ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 3 (2016). С. 59-81.

УДК 517.91

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ В ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Л.С. ИБРАГИМОВА, И.Ж. МУСТАФИНА, М.Г. ЮМАГУЛОВ

Аннотация. В работе предлагается новый общий подход, позволяющий изучать задачу построения областей гиперболичности и устойчивости нелинейных динамических систем. Подход основан на модификации метода М. Розо исследования устойчивости линейных систем с периодическими коэффициентами, зависящими от малого параметра и асимптотических формулах теории возмущений линейных операторов. Получены приближенные формулы, описывающие границы областей гиперболичности и устойчивости. В качестве примера приведена схема построения областей устойчивости уравнения Матье.

Ключевые слова: области гиперболичности, области устойчивости, динамические системы, малый параметр, асимптотические формулы.

Mathematics Subject Classification: 34D20, 37C60

1. Введение

Рассматривается уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(\mu, t)x + a(x, t, \mu), \quad x \in R^N, \ \mu \in R^k, \tag{1}$$

где матрица $A(\mu, t)$ и вектор-функция $a(x, t, \mu)$ являются непрерывными и T-периодическими по t, гладко (непрерывно дифференцируемо) зависящие от скалярного или векторного параметра μ, при этом $a(x, t, \mu)$ гладко зависит от x и удовлетворяет соотношению:

$$\|a(x, t, \mu)\| = O(\|x\|^2) \text{ при } \|x\| \to 0$$

равномерно по t и μ. Здесь и ниже символ $\|\cdot\|$ обозначает евклидовы нормы векторов и квадратных матриц.

Уравнение (1) при всех значениях параметра μ имеет точку равновесия $x = 0$. Обозначим через p_-, p_0 и p_+ количество (с учетом кратности) мультипликаторов линейной T-периодической системы

$$\frac{dx}{dt} = A(\mu, t)x, \quad x \in R^N, \tag{2}$$

модуль которых меньше, равен или больше 1 соответственно; тогда $p_- + p_0 + p_+ = N$. Тройку (p_-, p_0, p_+) называют [1]–[4] *топологическим типом* точки равновесия $x = 0$ системы (1). Также говорят, что точка равновесия $x = 0$ является *гиперболической*, если $p_0 = 0$; в противном случае ее называют *негиперболической*.

Открытое связное множество G в пространстве параметров R^k будем называть *областью гиперболичности* точки равновесия $x = 0$ системы (1), если для любого $\mu \in G$

L.S. Ibragimova, I.G. Mustafina, M.G. Yumagulov, The asymptotical formulas for the problem of the construction hyperbolic and stability regions of dynamical systems.

Поступила 24 марта 2016 г.

точка равновесия $x = 0$ является гиперболической с одним и тем же топологическим типом $(p_-, 0, p_+)$. Множество G будем называть *областью устойчивости* точки равновесия $x = 0$ системы (1), если для любого $\mu \in G$ точка равновесия $x = 0$ является устойчивой. Естественным образом определим и понятия *области асимптотической устойчивости* и *области неустойчивости*.

Ниже через $\mathcal{B}(\mu_0, \delta_0)$ будем обозначать открытый шар радиуса $\delta_0 > 0$ с центром в точке μ_0 в пространстве параметров $\mu \in R^k$.

Если точка равновесия $x = 0$ системы (1) при некотором $\mu = \mu_0$ является гиперболической и $(p_-, 0, p_+)$ – ее топологический тип, то существует шар $\mathcal{B}(\mu_0, \delta_0)$ такой, что при всех $\mu \in \mathcal{B}(\mu_0, \delta_0)$ точка равновесия $x = 0$ является гиперболической с одним и тем же топологическим типом $(p_-, 0, p_+)$.

Если же точка равновесия $x = 0$ при $\mu = \mu_0$ является негиперболической, то, как правило, при переходе μ через μ_0 ее топологический тип изменяется. А именно, как правило, в пространстве R^k параметров μ через точку μ_0 проходит одно или несколько гладких многообразий γ_j $(j = 1, \ldots, m)$ коразмерности 1, разбивающих некоторый шар $\mathcal{B}(\mu_0, \delta_0)$ на $2m$ подобластей $\mathcal{B}_k$ гиперболичности.

В частности, если точка равновесия $x = 0$ при $\mu = \mu_0$ имеет топологический тип $(p_-, p_0, 0)$, где $p_0 \geqslant 1$, то области гиперболичности $\mathcal{B}_k$ могут представлять собой области устойчивости $\mathcal{B}_j^s$ и неустойчивости $\mathcal{B}_j^n$ (чередующиеся в естественном смысле) решения $x = 0$ системы (1).

Задача построения областей гиперболичности и, в частности, областей устойчивости и неустойчивости решений дифференциальных уравнений представляет собой одну из важных и интересных проблем линейной и нелинейной динамики и многочисленных приложений. Здесь предложены эффективные методы исследования, решен ряд важных с теоретической и практической точек зрения задач (см., например, [4]–[7] и имеющуюся библиографию). Следует отметить, что большинство известных работ относится к автономным уравнениям [8]-[12]. Существенно менее изучены эти задачи для неавтономных уравнений с периодическими коэффициентами, хотя к таким задачам приводят многие важные вопросы теории и практики. Основная проблема здесь в сложности задачи построения мультипликаторов, явное построение которых возможно лишь в самых простых случаях. Известные здесь результаты относятся к исследованию конкретных уравнений (см. [6, 7], [13]-[15]).

В настоящей статье предлагается новый общий подход, позволяющий получать приближенные формулы в задаче построения многообразий γ_j и областей гиперболичности $\mathcal{B}_k$ системы (1). Подход основан на модификации метода М. Розо [16] и асимптотических формулах теории возмущений линейных операторов [17, 18]. Основные результаты получены в предположении, что выполнены условия:

a) при $\mu = \mu_0$ матрица $A_0 \equiv A(\mu_0, t)$ от t не зависит;

b) матрица A_0 имеет простое собственное значение 0 или пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, а остальные ее собственные значения имеют ненулевые вещественные части.

Тогда точка равновесия $x = 0$ системы (1) при $\mu = \mu_0$ является негиперболической и имеет топологический тип (p_-, p_0, p_+), где p_-, p_0 и p_+ количество собственных значений матрицы A_0 с отрицательной, нулевой и положительной вещественной частью соответственно, при этом $p_0 = 1$ или $p_0 = 2$.

Предлагаемый в статье подход может быть модифицирован и для решения поставленных задач в более общих чем a) и b) условиях. Например, для ситуаций, когда матрица A_0 имеет несколько пар чисто мнимых собственных значений или когда матрица A_0 имеет чисто мнимые собственные значения, не являющиеся простыми и т.п.

При соответствующей модификации несложно получить аналоги приводимых ниже результатов и для уравнений вида (1), заданных в комплексном пространстве C^N, с комплексными матрицей $A(\mu,t)$, вектор-функцией $a(x,t,\mu)$ и параметром μ.

2. Основные результаты

Условие b) может быть реализовано в одном из следующих случаев:

1^0. A_0 имеет простое собственное значение 0;

2^0. A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$ и $\omega_0 \neq \dfrac{\pi k}{T}$, k – натуральное число;

3^0. A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = \dfrac{\pi k_0}{T}$ при некотором натуральном k_0;

при этом во всех трех случаях предполагается, что остальные собственные значения матрицы A_0 имеют ненулевые вещественные части.

С точки зрения общей теории бифуркаций (см., например, [1, 2, 19]) во всех указанных случаях точка равновесия $x = 0$ уравнения (1) является негиперболической, а значение μ_0 параметра μ является точкой бифуркации. При этом в случаях 1^0 и 2^0 коразмерность бифуркации равна одному, а в случае 3^0 – двум. Поэтому естественно считать, что в первых двух случаях параметр μ является скалярным, а в третьем случае – двумерным.

Всюду ниже (там, где это не вызовет путаницы) для простоты будем использовать одно и то же обозначение для квадратной матрицы порядка N и соответствующего линейного оператора, действующего в стандартном базисе N-мерного вещественного пространства R^N или N-мерного комплексного пространства C^N.

Ниже будут также использоваться следующие понятия, соответствующие вышеприведенным определениям. Квадратную матрицу A будем называть *гиперболической*, если она не имеет чисто мнимых собственных значений, и *негиперболической* в противном случае. Пусть матрица A имеет p_-, p_0 и p_+ собственных значений с отрицательной, нулевой и положительной вещественной частью соответственно (с учетом кратности). Тогда тройку (p_-,p_0,p_+) будем называть *топологическим типом* матрицы A. Эти же понятия относятся и к произвольному линейному оператору, действующему в конечномерном линейном пространстве.

В приводимых ниже построениях существенно используется следующее вспомогательное утверждение.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + a(x,t), \quad x \in C^N\,, \tag{3}$$

где $A(t)$ – непрерывная T-периодическая матрица, а функция $a(x,t)$ непрерывна по t, непрерывно дифференцируема по x и удовлетворяет соотношениям: $a(x,t+T) \equiv a(x,t)$, $\|a(x,t)\| = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \to 0$. Пусть $U(t)$ – невырожденная непрерывная T-периодическая матрица. Матрицы $A(t)$ и $U(t)$, а также функция $a(x,t)$ могут быть как вещественными, так и комплексными.

Замена $y = U(t)x$ приводит уравнение (3) к виду

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y + b(y,t), \quad y \in C^N\,, \tag{4}$$

где

$$B(t) = U'(t)U^{-1}(t) + U(t)A(t)U^{-1}(t)\,, \quad b(y,t) = U(t)a(U^{-1}(t)y,t)\,.$$

Лемма 1. *Невырожденное T-периодическое преобразование $y = U(t)x$ не изменяет топологический тип точки равновесия $x = 0$ системы (3), т.е. топологические типы нулевых точек равновесия систем (3) и (4) одинаковы.*

Доказательства этой леммы и других утверждений приводятся в конце статьи.

2.1. Случай 1^0. Предполагая, что μ является скалярным параметром (т.е. $\mu \in R$) и полагая для простоты обозначений, что $\mu_0 = 0$, перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + \mu A_1(t) + A_2(\mu, t)]x + a(x, t, \mu). \tag{5}$$

где $A_1(t) = A'_\mu(0, t)$, а матрица $A_2(\mu, t)$ удовлетворяет соотношению: $\|A_2(\mu, t)\| = O(\mu^2)$ при $\mu \to 0$ равномерно по t. Уравнение (5) можно рассматривать как уравнение с малым скалярным параметром μ и с T-периодической по t правой частью.

Так как в рассматриваемом случае пространство параметров μ является одномерным, то многообразия γ_j, о которых говорилось выше, вырождаются в точку $\mu_0 = 0$. При этом областями гиперболичности $\mathcal{B}_k$ будут интервалы вида $(-\delta_0, 0)$ или $(0, \delta_0)$ при некотором $\delta_0 > 0$.

Обозначим через e_0 и g_0 собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению 0. Эти векторы можно считать нормированными равенствами: $\|e_0\| = 1$ и $(e_0, g_0) = 1$. Здесь и ниже символ $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение векторов в пространствах R^N и C^N.

Положим

$$\lambda_1 = \int_0^T (A_1(t)e_0, g_0)\, dt. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0 и пусть топологический тип этой матрицы равен $(p_-, 1, p_+)$. Пусть $\lambda_1 \neq 0$. Тогда топологический тип нулевой точки равновесия системы (5) равен $(1+p_-, 0, p_+)$ при всех малых $|\mu|$ таких, что $\mu\lambda_1 < 0$; он равен $(p_-, 0, 1 + p_+)$, если $\mu\lambda_1 > 0$.*

Из этого утверждения вытекает

Теорема 2. *Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0, а остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части. Пусть $\lambda_1 \neq 0$. Тогда решение $x = 0$ уравнения (5) будет асимптотически устойчивым при всех малых $|\mu|$ таких, что $\mu\lambda_1 < 0$; оно будет неустойчивым, если $\mu\lambda_1 > 0$.*

Следствие 1. *Пусть $\lambda_1 \neq 0$. Тогда в условиях теоремы 1 при некотором $\delta_0 > 0$ интервалы $(-\delta_0, 0)$ и $(0, \delta_0)$ представляют собой области гиперболичности решения $x = 0$ уравнения (5) (с различным топологическим типом). Пусть $\lambda_1 > 0$ ($\lambda_1 < 0$). Тогда в условиях теоремы 2 интервал $(-\delta_0, 0)$ ($(0, \delta_0)$) представляет собой область асимптотической устойчивости, а интервал $(0, \delta_0)$ ($(-\delta_0, 0)$)– область неустойчивости решения $x = 0$ уравнения (5).*

2.2. Случай 2^0. Как и в случае 1^0, здесь естественно считать, что μ является скалярным параметром и пусть для простоты обозначений $\mu_0 = 0$. Другими словами, здесь также уравнение (1) может быть представлено в виде (5), а области гиперболичности $\mathcal{B}_k$ представляют собой интервалы вида $(-\delta_0, 0)$ или $(0, \delta_0)$ при некотором $\delta_0 > 0$.

Так как матрица A_0 имеет собственные значения $\pm i\omega_0$, то существуют ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in R^N$ такие, что выполняются равенства:

$$A_0(e + ig) = i\omega_0(e + ig), \quad A_0^*(e^* + ig^*) = -i\omega_0(e^* + ig^*). \tag{7}$$

Эти векторы можно считать нормированными равенствами:

$$\|e\| = \|g\| = 1\,,\ (e, e^*) = (g, g^*) = 1,\ (e, g^*) = (g, e^*) = 0\,. \tag{8}$$

Положим

$$\chi_1 = \int_0^T [(A_1(t)e, e^*) + (A_1(t)g, g^*)]\, dt. \tag{9}$$

Теорема 3. *Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$ и $\omega_0 \neq \frac{\pi k}{T}$ (k – натуральное число) и пусть топологический тип этой матрицы равен $(p_-, 2, p_+)$. Пусть $\chi_1 \neq 0$. Тогда топологический тип нулевой точки равновесия системы (5) равен $(2 + p_-, 0, p_+)$ при всех малых $|\mu|$ таких, что $\mu\chi_1 < 0$; он равен $(p_-, 0, 2 + p_+)$, если $\mu\chi_1 > 0$.*

Из этого утверждения вытекает

Теорема 4. *Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$ и $\omega_0 \neq \frac{\pi k}{T}$ (k – натуральное число), а остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части. Пусть $\chi_1 \neq 0$. Тогда решение $x = 0$ системы (5) будет асимптотически устойчивым при всех малых $|\mu|$ таких, что $\mu\chi_1 < 0$; оно будет неустойчивым, если $\mu\chi_1 > 0$.*

Следствие 2. *Пусть $\chi_1 \neq 0$. Тогда в условиях теоремы 3 при некотором $\delta_0 > 0$ интервалы $(-\delta_0, 0)$ и $(0, \delta_0)$ представляют собой области гиперболичности решения $x = 0$ уравнения (5) (с различным топологическим типом). Пусть $\chi_1 > 0$ ($\chi_1 < 0$). Тогда в условиях теоремы 4 интервал $(-\delta_0, 0)$ ($(0, \delta_0)$) представляет собой область асимптотической устойчивости, а интервал $(0, \delta_0)$ ($(-\delta_0, 0)$)– область неустойчивости решения $x = 0$ уравнения (5).*

2.3. Случай 3^0.

Случай 3^0 наиболее сложный. Здесь μ естественно считать двумерным параметром. Пусть $\mu = (\alpha, \beta)$, где α и β – скалярные вещественные параметры; положим $\mu_0 = (\alpha_0, \beta_0)$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{dx}{dt} = A(\alpha, \beta, t)x + a(x, t, \alpha, \beta)\,, \quad x \in R^N\,. \tag{10}$$

Будем считать, что элементы матрицы $A(\alpha, \beta, t)$ дважды непрерывно дифференцируемо зависят от α и β. Тогда она представима в виде:

$$A(\alpha, \beta, t) = A_0 + (\alpha - \alpha_0)B_1(t) + (\beta - \beta_0)B_2(t) + (\alpha - \alpha_0)^2 B_{11}(t) + \tag{11}$$

$$+(\beta - \beta_0)^2 B_{22}(t) + (\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_0)B_{12}(t) + B_3(\alpha, \beta, t)\,,$$

где A_0 – постоянная матрица (напомним о предположении, что матрица $A(\alpha_0, \beta_0, t)$ от t не зависит), матрицы $B_j(t)$, $B_{ij}(t)$ и $B_3(\alpha, \beta, t)$ являются T-периодическими по t, при этом матрица $B_3(\alpha, \beta, t)$ равномерно по t удовлетворяет соотношению:

$$\|B_3(\alpha, \beta, t)\| = O((\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2)^{3/2} \text{ при } (\alpha, \beta) \to (\alpha_0, \beta_0).$$

Так как в рассматриваемом случае пространство R^2 параметров μ является двумерным, то многообразия γ_j, о которых говорилось выше, как правило, представляют собой гладкие кривые, проходящие через точку $\mu_0 = (\alpha_0, \beta_0)$, а области гиперболичности $\mathcal{B}_k$ решения $x = 0$ уравнения (10) представляют собой открытые подобласти некоторого круга $\mathcal{B}(\mu_0, \delta_0) \subset R^2$, при этом кривые γ_j образуют границы областей $\mathcal{B}_k$ (см. изображенный на Рис. 1 соответствующий пример).

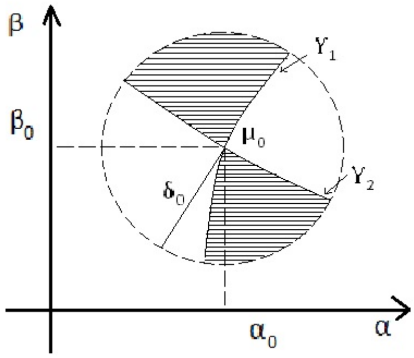

Рис. 1. Области гиперболичности в плоскости параметров (α, β)

Ниже *границу области гиперболичности* в окрестности точки (α_0, β_0) будем определять как гладкую кривую Υ, проходящую через точку $\mu_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ и такую, что:

– при любом $(\alpha, \beta) \in \Upsilon$ решение $x = 0$ уравнения (10) является негиперболическим с одним и тем же топологическим типом;

– для любой точки $(\alpha, \beta) \in \Upsilon$, $(\alpha, \beta) \neq (\alpha_0, \beta_0)$, существует открытый круг $\mathcal{B}$ с центром в точке (α, β) такой, что кривая Υ разбивает этот круг на две открытые подобласти $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{B}''$, в каждом из которых решение $x = 0$ уравнения (10) является гиперболическим (т.е., например, если $(\alpha', \beta') \in B'$, то решение $x = 0$ уравнения (10) при $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$ является гиперболическим).

Приведем схему, позволяющую приближенно определять границы областей гиперболичности. Кривую Υ, определяющую границу области гиперболичности, можно описывать некоторой гладкой функцией вида $\beta = f(\alpha)$, $\alpha = g(\beta)$ или заданной в параметрическом виде. Ограничимся рассмотрением первого варианта, т.е. будем строить границу области гиперболичности уравнения (10) как кривую, описываемую гладкой функцией $\beta = f(\alpha)$, определенной в некотором интервале $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ и такой, что $f(\alpha_0) = \beta_0$. А именно, функцию $\beta = f(\alpha)$ будем строить в виде:

$$f(\alpha) = \beta_0 + \beta_1(\alpha - \alpha_0) + \beta_2(\alpha - \alpha_0)^2 + \eta(\alpha - \alpha_0)\,, \tag{12}$$

в котором коэффициенты β_1 и β_2 требуют определения, а нелинейность $\eta(\varepsilon)$ удовлетворяет соотношению $\eta(\varepsilon) = O(\varepsilon^3)$ при $\varepsilon \to 0$. По сути, речь идет о вычислении производных $f'(\alpha_0) = \beta_1$ и $f''(\alpha_0) = 2\beta_2$. В этой связи функцию

$$\widehat{f}(\alpha) = \beta_0 + \beta_1(\alpha - \alpha_0) + \beta_2(\alpha - \alpha_0)^2\,, \tag{13}$$

будем называть *асимптотическим приближением порядка* 2 функции $\beta = f(\alpha)$ в точке $\alpha = \alpha_0$. Приводимая в работе схема может быть развита и для построения асимптотических приближений функции $\beta = f(\alpha)$ более высокого порядка.

2.3.1. Предварительные преобразования. Полагая $\delta = \alpha - \alpha_0$ и подставляя (12) в (10) получим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + \delta A_1(\beta_1, t) + \delta^2 A_2(\beta_1, \beta_2, t) + A_3(t, \delta)]x + a(x, t, \alpha, \beta)\,, \quad x \in R^N\,, \tag{14}$$

где обозначено:

$$A_1(\beta_1, t) = B_1(t) + \beta_1 B_2(t)\,, \quad A_2(\beta_1, \beta_2, t) = B_{11}(t) + \beta_1 B_{12}(t) + \beta_1^2 B_{22}(t) + \beta_2 B_2(t)\,,$$

а матрица $A_3(\delta, t)$ удовлетворяет соотношению: $\|A_3(\delta, t)\| = O(\delta^3)$ при $\delta \to 0$ равномерно по t.

Здесь и ниже при всех преобразованиях в обозначении нелинейных слагаемых (в уравнении (14) – это функция $a(x, t, \alpha, \beta)$) для простоты будем сохранять обозначения параметров α и β.

Как и в случае 2^0, существуют ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in R^N$ такие, что выполняются равенства (7) и (8), в которых $\omega_0 = \dfrac{\pi k_0}{T}$. Положим

$$e_1 = \frac{e + ig}{\sqrt{2}}\,, \;\; e_2 = \frac{e - ig}{\sqrt{2}}\,, \;\; e_1^* = \frac{e^* + ig^*}{\sqrt{2}}\,, \;\; e_2^* = \frac{e^* - ig^*}{\sqrt{2}}\,. \tag{15}$$

По построению эти векторы нормированы в соответствии с равенствами

$$(e_1, e_1^*) = (e_2, e_2^*) = 1\,, \;\; (e_1, e_2^*) = (e_2, e_1^*) = 0\,.$$

Матрица A_0 и транспонированная матрица A_0^* имеют пару простых собственных значений $\pm\omega_0 i$. При этом определенные равенствами (15) векторы $e_1, e_1^* \in C^N$ – это собственные векторы операторов A_0 и A_0^*, отвечающие собственным значениям $\omega_0 i$ и $-\omega_0 i$ соответственно. Определим действующий в C^N линейный оператор $Q_1 z = -2\omega_0 i P_1 z$, где $P_1 z = (z, e_1^*)e_1$; P_1 является оператором спектрального проектирования пространства C^N на одномерное собственное подпространство E_1, отвечающее собственному значению $\omega_0 i$ оператора A_0.

Уравнение (14) можно рассматривать в комплексном пространстве C^N. Произведем в (14) замену $y = e^{Q_1 t}x$ с невырожденной T-периодической матрицей $e^{Q_1 t}$. В силу леммы 1 эта замена не изменяет топологический тип точки равновесия и приведет (14) к виду:

$$\frac{dy}{dt} = [\tilde{A} + \delta\tilde{A}_1(\beta_1, t) + \delta^2\tilde{A}_2(\beta_1, \beta_2, t) + \tilde{A}_3(t, \delta)]y + \tilde{a}(y, t, \alpha, \beta)\,, \quad y \in C^N\,, \tag{16}$$

в котором

$$\tilde{A} = A_0 + Q_1\,, \;\; \tilde{A}_j = e^{Q_1 t}A_j e^{-Q_1 t} \;(j = 1, 2, 3)\,, \;\; \tilde{a}(y, t, \alpha, \beta) = e^{Q_1 t}a(e^{-Q_1 t}y, t, \alpha, \beta)\,.$$

Оператор $\tilde{A}$ имеет полупростое собственное значение $-\omega_0 i$ кратности 2, а остальные его собственные значения имеют ненулевые вещественные части. Обозначим через E_0 – спектральное (двумерное) подпространство оператора $\tilde{A}$, отвечающее собственному значению $-\omega_0 i$, а через $P_0 : C^N \to E_0$ – оператор спектрального проектирования пространства C^N на подпространство E_0. Оператор P_0 может быть определен равенством $P_0 z = (z, e_1^*)e_1 + (z, e_2^*)e_2$. Положим $P^0 = I - P_0$ и $E^0 = P^0 C^N$; подпространство E^0 является инвариантным для оператора $\tilde{A}$, при этом оператор $\tilde{A} : E^0 \to E^0$ является гиперболическим.

2.3.2. Вычисление коэффициента β_1. Приведем сначала схему, позволяющую вычислить коэффициент β_1 функции (12). На первом этапе рассмотрим зависящее от вспомогательного параметра ξ матричное уравнение

$$\int_0^T e^{-\tilde{A}t}Se^{\tilde{A}t}\,dt = \int_0^T e^{-\tilde{A}t}\tilde{A}_1(\xi, t)e^{\tilde{A}t}\,dt\,, \tag{17}$$

в котором неизвестной является квадратная матрица S.

Лемма 2. *Уравнение (17) имеет единственное решение $S = S(\xi)$, при этом матрица $S(\xi)$ гладко зависит от ξ.*

Положим

$$S_0(\xi) = P_0 S(\xi) P_0 \tag{18}$$

и рассмотрим двумерный линейный оператор $S_0(\xi) : E_0 \to E_0$. Матрица $S_0(\xi)$ этого оператора является двумерной.

Теорема 5. *Пусть существуют ξ^* и $\delta_0 > 0$ такие, что матрица $S_0(\xi^*)$ является негиперболической, при этом матрица $S_0(\xi)$ гиперболична при $\xi \in (\xi^* - \delta_0, \xi^*)$ и $\xi \in (\xi^*, \xi^* + \delta_0)$ с различным топологическим типом на этих интервалах. Тогда существует граница Υ областей гиперболичности решения $x = 0$ уравнения (10), описываемая функцией (12), в которой $\beta_1 = \xi^*$.*

Рассмотрим частный случай, когда матрица $S_0(\xi)$ при некотором $\xi = \xi^*$ имеет простое собственное значение 0. Тогда из теории возмущений линейных операторов [17] следует, что при близких к ξ^* значениях ξ матрица $S_0(\xi)$ имеет простое вещественное собственное значение $\lambda(\xi)$, при этом функция $\lambda(\xi)$ гладко зависит от ξ и выполнено равенство $\lambda(\xi^*) = 0$.

Теорема 6. *Пусть матрица $S_0(\xi^*)$ имеет простое собственное значение $\lambda_1 = 0$, а другое его собственное значение λ_2 является вещественным ненулевым числом. Пусть $\lambda'(\xi^*) \neq 0$. Тогда существует граница Υ областей гиперболичности решения $x = 0$ уравнения (10), описываемая функцией (12), в которой $\beta_1 = \xi^*$.*

Замечание 1. *Если найдется k различных ξ^*, для которых выполнены условия теоремы 5 или 6, то через точку (α_0, β_0) в плоскости параметров (α, β) проходит по крайней мере k различных кривых Υ, описываемых функциями вида (12).*

Отметим следующий полезный факт. Пусть в пространстве C^N в качестве базиса выбраны векторы

$$e_1,\, e_2,\, e_3,\, \dots ,e_N\,, \tag{19}$$

где e_1, e_2 – векторы из (15), а векторы $e_3, \dots, e_N$ образуют базис в E^0. Тогда матрица линейного оператора $\tilde{A} : C^N \to C^N$ будет иметь вид:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\omega_0 i I_2 & O_{12} \\ O_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{20}$$

где I_2 – единичная матрица порядка 2, A_{22} – квадратная матрица порядка $N-2$, а O_{12} и O_{21} – нулевые прямоугольные матрицы соответствующих размеров. Далее, в указанном случае решение уравнения (17), т.е. матрица $S(\xi)$ представима в виде

$$S(\xi) = \begin{bmatrix} S_0(\xi) & S_{12}(\xi) \\ S_{21}(\xi) & S_{22}(\xi) \end{bmatrix}, \tag{21}$$

где $S_0(\xi)$ – матрица (18), $S_{22}(\xi)$ – квадратная матрица порядка $N-2$, а $S_{12}(\xi)$ и $S_{21}(\xi)$ – прямоугольные матрицы соответствующих размеров.

Наряду с матрицей $S(\xi)$ будем также рассматривать матрицу

$$S_1(\xi) = \begin{bmatrix} S_0(\xi) & O_{12} \\ O_{21} & S_{22}(\xi) \end{bmatrix}, \tag{22}$$

Ниже для удобства изложения будем считать, что в пространстве C^N в качестве базиса выбраны векторы (19) и, следовательно, верны равенства (20) и (21).

2.3.3. Вычисление коэффициента β_2. Пусть значение β_1 в соответствии с теоремами 5 или 6 найдено, т.е. $\beta_1 = \xi^*$. Перейдем к вычислению коэффициента β_2 функции (12). Рассмотрим систему (16), в которой положим $\beta_1 = \xi^*$, а неизвестное β_2 для удобства переобозначим на ν:

$$\frac{dy}{dt} = [\tilde{A} + \delta P_1(t) + \delta^2 P_2(\nu, t) + \tilde{A}_3(t,\delta)]y + \tilde{a}(y, t, \alpha, \beta)\,, \quad y \in C^N\,, \tag{23}$$

где обозначено

$$P_1(t) = \tilde{A}_1(\xi^*, t)\,, \quad P_2(\nu, t) = \tilde{A}_2(\xi^*, \nu, t)\,.$$

Положим $S_1 = S_1(\xi^*)$, где $S_1(\xi)$ – матрица (22). Положим далее

$$H_1(t) = e^{\tilde{A}t}\left[\int_0^t e^{-\tilde{A}\tau}(P_1(\tau) - S_1)e^{\tilde{A}\tau}d\tau\right]e^{-\tilde{A}t}\,. \tag{24}$$

Определим, наконец, матрицу

$$F(\nu, t) = P_2(\nu, t) - H_1(t)P_1(t) + S_1 H_1(t) \tag{25}$$

и рассмотрим зависящее от параметра ν матричное уравнение

$$\int_0^T e^{-\tilde{A}t} Z e^{\tilde{A}t}\, dt = \int_0^T e^{-\tilde{A}t} F(\nu, t) e^{\tilde{A}t}\, dt\,, \tag{26}$$

в котором неизвестной является квадратная матрица Z.

Лемма 3. *Уравнение (26) имеет единственное решение $Z = Z(\nu)$, при этом матрица $Z(\nu)$ гладко зависит от ν.*

Положим

$$Z_0(\nu) = P_0 Z(\nu) P_0 \tag{27}$$

и рассмотрим двумерный линейный оператор $Z_0(\nu) : E_0 \to E_0$. Матрица $Z_0(\nu)$ этого оператора является двумерной.

В силу равенств (20)–(22) матрица $Z(\nu)$ представима в виде

$$Z(\nu) = \begin{bmatrix} Z_0(\nu) & Z_{12}(\nu) \\ Z_{21}(\nu) & Z_{22}(\nu) \end{bmatrix}.$$

Напомним, что число ξ^* выбрано из условия, что двумерная матрица $S_0 = S_0(\xi^*)$ является негиперболической. Тогда в соответствующем базисе матрица S_0 может иметь один из видов:

$$a) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} i\omega_1 & 0 \\ 0 & -i\omega_1 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{28}$$

где λ_2 является ненулевым вещественным числом, а $\omega_1 \geqslant 0$.

Ограничимся рассмотрением случая, когда матрица $S_0(\xi^*)$ имеет вид a). Остальные случаи рассматриваются по той же схеме в соответствии с приведенным ниже методом М. Розо. В случае a) двумерную матрицу $Z_0(\xi)$ запишем в указанном базисе:

$$Z_0(\nu) = \begin{bmatrix} z_{11}(\nu) & z_{12}(\nu) \\ z_{21}(\nu) & z_{22}(\nu) \end{bmatrix}.$$

Теорема 7. *Пусть в условиях теоремы 6 матрица $S_0(\xi^*)$ имеет вид a). Пусть при некотором $\nu = \nu^*$ для функции $\tau(\nu) = \operatorname{Re} z_{11}(\nu)$ выполнены соотношения $\tau(\nu^*) = 0$ и $\tau'(\nu^*) \neq 0$. Тогда граница Υ областей гиперболичности решения $x = 0$ уравнения (10) описывается функцией (12), в которой $\beta_1 = \xi^*$ и $\beta_2 = \nu^*$.*

2.4. Линейные и консервативные системы. Рассмотрим линейное двумерное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(\alpha, \beta, t)x\,, \quad x \in R^2\,, \tag{29}$$

где $A(\alpha, \beta, t)$ представима в виде (11). Пусть при этом выполнены условия случая 3^0.

Так как уравнение (29) является частным случаем уравнения (10), то теоремы 5–7 остаются справедливыми и для уравнения (29). Однако, линейное уравнение (29) имеет свою специфику, заключающуюся, в частности, в том, что ответ на вопрос о свойствах его гиперболичности полностью определяется свойствами матрицы $A(\alpha, \beta, t)$, чего нельзя сказать о нелинейном уравнении (10) в тех критических случаях, когда уравнение (29) имеет мультипликаторы, равные одному по модулю. Поэтому области гиперболичности и их границы для линейного уравнения (29) могут быть определены в более слабых условиях, чем теоремы 5–7.

В этом пункте будут рассматриваться системы, возникающие при изучении линейных консервативных систем. Линейная автономная система $x' = Ax$ является (см., например, [2, 3]) консервативной, если $\operatorname{tr} A = 0$; в этом случае матричная экспонента e^{At} сохраняет фазовый объем. Линейная неавтономная система $x' = A(t)x$ с T-периодической матрицей $A(t)$ является консервативной, если произведение ее мультипликаторов равно

1; в этом случае отображение Пуанкаре $U(T)$ указанной системы за время T сохраняет фазовый объем.

Пусть линейная система (29) является консервативной в указанном выше смысле при всех α и β. Повторяя для этой системы те же построения что и для (10) в случае 3^0 (см. п. 2.3), получим матрицу $S(\xi)$, являющуюся решением системы (17).

Так как рассматриваемая система (29) является двумерной, то вопрос об ее областях гиперболичности равносилен вопросу об ее областях устойчивости и неустойчивости.

Теорема 8. *Пусть матрица $S(\xi^*)$ имеет собственное значение 0 кратности 2. Пусть существует $\delta_0 > 0$ такое, что матрица $S(\xi)$ при $\xi \in (\xi^* - \delta_0, \xi^* + \delta_0)$ имеет непрерывные ветви собственных значений $\lambda_1(\xi)$ и $\lambda_2(\xi)$, при этом:*

– для $\xi \in (\xi^*, \xi^* + \delta_0)$ $(\xi \in (\xi^* - \delta_0, \xi^*))$ собственные значения $\lambda_1(\xi)$ и $\lambda_2(\xi)$ являются вещественными, при этом $\lambda_1(\xi) < 0$ и $\lambda_2(\xi) > 0$;

– для $\xi \in (\xi^* - \delta_0, \xi^*]$ $(\xi \in [\xi^*, \xi^* + \delta_0))$ собственные значения $\lambda_1(\xi)$ и $\lambda_2(\xi)$ являются чисто мнимыми, а именно, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega(\xi)$, где $\omega(\xi^*) = 0$, $\omega(\xi) > 0$ при $\xi \neq \xi^*$.

Тогда существует граница Υ областей устойчивости уравнения (29), описываемая функцией (12), в которой $\beta_1 = \xi^*$.

3. Вспомогательные сведения

Приведем некоторые вспомогательные сведения, используемые при доказательстве утверждений настоящей статьи.

3.1. Метод М. Розо. В работе используется метод М. Розо, предложенный в [16] для линейных дифференциальных уравнений

$$z' = [A + \varepsilon P_1(t) + \varepsilon^2 P_2(t) + \ldots + \varepsilon^k P_k(t) + \varepsilon^{k+1} Q(t,\varepsilon)]z\,, \quad z \in C^N\,, \tag{30}$$

с периодическими коэффициентами и постоянной матрицей A. Метод предлагает способ перехода к равносильному уравнению вида

$$y' = [A + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \ldots + \varepsilon^k S_k + \varepsilon^{k+1} \tilde{Q}(t,\varepsilon)]y\,, \quad y \in C^N\,, \tag{31}$$

где $S_1, S_2, ..., S_k$ – постоянные матрицы, а $\tilde{Q}(t,\varepsilon)$ – непрерывная периодическая матрица. Такой переход позволяет решить задачу исследования устойчивости указанной линейной системы путем построения собственных значений постоянной матрицы $A+\varepsilon S_1+\varepsilon^2 S_2+\ldots+\varepsilon^k S_k$, например, методами теории возмущений [17] (ниже этот вопрос обсуждается более подробно). В этом параграфе метод М. Розо обосновывается и развивается применительно к некоторым нелинейным уравнениям.

3.1.1. Использование первого приближения. Рассмотрим сначала зависящее от малого параметра ε дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{dt} = [A + \varepsilon P(t) + \varepsilon^2 Q(t,\varepsilon)]z + a(z,t,\varepsilon), \quad z \in C^N\,, \tag{32}$$

где A – постоянная матрица, $P(t)$ и $Q(t,\varepsilon)$ – непрерывные матрицы, $a(z,t,\varepsilon)$ – непрерывно-дифференцируемая по x и непрерывная по t и ε вектор-функция, удовлетворяющая условию: $\|a(z,t,\varepsilon)\| = O(\|z\|^2)$ при $z \to 0$. При этом $P(t)$, $Q(t,\varepsilon)$ и $a(z,t,\varepsilon)$ являются T-периодическими по t. Элементы матриц A, $P(t)$ и $Q(t,\varepsilon)$, а также вектор-функции $a(z,t,\varepsilon)$ и параметр ε могут быть как вещественными, так и комплексными.

Пусть матрица A имеет одно или несколько собственных значений с нулевой вещественной частью, а остальные собственные значения имеют отрицательные вещественные части. В этом случае при малых $|\varepsilon|$ свойства устойчивости решения $z = 0$ уравнения (32) зависят от мультипликаторов T-периодической матрицы $A+\varepsilon P(t)$. Однако, явное построение этих мультипликаторов возможно лишь в самых простых случаях.

Для исследования устойчивости решения $z = 0$ нелинейного уравнения (32) предлагается перейти к равносильному уравнению

$$\frac{dy}{dt} = [A + \varepsilon S + \varepsilon^2 \tilde{Q}(t,\varepsilon)]y + \tilde{a}(y,t,\varepsilon)\,, \quad y \in C^N\,, \tag{33}$$

где S – постоянная матрица. Переход можно осуществить используя замену

$$y = (I - \varepsilon H(t))z\,, \tag{34}$$

где $H(t)$ – некоторая невырожденная T-периодическая матрица. Формула для построения матрицы $H(t)$ будет приведена ниже. Здесь же отметим, что таких матриц и, следовательно, матриц S существует бесконечно много, при этом для построения матрицы S совсем не обязательно знать матрицу $H(t)$.

Приведем схему построения матрицы S. С этой целью введем следующее понятие. Будем говорить, что квадратная матрица A является *T-резонансной*, если она имеет хотя бы одну пару различных собственных значений λ_1 и λ_2, удовлетворяющую соотношению: $\lambda_1 - \lambda_2 = \dfrac{2\pi q i}{T}$ при некотором натуральном q. В частности, вещественная матрица A является T-резонансной, если она имеет хотя бы одну пару собственных значений вида $\pm\dfrac{\pi q i}{T}$ при некотором натуральном q.

Рассмотрим матричное уравнение

$$\int_0^T e^{-A\tau} S e^{A\tau} d\tau = \int_0^T e^{-A\tau} P(\tau) e^{A\tau} d\tau\,, \tag{35}$$

с неизвестной матрицей S; здесь A и $P(t)$ – матрицы из уравнения (32). Имеют место следующие утверждения [16].

Лемма 4. *Уравнение (35) имеет единственное решение $S = S_0$ тогда и только тогда, когда матрица A не является T-резонансной.*

Теорема 9. *Пусть матрица A не является T-резонансной. Тогда замена (34), где*

$$H(t) = e^{At}\left[\int_0^t e^{-A\tau}(P(\tau) - S_0)e^{A\tau} d\tau\right] e^{-At}, \tag{36}$$

а S_0 – единственное решение уравнения (35), приводит уравнение (32) к виду (33), в котором следует положить $S = S_0$.

Теорема 10. *Матрицы S и $H(t)$, для которых замена (34) приводит уравнение (32) к виду (33), определяются не единственным способом. А именно, пусть матрица A не является T-резонансной и пусть S_0 – решение уравнения (35). Тогда замена (34), где*

$$H(t) = e^{At}\left[\int_0^t e^{-A\tau}(P(\tau) - S)e^{A\tau} d\tau + C_0\right] e^{-At}\,, \tag{37}$$

а

$$S = S_0 - C_0 A + A C_0, \tag{38}$$

при любой постоянной матрице C_0 приводит уравнение (32) к виду (33).

Таким образом, если матрица A не является T-резонансной, то замена (34) приводит уравнение (32) к виду (33). Отметим здесь следующий полезный факт. Путем выбора постоянной матрицы C_0 в формуле (38) можно добиться того, что в уравнении (33) матрица S будет «диагональной». Приведем в этом направлении вспомогательное утверждение.

Пусть матрица A имеет полупростое собственное значение λ_0 кратности k и пусть E_0 – соответствующее собственное подпространство оператора $A : C^N \to C^N$. Пусть P_0 – спектральный проектор на подпространство E_0, т.е. $P_0 : C^N \to E_0$, $AP_0 = P_0 A$ и $P_0 x = x$ для любого $x \in E_0$. Положим $P^0 = I - P_0$.

Лемма 5. *Имеет место равенство*

$$P_0(S_0 - C_0A + AC_0)P_0 = P_0S_0P_0$$

для любой матрицы C_0.

Таким образом, матрица линейного оператора $P_0(S_0 - C_0A + AC_0)P_0 : E_0 \to E_0$ не зависит от выбора C_0.

Лемма 6. *В равенстве (38) матрицу* C_0 *можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись равенства*

$$P_0(S_0 - C_0A + AC_0)P^0 = P^0(S_0 - C_0A + AC_0)P_0 = 0\,, \ \ P^0(C_0A - AC_0)P^0 = 0\,.$$

В справедливости этих лемм можно убедиться прямым подсчетом.

Из этих лемм следует, что за счет выбора C_0 можно добиться того, чтобы матрица (38) в подходящем базисе пространства C^N имела вид

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & O_{12} \\ O_{21} & S_{22} \end{bmatrix},$$

где S_{11} – квадратная матрица порядка k линейного оператора $P_0S_0P_0 : E_0 \to E_0$, S_{22} – квадратная матрица порядка $N-k$, а O_{12} и O_{21} – нулевые прямоугольные матрицы соответствующих размеров. При этом матрицы S_{11} и S_{22} совпадают с соответствующими диагональными блоками матрицы S_0 – решения системы (35) и, кроме этого, матрица S_{11} не зависит от выбора C_0. В частности, если матрица A является простой (т.е. если она имеет в точности N различных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$), то за счет выбора C_0 можно добиться того, чтобы матрица (38) в базисе из собственных векторов матрицы A имела вид:

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_{22} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & s_{NN} \end{bmatrix},$$

при этом числа s_{jj} совпадают с соответствующими диагональными элементами матрицы S_0 – решения системы (35).

Пусть теперь матрица A является T-резонансной. В этом случае необходимо провести предварительное преобразование $x = U(t)z$ с T-периодической невырожденной матрицей $U(t)$, с помощью которого исходная система (32) сводится к равносильному виду

$$\frac{dx}{dt} = [\tilde{A} + \varepsilon\tilde{P}(t) + \varepsilon^2\tilde{Q}(t,\varepsilon)]x + \tilde{a}(x,t,\varepsilon), \quad x \in C^N\,, \tag{39}$$

в котором матрица $\tilde{A}$ уже не является T-резонансной. Пусть, например, для некоторых двух различных полупростых собственных значений λ_1 и λ_2 матрицы A выполнено равенство $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2\pi}{T}qi$ при некотором целом q. Обозначим через E_1 спектральное подпространство оператора A, отвечающее собственному значению λ_1, а через $P_1 : C^N \to E_1$ – оператор спектрального проектирования. Полагая $\tilde{P}_1 = -\frac{2\pi}{T}qiP_1$, произведем в (32) замену $x = e^{\tilde{P}_1t}z$ с T-периодической матрицей $e^{\tilde{P}_1t}$. Тогда получим систему (39) требуемого вида, в которой $\tilde{A} = A + \tilde{P}_1$.

Таким образом, для произвольной матрицы A существует бесконечно много различных замен вида (34), приводящих (32) к виду (33).

3.1.2. Использование последующих приближений. Рассмотрим теперь более общую постановку задачи, а именно, рассмотрим уравнение (32) вида:

$$\frac{dz}{dt} = [A + \varepsilon P_1(t) + \varepsilon^2 P_2(t) + \varepsilon^3 Q(t,\varepsilon)]z + a(z,t,\varepsilon), \quad z \in C^N\,, \tag{40}$$

где A, $Q(t,\varepsilon)$ и $a(z,t,\varepsilon)$ имеют тот же смысл, что и в уравнении (32), $P_1(t)$ и $P_2(t)$ непрерывные T-периодические матрицы.

Приведем схему перехода от (40) к равносильному уравнению

$$\frac{dy}{dt} = [A + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \varepsilon^3 \tilde{Q}(t,\varepsilon)]y + \tilde{a}(y,t,\varepsilon)\,, \quad y \in C^N\,, \tag{41}$$

где S_1 и S_2 – постоянные матрицы. Переход можно осуществить используя замену

$$y = (I - \varepsilon H_1(t) - \varepsilon^2 H_2(t))z\,, \tag{42}$$

где $H_1(t)$ и $H_2(t)$ – некоторые невырожденные T-периодические матрицы.

Будем считать, что матрица A не является T-резонансной; если это не так, то следует предварительно преобразовать матрицу так, как говорилось выше. Пусть, далее, матрицы S_1 и $H_1(t)$ уже определены по приведенной выше схеме. А именно, пусть для определенности S_1 – это единственное решение аналога матричного уравнения (35):

$$\int_0^T e^{-A\tau} S e^{A\tau} d\tau = \int_0^T e^{-A\tau} P_1(\tau) e^{A\tau} d\tau\,; \tag{43}$$

пусть $H_1(t)$ определяется в соответствии с равенством (36):

$$H_1(t) = e^{At}\left[\int_0^t e^{-A\tau}(P_1(\tau) - S_1)e^{A\tau} d\tau\right] e^{-At}, \tag{44}$$

Далее положим

$$\tilde{P}_2(t) = P_2(t) - H_1(t)P_1(t) + S_1 H_1(t)$$

и рассмотрим матричное уравнение

$$\int_0^T e^{-A\tau} S e^{A\tau} d\tau = \int_0^T e^{-A\tau} \tilde{P}_2(\tau) e^{A\tau} d\tau\,, \tag{45}$$

с неизвестной матрицей S. Так как матрица A не является T-резонансной, то уравнение (45) имеет единственное решение, которое и можно использовать в качестве матрицы S_2. А именно, верна (см. [16])

Теорема 11. *Пусть матрица A не является T-резонансной. Пусть S_1 и S_2 – единственные решения уравнений (43) и (45) соответственно. Тогда замена (42), где $H_1(t)$ – матрица (44),*

$$H_2(t) = e^{At}\left[\int_0^t e^{-A\tau}(\tilde{P}_2(\tau) - S_2)e^{A\tau} d\tau\right] e^{-At}, \tag{46}$$

приводит уравнение (40) к виду (41).

Так же, как и в теореме 10, можно отметить, что матрицы S_1, S_2, $H_1(t)$ и $H_2(t)$ определяются не единственным способом. Также отметим, что по аналогичной схеме можно изучать и последующие приближения.

3.1.3. Случай неполупростого собственного значения. Таким образом, метод М. Розо позволяет свести вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения (30) к аналогичному вопросу для уравнения (31), который, в свою очередь, может быть исследован путем построения собственных значений постоянной матрицы $A+\varepsilon S_1+\varepsilon^2 S_2+\ldots+\varepsilon^k S_k$, зависящей от малого параметра ε. Указанная задача может быть решена методами теории возмущений линейных операторов [17, 18] (см. также следующий пункт). Отметим в этой связи, что методы теории возмущений особо эффективны в ситуации, когда чисто мнимые собственные значения матрицы A являются полупростыми. Если же матрица A имеет неполупростое чисто мнимое собственное значение, то ситуация существенно усложняется.

В этом подпункте приводится способ, позволяющий в методе М. Розо перейти от задачи с неполупростыми чисто мнимыми собственными значениями к равносильной задаче с полупростыми собственными значениями.

Ограничимся рассмотрением зависящего от малого параметра μ линейного уравнения

$$\frac{dx}{dt}=[A+\mu B(t)]x\,,\quad x\in C^N\,, \tag{47}$$

где A и $B(t)$ – квадратные матрицы, причем $B(t+T)\equiv B(t)$. В уравнении (47) матрицы A и $B(t)$ и параметр μ могут быть как вещественными, так и комплексными.

Пусть матрица A имеет неполупростое собственное значение λ_0 кратности 2. Пусть e и g – собственный и присоединенный векторы так, что выполнены равенства:

$$Ae=\lambda_0 e\,,\quad Ag=\lambda_0 g+e\,.$$

Сопряженная матрица A^* имеет неполупростое собственное значение $\overline{\lambda_0}$ кратности 2. Пусть e^* и g^* – собственный и присоединенный векторы матрицы A^*. Векторы e,g,e^*,g^* можно нормировать равенствами:

$$(e,e^*)=(g,g^*)=0\,,\ (e,g^*)=(g,e^*)=1\,.$$

Обозначим через E_0 спектральное (двумерное) подпространство оператора A, отвечающее собственному значению λ_0, а через $P_0:\ C^N\to E_0$ – оператор спектрального проектирования. Этот оператор может быть определен равенством

$$P_0x=(x,g^*)e+(x,e^*)g\,.$$

Положим $P^0=I-P_0$ и $E^0=P^0C^N$. Тогда E^0 является инвариантным для оператора A подпространством так, что $C^N=E_0\oplus E^0$, а P^0 – оператором спектрального проектирования на E^0.

Положим далее

$$Q_1x=(x,g^*)e\,,\quad Q_2x=(x,e^*)g\,,\quad Q_3x=(x,e^*)e\,,$$
$$Q_0(\varepsilon)=Q_1+\varepsilon Q_2\,,\quad Q(\varepsilon)=P^0+Q_0(\varepsilon)\,,$$

где ε – параметр (вещественный или комплексный). Несложно доказывается

Лемма 7. *Оператор $Q(\varepsilon):\ C^N\to C^N$ при $\varepsilon\neq 0$ обратим, при этом*

$$(Q(\varepsilon))^{-1}=P^0+Q_1+\frac{1}{\varepsilon}Q_2\,.$$

Пусть параметры μ и ε связаны равенством $\mu=\varepsilon^2$ так, что $\varepsilon=\varepsilon(\mu)$ – одна из ветвей двузначной функции $\varepsilon=\mu^{1/2}$. Тогда уравнение (47) примет вид

$$\frac{dx}{dt}=[A+\varepsilon^2 B(t)]x\,,\quad x\in C^N\,. \tag{48}$$

Произведем в уравнении (48) при $\varepsilon\neq 0$ замену:

$$x=Q(\varepsilon)y\ \text{ или }\ y=(Q(\varepsilon))^{-1}x\,. \tag{49}$$

Несложно убедиться в том, что замена (49) приводит уравнение (48) к виду:

$$\frac{dy}{dt} = [A_0 + \varepsilon B_1(t) + \varepsilon^2 B_2(t) + \varepsilon^3 B_3(t)]y\,, \quad y \in C^N\,, \tag{50}$$

где

$$A_0 = AP^0 + \lambda_0 P_0\,,$$
$$B_1(t) = Q_3 + Q_2 B(t)(P^0 + Q_1)\,,$$
$$B_2(t) = (P^0 + Q_1)B(t)(P^0 + Q_1) + Q_2 B(t) Q_2\,,$$
$$B_3(t) = (P^0 + Q_1)B(t)Q_2\,.$$

По построению операторы $A : E^0 \to E^0$ и $A_0 : E^0 \to E^0$ совпадают. Операторы $A : E_0 \to E_0$ и $A_0 : E_0 \to E_0$ отличаются тем, что для первого из них число λ_0 является неполупростым собственным значением кратности 2, а для второго – полупростым собственным значением кратности 2.

Таким образом, при $\varepsilon \neq 0$ уравнения (48) и (50) эквивалентны в том смысле, что их решения связаны равенством (49). В частности, при $\varepsilon \neq 0$ свойства устойчивости этих уравнений одинаковы. При этом в уравнении (50) собственное значение λ_0 матрицы A_0 уже является полупростым.

Пусть теперь $\operatorname{Re}\lambda_0 = 0$. Для уравнения (50) можно использовать схему М. Розо, в частности, перейти к уравнению вида

$$\frac{dz}{dt} = [A_0 + \varepsilon S + \varepsilon^2 B(t,\varepsilon)]y\,, \quad y \in C^N\,, \tag{51}$$

где S – постоянная матрица. Изучив вопрос об устойчивости полученного уравнения по постоянной матрице $A_0 + \varepsilon S$, получим и решение задачи об устойчивости уравнения (48) при $\varepsilon \neq 0$, а следовательно, и исходного уравнения (47) при $\mu \neq 0$.

3.2. Формулы теории возмущений. Пусть матрица $A(\mu)$ непрерывно или гладко зависит от параметра μ (скалярного или векторного), при этом матрица $A(\mu_0)$ имеет простое собственное значение λ_0. Тогда при каждом близком к μ_0 значении μ матрица $A(\mu)$ имеет единственное простое собственное значение $\lambda(\mu)$, близкое к λ_0. Требуется найти (аналитически или приближенно) это собственное значение. Такие задачи обычно решаются методами теории возмущений линейных операторов [17]. В этом пункте предлагаются формулы теории возмущений, полученных в [18] на основе метода функционализации параметра. Эти формулы используются при доказательстве некоторых утверждений настоящей работы. Будем предполагать, что матрица $A(\mu)$ является вещественной и гладко зависит от вещественного параметра μ. В приводимых ниже утверждениях используется обозначение $A' = A'(\mu_0)$.

Пусть сначала матрица $A(\mu)$ при $\mu = \mu_0$ имеет простое вещественное собственное значение λ_0. Пусть e_0 и g_0 – это собственные векторы матрицы $A_0 = A(\mu_0)$ и транспонированной матрицы A_0^*, отвечающие собственному значению λ_0. Векторы e_0 и g_0 будем считать нормированными в соответствии с равенствами: $\|e_0\| = 1$ и $(e_0, g_0) = 1$.

Теорема 12. *При μ близких к μ_0 матрица $A(\mu)$ имеет единственное близкое к λ_0 простое вещественное собственное значение $\lambda(\mu)$, представимое в виде*

$$\lambda(\mu) = \lambda_0 + \gamma(\mu - \mu_0) + O((\mu - \mu_0)^2). \tag{52}$$

где $\gamma = (A'e_0, g_0)$.

В частности, из формулы (52) следует равенство $\lambda'(\mu_0) = (A'e_0, g_0)$.

Пусть теперь матрица $A_0 = A(\mu_0)$ имеет пару простых собственных значений $\pm\omega_0 i$, где $\omega_0 > 0$. Тогда при малых $|\mu - \mu_0|$ матрица $A(\mu)$ имеет пару простых собственных значений $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$, где $\alpha(\mu_0) = 0$ и $\omega(\mu_0) = \omega_0$. Далее, существуют ненулевые векторы e, g, e^*, g^* такие, что выполняются равенства (7) и (8).

Теорема 13. *При μ близких к μ_0 вещественная и мнимая части собственного значения $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$ матрицы $A(\mu)$ представимы в виде*

$$\alpha(\mu) = \frac{\gamma_1}{2}(\mu - \mu_0) + O((\mu - \mu_0)^2)\,, \tag{53}$$

$$\omega(\mu) = \omega_0 - \frac{\gamma_2}{2}(\mu - \mu_0) + O((\mu - \mu_0)^2)\,, \tag{54}$$

где

$$\gamma_1 = (A'e, e^*) + (A'g, g^*)\,, \quad \gamma_2 = (A'e, g^*) - (A'g, e^*)\,.$$

4. Приложение: уравнение Матье

В качестве приложения рассмотрим уравнение Матье

$$u'' + (\alpha + \beta\cos 2t)u = 0\,, \tag{55}$$

где α и β – вещественные параметры. Исследованию различных задач, связанных с уравнением Матье, посвящено огромное количество работ (см., например, [6, 13]). Одной из основных здесь является задача исследования устойчивости решений и, в частности, задача построения областей устойчивости в плоскости параметров (α, β). Известно, что если $|\beta|$ мало и $\alpha < 0$, то решение $u = 0$ уравнения (55) неустойчиво; если же $\alpha \geqslant 0$, то, как правило, при малых $|\beta|$ решение $u = 0$ является устойчивым, за исключением окрестностей точек $(n^2, 0)$ в пространстве (α, β). А именно, области неустойчивости узкими языками вклиниваются в точки $(n^2, 0)$.

Приведем для иллюстрации схему построения одного из таких языков для $n = 1$. С этой целью будем рассматривать задачу исследования устойчивости решения $u = 0$ уравнения (55) при значениях α и β, близких к $\alpha_0 = 1$ и $\beta_0 = 0$ соответственно.

Стандартной заменой $z_1 = u$, $z_2 = u'$, приведем уравнение (55) к системе вида (10), а именно, к линейной системе

$$x' = A(\alpha, \beta, t)x\,, \quad x \in R^2\,, \tag{56}$$

где

$$A(\alpha, \beta, t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta\cos 2t) & 0 \end{bmatrix}. \tag{57}$$

В этом примере $T = \pi$ и выполняется равенство

$$A_0 = A(1, 0, t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{58}$$

Собственные значения этой матрицы равны $\pm i$, т.е. в рассматриваемом примере имеем $\omega_0 = 1$. Наконец, так как $\omega_0 = \dfrac{\pi k_0}{T}$ при $k_0 = 1$, то для уравнения (56) имеет место случай 3^0 при $\alpha_0 = 1$ и $\beta_0 = 0$.

Кривую Υ_0, ограничивающую области устойчивости и неустойчивости уравнения (56) и проходящую через точку $(1, 0)$ в плоскости параметров (α, β), будем искать в виде функции (12):

$$\beta = \beta_1\delta + \beta_2\delta^2 + \eta(\delta)\,, \tag{59}$$

где $\delta = \alpha - 1$, а β_1 и β_2 – коэффициенты, требующие определения.

4.0.1. Предварительные преобразования. Вычислим сначала коэффициент β_1 в соответствии с приведенной выше схемой. Уравнение (14) в нашем примере имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + \delta A_1(\beta_1, t) + \delta^2 A_2(\beta_2, t) + A_3(t, \delta)]x\,, \quad x \in R^2\,, \tag{60}$$

где A_0 – матрица (58),

$$A_1(\beta_1, t) = -(1 + \beta_1 \cos 2t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2(\beta_2, t) = -\frac{1}{2}\beta_2 \cos 2t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Прежде, чем приводить уравнение (60) к виду (16), для удобства вычислений приведем матрицу A_0 к диагональному виду, взяв в качестве базиса в C^2 ее собственные векторы. Другими словами, в (60) произведем замену $x = Qz$, где $Q = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$. Тогда уравнение (60) примет вид

$$\frac{dz}{dt} = [A_{00} + \delta A_{10}(\beta_1, t) + \delta^2 A_{20}(\beta_2, t) + A_{30}(t, \delta)]z\,, \quad z \in C^2\,, \tag{61}$$

где

$$A_{00} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad A_{10}(\beta_1, t) = -\frac{1}{2}(1 + \beta_1 \cos 2t) \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix},$$

$$A_{20}(\beta_2, t) = -\frac{1}{4}\beta_2 \cos 2t \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}.$$

Приведем теперь полученное уравнение (61) к виду (16). Для этого надо в (61) произвести замену $y = e^{Q_1 t} z$, в котором оператор Q_1 определяется равенством $Q_1 x = -2\omega_0 i(x, e_1^*)e_1$. В нашем случае имеем $e_1 = e_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и, следовательно, матрица оператора Q_1 определяется равенством $Q_1 = \begin{bmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Тогда замена $y = e^{Q_1 t} z$ приведет уравнение (61) к виду (16):

$$\frac{dy}{dt} = [\tilde{A} + \delta \tilde{A}_1(\beta_1, t) + \delta^2 \tilde{A}_2(\beta_2, t) + \tilde{A}_3(t, \delta)]y\,, \quad y \in C^2\,,$$

в котором

$$\tilde{A} = -i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_1(\beta_1, t) = -\frac{1}{2}(1 + \beta_1 \cos 2t) \begin{bmatrix} -i & e^{-2it} \\ e^{2it} & i \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_2(\beta_2, t) = -\frac{1}{2}\beta_2 \cos 2t \begin{bmatrix} -i & e^{-2it} \\ e^{2it} & i \end{bmatrix}.$$

4.0.2. Вычисление коэффициента β_1. Перейдем, наконец, к рассмотрению матричного уравнения (17). Так как $\tilde{A} = -iI$, где I – единичная матрица, то уравнение (17) здесь имеет вид

$$\int_0^\pi S\,dt = \int_0^\pi \tilde{A}_1(\xi, t)\,dt\,,$$

а его решение – это матрица:

$$S(\xi) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2i & -\xi \\ -\xi & -2i \end{bmatrix}. \tag{62}$$

Так как собственные значения матрицы $S(\xi)$ являются решениями уравнения $\lambda^2 = \dfrac{\xi^2 - 4}{16}$, то условия теоремы 8 выполнены при $\xi = \pm 2$. Следовательно, для коэффициента β_1 в представлении функции (59) получаем два возможных значения: $\beta_1 = 2$ и $\beta_1 = -2$. Эти значения определяют углы $\varphi = \pm \operatorname{arctg} 2$ наклона касательных к границам областей устойчивости и неустойчивости уравнения Матье (55) в точке $(1,0)$ в пространстве параметров (α,β).

4.0.3. Вычисление коэффициента β_2. Вычислим теперь коэффициент β_2 в представлении функции (59). Пусть для определенности $\beta_1 = 2$. Положим

$$S_1 = S(2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}. \tag{63}$$

Тогда в системе (23) имеем

$$P_1(t) = \tilde{A}_1(2,t) = -\frac{1}{2}(1+2\cos 2t)\begin{bmatrix} -i & e^{-2it} \\ e^{2it} & i \end{bmatrix},$$

$$P_2(\nu,t) = \tilde{A}_2(\nu,t) = -\frac{1}{2}\nu\cos 2t\begin{bmatrix} -i & e^{-2it} \\ e^{2it} & i \end{bmatrix}.$$

В силу силу того, что $\tilde{A} = -iI$, матрица (24) равна:

$$H_1(t) = \int_0^t (P_1(\tau) - S_1)\,d\tau = \tag{64}$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -4i\sin 2t & 2ie^{-2it} + ie^{-4it} - 3i \\ -2ie^{2it} - ie^{4it} + 3i & 4i\sin 2t \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица (25) равна:

$$F(\nu,t) = P_2(\nu,t) - H_1(t)P_1(t) + S_1H_1(t) = \begin{bmatrix} f_{11}(\nu,t) & f_{12}(\nu,t) \\ f_{21}(\nu,t) & f_{22}(\nu,t) \end{bmatrix},$$

где

$$f_{11}(\nu,t) = \frac{1}{2}\nu i\cos 2t - \frac{1}{16}(-2i + 4i\cos 2t - 2i\cos^2 2t + 2\sin 2t - \sin 4t),$$

$$f_{12}(\nu,t) = -\frac{1}{2}\nu e^{-2it}\cos 2t - \frac{1}{16}(2 - 2e^{-4it} - 2ie^{-2it}\sin 4t),$$

$$f_{21}(\nu,t) = f_{12}(\nu,-t),$$

$$f_{22}(\nu,t) = -\frac{1}{2}\nu i\cos 2t - \frac{1}{16}(2i - 4i\cos 2t + 2i\cos^2 2t + 2\sin 2t - \sin 4t).$$

Наконец, решение матричного уравнения (26) имеет вид:

$$Z(\nu) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi F(\nu,t)\,dt = \begin{bmatrix} \frac{3}{16}i & -\frac{1}{4}\nu - \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4}\nu - \frac{1}{8} & -\frac{3}{16}i \end{bmatrix}. \tag{65}$$

Таким образом, согласно методу М. Розо вопрос об устойчивости системы (23) равносилен вопросу об устойчивости системы

$$\frac{dy}{dt} = [-iI + \delta S_1 + \delta^2 Z(\nu) + \tilde{A}_3(t,\delta)]y, \quad y \in C^2. \tag{66}$$

Отметим, что так как определенная равенством (63) матрица S_1 имеет неполупростое собственное значение 0 кратности два, то имеет место указанный в (28) случай с).

В системе (66) произведем невырожденную периодическую замену $x = e^{it}y$; тогда получим систему

$$\frac{dx}{dt} = [\delta S_1 + \delta^2 Z(\nu) + \tilde{A}_3(t,\delta)]x, \quad x \in C^2. \tag{67}$$

Для удобства вычислений приведем матрицу S_1 к каноническому виду, взяв в качестве базиса в C^2 ее собственный и присоединенный векторы. Другими словами, в (67) произведем замену $x = Qz$, где $Q = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{bmatrix}$. Тогда придем к системе:

$$\frac{dz}{dt} = [\delta\tilde{S}_1 + \delta^2\tilde{Z} + Q^{-1}\tilde{A}_3(t,\delta)Q]z\,, \quad z \in C^2, \tag{68}$$

где $\tilde{S}_1 = Q^{-1}S_1Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad \tilde{Z} = Q^{-1}ZQ = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4}\nu + \frac{5}{16} \\ \frac{1}{4}\nu - \frac{1}{16} & 0 \end{bmatrix}$.

По указанной в п. 3.1.3 схеме положим

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; e^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; g^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_1x = (x, g^*)e\,, \quad Q_2x = (x, e^*)g\,, \quad Q_3x = (x, e^*)e\,, \quad Q_0(\varepsilon) = Q_1 + \varepsilon Q_2\,,$$

где ε – малый параметр. При $\varepsilon \neq 0$ оператор $Q_0(\varepsilon)$ обратим, при этом

$$(Q_0(\varepsilon))^{-1} = Q_1 + \frac{1}{\varepsilon}Q_2\,.$$

Так как $\beta_1 = 2$, то не ограничивая общности в (59) можно считать, что $\delta > 0$. Перейдем от δ к новому малому вещественному параметру ε, связанному с δ равенством $\varepsilon = \sqrt{\delta}$. При этом произведем в уравнении (68) при $\varepsilon > 0$ замену $z = Q_0(\varepsilon)x$. Тогда получим уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = [\varepsilon^3\widehat{S}_1 + \varepsilon^5\widehat{Z} + (Q_0(\varepsilon))^{-1}Q^{-1}\tilde{A}_3(t,\varepsilon)QQ_0(\varepsilon)]x\,, \quad x \in C^2\,,$$

где

$$\widehat{S}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4}\nu - \frac{1}{16} & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{Z} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4}\nu + \frac{5}{16} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица $\widehat{S}_1$ устойчива при $\nu < 1/4$ и неустойчива при $\nu > 1/4$. Следовательно, в соответствии с аналогом теоремы 7 можно положить $\nu^* = \dfrac{1}{4}$.

Аналогично, если в представлении функции (59) взять $\beta_1 = -2$, то получим $\nu^* = -\dfrac{1}{4}$.

Таким образом, искомые границы областей устойчивости описываются функциями (59) вида:

$$\beta = 2(\alpha - 1) + \frac{1}{4}(\alpha - 1)^2 + \eta_1(\alpha - 1)\,,$$

$$\beta = -2(\alpha - 1) - \frac{1}{4}(\alpha - 1)^2 + \eta_2(\alpha - 1)\,,$$

где функции $\eta_j(\delta)$ удовлетворяют соотношениям: $\eta_j(\delta) = o(\delta^2)$ при $\delta \to 0$. На Рис. 2 изображены соответствующие кривые, ограничивающие области устойчивости и неустойчивости уравнения Матье (области устойчивости заштрихованы).

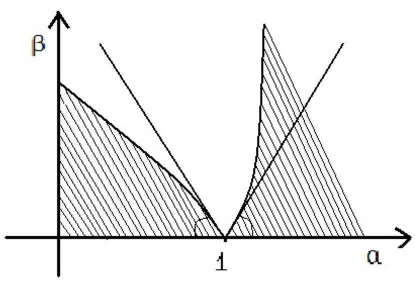

Рис. 2. Области устойчивости уравнения Матье

5. Доказательства основных утверждений

5.1. Доказательство леммы 1. Рассмотрим матричные задачи Коши:

$$\begin{cases} X' = A(t)X\,, \\ X(0) = I\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} Y' = B(t)Y\,, \\ Y(0) = I\,, \end{cases}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – матрицы из (3) и (4). Пусть $X(t)$ и $Y(t)$ – решения этих задач. Тогда матрицы $X(T)$ и $Y(T)$ являются матрицами монодромии для линейных систем $x' = A(t)x$ и $y' = B(t)y$, т.е. собственные значения этих матриц (мультипликаторы) определяют топологические типы нулевых точек равновесия систем (3) и (4). Лемма 1 будет доказана, если показать, что матрицы $X(T)$ и $Y(T)$ подобны.

С этой целью рассмотрим еще одну задачу Коши

$$\left.\begin{aligned} Z' = B(t)Z\,, \\ Z(0) = U_0\,, \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

где $U_0 = U(0)$, а $U(t)$ – матрица из формулы $y = U(t)x$, осуществляющей переход от (3) к (4). Пусть $Z(t)$ – решение задачи (69). Несложно видеть, что матрицы $X(t)$ и $Z(t)$ связаны равенством $Z(t) = U(t)X(t)$, а матрицы $Y(t)$ и $Z(t)$ – равенством $Y(t) = Z(t)U_0^{-1}$. Отсюда получим равенство $Y(T) = U_0X(T)U_0^{-1}$, что и требовалось доказать.

5.2. Доказательство теоремы 1. Уравнение (5) имеет вид (32). Так как матрица A_0 является вещественной и ее топологический тип равен $(p_-, 1, p_+)$, то матрица A_0 не является T-резонансной. Поэтому можно применить схему М. Розо, а именно, для уравнения (5) применима теорема 9. Другими словами, существует замена $y = (I - \varepsilon H(t))x$ с невырожденной и T-периодической матрицей $H(t)$, приводящая (5) к виду (33):

$$\frac{dy}{dt} = [A_0 + \mu S_0 + \mu^2\tilde{O}(\mu, t)]y + \tilde{a}(y, t, \mu), \quad y \in C^N, \tag{70}$$

где матрица $S = S_0$ – это единственное решение уравнения

$$\int_0^T e^{-A_0\tau}Se^{A_0\tau}d\tau = \int_0^T e^{-A_0\tau}A_1(\tau)e^{A_0\tau}d\tau. \tag{71}$$

Согласно теореме 12 матрица $\tilde{A}(\mu) = A_0 + \mu S_0$ при малых $|\mu|$ имеет единственное собственное значение, близкое к 0, при этом оно представимо в виде:

$$\lambda(\mu) = (S_0e_0, g_0)\mu + O(\mu^2)\,; \tag{72}$$

здесь e_0 и g_0 – это собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^*, отвечающие собственному значению 0.

Полагая в (71) $S = S_0$ и умножая обе части полученного равенства сначала на вектор e_0, а затем скалярно на вектор g_0, получим равенство:

$$(Se_0, g_0) = \frac{1}{T}\int_0^T (A_1(\tau)e_0, g_0)d\tau = \frac{1}{T}\lambda_1\,, \tag{73}$$

где λ_1 – число (6).

В силу леммы 1 при малых $|\mu|$ топологические типы нулевых точек равновесия систем (5) и (70) одинаковы. При малых $|\mu|$ топологический тип нулевой точки равновесия системы (70) определяется свойствами матрицы $\tilde{A}(\mu) = A_0 + \mu S_0$. Но по условиям теоремы топологический тип матрицы A_0 равен $(p_-, 1, p_+)$. Поэтому из равенств (72) и (73) следует, что при малых $|\mu|$ топологический тип нулевой точки равновесия системы (70) равен $(1 + p_-, 0, p_+)$, если $\mu\lambda_1 < 0$; он равен $(p_-, 0, 1 + p_+)$, если $\mu\lambda_1 > 0$.

Теорема 1 доказана.

5.3. Доказательство теоремы 3. Доказательство теоремы 3 производится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1. При этом используются асимптотические формулы (53) и (54) из теоремы 13.

5.4. Доказательство леммы 2. С доказательством существования и единственности решения $S(\xi)$ уравнения (17) можно познакомиться в [16]. А тот факт, что функция $S(\xi)$ является гладкой, следует из предположения, что в уравнении (10) элементы матрицы $A(\alpha,\beta,t)$ дважды непрерывно дифференцируемо зависят от α и β.

5.5. Доказательство теорем 5 и 6. Ограничимся приведением схемы доказательства теоремы 6. Общее утверждение (т.е. теорема 5) доказывается по той же схеме, но более громоздко, так как требует рассмотрения различных случаев (один из которых содержит теорема 6). Пусть также для простоты уравнение (10) является двумерным, т.е. $N=2$.

Рассмотрим соответствующую (10) линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(\alpha,\beta,t)x\,,\quad x\in R^2\,, \tag{74}$$

свойства показателей Флоке которой определяют области гиперболичности нулевого решения уравнения (10) и их границы. Напомним о предположении, что матрица $A_0 = A(\alpha_0,\beta_0,t)$ не зависит от t, причем матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = \dfrac{\pi k_0}{T}$ при некотором натуральном k_0.

В силу теории возмущений линейных операторов (см., например, [17]) при близких к (α_0,β_0) значениях (α,β) система (74) имеет два показателя Флоке $\lambda_1(\alpha,\beta)$ и $\lambda_2(\alpha,\beta)$, при этом их вещественные части определяются однозначно. Положим $u_j(\alpha,\beta) = \mathrm{Re}\,\lambda_j(\alpha,\beta)$ $(j=1,2)$; тогда $u_j(\alpha_0,\beta_0)=0$.

Используя условие $\lambda'(\xi^*)\neq 0$ теоремы 6, а также тот факт, что в силу леммы 1 проведенные в п. 2.3 невырожденные T-периодические преобразования уравнения (10) не изменяют топологический тип его нулевого решения, можно показать, что для одной из двух функций $u_j(\alpha,\beta)$ выполняется равенство $u'_{j\beta}(\alpha_0,\beta_0) = \lambda'(\xi^*)$. Пусть для определенности это равенство имеет место для $j=1$.

Рассмотрим уравнение

$$u_1(\alpha,\beta) = 0\,. \tag{75}$$

В силу теоремы о неявной функции уравнение (75) определяет единственную функцию $\beta = f(\alpha)$, определенную в некотором интервале $(\alpha_0-\delta_0,\alpha_0+\delta_0)$ и такую, что $f(\alpha_0)=\beta_0$. При этом функция $\beta=f(\alpha)$ является непрерывно дифференцируемой. Прямым подсчетом можно убедиться в том, что $f'(\alpha_0)=\xi^*$. Кривая Υ, описываемая функцией $\beta=f(\alpha)$, и является искомой границей области гиперболичности нулевого решения уравнения (10).

Теорема 6 доказана.

5.6. Доказательство теоремы 7. Доказательство теоремы 7 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 6.

5.7. Доказательство теоремы 8. Полагая для простоты обозначений $\alpha_0=0$ и $\beta_0=0$, перепишем уравнение (29) в виде

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + \alpha A_1(t) + \beta B_1(t) + B_3(\alpha,\beta,t)]x\,,\quad x\in R^2\,, \tag{76}$$

где матрица $B_3(\alpha,\beta,t)$ удовлетворяет соотношению: $\max\limits_t \|B_3(\alpha,\beta,t)\| = O(\alpha^2+\beta^2)$ при $(\alpha,\beta)\to(0,0)$.

Производя преобразования, аналогичные преобразованиям уравнения (10), приведем линейную систему (76) к виду (16):

$$\frac{dy}{dt} = [\tilde{A} + \alpha\tilde{A}_1(t) + \beta\tilde{B}_1(t) + \tilde{B}_3(\alpha, \beta, t)]y\,,$$

которое после замены $z = e^{i\omega_0 t}y$ сводится к виду

$$\frac{dz}{dt} = [\alpha\tilde{A}_1(t) + \beta\tilde{B}_1(t) + \tilde{B}_3(\alpha, \beta, t)]z\,. \tag{77}$$

Обозначим через $X(\alpha, \beta)$ матрицу монодромии системы (77). Тогда $X(0, 0) = I$, где I – единичная матрица. Граница области устойчивости уравнения (29) определяется уравнением

$$\det(X(\alpha, \beta) - I) = 0\,. \tag{78}$$

Для завершения доказательства теоремы 8 остается заметить, что в ее условиях уравнение (78) имеет решение вида $\beta = \xi^*\alpha + O(\alpha^2)$, которое и определяет границу устойчивости уравнения (76).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей.* Москва-Ижевск: Ин-т компьют. исслед. 2002. 560 с.
2. Арнольд В. И. *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. 2000. 400 с.
3. Каток А. Б., Хасселблат Б. *Введение в теорию динамических систем.* М.: МЦНМО. 2005. 464 с.
4. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. *Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2.* - М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2009. 548 с.
5. Chiang H. D., Alberto L. F. C. *Stability regions of nonlinear dynamical systems : theory, estimation, and applications.* Cambridge University Press. 2015. 484 p.
6. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука. 1967. 472 с.
7. Якубович В. А., Старжинский В. М. *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.* М.: Наука. 1972. 720 с.
8. Loccufier M., Noldus E. *A new trajectory reversing method for estimating stability regions of autonomous nonlinear systems.* // Nonlinear Dynamics. V. 21. 2000. P. 265–288.
9. Chiang H. D., Hirsch M. W., Wu F. F. *Stability region of nonlinear autonomous dynamical systems.* // Institute of Electrical and Electronics Engineers Trans. on Automatic Control, 33, № 1. 1988. P. 16–27.
10. Amaral F. M., Alberto L. F. C. *Stability Boundary Characterization of Nonlinear Autonomous Dynamical Systems in the Presence of a Saddle-Node Equilibrium Point.* // Tend. Mat. Apl. Comput. V. 13. № 2. 2012. P. 143—154.
11. Красносельский М. А., Кузнецов Н. А., Юмагулов М. Г. *Функционализация параметра и асимптотика циклов в бифуркации Хопфа.* // Автоматика и телемеханика. 1996. № 11. С. 22–28.
12. Красносельский М. А., Кузнецов Н. А., Юмагулов М. Г. *Операторный метод анализа устойчивости циклов при бифуркации Хопфа.* // Автоматика и телемеханика. 1996. № 12. С. 24–30.
13. Чезари Л. *Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* - М.: Мир, 1964. 477 с.
14. Малкин И. Г. *Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний.* // М.: Едиториал УРСС. 2004. 248 с.
15. Маркеев А. П. *Точки либраций в небесной механике и космодинамике.* М.: Наука. 1978. 312 с.
16. Розо М. *Нелинейные колебания и теория устойчивости.* М.: Наука. 1971. 288 с.

17. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир. 1975. 740 с.
18. Красносельский М. А., Юмагулов М. Г. *Метод функционализации параметра в проблеме собственных значений.* // ДАН России. Том 365. № 2. 1999. С. 162–164.
19. Kuznetsov Yu. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory.* N.Y.: Springer. 2004.

Лилия Сунагатовна Ибрагимова,
Башкирский государственный аграрный университет,
ул. 50-летия Октября, 34,
450001, г. Уфа, Россия
E-mail: lilibr@mail.ru

Ильмира Жаватовна Мустафина,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: fanina84@bk.ru

Марат Гаязович Юмагулов,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: yum_mg@mail.ru