$$

$$\sum_{\alpha=0}^n (a_\alpha(x, s_0, s) - a_\alpha(x, t_0, t))(s_\alpha - t_\alpha) > 0. \quad (0.5)$$

Здесь $B_0(z), B_1(z), \dots, B_n(z)$ — N -функции удовлетворяющие Δ_2 -условию, а $\bar{B}_0(z), \bar{B}_1(z), \dots, \bar{B}_n(z)$ — дополнительные к ним (см. §1).

R.KH. KARIMOV, L.M. KOZHEVNIKOVA, A.A. KHADZHI, BEHAVIOR OF SOLUTIONS TO ELLIPTIC EQUATIONS WITH NON-POWER NONLINEARITIES IN UNBOUNDED DOMAINS.

© КАРИМОВ Р.Х., КОЖЕВНИКОВА Л.М., ХАДЖИ А.А. 2016.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 16-31-50034/16).

Поступила 19 ноября 2015 г.

В качестве примера можно рассмотреть уравнение

$$\sum_{\alpha=1}^n (B'_\alpha(u_{x_\alpha}) + f_\alpha(x))_{x_\alpha} - B'_0(u) - f_0(x) = 0 \quad (0.6)$$

с непрерывно дифференцируемыми N -функциями $B_0(z), B_1(z), \dots, B_n(z)$ (см. лемму 4).

Начиная с 70-х гг. прошлого столетия (см. [1]–[4]) и по настоящее время ведутся интенсивные исследования качественных свойств решений эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями как второго, так и высокого порядков. Решения краевых задач для уравнений вида (0.1) с функциями $a_0(x, \mathbf{s}), a_1(x, \mathbf{s}), \dots, a_n(x, \mathbf{s})$, имеющими не обязательно полиномиальный рост по переменным s_0, s_1, \dots, s_n , рассматривались, в основном, в ограниченных областях. Так, в работе [5] в ограниченной области Ω исследовалась задача Дирихле для нелинейного эллиптического включения с вектор-функцией $\mathbf{a}(x, \mathbf{s}) = (a_1(x, \mathbf{s}), \dots, a_n(x, \mathbf{s}))$, удовлетворяющей нестандартным условиям роста, описанных в терминах N -функций, зависящих от x . Доказано существование ренормализованного решения, а при условии строгой монотонности установлена его единственность.

Краевые задачи в неограниченных областях для квазилинейных эллиптических уравнений со степенными нелинейностями также исследовались в многочисленных работах [6], [7]. Следует отметить, что решение эллиптической задачи в неограниченной области с несуммируемыми данными принадлежит соответствующему пространству локально суммируемых функций. Как правило, для обеспечения единственности решения соответствующей краевой задачи в неограниченной области необходимо наложить условие на рост решения на бесконечности, а для существования решения из выделенного класса единственности обычно требуются ограничения на рост входных данных [8].

В 1984 г. Х. Брезис [9] на примере полулинейного уравнения

$$-\Delta u + |u|^{p_0-2}u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad p_0 > 2,$$

показал, что имеются эллиптические уравнения, для которых существуют единственные решения краевых задач без предположений на их поведение и рост входных данных на бесконечности. А именно, Х. Брезис установил существование и единственность обобщенного решения $u \in L_{p_0-1, \text{loc}}(\mathbb{R}_n)$ при $f \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}_n)$. Обобщение результатов Х. Брезиса на уравнения высокого порядка было проведено Ф. Бернисом [10].

В работе [11] Ж.И. Диаз и О.А. Олейник, пользуясь методом интеграла энергии и устанавливая априорные оценки решения, доказали существование и единственность решения краевой задачи с однородными граничными условиями первого и второго типа (в частности задач Дирихле и Неймана) для полулинейных уравнений с переменными коэффициентами

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i} + a_0(x)|u|^{p_0-2}u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad p_0 > 2, \quad (0.7)$$

$a_{ij}(x) \in L_{\infty, \text{loc}}(\Omega)$, $a_0(x) \in L_{1, \text{loc}}(\Omega)$, $a_0(x) \geq a_0 > 0$, без условий на бесконечности. Кроме того, в [11] авторы исследовали асимптотическое поведение решения уравнения (0.7) на бесконечности. При условии, что $f(x) = 0$, $x \in \Omega \setminus \bar{\Omega}(r_0)$, $\bar{\Omega}(r_0) = \{x \in \Omega \mid |x| \leq r_0\}$, $r_0 > 0$, для решения уравнения (0.7) получена оценка:

$$|u(x)| \leq C_1 |x|^{-2/(p_0-2)}, \quad x \in \Omega \setminus \bar{\Omega}(r_0). \quad (0.8)$$

А при дополнительном требовании на геометрию неограниченной области Ω установлено неравенство:

$$|u(x)| \leq C_2 e^{-\alpha|x|}, \quad x \in \Omega \setminus \bar{\Omega}(r_0), \quad \alpha > 0. \quad (0.9)$$

В работе [12] М.М. Бокало, Е.В. Доманская исследовали краевые задачи в неограниченных областях для эллиптических анизотропных уравнений с переменными показателями нелинейности. При этом корректность постановки краевых задач доказана без ограничений на рост решений и данных задач на бесконечности.

Авторам настоящей работы удалось выделить некоторый класс эллиптических уравнений, имеющих не обязательно степенные нелинейности, и получить результаты, близкие к процитированным выше. Так, в работе [13] Л.М. Кожевниковой, А.А. Хаджи для уравнения (0.1) с функциями $a_\alpha(x, \mathbf{s})$, удовлетворяющими условиям (0.3)–(0.5), установлено существование решений задачи Дирихле в неограниченных областях без ограничений на рост данных на бесконечности. А при дополнительных требованиях на структуру уравнения в [14] доказана единственность без ограничений на рост решений задачи (0.1), (0.2) на бесконечности.

Здесь получены оценки, характеризующие поведение решений задачи (0.1), (0.2) при $|x| \rightarrow \infty$ в неограниченных областях Ω . Оценка степенного характера установлена для решений анизотропных уравнений в произвольных неограниченных областях (теорема 2). А для «нешироких» неограниченных областей получена экспоненциальная оценка решений изотропных уравнений (теорема 3).

1. N-функции и пространства Соболева-Орлича

Приведем необходимые сведения из теории N -функций и пространств Соболева-Орлича [15]. Неотрицательная непрерывная выпуклая вниз функция $M(z), z \in \mathbb{R}$, называется N -функцией, если она четна и $\lim_{z \rightarrow 0} M(z)/z = 0, \lim_{z \rightarrow \infty} M(z)/z = \infty$. Отметим, что $M(\epsilon z) \leq \epsilon M(z)$, при $0 < \epsilon \leq 1$. Для N -функции $M(z)$ имеет место интегральное представление $M(z) = \int_0^{|z|} m(\theta) d\theta$, где $m(\theta)$ — положительная при $\theta > 0$, не убывающая и непрерывная справа при $\theta \geq 0$ такая, что $m(0) = 0, \lim_{\theta \rightarrow \infty} m(\theta) = \infty$.

Для N -функции $M(z)$ и дополнительной к ней N -функции

$$\overline{M}(z) = \sup_{y \geq 0} (y|z| - M(y))$$

справедливо неравенство Юнга:

$$|zy| \leq M(z) + \overline{M}(y), \quad z, y \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

[15, гл. I, §2, неравенство (2.6)].

Для N -функций $P(z), M(z)$ записывают $P(z) \prec M(z)$, если существуют числа $l > 0, z_0 \geq 0$ такие, что

$$P(z) \leq M(lz), \quad |z| \geq z_0.$$

N -функции $P(z), M(z)$ называются сравнимыми, если имеет место одно из соотношений $P(z) \prec M(z)$ или $M(z) \prec P(z)$. N -функции $P(z)$ и $M(z)$ называются эквивалентными, если $P(z) \prec M(z)$ и $M(z) \prec P(z)$.

N -функция $P(z)$ растет медленнее N -функции $M(z)$ ($P(z) \prec\prec M(z)$), если для любого числа $l > 0$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P(z)/M(lz) = 0.$$

N -функция $M(z)$ удовлетворяет Δ_2 -условию при больших значениях z , если существуют такие числа $c > 0, z_0 \geq 0$, что $M(2z) \leq cM(z)$ для любых $|z| \geq z_0$. Δ_2 — условие эквивалентно выполнению при $|z| \geq z_0$ неравенства

$$M(lz) \leq c(l)M(z), \tag{1.2}$$

где l — любое число больше единицы, $c(l) > 0$.

В каждом классе эквивалентных N -функций, подчиняющихся Δ_2 -условию, имеются N -функции, удовлетворяющие неравенству (1.2) при всех z . В дальнейшем в работе предполагается, что Δ_2 -условие для рассматриваемых N -функций выполняется при всех значениях $z \in \mathbb{R}$ (т.е. $z_0 = 0$).

Для N -функции $M(z)$, ввиду выпуклости и оценки (1.2), справедливо неравенство

$$M(y+z) \leq cM(z) + cM(y), \quad z, y \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Пусть Q – произвольная область пространства \mathbb{R}_n . Классом Орлича $K_M(Q)$, соответствующем N -функции $M(z)$, называется множество измеримых в Q функций v таких, что:

$$\int_Q M(v(x)) dx < \infty.$$

Пространством Орлича $L_M(Q)$ называется линейная оболочка $K_M(Q)$. Будем рассматривать пространство Орлича $L_M(Q)$ с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{L_M(Q)} = \|v\|_{M,Q} = \inf \left\{ k > 0 \mid \int_Q M(v(x)/k) dx \leq 1 \right\}.$$

Класс Орлича $K_M(Q)$ совпадает с пространством Орлича $L_M(Q)$ тогда и только тогда, когда $M(z)$ удовлетворяет Δ_2 -условию [15, гл. II, §8, теорема 8.2].

Для функции $v \in L_M(Q)$ справедлива оценка

$$\|v\|_{M,Q} \leq \int_Q M(v) dx + 1 \quad (1.4)$$

[15, гл. II, §9, неравенство (9.12)]. Для функций $u \in L_M(Q)$, $v \in L_{\overline{M}}(Q)$ имеет место неравенство Гельдера [15, гл. II, §9, неравенства (9.24), (9.27)]:

$$\left| \int_Q u(x)v(x) dx \right| \leq 2\|u\|_{M,Q} \|v\|_{\overline{M},Q}. \quad (1.5)$$

Пусть $B_1(z), \dots, B_n(z)$ – N -функции, определим пространство Соболева-Орлича $\mathring{H}_B^1(Q)$ как пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|v\|_{\mathring{H}_B^1(Q)} = \sum_{\alpha=1}^n \|v_{x_\alpha}\|_{B_\alpha, Q}.$$

Нормы в пространствах $L_1(Q)$, $L_\infty(Q)$ будем обозначать $\|\cdot\|_{1,Q}$, $\|\cdot\|_{\infty,Q}$, соответственно.

Положим

$$h(t) = t^{-1/n} \left(\prod_{\alpha=1}^n B_\alpha^{-1}(t) \right)^{1/n}$$

и предположим, что интеграл $\int_0^1 h(t)/t dt$ сходится. Тогда можно определить N -функцию $B^*(z)$ по формуле

$$(B^*)^{-1}(z) = \int_0^{|z|} h(t)/t dt.$$

Приведем теорему вложения А.Г. Королева [16], доказанную для ограниченных областей Q .

Лемма 1. Пусть $v \in \mathring{H}_B^1(Q)$.

1) Если

$$\int_1^\infty h(t)/tdt = \infty, \quad (1.6)$$

то $\mathring{H}_B^1(Q) \subset L_{B^*}(Q)$ и

$$\|v\|_{B^*,Q} \leq A_1 \|v\|_{\mathring{H}_B^1(Q)};$$

2) если

$$\int_1^\infty h(t)/tdt < \infty, \quad (1.7)$$

то $\mathring{H}_B^1(Q) \subset L_\infty(Q)$ и

$$\|v\|_{\infty,Q} \leq A_2 \|v\|_{\mathring{H}_B^1(Q)}.$$

Здесь $A_1 = \frac{n-1}{n}$, $A_2 = \int_0^\infty \frac{h(t)}{t} dt$.

Ввиду справедливости Δ_2 -условия, сходимость по норме равносильна сходимости в среднем [15, гл. II, § 9, теорема 9.4]. Кроме того, в [17] доказана следующая

Лемма 2. Если N -функция $M(z)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, $v(x), v^i(x) \in L_M(Q)$, $i = 1, 2, \dots$, $v^i(x) \rightarrow v(x)$ в $L_M(Q)$, то

$$\int_Q |M(v^i) - M(v)| dx \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

2. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМ

Пусть N -функции $B_0(z), B_1(z), \dots, B_n(z)$ и дополнительные к ним N -функции $\bar{B}_0(z), \bar{B}_1(z), \dots, \bar{B}_n(z)$ удовлетворяют Δ_2 -условию. Через $\mathbf{L}_{\bar{\mathbf{B}}}(\Omega)$ обозначим пространство $L_{\bar{B}_0}(\Omega) \times L_{\bar{B}_1}(\Omega) \times \dots \times L_{\bar{B}_n}(\Omega)$ с нормой

$$\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{L}_{\bar{\mathbf{B}}}(\Omega)} = \|g_0\|_{\bar{B}_0,\Omega} + \|g_1\|_{\bar{B}_1,\Omega} + \dots + \|g_n\|_{\bar{B}_n,\Omega}, \quad \mathbf{g} = (g_0, g_1, \dots, g_n) \in \mathbf{L}_{\bar{\mathbf{B}}}(\Omega).$$

Определим пространство Соболева-Орлича $\mathring{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{\mathring{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)} = \|v\|_{B_0,\Omega} + \|v\|_{\mathring{H}_B^1(\Omega)}.$$

В случае выполнения условия (1.6), будем считать, что

$$B_0(z) \prec B^*(z), \quad (2.1)$$

а при выполнении (1.7) $B_0(z)$ — произвольная N -функция.

Определим $L_{1,\text{loc}}(\bar{\Omega})$, $\mathring{W}_{\mathbf{B},\text{loc}}^1(\bar{\Omega})$ как пространства, состоящие из функций $v(x)$, определенных в Ω , для которых при любой ограниченной $Q \subset \Omega$ найдется функция из пространства $L_1(\Omega)$, $\mathring{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$, соответственно, совпадающая с функцией $v(x)$ в Q . Будем считать, что неотрицательные функции $\psi(x), \Psi(x) \in L_{1,\text{loc}}(\bar{\Omega})$. Аналогично определяется пространство $\mathbf{L}_{\bar{\mathbf{B}},\text{loc}}(\bar{\Omega})$.

Определим оператор $\mathbf{B} : \mathring{W}_{\mathbf{B},\text{loc}}^1(\bar{\Omega}) \rightarrow L_{1,\text{loc}}(\bar{\Omega})$ формулой:

$$\mathbf{B}(v) = B_0(v) + \sum_{\alpha=1}^n B_\alpha(v_{x_\alpha}), \quad v \in \mathring{W}_{\mathbf{B},\text{loc}}^1(\bar{\Omega}).$$

Обозначим

$$\mathbf{a}(x, \mathbf{s}) = (a_0(x, \mathbf{s}), a_1(x, \mathbf{s}), \dots, a_n(x, \mathbf{s})).$$

Из условия (0.4), пользуясь (1.4), для $u \in \dot{W}_{\mathbf{B}, \text{loc}}^1(\bar{\Omega})$ и любой ограниченной $Q \subset \Omega$ выводим оценку

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}(x, u, \nabla u)\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{B}}(Q)} &= \sum_{\alpha=0}^n \|a_\alpha(x, u, \nabla u)\|_{\bar{B}_\alpha, Q} \leq \\ &\leq \sum_{\alpha=0}^n \int_Q \bar{B}_\alpha(a_\alpha(x, u, \nabla u)) dx + n + 1 \leq \hat{A} \|\mathbf{B}(u)\|_{1, Q} + \|\Psi\|_{1, Q} + n + 1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Далее, по элементу $\mathbf{a}(x, u, \nabla u) \in \mathbf{L}_{\bar{\mathbf{B}}, \text{loc}}(\bar{\Omega})$ для $v(x) \in \dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$ с ограниченным носителем определим функционал $\mathbf{A}(u)$ равенством:

$$\langle \mathbf{A}(u), v \rangle = \int_{\Omega} \left(\sum_{\alpha=1}^n a_\alpha v_{x_\alpha} + a_0 v \right) dx. \quad (2.3)$$

Используя неравенство Гельдера (1.5), для функций $u(x) \in \dot{W}_{\mathbf{B}, \text{loc}}^1(\bar{\Omega})$, $v(x) \in \dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$ ($\text{supp } v = \bar{Q}_v$) выводим неравенства:

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{A}(u), v \rangle| &\leq 2 \sum_{\alpha=1}^n \|a_\alpha\|_{\bar{B}_\alpha, Q_v} \|v_{x_\alpha}\|_{B_\alpha, Q_v} + 2 \|a_0\|_{\bar{B}_0, Q_v} \|v\|_{B_0, Q_v} \leq \\ &\leq 2 \|\mathbf{a}(x, u, \nabla u)\|_{\mathbf{L}_{\bar{\mathbf{B}}}(Q_v)} \|v\|_{\dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, из оценок (2.2), (2.4) следует ограниченность функционала $\mathbf{A}(u)$ в пространстве функций $\dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$ с ограниченными носителями.

Определение 1. *Обобщенным решением задачи (0.1), (0.2) назовем функцию $u(x) \in \dot{W}_{\mathbf{B}, \text{loc}}^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\langle \mathbf{A}(u), v \rangle = 0 \quad (2.5)$$

для любой функции $v(x) \in \dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$ с ограниченным носителем.

Будем считать, что существует такое $0 < \epsilon < 1$, что выполнены условия

$$B_\alpha(z^{1+\epsilon}) \prec B_0(z), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (2.6)$$

В работе [13] доказано существование решения задачи (0.1), (0.2) в произвольных неограниченных областях Ω . А именно, установлена следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (0.3) – (0.5), (2.6), тогда существует обобщенное решение $u(x)$ задачи (0.1), (0.2).*

Степенная оценка скорости убывания решения получена при условии, что:

$$B_\alpha(z) = c_\alpha |z|^{p_\alpha}, \quad |z| < 1, \quad p_\alpha > 1, \quad c_\alpha > 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Заметим, что для произвольной N -функции $\tilde{B}(z)$ такую N -функцию легко построить:

$$B(z) = \begin{cases} \tilde{B}(1)|z|^p, & |z| < 1; \\ \tilde{B}(z), & |z| \geq 1, \end{cases} \quad p = \frac{\tilde{B}'(1)}{\tilde{B}(1)} > 1.$$

При этом функции $\tilde{B}(z), B(z)$ эквивалентны.

Считаем, что показатели p_α , $\alpha = 1, \dots, n$ упорядочены: $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ и подчиняются условиям:

$$p_0 > p_1, \quad \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{p_\alpha} > 1. \quad (2.8)$$

Тогда числа $q_\alpha = \frac{p_0 p_\alpha}{p_0 - p_\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, n$, также упорядочены: $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$. Будем предполагать, что

$$q_n > n. \quad (2.9)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (0.3)–(0.5), (2.6)–(2.8). Тогда существует положительное число \mathcal{M}_1 такое, что для обобщенного решения задачи (0.1), (0.2) справедлива оценка

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1, \Omega(r/2)} \leq \mathcal{M}_1 (r^{n-q_n} + \|\psi + \Psi\|_{1, \Omega(r)}), \quad r \geq 1, \quad (2.10)$$

в которой $\Omega(r) = \{x \in \Omega \mid |x| < r\}$.

Условия теоремы 2 выполнены, например, для уравнения (0.6) с функциями

$$B_\alpha(z) = \begin{cases} |z|^{p_\alpha}, & |z| < 1; \\ |z|^{p_\alpha-1}(\ln |z| + 1), & |z| \geq 1 \end{cases}$$

при подходящем выборе $p_\alpha > 2$, $\alpha = 0, 1, \dots, n$ (см. пример 1).

Для неограниченных областей, расположенных вдоль выделенной оси, в терминах специальной геометрической характеристики в работах [17], [18] авторами установлены экспоненциальные оценки скорости убывания решения задачи (0.1), (0.2) с финитными данными. Здесь удалось получить экспоненциальную оценку для изотропного случая:

$$B_\alpha(z) = B(z), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (2.11)$$

для неограниченных областей, подчиняющихся лишь условию

$$d(r) = \text{diam } \gamma(r) \leq D, \quad D > 0, \quad \gamma(r) = \{x \in \Omega \mid |x| = r\}, \quad r \geq r_1. \quad (2.12)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (0.3)–(0.5), (2.6), (2.11), (2.12). Тогда существуют положительные числа κ , \mathcal{M}_2 , r_0 такие, что решение $u(x)$ задачи (0.1), (0.2) при всех $r \geq r_0$ подчиняется оценке

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1, \Omega(r/2)} \leq \mathcal{M}_2 (\exp(-\kappa r) r^{n-1} + \|\psi + \Psi\|_{1, \Omega(2r)}). \quad (2.13)$$

Следует отметить, что полученные в работе оценки (2.10), (2.13), согласуются с результатами статьи [11].

3. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Лемма 3. Пусть N -функции $B_0(z), B_1(z), \dots, B_n(z)$ подчиняются условиям (2.6), тогда

$$B_\alpha(z) \prec\prec B_0(z), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

Доказательство леммы см. [13, замечание 6].

Лемма 4. Если функции $b_\alpha(s_\alpha) = B'_\alpha(s_\alpha)$, $s_\alpha \geq 0$, $\alpha = 0, 1, \dots, n$, непрерывны и строго монотонны, $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_n) \in \mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}, \text{loc}}(\overline{\Omega})$, то функции

$$a_\alpha(x, s_\alpha) = B'_\alpha(s_\alpha) + f_\alpha(x) = b_\alpha(|s_\alpha|) \text{sign } s_\alpha + f_\alpha(x), \quad \alpha = 0, \dots, n,$$

удовлетворяют условиям (0.3) – (0.5).

Доказательство леммы см. [13, замечание 5].

В этом параграфе и ниже через C_i будем обозначать положительные константы.

Лемма 5. Пусть N -функции $B_0(z), B_1(z), \dots, B_n(z)$ подчиняются условиям (2.6), тогда для N -функций $T_\alpha(z) = B_\alpha(\overline{M}_\alpha(z))$, $(M_\alpha(z) = B_\alpha^{-1}(B_0(z)))$ существуют числа $c > 0, \tau \geq q_n$ такие, что справедливы неравенства

$$T_\alpha(z) \leq c|z|^\tau, \quad |z| \geq 1, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

Доказательство леммы см. [14, лемма 3.3].

Лемма 6. Пусть N -функции $B_0(z), B_1(z), \dots, B_n(z)$ подчиняются условиям (2.7), (2.8), тогда для N -функций $T_\alpha(z) = B_\alpha(\overline{M}_\alpha(z))$ существует число $c > 0$ такое, что справедливы неравенства

$$T_\alpha(z) \leq c|z|^{q_\alpha}, \quad |z| \leq 1, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

Доказательство леммы см. [14, лемма 3.4].

Лемма 7. Пусть $\Sigma_{R,d}$ — сферический сегмент диаметра d на поверхности сферы радиуса R , $d \leq R/8$ в пространстве \mathbb{R}_n , $n \geq 2$. Если N -функция $B(z)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то существует число $c(n) > 0$ такое, что для функции $v(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, $v|_{\Sigma_{R,d}} \in C_0^\infty(\Sigma_{R,d})$ справедливо неравенство

$$\int_{\Sigma_{R,d}} B(v) dS \leq c \int_{\Sigma_{R,d}} B(d|\nabla v|) dS, \quad (3.4)$$

∇' — градиент по касательному направлению.

Доказательство леммы см. [19].

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Доказательство. Пусть ξ — абсолютно непрерывная неотрицательная функция с компактным носителем. Полагая в тождестве (2.5) $v = \xi^p u$, $p \geq \tau$ (см. лемму 5), получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \xi^p \left(\sum_{\alpha=1}^n a_\alpha(x, u, \nabla u) u_{x_\alpha} + a_0(x, u, \nabla u) u \right) dx \leq \\ & \leq p \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} |a_\alpha(x, u, \nabla u)| |u| |\xi_{x_\alpha}(x)| \xi^{p-1} dx = p \cdot J_1. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Применяя (1.1), для $\varepsilon \in (0, 1)$ выводим

$$\begin{aligned} J_1 & \leq \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} \xi^p \left(\overline{B}_\alpha(\varepsilon a_\alpha(x, u, \nabla u)) + B_\alpha \left(\frac{u \xi_{x_\alpha}}{\varepsilon \xi} \right) \right) dx \leq \\ & \leq \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} \xi^p \varepsilon \overline{B}_\alpha(a_\alpha(x, u, \nabla u)) dx + \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} \xi^p B_\alpha \left(\frac{u \xi_{x_\alpha}}{\varepsilon \xi} \right) dx = J_{11} + J_{12}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Оценим интеграл J_{12} . Поскольку, согласно лемме 3, имеют место соотношения (3.1), то справедливы представления N -функции $B_0(z) = B_\alpha(M_\alpha(z))$ в виде композиций двух N -функций $M_\alpha(z), B_\alpha(z)$, $\alpha = 1, \dots, n$. Применяя (1.1), (1.3), устанавливаем

$$J_{12} \leq \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} \xi^p B_\alpha \left\{ M_\alpha(\varepsilon u) + \overline{M}_\alpha \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{|\nabla \xi|}{\xi} \right) \right\} dx \leq \quad (4.3)$$

$$\leq \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} \xi^p \left(\varepsilon C_1 B_0(u) + C_1 B_{\alpha} \left(\overline{M}_{\alpha} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{|\nabla \xi|}{\xi} \right) \right) \right) dx = C_1 \left(\varepsilon n \int_{\Omega} \xi^p B_0(u) dx + J_2 \right),$$

где

$$J_2 = \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} \xi^p T_{\alpha} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{|\nabla \xi|}{\xi} \right) dx, \quad T_{\alpha}(z) = B_{\alpha}(\overline{M}_{\alpha}(z)). \quad (4.4)$$

Далее, соединяя (4.2), (4.3), используя условие (0.4), выводим

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \int_{\Omega} \xi^p \varepsilon \left(\widehat{A} \sum_{\alpha=1}^n B_{\alpha}(u_{x_{\alpha}}) + (C_1 n + \widehat{A}) B_0(u) \right) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \xi^p \Psi dx + C_1 J_2 \leq \varepsilon C_2 \int_{\Omega} \xi^p \mathbf{B}(u) dx + \int_{\Omega} \xi^p \Psi dx + C_1 J_2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из (4.1), (4.5), применяя (0.3), получаем оценку

$$\bar{a} \int_{\Omega} \xi^p \mathbf{B}(u) dx \leq \varepsilon p C_2 \int_{\Omega} \xi^p \mathbf{B}(u) dx + p \int_{\Omega} \xi^p \{\Psi + \psi\} dx + C_1 p J_2.$$

Выбирая ε достаточно малым, имеем неравенство

$$\|\xi^p \mathbf{B}(u)\|_1 \leq C_3 \int_{\Omega} \xi^p \{\Psi + \psi\} dx + C_4 J_2. \quad (4.6)$$

Пусть r_0 — произвольное положительное число. Зафиксируем $r > r_0$, рассмотрим срезающую функцию $\xi(x) = \frac{1}{r}(r^2 - |x|^2)$ для $|x| < r$, $\xi(x) = 0$ для $|x| \geq r$. Обоснуем конечность интеграла J_2 . Очевидно, что $|\nabla \xi| \leq 2$, применяя (3.2), (3.3), выводим неравенства

$$J_2 \leq \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega(r)} \xi^p T_{\alpha} \left(\frac{C_5}{\xi} \right) dx \leq C_6 \int_{\Omega(r) \cap \{x \mid C_5/\xi(x) < 1\}} \xi^{p-q_n} dx + C_7 \int_{\Omega(r) \cap \{x \mid C_5/\xi(x) \geq 1\}} \xi^{p-\tau} dx. \quad (4.7)$$

В итоге имеем

$$J_2 \leq C_8 r^{n-q_n+p}, \quad r \geq 1, \quad r > r_0. \quad (4.8)$$

Очевидно, $\xi(x) \geq r - r_0$ при $|x| \leq r_0$, поэтому из (4.6), (4.8) выводим неравенство

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1, \Omega(r_0)} \leq C_9 \left(\frac{r}{r - r_0} \right)^p (\|\Psi + \psi\|_{1, \Omega(r)} + r^{n-q_n}). \quad (4.9)$$

Полагая в (4.9) $r_0 = r/2$, устанавливаем оценку (2.10). \square

Следствие 1. Пусть выполнены условия (0.3)–(0.5) с $\psi = \Psi = 0$ в Ω , (2.6)–(2.9), тогда обобщенное решение $u(x)$ задачи (0.1), (0.2) и $u = 0$ в Ω . Действительно, полагая в (4.9) $\psi(x) = \Psi(x) = 0$, $x \in \Omega$, и устремляя r к бесконечности, устанавливаем, что $\|\mathbf{B}(u)\|_{1, \Omega(r_0)} = 0$ для любого $r_0 > 0$. Отсюда следует, что $B_0(u) = 0$ в Ω , поэтому $u = 0$ в Ω .

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Доказательство. Зафиксируем $r \geq \max(2r_1, r_2, 32D)$ (r_1 из условия (2.12), r_2 будет определено ниже). Пусть $\theta(x)$, $x > 0$, — абсолютно непрерывная функция, равная единице при $x \leq r/2$, нулю при $x \geq 2r$, линейная при $x \in [r, 2r]$ и удовлетворяющая уравнению

$$\theta'(x) = -\delta\theta(x), \quad x \in (r/2, r), \quad (5.1)$$

(постоянную δ определим позднее). Решая это уравнение, находим

$$\theta(x) = \exp(-\delta(x - r/2)), \quad x \in (r/2, r),$$

тогда

$$\theta'(x) = \frac{\theta(r)}{r} = \frac{1}{r} \exp(-\delta r/2), \quad x \in (r, 2r). \quad (5.2)$$

Полагая в (4.1) $\xi(x) = \theta^p(|x|)$, $p \geq \tau$, применяя (5.1), (5.2), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \theta^p \left(\sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha}(x, u, \nabla u) u_{x_{\alpha}} + a_0(x, u, \nabla u) u \right) dx &\leq p \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega(r) \setminus \Omega(r/2)} |u| |a_{\alpha}(x, u, \nabla u)| \delta \theta^p dx + \\ &+ p \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega(2r) \setminus \Omega(r)} \theta^{p-1} |u| |a_{\alpha}(x, u, \nabla u)| \frac{\theta(r)}{r} dx = pI_1 + pI_2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Далее, пользуясь (1.1), при помощи (0.4), (2.11), оценим первый интеграл ($\varepsilon_1 \in (0, 1)$)

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega(r) \setminus \Omega(r/2)} \theta^p \left(\overline{B}(\varepsilon_1 a_{\alpha}(x, u, \nabla u)) + B\left(u \frac{\delta}{\varepsilon_1}\right) \right) dx \leq \\ &\leq \int_{\Omega(r) \setminus \Omega(r/2)} \theta^p \left(\varepsilon_1 \widehat{A} \sum_{\alpha=1}^n B(u_{x_{\alpha}}) + \Psi \right) dx + I_{12}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$I_{12} = \int_{\Omega(r) \setminus \Omega(r/2)} \theta^p B\left(u \frac{\delta}{\varepsilon_1}\right) dx.$$

Выберем $\varepsilon_1 \leq \frac{\bar{a}}{8Ap}$, а также δ так, чтобы $\delta \leq \varepsilon_1$.

Ввиду вложения $\gamma(\rho) \subset \Sigma_{\rho, 2d(\rho)}$ для $u(x) \in C_0^{\infty}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$I_{12} \leq \frac{\delta}{\varepsilon_1} \int_{r/2}^r \theta^p(\rho) \int_{\Sigma_{\rho, 2d(\rho)}} B(u) dS d\rho.$$

Применяя неравенство (3.4) и условие (2.12), пользуясь (1.2), выводим

$$I_{12} \leq \frac{\delta}{\varepsilon_1} c \int_{r/2}^r \theta^p(\rho) \int_{\Sigma_{\rho, 2d(\rho)}} B(2d(\rho) |\nabla' u|) dS d\rho \leq C_1 \frac{\delta}{\varepsilon_1} \int_{r/2}^r \theta^p(\rho) \int_{\gamma(\rho)} B(|\nabla u|) dS d\rho.$$

Далее, с помощью (1.3) устанавливаем неравенство

$$I_{12} \leq C_2 \frac{\delta}{\varepsilon_1} \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega(r) \setminus \Omega(r/2)} \theta^p(|x|) B(u_{x_{\alpha}}) dx. \quad (5.5)$$

Пользуясь леммой 2, выполняя предельный переход, выводим неравенство (5.5) для функции $u(x) \in \dot{W}_{\mathbf{B}, \text{loc}}^1(\Omega)$. Соединяя (5.4), (5.5), выбирая $\delta C_2 \leq \varepsilon_1 \frac{\bar{a}}{8p}$, получим

$$I_1 \leq \frac{\bar{a}}{4p} \int_{\Omega(r) \setminus \Omega(r/2)} \theta^p \mathbf{B}(u) dx + \|\Psi\|_{1, \Omega(r) \setminus \Omega(r/2)}. \quad (5.6)$$

Оценим интеграл I_2 . Применяя (1.1), для $\varepsilon_2 \in (0, 1)$ выводим

$$I_2 \leq \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega(2r) \setminus \Omega(r)} \theta^p \bar{B}(\varepsilon_2 a_\alpha(x, u, \nabla u)) dx + n \int_{\Omega(2r) \setminus \Omega(r)} \theta^p B\left(\frac{u}{\varepsilon_2} \frac{\theta(r)}{r\theta(|x|)}\right) dx = I_{21} + I_{22}. \quad (5.7)$$

Оценим интеграл I_{22} . Поскольку имеют место соотношения (3.1), то справедливо представление N -функции $B_0(z) = B(M(z))$ в виде композиций двух N -функций $M(z), B(z)$. Далее, применяя (1.1), (1.3), устанавливаем

$$I_{22} \leq n \int_{\Omega(2r) \setminus \Omega(r)} \theta^p B\left\{M(\varepsilon_2 u) + \bar{M}\left(\frac{1}{\varepsilon_2^2} \frac{\theta(r)}{r\theta(|x|)}\right)\right\} dx \leq \quad (5.8)$$

$$\leq n \int_{\Omega(2r) \setminus \Omega(r)} \theta^p \left(\varepsilon_2 C_3 B_0(u) + C_3 B\left(\bar{M}\left(\frac{1}{\varepsilon_2^2} \frac{\theta(r)}{r\theta(|x|)}\right)\right)\right) dx = C_3 n \left(\varepsilon_2 \int_{\Omega(2r) \setminus \Omega(r)} \theta^p B_0(u) dx + I_3\right),$$

где

$$I_3 = \int_{\Omega(2r) \setminus \Omega(r)} \theta^p T\left(\frac{1}{\varepsilon_2^2} \frac{\theta(r)}{r\theta(|x|)}\right) dx, \quad T(z) = B(\bar{M}(z)). \quad (5.9)$$

Далее, соединяя (5.7), (5.8), используя условие (0.4), выводим

$$I_2 \leq \varepsilon_2 \int_{\Omega(2r) \setminus \Omega(r)} \theta^p \left(\hat{A} \sum_{\alpha=1}^n B_\alpha(u_{x_\alpha}) + (nC_3 + \hat{A})B_0(u)\right) dx + \int_{\Omega(2r) \setminus \Omega(r)} \theta^p \Psi dx + nC_3 I_3 \leq \varepsilon_2 C_4 \int_{\Omega(2r) \setminus \Omega(r)} \theta^p \mathbf{B}(u) dx + \int_{\Omega(2r) \setminus \Omega(r)} \Psi dx + C_4 I_3. \quad (5.10)$$

Выберем $\varepsilon_2 \leq \frac{\bar{a}}{4C_4 p}$, в итоге получим

$$I_2 \leq \frac{\bar{a}}{2} \int_{\Omega(2r) \setminus \Omega(r)} \theta^p \mathbf{B}(u) dx + \int_{\Omega(2r) \setminus \Omega(r)} \Psi dx + C_4 I_3. \quad (5.11)$$

Подставляя в (5.3) оценки (5.6), (5.11), применяя условие (0.3), выводим

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1, \Omega(r/2)} \leq C_5 \int_{\Omega(2r)} \{\Psi + \psi\} dx + C_5 I_3. \quad (5.12)$$

Оценим интеграл I_3 . Положим $r_2 = 1/\varepsilon_2^2$, тогда при $r \geq r_2$, ввиду выпуклости функции $T(z)$, справедливо неравенство

$$I_3 \leq \frac{r_2}{r} \int_{\Omega(2r) \setminus \Omega(r)} \theta^p T\left(\frac{\theta(r)}{\theta(|x|)}\right) dx.$$

При $|x| \in (r, 2r)$ имеет место неравенство $\theta(|x|) \leq \theta(r)$, поэтому, применяя лемму 5, получаем оценку

$$I_3 \leq \frac{C_6}{r} \int_{\Omega(2r) \setminus \Omega(r)} \theta^{p-\tau}(|x|) \theta^\tau(r) dx \leq C_7 r^{n-1} \exp(-\delta pr/2). \quad (5.13)$$

Соединяя (5.12), (5.13) выводим (2.13). \square

6. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Пусть $n = 3$, $p_1 = 11/3$, $p_2 = 11/4$, $p_3 = 11/5$,

$$B_\alpha(z) = \begin{cases} |z|^{p_\alpha}, & |z| < 1 \\ |z|^{p_\alpha-1} (\ln |z| + 1), & |z| \geq 1, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Поскольку $|z|^{p_\alpha-1} \leq B_\alpha(z) \leq |z|^{p_\alpha}$ при $|z| \geq 1$, то $t^{1/(p_\alpha-1)} \geq B_\alpha^{-1}(t) \geq t^{1/p_\alpha}$ при $t \geq 1$, $\alpha = 1, 2, 3$. Отсюда получаем

$$h(t) = t^{1/33}, \quad 0 < t < 1, \quad \int_0^1 t^{-1} h(t) dt < \infty,$$

$$t^{131/504} \geq h(t) \geq t^{1/33}, \quad t \geq 1, \quad \int_1^\infty t^{-1} h(t) dt = \infty,$$

поэтому можно определить функции $(B^*)^{-1}(t)$, $B^*(z)$, при этом справедливы неравенства:

$$(B^*)^{-1}(t) = 33t^{1/33}, \quad 0 < t < 1, \quad 504/131t^{131/504} \geq (B^*)^{-1}(t) \geq 33t^{1/33}, \quad t \geq 1,$$

$$B^*(z) = (|z|/33)^{33}, \quad |z| < 33, \quad (131/504|z|)^{504/131} \leq B^*(|z|) \leq (|z|/33)^{33}, \quad |z| \geq 33.$$

Возьмем $B_0(z) = |z|^{42/11}$, такой выбор функций $B_\alpha(z)$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, обеспечивает выполнение условий (2.1), (2.6).

Рассмотрим функции $a_0(x, z) = |z|^{20/11} z + f_0(x)$,

$$a_\alpha(x, z) = f_\alpha(x) + B'_\alpha(z) = f_\alpha(x) + \begin{cases} p_\alpha |z|^{p_\alpha-2} z, & |z| < 1 \\ |z|^{p_\alpha-3} z ((p_\alpha - 1) \ln |z| + p_\alpha), & |z| \geq 1 \end{cases},$$

$f_\alpha \in L_{\overline{B}_\alpha, \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Согласно лемме 4, выполнены условия (0.3)–(0.5). Таким образом, по теореме 1, существует обобщенное решение задачи (0.1), (0.2).

Поскольку $1/p_1 + 1/p_2 + 1/p_3 = 12/11 > 1$, $q_3 = \frac{p_0 p_3}{p_0 - p_3} = 462/89 > 3$, то условия (2.8), (2.9) также выполнены. Согласно теореме 2, обобщенное решение задачи (0.1), (0.2) подчиняется оценке

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1, \Omega(r/2)} \leq M (r^{-195/89} + \|\psi + \Psi\|_{1, \Omega(r)}), \quad r \geq 1. \quad (6.1)$$

Пример 2. Пусть $n > 2$, $2 < p < n$,

$$B(z) = \begin{cases} |z|^{p-1} \left(-\ln |z| + \frac{p+1}{p-1} \right), & |z| < 1 \\ \frac{2}{p-1} + |z|^{p-1} (\ln |z| + 1), & |z| \geq 1. \end{cases}$$

Поскольку $B(z) \geq \frac{p+1}{p-1} |z|^{p-1}$ при $|z| < 1$, то $B^{-1}(t) \leq \left(\frac{p-1}{p+1} t \right)^{1/(p-1)}$ при $0 < t < \frac{p+1}{p-1}$. Кроме того, $|z|^{p-1} \leq B(z) \leq \frac{p+1}{p-1} |z|^p$ при $|z| \geq 1$, поэтому $\left(\frac{p-1}{p+1} t \right)^{1/p} \leq B^{-1}(t) \leq t^{1/(p-1)}$ при $t \geq \frac{p+1}{p-1}$. Отсюда получаем

$$h(t) \leq C_1 t^{\frac{n-p+1}{n(p-1)}}, \quad 0 < t < \frac{p+1}{p-1}, \quad \int_0^1 t^{-1} h(t) dt < \infty,$$

$$C_2 t^{\frac{n-p}{np}} \leq h(t) \leq t^{\frac{n-p+1}{n(p-1)}}, \quad t \geq \frac{p+1}{p-1}, \quad \int_1^\infty t^{-1} h(t) dt = \infty,$$

можно определить функции $(B^*)^{-1}(t)$, $B^*(z)$, при этом справедливы неравенства:

$$C_3 |z|^{\frac{n-p}{np}} \leq (B^*)^{-1}(z) \leq C_4 |z|^{\frac{n-p+1}{n(p-1)}}, \quad |z| \geq \frac{p+1}{p-1},$$

$$C_5 |z|^{\frac{n(p-1)}{n-p+1}} \leq B^*(z) \leq C_6 |z|^{\frac{np}{n-p}}, \quad |z| \geq C_7.$$

Возьмем $p_0 = \frac{n(p-1)}{n-p+1}$,

$$B_0(z) = \begin{cases} |z|^{p_0-1} \left(-\ln |z| + \frac{p_0+1}{p_0-1} \right), & |z| < 1 \\ \frac{2}{p_0-1} + |z|^{p_0-1} (\ln |z| + 1), & |z| \geq 1. \end{cases}$$

такой выбор функций $B_0(z)$, $B(z)$ при $p > (1 + \sqrt{1 + 4n})/2$ обеспечивает выполнение условий (2.1), (2.6).

Рассмотрим функции

$$a_\alpha(x, z) = f_\alpha(x) + B'(z) = f_\alpha(x) + |z|^{p-3} z ((p-1) |\ln |z|| + p), \quad \alpha = 1, \dots, n,$$

$a_0(x, z) = f_0(x) + B'_0(z) = |z|^{p_0-3} z ((p_0-1) |\ln |z|| + p_0)$. Согласно лемме 4, выполнены условия (0.3)–(0.5). Таким образом, по теореме 1, существует обобщенное решение задачи (0.1), (0.2).

Согласно теореме 3, обобщенное решение задачи (0.1), (0.2) в областях, удовлетворяющих условию (2.12), подчиняется оценке

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1, \Omega(r/2)} \leq \mathcal{M}_2 \left(\exp(-\kappa r) r^{n-1} + \|\psi + \Psi\|_{1, \Omega(2r)} \right), \quad r \geq r_0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. T. Donaldson *Nonlinear elliptic boundary value problems in Orlicz-Sobolev spaces* // J. Diff. Eq. 1971. V. 10. № 3. P. 507–528.
2. Климов В.С. *Теоремы вложения для пространств Орлича и их приложения к крайевым задачам* // Сиб. матем. журн. 1972. Т. 13. С. 334–348.
3. A. Fougères *Operateurs elliptiques du calcul des variations a coefficients tres fortement Non lineaires* // C. R. Acad. Sei. Paris Ser. A-B. 1972. V. 274. P. 763–766.
4. J.P. Gossez *Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients* // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 190. P. 163–206.
5. P. Gwiazda, P. Wittbold, A. Wróblewska, A. Zimmermann *Normalized solutions of Nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces*. PhD programme: Mathematical methods in natural sciences (MMNS). 2011. Preprint №. 2011-013. 32 p.
6. Кожевникова Л.М., Каримов Р.Х. *Поведение на бесконечности решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях* // Уфимск. матем. журн. 2010. Т. 2. № 2. С. 53–66.
7. Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. *Решения анизотропных эллиптических уравнений в неограниченных областях* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 1. С. 90–96.
8. Гладков А.Л. *Задача Дирихле для некоторых вырожденных эллиптических уравнений в неограниченных областях* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 2. С. 267–273.
9. H. Brezis *Semilinear equations in R_N without condition at infinity* // Appl. Math. Optim. 1984. V. 12. № 3. P. 271–282.
10. F. Bernis *Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity* // Arch. Rational Mech. Anal. 1989. V. 106. № 3. P. 217–241.

11. J.I. Diaz, O.A. Oleinik *Nonlinear elliptic boundary-value problems in unbounded domains and the asymptotic behaviour of its solution* // С. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 1992. V. 315. № 1. P. 787–792.
12. M. Bokalo, O. Domanska *On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces* // Matematychni Studii. 2007. V. 28. № 1. P. 77–91.
13. Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. *Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях* // Матем. сб. 2015. Т. 206. № 8. С. 99–126.
14. Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. *Единственность решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях* // Проблемы математического анализа. 2016. № 85. С. 153–163.
15. Ругицкий Я.Б., Красносельский М.А. *Выпуклые функции и пространства Орлица*. М.: Физматлит. 1958. 587 с.
16. Королев А.Г. *Теоремы вложения анизотропных пространств Соболева–Орлица* // Вестн. Моск. унив. 1983. Сер. 1. № 1. С. 32–37.
17. Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. *О решениях эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. № 19. С. 44–62.
18. Кожевникова Л.М., Каримов Р.Х., Хаджи А.А. *О поведении решений эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях* // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2015. № 9. С. 13–17.
19. Хаджи А.А. *О неравенстве типа Фридрикса* // Научно-технический вестник Поволжья. 2015. № 9. С. 30–33.

Руслан Халикович Каримов,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: ruslan7k7@mail.ru

Лариса Михайловна Кожевникова,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
Елабужский институт Казанского федерального университета,
ул. Казанская, 89, 423600, г. Елабуга, Россия,
E-mail: kosul@mail.ru

Анна Александровна Хаджи,
Тюменский государственный университет,
ул. Володарского, 6, Тюмень,
625003, г. Тюмень, Россия
E-mail: anna_5955@mail.ru