ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 2 (2016). С. 22-38.

УДК 517.9

ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТОКСА

И.И. ГОЛИЧЕВ, Т.Р. ШАРИПОВ, Н.И. ЛУЧНИКОВА

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются итерационные методы градиентного типа для решения задачи Стокса в ограниченных областях, полученные путем сведения ее к задачам вариационного типа, в которых давление выступает в качестве управления. В дифференциальной форме предложенные методы наиболее близки к алгоритмам семейства Удзавы. Построены согласованные конечно-разностные алгоритмы и представлена их аппробация на последовательности сеток при решении двумерной задачи с известным аналитическим решением.

Ключевые слова: задача Стокса, оптимальное управление, градиентный метод, конечно-разностная схема.

Mathematics Subjects Classifications: 49M20, 35Q30, 93C05

1. Введение. В ограниченной области $\Omega \subset R^n$ $(n = 2, 3)$ с гладкой границей $S \in C^2$ (т.е. дважды непрерывно дифференцируемой) рассматривается задача Стокса

$$-\nu\Delta\mathbf{v} = \mathbf{f} - \nabla p, \ \ \mathbf{v}|_S = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{2}$$

$$(p, 1)_{L_2(\Omega)} = 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{f} = (f^{(1)}, \dots, f^{(n)}) \in \boldsymbol{L}_2(\Omega) = (L_2(\Omega))^n$, $\mathbf{v} = (v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$ – вектор скорости, p – давление, $\nu > 0$ – коэффициент кинематической вязкости.

Согласно [1, гл. III, §5, теорема 2], в данных условиях задача (1)–(3) имеет единственное сильное решение $\mathbf{v} \in \boldsymbol{H}^2(\Omega) = (H^2(\Omega))^n$, $\nabla p \in \boldsymbol{L}_2(\Omega)$. Здесь и далее используются стандартные обозначения для пространств Соболева $H^l(\Omega) \equiv W_2^l(\Omega)$, $l = 1, 2\dots$

Будем рассматривать задачу (1) - (3) как обратную задачу к задаче (1), (3), в которой неизвестен градиент давления ∇p, но задано дополнительное условие (2). Такую задачу можно сформулировать как эквивалентную исходной задачи оптимального управления:

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\|\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{u})\|^2_{L_2(\Omega)} \to \inf, \ \mathbf{u} \in G(\Omega),$$

где $G(\Omega) = \left\{\mathbf{u} \in \boldsymbol{L}_2(\Omega) : \mathbf{u} = \nabla p, \ p \in H^1(\Omega), \ (p, 1)_{L_2(\Omega)} = 0\right\}$ – градиентная составляющая в ортогональном разложении $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$, а $\mathbf{v}(\mathbf{u})$ – решение системы

$$-\nu\Delta\mathbf{v}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} - \mathbf{u}, \ \ \mathbf{v}(\mathbf{u})|_S = 0. \tag{4}$$

Тот факт, что решение многих задач математической физики можно свести к решению экстремальных задач, хорошо известен и широко используется. Из известных методов решения стационарной задачи Стокса в естественных переменных, имеющих в своей основе вариационные методыб отметим, прежде всего, методы Эрроу–Гурвица и Удзавы [2], дифференциальная форма которых, основанная на вариационной формулировке исходной задачи и теории двойственности [3], позволяет отделить процесс нахождения неизвестных, решая тем самым проблему отсутствия уравнения на давление. Рассматриваемый далее подход идейно близок методам из [4], [5].

I.I. Golichev, T.R. Sharipov, N.I. Luchnikova, Gradient methods for solving Stokes problem.

Поступила 9 декабря 2015 г.

Наряду с задачей минимизации функционала $J(\mathbf{u})$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ также будем рассматривать задачи минимизации $J(\nabla u)$ в пространствах $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$, в которых за управление u берется само давление p. Поскольку градиенты функционала в этих случаях имеют различный вид, нам удобно их обозначить в соответствии с рассматриваемыми в работе задачами:

Задача I. Найти минимум функционала $J_0(\mathbf{u}) = \|\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{u})\|^2_{L_2(\Omega)}/2$ на множестве $U_0 = G(\Omega)$, где $\mathbf{v}(\mathbf{u})$ – решение задачи (4).

Задача II. Найти минимум функционала $J_1(u) = \|\operatorname{div}\mathbf{v}(u)\|^2_{L_2(\Omega)}/2$ на множестве $U_1 = \left\{u \in H^1(\Omega) : (u,1)_{L_2(\Omega)} = 0\right\}$, где $\mathbf{v}(u)$ – решение задачи

$$-\nu\Delta\mathbf{v}(u) = \mathbf{f} - \nabla u,\ \ \mathbf{v}(u)|_S = 0. \tag{5}$$

Задача III. Найти минимум функционала $J_2(u) = \|\operatorname{div}\mathbf{v}(u)\|^2_{L_2(\Omega)}/2$ на множестве $U_2 = \left\{u \in L_2(\Omega) : (u,1)_{L_2(\Omega)} = 0\right\}$, где $\mathbf{v}(u)$ – обобщенное решение задачи (5).

Решение задач I-III будем искать методом проекции градиента [6], [7]:

$$u_{k+1} = P_{U_l}\left(u_k - \alpha_k J_l'(u_k)\right),\ l = 0,\ 1,\ 2, \tag{6}$$

где P_{U_l} – оператор проектирования на множество U_l, а $J_l'(u_k)$ – градиент функционала $J_l(u_k)$ в точке u_k[1].

В дальнейшем изложении будет показано, что

$$J_0'(\mathbf{u}) = \mathbf{w}(\mathbf{u}), \tag{7}$$

$$J_1'(u) = \rho(\mathbf{w}(u)), \tag{8}$$

$$J_2'(u) = -\operatorname{div}\mathbf{w}(u), \tag{9}$$

где $\mathbf{w}(\cdot)$ – сопряженное состояние системы (4), определяемое для всех задач как решение задачи

$$-\nu\Delta\mathbf{w}(\cdot) = \nabla\operatorname{div}\mathbf{v}(\cdot),\ \ \mathbf{w}(\cdot)|_S = 0, \tag{10}$$

а $\rho(\mathbf{w})$ определяется из ортогонального разложения вектора $\mathbf{w}(u) = \nabla\rho(\mathbf{w}) + \vec{\varphi}$ на градиентную и соленоидальную составляющие.

Для всех рассматриваемых задач найдем операторы проектирования и покажем, что задачи I и II эквивалентны.

Отметим, что в [4] рассмотрен аналог задачи II для обобщенной задачи Стокса, а для построения итерационного процесса использована общая теория сопряженных операторных уравнений. Тестовый расчет из этой работы используется нами для верификации расчета по формуле (6). К близким по структуре дифференциальных итерационных процессов настоящей работы приводит также метод неполного и полного расщепления граничных условий [5], где применяется теория граничных операторов Пуанкаре–Стеклова.

Далее везде через $\mathring{\mathbf{v}}(\mathbf{u})$ обозначается решение задачи (4) при $\mathbf{f} = 0$, а через $\mathring{\mathbf{v}}(u)$ – решение задачи (5) при $\mathbf{f} = 0$.

2. Дифференцируемость функционала $J_0(\mathbf{u})$. Обозначим через L оператор на множестве $\boldsymbol{H}^2_0(\Omega) = \left\{\mathbf{z} \in \boldsymbol{H}^2(\Omega) : \mathbf{z}|_S = 0\right\}$ равенством $L(\mathbf{z}) = -\nu\Delta\mathbf{z}$. Заметим, что область значений оператора L совпадает со всем пространством $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$. Действительно, пусть $\mathbf{f}$ – произвольный элемент из $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$; тогда задача

$$L(\mathbf{z}) = \mathbf{f} \tag{11}$$

имеет, согласно [8, гл. II §7, теорема 7.1], единственное решение из $\boldsymbol{H}^2_0(\Omega)$.

Используя второе энергетическое неравенство [8, гл. II, §6, формула (6.29)][2]

$$\|\mathbf{z}\|_{\boldsymbol{H}^2(\Omega)} \le c_1\|\Delta\mathbf{z}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}, \tag{12}$$

[1] В целях обобщенной записи мы не выделяем жирными шрифтом вектор u для задачи I.

[2] Если область Ω выпуклая, то константа c_1 равна единице.

с учетом очевидного для задачи (11) равенства $\|\Delta \mathbf{z}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} = \nu^{-1}\|\mathbf{f}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}$, получаем используемую далее оценку

$$\|\mathbf{z}\|_{\boldsymbol{H}^2(\Omega)} \le c_1\nu^{-1}\|\mathbf{f}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}. \tag{13}$$

Пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{h}$ – произвольные элементы из U_0. Учитывая определение оператора L, нетрудно видеть, что $\mathbf{v}(\mathbf{u}+\mathbf{h}) - \mathbf{v}(\mathbf{u}) = \mathring{\mathbf{v}}(\mathbf{h})$, где $\mathring{\mathbf{v}}(\mathbf{h}) = L^{-1}(-\mathbf{h})$. Тем самым,

$$J_0(\mathbf{u}+\mathbf{h}) - J_0(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\|\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{u}+\mathbf{h})\|^2_{L_2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{u})\|^2_{L_2(\Omega)} =$$

$$= (\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{u}), \operatorname{div}\mathring{\mathbf{v}}(\mathbf{h}))_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\operatorname{div}\mathring{\mathbf{v}}(\mathbf{h})\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{14}$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части последнего равенства с использованием интегрирования по частям, условия $\mathring{\mathbf{v}}(\mathbf{h})|_S = 0$ и самосопряженности оператора L:

$$(\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{u}), \operatorname{div}\mathring{\mathbf{v}}(\mathbf{h}))_{L_2(\Omega)} = -(\nabla\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{u}), L^{-1}(-\mathbf{h}))_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} = (L^{-1}\nabla\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{u}), \mathbf{h})_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}.$$

Таким образом, с учетом обозначения $\mathbf{w}(\mathbf{u}) = L^{-1}\nabla\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{u})$ тождество (14) принимает вид

$$J_0(\mathbf{u}+\mathbf{h}) - J_0(\mathbf{u}) = (\mathbf{w}(\mathbf{u}), \mathbf{h})_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\operatorname{div}\mathring{\mathbf{v}}(\mathbf{h})\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{15}$$

Умножая левую и правую части (11) на $\mathbf{z}$ и интегрируя по частям, получаем соотношение

$$\nu\|\nabla\mathbf{z}\|^2_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \le \|\mathbf{f}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}\|\mathbf{z}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)},$$

откуда, и из неравенства Фридрихса

$$\|\mathbf{z}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \le c_0\|\nabla\mathbf{z}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}, \tag{16}$$

имеем:

$$\|\nabla\mathbf{z}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \le c_0\nu^{-1}\|\mathbf{f}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}. \tag{17}$$

Из (17) и легко проверяемого неравенства

$$\|\operatorname{div}\mathbf{z}\|_{L_2(\Omega)} \le \sqrt{n}\|\nabla\mathbf{z}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \tag{18}$$

следует, что

$$\|\operatorname{div}\mathring{\mathbf{v}}(\mathbf{h})\|_{L_2(\Omega)} \le \sqrt{n}\, c_0\, \nu^{-1}\|\mathbf{h}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}, \tag{19}$$

поэтому главная линейная часть приращения функционала $J_0(\mathbf{u})$ определяется выражением $(\mathbf{w}(\mathbf{u}), \mathbf{h})_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}$.

Покажем, что градиент $J_0'(\mathbf{u})$ удовлетворяет условию Липшица. Пусть $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)} \in U_0$, а $\mathbf{w}^{(1)}$, $\mathbf{w}^{(2)}$ – соответствующие им решения задачи (10). Заметим, что

$$L(\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(2)}) = \nabla\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{u}^{(1)}) - \nabla\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{u}^{(2)}) = \nabla\operatorname{div}\mathring{\mathbf{v}}(\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}),$$

поэтому из неравенств (16), (17) получаем

$$\|\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \le c_0^2\,\nu^{-1}\|\nabla\operatorname{div}\mathring{\mathbf{v}}(\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)})\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}. \tag{20}$$

Учитывая то, что $\mathring{\mathbf{v}}(\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)})$ является решением уравнения (11) с правой частью $\mathbf{f} = -(\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)})$, для которого справедлива оценка (13), из (20) получаем:

$$\|J_0'(\mathbf{u}^{(1)}) - J_0'(\mathbf{u}^{(2)})\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} = \|\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \le \sqrt{n}\, c_0^2\,\nu^{-1}\|\mathring{\mathbf{v}}(\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)})\|_{\boldsymbol{H}^2(\Omega)} \le$$

$$\le \sqrt{n}\, c_0^2\, c_1\,\nu^{-2}\|\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}. \tag{21}$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}_2(\Omega)$, *где* Ω *– ограниченная область с границей* $S \in C^2$*; тогда функционал* $J_0(\boldsymbol{u})$ *дифференцируем по Фреше на* U_0*, его градиент определяется по формуле* (7) *и удовлетворяет условию Липшица с константой* $L_0 = \sqrt{n}\, c_0^2\, c_1\,\nu^{-2}$*, где* c_0 *и* c_1 *– константы из неравенств* (16), (12).

3. Дифференцируемость функционала $J_1(u)$ На множестве U_1 введем метрику, эквивалентную метрике пространства $H^1(\Omega)$, по скалярному произведению $(a,b)_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla a, \nabla b)_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}$.

Пусть u и h – произвольные элементы из U_1. Аналогично (15) легко видеть, что

$$J_1(u+h) - J_1(u) = (\mathbf{w}(u), \nabla h)_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\operatorname{div}\mathring{\mathbf{v}}(h)\|^2_{L_2(\Omega)},\ \mathring{\mathbf{v}}(h) = L^{-1}(-\nabla h), \tag{22}$$

причем, с учетом разложения вектора $\mathbf{w}(u) = P_{G(\Omega)}\mathbf{w}(u) + \vec{\varphi}$ на градиентную и соленоидальную ($\operatorname{div}\vec{\varphi} = 0$) составляющие,

$$(\mathbf{w}(u), \nabla h)_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} = (P_{G(\Omega)}\mathbf{w}(u), \nabla h)_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}. \tag{23}$$

Далее известно [9], что $\forall \mathbf{d} \in \boldsymbol{L}_2(\Omega)$ $P_{G(\Omega)}\mathbf{d} = \nabla\rho$, где ρ есть решение задачи Неймана

$$\Delta\rho = \operatorname{div}\mathbf{d},\ \left.\frac{\partial\rho}{\partial\vec{n}}\right|_S = (\mathbf{d}\cdot\vec{n})|_S. \tag{24}$$

Из (22), (23), (24) следует:

$$J_1(u+h) - J_1(u) = (\rho(\mathbf{w}), h)_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\operatorname{div}\mathring{\mathbf{v}}(h)\|^2_{L_2(\Omega)},$$

где $\rho(\mathbf{w})$ – решение задачи

$$\Delta\rho(\mathbf{w}) = \operatorname{div}\mathbf{w}(u),\ \left.\frac{\partial\rho(\mathbf{w})}{\partial\vec{n}}\right|_S = (\mathbf{w}(u)\cdot\vec{n})|_S. \tag{25}$$

Аналогично (19) имеем оценку

$$\|\operatorname{div}\mathring{\mathbf{v}}(h)\|_{L_2(\Omega)} \le \sqrt{n}\,c_0\,\nu^{-1}\|\nabla h\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} = \sqrt{n}\,c_0\,\nu^{-1}\|h\|_{H_0^1(\Omega)},$$

откуда следует, что главная линейная часть приращения функционала $J_1(u)$ определяется выражением $(\rho(\mathbf{w}), h)_{H_0^1(\Omega)}$.

Покажем, что градиент $J_1'(u)$ удовлетворяет условию Липшица. Пусть $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ принадлежат U_1, а $\mathbf{w}^{(1)}$ и $\mathbf{w}^{(2)}$ – соответствующие им решения задачи (10); тогда

$$\|J_1'(u^{(1)}) - J_1'(u^{(2)})\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\rho(u^{(1)}) - \rho(u^{(2)})\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla\rho(u^{(1)}) - \nabla\rho(u^{(2)})\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} =$$
$$= \|P_{G(\Omega)}\mathbf{w}^{(1)} - P_{G(\Omega)}\mathbf{w}^{(1)}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \le \|\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}.$$

Учитывая первое из неравенств (21), а также то, что $\mathring{\mathbf{v}}(u^{(1)} - u^{(2)})$ является решением уравнения (11) с правой частью $\mathbf{f} = -\nabla(u^{(1)} - u^{(2)})$ и принимая во внимание оценку (13), получим

$$\|J_1'(u^{(1)}) - J_1'(u^{(2)})\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \le \sqrt{n}\,c_0^2\,c_1\,\nu^{-2}\|\nabla u^{(1)} - \nabla u^{(2)}\|_{L_2(\Omega)} =$$
$$= \sqrt{n}\,c_0^2\,c_1\,\nu^{-2}\|u^{(1)} - u^{(2)}\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1; тогда функционал $J_1(u)$ дифференцируем по Фреше на U_1, его градиент определяется по формуле* (8) *и удовлетворяет условию Липшица с константой L_0.*

Если в задачах I и II начальные приближения в итерационных процессах (6) при $l = 0$ и $l = 1$ связаны равенством $\mathbf{u}_0 = \nabla u_0$, то $\mathbf{u}_k = \nabla u_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Действительно, если $\mathbf{u}_k = \nabla u_k$, то с очевидностью $\mathbf{v}(\mathbf{u}_k) = \mathbf{v}(u_k)$ и $\mathbf{w}(\mathbf{u}_k) = \mathbf{w}(u_k)$, поэтому

$$\mathbf{u}_{k+1} = P_{G(\Omega)}\left(\mathbf{u}_k - \alpha_k J_0'(\mathbf{u}_k)\right) = \mathbf{u}_k - \alpha_k P_{G(\Omega)}\mathbf{w}(\mathbf{u}_k) =$$
$$= \mathbf{u}_k - \alpha_k\nabla\rho_k(u_k) = \nabla(u_k - \alpha_k\rho_k(u_k)) = \nabla u_{k+1}.$$

Таким образом, задачи I и II можно считать эквивалентными. □

4. Дифференцируемость функционала $J_2(u)$**.** Пусть u и h – произвольные элементы из U_2. Для доказательства формулы (9) воспользоваться непосредственно, как в предыдущих разделах, интегрированием по частям здесь невозможно, поскольку не гарантирована принадлежность функций $\mathbf{v}(u)$ и $\mathbf{w}(u)$ пространству $\boldsymbol{H}^2(\Omega)$. Воспользуемся предельным переходом; выберем последовательности $\{u_n\}$, $\{h_n\}$, содержащиеся в U_1 так, что $u_n \to u$, $h_n \to h$ в $L_2(\Omega)$ при $n \to \infty$.

На последовательностях $\{u_n\}$, $\{h_n\}$ справедливо равенство (22):

$$J_2(u_n + h_n) - J_2(u_n) = (\mathbf{w}(u_n), \nabla h_n)_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\operatorname{div}\mathring{\mathbf{v}}(h_n)\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{26}$$

Покажем, что $\operatorname{div}\mathbf{w}(u_n) \to \operatorname{div}\mathbf{w}(u)$, $\operatorname{div}\mathring{\mathbf{v}}(h_n) \to \operatorname{div}\mathring{\mathbf{v}}(h)$ при $n \to \infty$ в метрике $L_2(\Omega)$.

Умножая уравнение (5) на $\mathbf{v}$ и интегрируя по частям, получим тождество

$$\nu\|\nabla\mathbf{v}\|^2_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} + (u, \operatorname{div}\mathbf{v})_{L_2(\Omega)},$$

применение неравенств (18) и (16), к которому дает неравенство

$$\|\nabla\mathbf{v}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \le \nu^{-1}(c_0\|\mathbf{f}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} + \sqrt{n}\|u\|_{L_2(\Omega)}). \tag{27}$$

Разность $\mathbf{v}(u^{(1)}) - \mathbf{v}(u^{(2)}) = \mathring{\mathbf{v}}(u^{(1)} - u^{(2)})$ является решением задачи (5) при $\mathbf{f} = 0$ и $u = u^{(1)} - u^{(2)}$. Тогда по неравенству (27)

$$\|\nabla\mathring{\mathbf{v}}(u^{(1)} - u^{(2)})\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \le \nu^{-1}\sqrt{n}\|u^{(1)} - u^{(2)}\|_{L_2(\Omega)}. \tag{28}$$

Аналогичным образом, учитывая оценки (18), (28), получаем неравенство

$$\begin{aligned}\|\nabla\mathbf{w}(u^{(1)}) - \nabla\mathbf{w}(u^{(2)})\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} &\le \nu^{-1}\sqrt{n}\|\operatorname{div}\mathbf{v}(u^{(1)}) - \operatorname{div}\mathbf{v}(u^{(2)})\|_{L_2(\Omega)} \le \\ &\le \nu^{-1}\, n\,\|\nabla\mathring{\mathbf{v}}(u^{(1)} - u^{(2)})\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \le \nu^{-2}\, n^{3/2}\|u^{(1)} - u^{(2)}\|_{L_2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{29}$$

Из двух последних оценок и неравенства (17) следует, что в соотношениях (26) можно перейти к пределу при $n \to \infty$. В результате получаем, что

$$J_2(u + h) - J_2(u) = (\mathbf{w}(u), \nabla h)_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\operatorname{div}\mathring{\mathbf{v}}(h)\|^2_{L_2(\Omega)} =$$

$$= (-\operatorname{div}\mathbf{w}(u), h)_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\operatorname{div}\mathring{\mathbf{v}}(h)\|^2_{L_2(\Omega)},$$

причем, с учетом оценок (18), (28)

$$\|\operatorname{div}\mathring{\mathbf{v}}(h)\|_{L_2(\Omega)} \le \nu^{-1}\, n\|h\|_{L_2(\Omega)}.$$

Условие Липшица для $J_2'(u)$ устанавливается с применением неравенства (29):

$$\|J_2'(u^{(1)}) - J_2'(u^{(1)})\|_{L_2(\Omega)} = \|\operatorname{div}\mathbf{w}(u^{(1)} - u^{(2)})\|_{L_2(\Omega)} \le$$

$$\le \sqrt{n}\|\nabla\mathbf{w}(u^{(1)} - u^{(2)})\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \le \nu^{-2}\, n^2\|u^{(1)} - u^{(2)}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2; тогда функционал $J_2(u)$ дифференцируем по Фреше на U_2, его градиент определяется по формуле* (9), *удовлетворяет условию Липшица с константой $L_2 = \nu^{-2}\, n^2$.*

5. Модифицированный градиентный метод наискорейшего спуска. Существуют различные способы выбора величины α_k (см. [6], [7]). Наиболее быструю сходимость дает метод наискорейшего спуска, в котором α_k определяется из условия

$$f_k\left(\alpha_k\right) = \min_{\alpha > 0} f_k(\alpha),\ f_k(\alpha) = J_l\left(P_{U_l}(u_k - \alpha J_l'(u_k))\right),\ l = 0, 1, 2. \tag{30}$$

В общем случае на каждом шаге спуска требуется решить однопараметрическую задачу оптимизации (30). Однако в рассматриваемых задачах, пользуясь тем, что множества

U_l являются подпространствами соответствующих гильбертовых пространств и, следовательно, операции проектирования P_l на эти множества линейны, найдем явные формулы для параметров α_k.

Если $u_k \in U_l$, то $P_{U_l}(u_k) = u_k$, поэтому, с учетом обозначения $d_k = P_{U_l}(J_l^{'}(u_k))$, имеем

$$f_k(\alpha) = J_l(u_k - \alpha\, d_k) = \|\mathrm{div}\,\mathbf{v}(u_k) - \alpha\,\mathrm{div}\,\mathring{\mathbf{v}}(d_k)\|^2_{L_2(\Omega)}/2 =$$

$$= \|\mathrm{div}\,\mathbf{v}(u_k)\|^2_{L_2(\Omega)}/2 - \alpha\,(\mathrm{div}\,\mathbf{v}(u_k),\ \mathrm{div}\,\mathring{\mathbf{v}}(d_k))_{L_2(\Omega)} + \alpha^2\|\mathrm{div}\,\mathring{\mathbf{v}}(d_k)\|^2_{L_2(\Omega)}/2,$$

откуда точкой минимума является

$$\alpha_k^{'} = \frac{(\mathrm{div}\,\mathbf{v}(u_k),\ \mathrm{div}\,\mathring{\mathbf{v}}(d_k))_{L_2(\Omega)}}{\|\mathrm{div}\,\mathring{\mathbf{v}}(d_k)\|^2_{L_2(\Omega)}}, \tag{31}$$

а (6) принимает вид

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k^{'}\, d_k. \tag{32}$$

Применение метода наискорейшего спуска для рассматриваемых задач встречает затруднение, связанное с тем, что функционалы $J_l(u)$ не удовлетворяют условию ограниченности множества Лебега $M_{l,c} = \{u \in U_l : J(u) \le c\}$, которое используется при доказательстве теорем сходимости метода наискорейшего спуска. Оказалось, что эту трудность можно преодолеть, если α_k выбирать по формуле

$$\alpha_k = min\left[\alpha_k^{'}, \gamma\right], \tag{33}$$

где γ – параметр метода, а $\alpha_k^{'}$ определяется как в методе наискорейшего спуска по формуле (31).

Поскольку предлагаемый метод может быть использован и в других задачах оптимизации, сформулируем утверждение в виде теоремы в абстрактном гильбертовом пространстве H. Введем обозначения: $J_* = \underset{U}{inf}\ J(u)$, $U \subset H$, $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\}$, $C^{1,1}(U)$ – множество дифференцируемых функционалов, градиент которых удовлетворяет условию Липшица.

Теорема 4. [1] *Пусть U – выпуклое, замкнутое множество из гильбертового пространства H с нормой $\|\cdot\|$, $J(u) \in C^{1,1}(U)$ – выпуклый функционал ($J_* > -\infty$), множество U_* непусто и ограничено, последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ определена по формулам (33), (6)[2] и выполнены условия:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|J'(u_k)\|^2 \leqslant b_1, \tag{34}$$

$$0 < \alpha_k < b_2; \tag{35}$$

тогда последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ минимизирует функцию $J(u)$ на U и слабо в H сходится к множеству U_*.

Доказательство. Обозначим $\rho(u, U_*) = \underset{v \in U_*}{min}\|u - v\|$; тогда по определению оператора проектирования

$$\rho^2(u_{k+1}, U_*) = \|u_{k+1} - P_{U_*}(u_{k+1})\|^2 \leqslant \|u_{k+1} - P_{U_*}(u_k)\|^2$$

[1] Данная теорема с доказательством приведена в работе [10]. Однако утверждение о том, что в случае, если область U является подпространством или всем пространством, то условие (34) можно отбросить, доказано для конкретного функционала. В данной работе это установлено для любого выпуклого функционала $J(u) \in C^{1,1}(U)$.

[2] При отсутствии в обозначении функционала $J(u)$ нижнего индекса, аналогичное предполагается и в формуле (6).

$$= \|P_U (u_k - \alpha_k J'(u_k)) - P_U (P_{U_*}(u_k))\|^2 \leqslant \|u_k - \alpha_k J'(u_k) - P_{U_*}(u_k)\|^2 =$$

$$= \rho^2 (u_k, U_*) + \alpha_k^2 \|J'(u_k)\|^2 - 2\alpha_k (J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k)). \qquad (36)$$

Воспользовавшись необходимым и достаточным условием выпуклости дифференцируемого функционала на выпуклом множестве U [6] $J(u) - J(v) \geq (J'(v), u - v)$ $\forall u, v \in U$, полагая в нем $v = u_k$, $u = P_{U_*}(u_k)$, получаем

$$(J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k)) \geq J(u_k) - J(P_{U_*}(u_k)) = J(u_k) - J_* \geq 0, \qquad (37)$$

откуда неравенство (36) принимает вид

$$\rho^2 (u_{k+1}, U_*) - \rho^2 (u_k, U_*) \leqslant \alpha_k^2 \|J'(u_k)\|^2.$$

Суммируя последнее неравенство от 0 до $m-1$ $(m > 0)$, и учитывая условие (34), получаем

$$\rho^2 (u_m, U_*) \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^2 \|J'(u_k)\|^2 + \rho^2 (u_0, U_*) \leqslant b_2^2 b_1 + \rho^2 (u_0, U_*).$$

Таким образом, последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ ограничена в H, а из условия (34) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|J'(u_k)\| = 0$; тогда из неравенства (37) следует, что последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ минимизирует функционал $J(u)$. Таким образом, последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ – ограниченная и минимизирующая $J(u)$ на U.

Обозначим через W множество выпуклых комбинаций последовательности $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$, то есть множество точек u, представимых в виде:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u_k,\ \alpha_k \geq 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = 1.$$

Используя [7, гл. 4, §1, теорема 5], легко показать, что $W \subset U$ и поскольку U – замкнутое множество, замыкание $\overline{W}$ множества W также принадлежит U.

Последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ минимизирует функцию $J(u)$ на U и, следовательно, минимизирует $J(u)$ на $\overline{W}$. Из доказанного следует, что $J_*\left(\overline{W}\right) = \inf\limits_{u\in\overline{W}} J(u) = J_* = \inf\limits_{u\in U} J(u)$, $\overline{W}_* = \left\{u \in \overline{W} : J(u) = J_*\right\} \in U_*$. Из ограниченности последовательности $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ следует ограниченность множества $\overline{W}$. Согласно [6, гл. 1, §3, теорема 6] выпуклый, полуограниченный снизу функционал $J(u)$ на ограниченном, выпуклом, замкнутом множестве U из рефлексивного банахового пространства имеет непустое множество точек минимума U_*, и любая минимизирующая последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ слабо сходится к U_*. Из слабой сходимости последовательности $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ к $\overline{W}_*$ следует ее слабая сходимость к U_*, теорема доказана. □

Замечание 1. Если множество $\overline{W}$ компактно, то имеет место сильная сходимость. Здесь можно воспользоваться [6, гл. 1 §3, теорема 1].

Замечание 2. Если U – подпространство гильбертового пространства H, P_U – оператор ортогонального проектирования на это подпространство, то
$u_{k+1} = u_k - P_U J'(u_k)$. В этом случае соотношение (36) можно записать в виде:

$$\rho^2 (u_{k+1}, U_*) = \rho^2 (u_k, U_*) + \alpha_k^2 \|P_U J'(u_k)\|^2 - 2\alpha_k (P_U J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k)).$$

Учитывая, что $(P_U J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k)) = (J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k))$, легко видеть, что утверждения теоремы справедливы, если вместо условия (34) выполняется условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|P_U J'(u_k)\|^2 < b_1. \qquad (38)$$

Теорема 5. *Пусть U – подпространство или все гильбертово пространство H, $J(u) \in C^{1,1}(U)$ – выпуклый функционал, множество U_* непусто и ограничено, последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ определена по формулам* (33), (6), *тогда последовательность $\{u_k\}$ минимизирует функционал $J(u)$ на U и слабо в H сходится к множеству U_*.*

Доказательство. Покажем, что если $J(u) \in C^{1,1}(U)$, где U либо подпространство, либо все пространство H и параметр α_k определяется по формулам (33), (30), то выполнено условие (38) и, следовательно, утверждения теоремы верны без условия (34). Для этого воспользуемся известным неравенством, справедливым для функций из $C^{1,1}(U)$ (см. [7, гл. 2, §3, лемма 1]):

$$|J(u) - J(v) - (J'(v), u - v)| \leqslant L \|u - v\|^2 /2 \ \forall u, v \in U,$$

где L – константа Липшица для градиента $J'(u)$ функционала $J(u)$.

Полагая в нем $v = u_k$, $u = u_{k+1}^{\alpha} = u_k - \alpha P_U J'(u_k)$, получим

$$J(u_k) - J\left(u_{k+1}^{\alpha}\right) = J(u_k) - J(u_k - \alpha P_U J'(u_k)) \geq$$

$$\geq \alpha \left(J'(u_k), P_U J'(u_k)\right) - \alpha^2 L \left\|P_U J'(u_k)\right\|^2 /2. \tag{39}$$

Учитывая, что оператор P_U – оператор ортогонального проектирования на подпространство, получаем, что $\left(J'(u_k), P_U J'(u_k)\right) = \|P_U J'(u_k)\|$, а из неравенства (39) следует:

$$J(u_k) - J\left(u_{k+1}^{\alpha}\right) \geq \alpha (1 - \alpha L/2) \|P_U J'(u_k)\|^2 . \tag{40}$$

Полагая $\alpha = 1/L$, получаем

$$J(u_k) - J\left(u_{k+1}^{\alpha}\right) \geq \|P_U J'(u_k)\|^2 /(2L).$$

Предположим, что $\alpha_k' \leqslant \gamma$, тогда $\alpha_k = \alpha_k'$ и поэтому при $\alpha = 1/L$ справедливы неравенства

$$J(u_k) - J(u_{k+1}) \geq J(u_k) - J\left(u_{k+1}^{\alpha}\right) \geq \left\|P_U J'(u_k)\right\|^2 /(2L). \tag{41}$$

Предположим теперь, что $\alpha_k' > \gamma$, тогда $\alpha_k = \gamma$. Рассмотрим два случая: $\gamma \geq 1/L$ и $\gamma < 1/L$. Учитывая, что на интервале $\left(0, \alpha_k'\right)$ функция $f_k(\alpha)$ убывает, в первом случае вновь получаем неравенства (41). Во втором случае ($\gamma < 1/L$)

$$\gamma (1 - \gamma L/2) \geq \gamma/2.$$

Таким образом, учитывая неравенства (40), (41), в любом случае получаем оценку

$$J(u_k) - J(u_{k+1}) \geq c \left\|P_U J'(u_k)\right\|^2 ,$$

где $c = min\,[\gamma/2,\ 1/(2L)]$.

Из последней оценки следует, что последовательность $\{J(u_k)\}_{k=0}^{\infty}$ монотонно убывает, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left\|P_U J'(u_k)\right\|^2$ сходится и имеет место искомая оценка

$$\sum_{j=k}^{\infty} \left\|P_U J'(u_k)\right\|^2 \leqslant c^{-1} (J(u_k) - J*) .$$

Таким образом, выполнено условие (38), и теорема доказана. □

6. Итерационные процессы. Теорема сходимости. С учетом теоремы 2 далее будем говорить только о задачах $l = 1, 2$. Покажем, что функционалы $J_l(u)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 5.

Нетрудно убедиться, что функционалы J_l выпуклы. Действительно при $\forall\alpha \in [0,1]$ и $u, v \in U_l$

$$J_l(\alpha u + (1-\alpha)v) = \|\alpha \operatorname{div} \mathbf{v}(u) + (1-\alpha) \operatorname{div} \mathbf{v}(v)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$= \alpha^2 \|\operatorname{div} \mathbf{v}(u)\|^2_{L_2(\Omega)} + (1-\alpha)^2 \|\operatorname{div} \mathbf{v}(v)\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\alpha(1-\alpha)\, (\operatorname{div} \mathbf{v}(u),\, \operatorname{div} \mathbf{v}(v))_{L_2(\Omega)}$$

$$= \alpha \|\operatorname{div} \mathbf{v}(u)\|^2_{L_2(\Omega)} + (1-\alpha) \|\operatorname{div} \mathbf{v}(v)\|^2_{L_2(\Omega)} - \alpha(1-\alpha) \|\operatorname{div} \mathbf{v}(u) - \operatorname{div} \mathbf{v}(v)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha J_l(u) + (1-\alpha) J_l(v).$$

Выполнение условия принадлежности функционалов J_l классу $C^{1,1}(U)$ следует из результатов разделов 2, 3, $J_{l,*} = \inf\limits_{U} J_l(u) = 0 > -\infty$, множества $U_{l,*} = \{u \in U_l : J_l(u) = J_{l,*}\}$ состоят из одной точки $u_* = p$, где p есть искомое давление.

Из теоремы 5, таким образом, следует, что последовательности $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$, определенные соотношениями (6), (31), (33) при $l = 1, 2$ слабо сходятся в соответствующих пространствах $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ при любом начальном приближении.

Теорема 6. *Пусть* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}_2(\Omega)$, $S \in C^2$; *тогда последовательность* $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$, *определенная формулами* (6), (33), *где* $l = 1, 2$, *при любом начальном приближении* $u_0 \in U_l$ *сходится к* $u_* = p$ *слабо в* $H^1(\Omega)$ *и при* $l = 1$ *– сильно в* $L_2(\Omega)$. *Последовательности* $\{\boldsymbol{v}(u_k)\}_{k=0}^{\infty}$ *при* $l = 1, 2$ *сильно в* $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ *сходятся к* $\boldsymbol{v}$, *где* p *и* $\boldsymbol{v}$ *– решение задачи* (1)–(3).

Доказательство. Как было показано, первое утверждение сразу следует из теоремы 5. Справедливость второго утверждения вытекает из следующих соображений. Известно (см., например, [1, гл. 1, §1, лемма 8]), что если область Ω ограничена и ее граница кусочно-гладкая, то $H^1(\Omega)$ вкладывается компактно в $L_2(\Omega)$ (т.е. ограниченное в $H^1(\Omega)$ множество компактно в $L_2(\Omega)$). Из компактности и слабой сходимости в $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ последовательности $\{\mathbf{v}(u_k)\}_{k=0}^{\infty}$ следует ее сильная сходимость в $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$.

Заметим далее, что разность $\mathbf{v}_k - \mathbf{v}$, где $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}(u_k)$, а $\mathbf{v}$ – решение задачи (1)–(3), является решением задачи

$$-\nu\Delta\left(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\right) = -\nabla\left(u_k - p\right),\ \left(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\right)|_S = 0.$$

Умножая последнее уравнение на $\mathbf{v}_k - \mathbf{v}$ и интегрируя по частям, получаем

$$\|\nabla(\mathbf{v}_k - \mathbf{v})\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} = -\nu^{-1}(\nabla(u_k - p), \mathbf{v}_k - \mathbf{v})_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} = \nu^{-1}(u_k - p, \operatorname{div} \mathbf{v}_k)_{L_2(\Omega)}. \qquad (42)$$

Последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ ограничена в $L_2(\Omega)$ и минимизирующая функционал $J_l(u)$, поэтому $\operatorname{div} \mathbf{v}_k \to 0$ при $k \to \infty$. Откуда следует, что $(u_k - p, \operatorname{div} \mathbf{v}_k)_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $k \to \infty$, поэтому из соотношений (42) следует справедливость последнего утверждения теоремы. □

Установленная теорема сходимости позволяет сформулировать итерационные процессы в дифференциальной форме для решения задачи (1)–(3).

Алгоритм для $J_1(u)$

1. Выбрать начальное $u_0 \in U_1$, например, $u_0 = 0$.
2. Найти скорость $\mathbf{v}_k(u_k)$ как решение векторной задачи Дирихле (5).
3. Найти сопряженное состояние $\mathbf{w}_k(u_k)$ из решения векторной задачи Дирихле (10).
4. Определить $d_k = P_{U_1}(\rho(\mathbf{w}_k))$, где $\rho(\mathbf{w}_k)$ – решение скалярной задачи Неймана (25).
5. Определить $\mathring{\mathbf{v}}_k(d_k)$ из решения векторной задачи Дирихле (5) при $\mathbf{f} = 0$.
6. Вычислить α_k по формулам (31), (33) для найденных $\mathbf{v}_k(u_k)$, $\mathring{\mathbf{v}}_k(d_k)$.
7. Пересчитать управление u_{k+1} по формуле (32) для найденных α_k, d_k и перейти к шагу 2.

Алгоритм для $J_2(u)$ идентичен алгоритму $J_1(u)$ за исключением шага 4:

$$d_k = P_{U_2}(-\operatorname{div}\mathbf{w}_k(u_k)).$$

Операторы проектирования для обоих алгоритмов вычисляются по формуле

$$P_{U_l}(u) = u - \frac{(u,1)_{L_2(\Omega)}}{(1,1)_{L_2(\Omega)}}\ \forall u \in U_l,\ l = 1,2. \tag{43}$$

7. Комбинированный градиентный метод. Состоит в том, что попеременно делается несколько шагов первого градиентного метода (т.е. $J'(u) = J_1'(u)$), а затем несколько шагов второго (т.е. $J'(u) = J_2'(u)$). Расчеты ниже показывают, что комбинирование методов обеспечивает ускорение сходимости. Этот факт имеет простое объяснение. Функционалы $J_1(u)$, $J_2(u)$ достигают минимума через обращение в нуль в точке $u_* = p$ тогда и только тогда, когда сопряженное состояние $\mathbf{w}(u_*) = 0$. Действительно, если $\mathbf{w}(u_k) \neq 0$, то в разложении $\mathbf{w}(u_k)$ на градиентную и соленоидальную составляющие, по крайней мере, хотя бы одна часть не равна нулю. Пусть, например, не равна нулю градиентная часть $\mathbf{w}(u_k)$, тогда спуск по градиенту $J_1'(u_k)$ обеспечит уменьшение функционала. Комбинированный метод состоит в последовательном переходе от использования одного градиента на использование другого, как только величина $\|J_l'(u_k)\|$ $(l = 1,2)$ станет меньше заданной величины.

Заметим, что области определений функционалов U_l $(l = 1,2)$ различные, поэтому требуется убедиться, что по окончании использования одного метода градиентного спуска мы получаем управление u_k, принадлежащее области определения другого функционала. Это условие будет выполнено, если начальное приближение $u_0 \in U_1$. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что если $u_0 \in H^1(\Omega)$, то $J_2'(u_0) \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$. Действительно, если $u_0 \in H^1(\Omega)$, то при условии гладкости границы $S \in C^2$ в уравнении (5) правая часть $\mathbf{f} - \nabla u_0 \in \boldsymbol{L}_2(\Omega)$, поэтому его решение $\mathbf{v}(u_0) \in \boldsymbol{H}^2(\Omega)$. Откуда следует, что правая часть уравнения (10) принадлежит $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$, поэтому его решение $\mathbf{w}(u_0) \in \boldsymbol{H}^2(\Omega)$ и, следовательно, $J_2'(u_0) = -\operatorname{div}\mathbf{w}(u_0) \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$. Таким образом, все члены последовательности u_k, полученные комбинированным методом, содержатся в U_2.

Если применение градиента $J_2'(u)$ заканчивается, начиная с некоторого номера итерационного процесса, то, в соответствии с теоремой 6, итерационный процесс сходится слабо в $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ и сильно в $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$. В противном случае можно доказать слабую сходимость итерационного процесса в $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$. Последовательности векторов скорости $\{\mathbf{v}(u_k)\}_{k=0}^{\infty}$ в силу теоремы 6 сильно сходятся в пространстве $H_0^1(\Omega)$.

8. О задаче с неоднородными граничными условиями. Приведем некоторые замечания о возможном ослаблении условий на границу и применении разработанных методов к решению задачи Стокса с неоднородными граничными условиями.

Условие на гладкость границы области $S \in C^2$ используется лишь для применения второго энергетического неравенства (12). Однако, как отмечается в [8], условие на границу можно значительно ослабить, и этим ослабленным условиям удовлетворяют, например, любой многогранник или произвольная выпуклая область.

Для решения задачи Стокса с неоднородными граничными условиями

$$-\nu\Delta\mathbf{v} = \mathbf{f} - \nabla p,\ \ \mathbf{v}\big|_S = \vec{\varphi}, \tag{44}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{45}$$

$$(p,1)_{L_2(\Omega)} = 0, \tag{46}$$

можно применить предлагаемые методы. При этом отличие от случая однородных краевых условий состоит в том, что на каждом шаге спуска по градиенту решается неоднородная краевая задача (44) для определения вектора скорости $\mathbf{v}(u)$, соответствующего управлению u. Если управлению u дается приращение h, то приращение вектора скорости $\mathbf{v}(\nabla h) = \mathbf{v}(\nabla(u+h)) - \mathbf{v}(\nabla u)$ определяется решением однородной краевой задачи как и в ранее рассмотренных случаях. Теперь нетрудно видеть, что выкладки, приведенные при доказательстве теорем 1, 2, 3, остаются без изменений.

Таким образом, функционалы $J_l\,(l = 1,2)$, рассматриваемые в пространствах $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ и в случае неоднородных краевых условий, дифференцируемы и удовлетворяют условию Липшица, кроме того, сохраняется формула (31) для определения параметров α_k.

Для обоснования сходимости последовательности $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$, построенных указанными выше методами, необходимо показать, что множество точек минимума функционалов J_l непусто и ограничено. Для этого достаточно убедиться, что решение задачи (44)–(46) существует.

Существование решения задачи (44)–(46) в классе $\mathbf{v} \in \boldsymbol{H}^2(\Omega)$, $\nabla p \in \boldsymbol{L}_2(\Omega)$ при условии, что область Ω ограничена, $\mathbf{f} \in \boldsymbol{L}_2(\Omega)$, $S \in C^2$, $\vec{\varphi}|_S \in H^{1+\frac{1}{2}}$, $(\vec{\varphi}, \vec{n})_{L_2(S)} = 0$ гарантирует [1, гл. III, §5, теорема 3]. Следовательно, при указанных условиях, справедливы утверждения теоремы 6.

9. Конечно-разностная аппроксимация. Для построения сеточных аналогов дифференциальных итерационных процессов из раздела 5 недостаточно воспользоваться произвольными аппроксимациями операторов div и ∇ и гарантировать при этом сходимость, с чем и столкнулись авторы при численном моделировании. Однако, если сначала аппроксимировать исходную задачу (1)–(3) в конечномерных пространствах Соболева и построить для этой задачи градиентный метод аналогично рассмотренному выше дифференциальному случаю, удается получить сходящийся сеточный итерационный процесс, для которого справедлива теорема 6.

Как и в работе [11] будем рассматривать двумерную прямоугольную область $\Omega_h = (0, l_1) \times (0, l_2)$ и узловую равномерную неразнесенную сетку $\omega_h = \{x_{i,j} = (ih_1, jh_2),\ i = 1,\dots,N_1,\ j = 1,\dots,N_2\}$ с границей S_h (состоит из множества граничных узлов, за исключением угловых точек). Здесь $h_\alpha = l_\alpha/(N_\alpha + 1)$ – равномерный шаг, а N_α – число внутренних узлов сетки по направлению $\alpha = 1,2$. В дальнейшем ограничимся случаем равномерной сетки $N_1 = N_2 = N$ в квадрате $l_1 = l_2 = l$ $(h_1 = h_2 = h)$.

Определим скалярное произведение в конечномерном пространстве $L_2(\Omega_h)$:

$$(y,z)_{L_2(\Omega_h)} = h^2 \sum_{x_{i,j}\in\Omega_h} y_{i,j} z_{i,j} + \frac{h^2}{2} \sum_{x_{i,j}\in S_h} y_{i,j} z_{i,j} = h^2 \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} y_{i,j} z_{i,j}$$

$$+\frac{h^2}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} y_{i,0} z_{i,0} + \sum_{i=1}^{N} y_{i,N+1} z_{i,N+1} + \sum_{j=1}^{N} y_{0,j} z_{0,j} + \sum_{j=1}^{N} y_{N+1,j} z_{N+1,j}\right),$$

где $y_{i,j} = y(x_{i,j})$, $z_{i,j} = z(x_{i,j})$.

Под согласованной аппроксимацией операторов div_h и ∇_h понимается сохранение дифференциального свойства интегрирования по частям:

$$(\nabla_h p, \mathbf{v})_{\boldsymbol{L}_2(\Omega_h)} = -(p, \mathrm{div}_h \mathbf{v})_{L_2(\Omega_h)}\ \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega_h). \tag{47}$$

Соотношению (47) удовлетворяют направленные разности первого порядка [11]:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_h \mathbf{v}_{i,j} &= \frac{v_{i,j}^{(1)} - v_{i-1,j}^{(1)}}{h} + \frac{v_{i,j}^{(2)} - v_{i,j-1}^{(2)}}{h},\ i = 1\dots N+1,\ j = 1\dots N+1,\\
\nabla_h p_{i,j} &= \left(\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{h}, \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{h}\right),\ i = 0\dots N,\ j = 0\dots N.
\end{aligned}$$

Очевидно, что в этом случае оператор $-\Delta_h = -\,\mathrm{div}_h \nabla_h$ есть стандартный пятиточечный разностный шаблон для задачи Дирихле [12].

Таким образом, сеточным аналогом задачи (1)–(3) является задача

$$-\nu\Delta_h\mathbf{v} = \mathbf{f}_h - \nabla_h p,\ \ \mathbf{v}|_{S_h} = 0, \tag{48}$$

$$\mathrm{div}_h\mathbf{v} = 0, \tag{49}$$

$$(p,1)_{L_2(\Omega_h)} = 0, \tag{50}$$

для которой выпишем итерационные процессы из раздела 5 в удобном при программной реализации виде. При этом вместо $J_1(u)$ будем теперь рассматривать $J_0(\vec{u})$.

Алгоритм для $J_0(\vec{u})$

$$\begin{gathered}
-\nu\Delta_h\mathbf{v}_k = \mathbf{f}_h - \vec{u}_k,\ \ \mathbf{v}_k|_{S_h} = 0;\\
-\nu\Delta_h\mathbf{w}_k = \nabla_h\mathrm{div}_h\mathbf{v}_k,\ \ \mathbf{w}_k|_{S_h} = 0;\\
-\Delta\rho_k = -\,\mathrm{div}_h\mathbf{w}_k,\ \ \left.\frac{\partial\rho_k}{\partial\vec{n}}\right|_{S_h} = (\mathbf{w}_k\cdot\vec{n})|_{S_h};\\
d_k = P_{U_1}(\rho_k);\\
-\nu\Delta_h\mathring{\mathbf{v}}_k = -\nabla_h d_k,\ \ \mathring{\mathbf{v}}_k|_{S_h} = 0;\\
\alpha_k = min\left[\alpha_k', \gamma\right],\ \ \alpha_k' = \frac{(\mathrm{div}_h\mathbf{v}_k,\ \mathrm{div}_h\mathring{\mathbf{v}}_k)_{L_2(\Omega_h)}}{\|\mathrm{div}_h\mathring{\mathbf{v}}_k\|^2_{L_2(\Omega_h)}};\\
\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k - \alpha_k\nabla_h d_k.
\end{gathered} \tag{51}$$

Алгоритм для $J_2(u)$

$$\begin{gathered}
-\nu\Delta_h\mathbf{v}_k = \mathbf{f}_h - \nabla u_k,\ \ \mathbf{v}_k|_{S_h} = 0;\\
-\nu\Delta_h\mathbf{w}_k = \nabla_h\mathrm{div}_h\mathbf{v}_k,\ \ \mathbf{w}_k|_{S_h} = 0;\\
\rho_k = -\,\mathrm{div}_h\mathbf{w}_k;\\
d_k = P_{U_1}(\rho_k);\\
-\nu\Delta_h\mathring{\mathbf{v}}_k = -\nabla_h d_k,\ \ \mathring{\mathbf{v}}_k|_{S_h} = 0;\\
\alpha_k = min\left[\alpha_k', \gamma\right],\ \ \alpha_k' = \frac{(\mathrm{div}_h\mathbf{v}_k,\ \mathrm{div}_h\mathring{\mathbf{v}}_k)_{L_2(\Omega_h)}}{\|\mathrm{div}_h\mathring{\mathbf{v}}_k\|^2_{L_2(\Omega_h)}};\\
u_{k+1} = u_k - \alpha_k\, d_k.
\end{gathered}$$

Для обоих алгоритмов

$$P_{U_l}(\rho_k) = \rho_k - \frac{(\rho_k, 1)_{L_2(\Omega_h)}}{(1,1)_{L_2(\Omega_h)}},$$

где, как нетрудно убедиться, $(1,1)_{L_2(\Omega_h)} = l_1 l_2$.

10. Решение вырожденной задачи Неймана. Хорошо известно, что условием разрешимости дифференциальной задачи Неймана вида

$$-\Delta\rho = f,\ \ \left.\frac{\partial\rho}{\partial\vec{n}}\right|_S = g$$

является равенство

$$(f,1)_{L_2(\Omega)} + (g,1)_{L_2(S)} = 0, \tag{52}$$

которое для задачи (24) принимает вид формулы Остроградского–Гаусса

$$(\mathrm{div}\,\mathbf{w}_k, 1)_{L_2(\Omega)} = ((\mathbf{w}_k\cdot\vec{n}), 1)_{L_2(S)}.$$

Справедливость последней формулы для сеточного случая проверяется непосредственно, если скалярное произведение в $L_2(S_h)$ определено как

$$
\begin{aligned}
(g,1)_{L_2(S_h)} &= h\sum_{i=1}^{N}(g_{0,i}+g_{2,i}) + h\sum_{j=1}^{N}(g_{1,j}+g_{3,j}) + \\
&+ \frac{h}{2}(g_{0,0}+g_{1,0}+g_{2,N+1}+g_{3,N+1}+g_{2,0}+g_{1,N+1}+g_{0,N+1}+g_{3,0})\ \forall g\in L_2(\Omega_h).
\end{aligned}
$$

Введем обозначение компонент вектора $\mathbf{w}_k = (w_k^{(1)}, w_k^{(2)})$. По определению $\partial\rho_k/\partial\vec{n}|_{S_h} = (\nabla_h\rho_k\cdot\vec{n})|_{S_h}$, поэтому граничное условие для задачи (51) определяется из равенства $(\nabla_h\rho_k - \mathbf{w}_k)|_{S_h} = 0$:

$$
\frac{(\rho_k)_{1,j}-(\rho_k)_{0,j}}{h} = (w_k^{(1)})_{0,j},\ \frac{(\rho_k)_{N+2,j}-(\rho_k)_{N+1,j}}{h} = (w_k^{(1)})_{N+1,j},\ j\in\overline{1,N};
$$
$$
\frac{(\rho_k)_{i,1}-(\rho_k)_{i,0}}{h} = (w_k^{(2)})_{i,0},\ \frac{(\rho_k)_{i,N+2}-(\rho_k)_{i,N+1}}{h} = (w_k^{(2)})_{i,N+1},\ i\in\overline{1,N}.
$$

Из приведенных формул видно, что требуется введение фиктивных слоев точек по каждому из направлений с индексами $N+2$ за пределами сеточной области $\omega_h\cup S_h$, после чего можно записать систему $(N+2)\times(N+2)$ - линейных алгебраических уравнений для решения задачи (51):

$$
Az = b, \tag{53}
$$

где $z_{CELL(i,j)} = (\rho_k)_{i,j}$, а оператор $CELL(i,\,j) = i(N+2)+j$ $(i,j\in\overline{0,N+1})$ задает построчный формат хранения двумерного вектора в одномерном массиве.

Все элементы строки $row = CELL(i,\,j)$ $(i,j\in\overline{0,N+1})$ матрицы A равны нулю, за исключением:

$$
A_{row,CELL(i,j)} = \begin{cases}
4,\ i,j\in\overline{1,N}; \\
3,\ i=0 \text{ и } j\in\overline{1,N} \text{ или } i=N+1 \text{ и } j\in\overline{1,N}; \\
3,\ j=0 \text{ и } i\in\overline{1,N} \text{ или } j=N+1 \text{ и } i\in\overline{1,N}; \\
2,\ i=0 \text{ и } j=0 \text{ или } i=0 \text{ и } j=N+1; \\
2,\ i=N+1 \text{ и } j=0 \text{ или } i=N+1 \text{ и } j=N+1.
\end{cases}
$$
$$
\begin{aligned}
A_{row,CELL(i-1,j)} &= -1,\ i\ge 1; \\
A_{row,CELL(i+1,j)} &= -1,\ i\le N; \\
A_{row,CELL(i,j-1)} &= -1,\ j\ge 1; \\
A_{row,CELL(i,j+1)} &= -1,\ j\le N.
\end{aligned}
$$

Соответственно, вектор правой части вычисляется по формулам

$$
b_{row} = -h^2\mathrm{div}_h(\mathbf{w}_k)_{i,j} + h\begin{cases}
0,\ i\in\overline{1,N},\ j\in\overline{1,N}; \\
(w_k^{(1)})_{0,j},\ i=1,\ j\in\overline{0,N+1}; \\
(w_k^{(2)})_{i,N+1},\ j=N+1,\ i\in\overline{0,N+1}; \\
(w_k^{(1)})_{N+1,j},\ i=N+1,\ j\in\overline{0,N+1}; \\
(w_k^{(2)})_{i,0},\ j=1,\ i\in\overline{0,N+1}.
\end{cases}
$$

Система (53) имеет разреженную структуру и может быть эффективна разрешена подходящим итерационным методом с предобусловливанием.

11. Численные эксперименты. Традиционно, первичная верификация численных методов осуществляется на задачах с известным аналитическим решением. Применительно к задаче (1) - (3) это означает, что задавая соленоидальное $\mathbf{v}^*$ и p^* из условия $(p^*,1)_{L_2(\Omega)}$

мы можем вычислить сеточную правую часть $\mathbf{f}_h = (-\nu\Delta\mathbf{v}^* + \nabla p^*)_h$ и найти вектора $\mathbf{v}_k$, u_k в результате сходимости алгоритмов из раздела 1.

Рассмотрим тестовый пример из работы [4]. В области $\Omega = [-\pi/2, 3\pi/2] \times [-\pi, \pi]$ решается задача Стокса (1)–(3), где для $\nu = 1$ задается соленоидальное аналитическое решение $\mathbf{v}^*(x, y) = \{(1 + \sin x)\sin y,\ \cos x(1 + \cos y)\}$, $p^*(x, y) = \sin x \cos(2y)$, для которого $\mathbf{v}^*|_S = 0$.

Задача (48)–(50) решалась на последовательности сеток 31×31, 63×63, 127×127, 255×255 с помощью алгоритмов $J_2(u)$, $J_0(\vec{u})$, а также их комбинированием. Задачи Дирихле для уравнения Пуассона обращались методом быстрого преобразования Фурье [12], с чем и связан выбор числа внутренних узлов сеток по закону $N_1 = N_2 = N = 2^m - 1$ $(m = 5, 6, 7, 8)$. Задача Неймана (53) решалась итерационно методом сопряженных градиентов с диагональным предобусловливанием. Во всех алгоритмах итерации продолжались до тех пор, пока $\|p_k - p_{k-1}\|_{C(\Omega_h)} \geq 10^{-6}$ или $\|\mathrm{div}_h \mathbf{v}_k\|_{C(\Omega_h)} \geq 10^{-6}$, где $\|\cdot\|_{C(\Omega_h)}$ – равномерная сеточная норма, т.е. максимум среди всех модулей функции на сетке ω_h. В качестве вектора начальных приближений использовано $u_0 = 0$.

Результаты вычислений с помощью разработанной авторами программы на языке C++ приведены в табл. 1, 2; на рис. 1, 2 представлена динамика убывания нормы дивергенции вектора скорости.

Сетка	Итерации	$\|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}^*\|_{C(\Omega_h)}$	$\|p_k - p^*\|_{C(\Omega_h)}$	Невязка $\|\mathbf{f}_h - \nabla_h p_k + \Delta_h \mathbf{v}_k\|_{C(\Omega_h)}$
31×31	200	1.92952e-11	3.05475e-5	1.54609e-9
63×63	242	7.96903e-12	3.81565e-6	2.72057e-9
127×127	262	3.3259e-12	4.76882e-7	5.99933e-9
255×255	265	1.41589e-12	5.96158e-8	1.26728e-8

Таблица 1. Результаты расчета по алгоритму $J_2(u)$

Сетка	Итерации	$\|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}^*\|_{C(\Omega_h)}$	$\|p_k - p^*\|_{C(\Omega_h)}$	Невязка $\|\mathbf{f}_h - \nabla_h p_k + \Delta_h \mathbf{v}_k\|_{C(\Omega_h)}$
31×31	167	1.80279e-11	1.7414e-6	1.15983e-9
63×63	143	7.09932e-12	1.56985e-5	2.04383e-9
127×127	163	4.07434e-12	1.0086e-5	5.90967e-9
255×255	219	2.13486e-12	5.4197e-6	1.1914e-8

Таблица 2. Результаты расчета по комбинированному алгоритму, где после одного шага $J_0(\vec{u})$ итерации продолжаются по алгоритму $J_2(u)$

Расчеты по алгоритму $J_0(\vec{u})$ не приводятся ввиду обнаруженной вычислительной неустойчивости соответствующего расчета.

Влияние параметра γ на сходимость модифицированного метода градиентного спуска с вычислением параметра α_k по формулам (33), (31) проиллюстрировано на рис. 2. За основу был выбран комбинированный метод, где после одного шага $J_0(\vec{u})$ дальнейшие итерации производились по алгоритму $J_2(u)$. Оптимальным значением γ на рассмотренных сетках является число в пределах 9–11, которое, скорее всего, будет лежать в других диапазонах при других условиях задачи. Сравнение соответствующей табл. 3 с табл. 2 показывает сокращение числа итераций.

12. Заключение. В заключение отметим, что, во-первых, два построенных итерационных процесса из раздела 1 записаны в дифференциальной форме и инвариантны к размерности рассматриваемой задачи Стокса $(n = 2, 3)$. Во-вторых, редуцирование исходной задачи к серии существенно более простых задач Дирихле и Неймана, позволяет использовать для их численного решения известные эффективные сеточные методы.

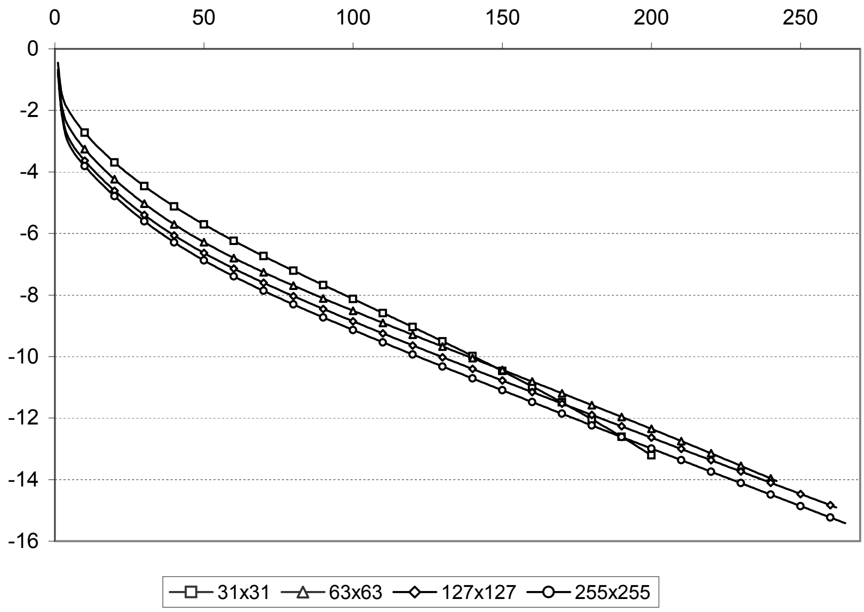

Рис. 1. График изменения $\log_{10}(\mathrm{div}_h \mathbf{v}_k)$ для алгоритма $J_2(u)$ в зависимости от номера итерации

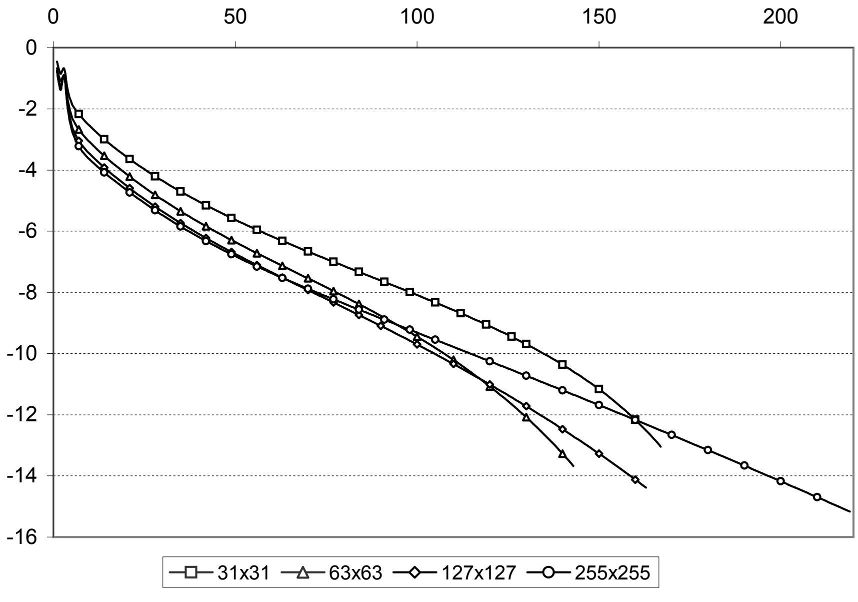

Рис. 2. График изменения $\log_{10}(\mathrm{div}_h \mathbf{v}_k)$ для комбинированного алгоритма в зависимости от номера итерации

В настоящей работе мы ограничились построением только двумерных конечно-разностных схем, на которых исследовали эффективность предложенного модифицированного метода наискорейшего спуска с параметром γ.

Алгоритм $J_2(u)$ проще при программной реализации, однако сходится медленнее, чем комбинированный метод.

Сравнение с численными результатами из работы [4] показывает, что даже при применении базового метода наискорейшего спуска предложенные в настоящей работе алгоритмы

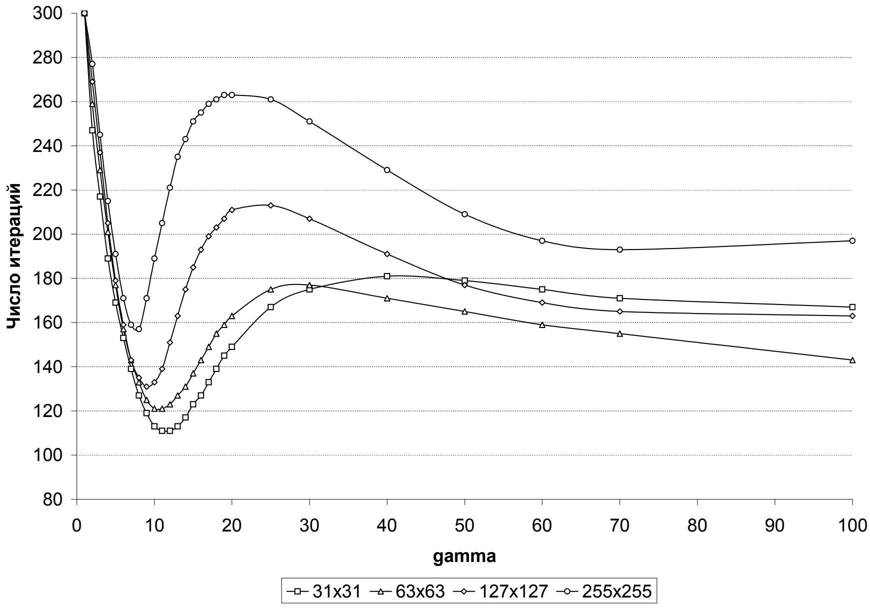

Рис. 3. Зависимость числа итераций комбинированного метода от γ.

Сетка	Итерации	$\|\tilde{\mathbf{v}}_k - \mathbf{v}^*\|_{C(\Omega_h)}$	$\|u_k - p^*\|_{C(\Omega_h)}$	Невязка $\|\mathbf{f} - \nabla_h u_k + \Delta_h \tilde{\mathbf{v}}_k\|_{C(\Omega_h)}$
31×31	113	2.53668e-12	2.00158e-6	1.56719e-9
63×63	121	0.999382e-11	1.00493e-5	2.94942e-9
127×127	133	0.497812e-11	0.502867e-5	4.47148e-9
255×255	189	0.248806e-11	0.251476e-6	9.65243e-8

Таблица 3. Результаты расчета по комбинированному алгоритму при $\gamma = 10$

затрачивают примерно в два раза меньше итераций для достижения точности по скорости во втором знаке на сопоставимых сетках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* М: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1970.
2. Темам Р. *Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ.* М.: Мир, 1981.
3. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* М.: Мир, 1979.
4. V.l. Agoshkov, C. Bardos, S.N. Bideev *Solution of the Stokes problem as an inverse problem: Preprint N9935.* Centre Math. Leuers Applic. Cachan: E.N.S. de Cachan, 1999.
5. Пальцев Б.В., Соловьев М.Б., Чечель И.И. *О развитии итерационных методов с расщеплением граничных условий решения краевых и начально-краевых задач для линеаризованных и нелинейной систем Навье-Стокса* // ЖВМиМФ. 2011. 51:1. С. 74–95.
6. Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач.* М.: Наука, 1981.
7. Васильев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач.* М.: Наука, 1988.
8. Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики.* М: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1973.
9. Ладыженская О.А. *О связи задачи Стокса и разложений пространств W_2^1 и $W_2^{(-1)}$* // Алгебра и анализ. 2001. 13:4. С. 119–133.
10. Голичев И.И. *Модифицированный градиентный метод наискорейшего спуска решения линеаризованной задачи для нестационарных уравнений Навье-Стокса* // Уфимский математический журнал. 2013. Т. 5. № 4. С. 60–76.

11. A.G. Churbanov, A.N. Pavlov, P.N. Vabishchevich *Operator-splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations on non-staggered grids. Part 1: first-order schemes* // International Jornal for Numerical methods in fluids. 1995. V.21. P. 617–640.
12. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы.* М.: Наука, 1989.

Голичев Иосиф Иосифович
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
ул. Чернышевского, 112
450008, г. Уфа, Россия
Уфимский филиал Финансового университета
при Правительстве РФ
ул. Революционная, 169
450005, г. Уфа, Россия
E-mail: Golichev_II@mail.ru

Шарипов Тимур Рафаилевич,
Научно-производственное предприятие «АТП»
ул. Кузнецовский Затон, дом 22, корпус 2
450103, г. Уфа, Россия
E-mail: SharipovTR@gmail.com

Лучникова Наталья Иосифовна,
Уфимский филиал Финансового университета
при Правительстве РФ
ул. Революционная, 169
450005, г. Уфа, Россия
E-mail: Luchnikova_NI_77@mail.ru