ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 1. № 3 (2009). С. 28-45.

УДК 517.9

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ n-КОМПОНЕНТНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С НУЛЕВЫМИ ИНВАРИАНТАМИ ЛАПЛАСА И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

А.В. ЖИБЕР, Ю.Г. МИХАЙЛОВА

Аннотация. В работе получены явные формулы решения гиперболической системы уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа, содержащего $2n$ произвольных функций. Приведен алгоритм построения краевой задачи с данными на характеристиках. В качестве примера приведено решение задачи Гурса для линеаризованной цепочки Тоды серии D_n.

Ключевые слова: инварианты и обобщенные инварианты Лапласа, задача Гурса, цепочки Тоды.

1. Введение

Одним из классических приемов построения общих решений линейных гиперболических уравнений вида

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0 \tag{1.1}$$

является каскадный метод Лапласа (см. например [1]). Основу этого метода составляет последовательность инвариантов Лапласа

$$\ldots, h_{-3}, h_{-2}, h_{-1}, h_0, h_1, h_2, h_3, \ldots \tag{1.2}$$

и связанные с ней преобразования Лапласа.

Элементы цепочки (1.2) вычисляются с помощью рекуррентной формулы

$$h_{i+1} = 2h_i - h_{i-1} - (\ln h_i)_{xy},\ i \in \mathbb{Z},$$

исходя из "начальных значений"

$$h_{-1} = b_y + ab - c,\ \ h_0 = a_x + ab - c.$$

Если хотя бы один из инвариантов последовательности (1.2) тождественно равен нулю, то уравнение (1.1) интегрируется в квадратурах.

В случае, если цепочка Лапласа (1.2) обрывается с двух сторон, то можно построить общее решение уравнения (1.1), не прибегая к квадратурам. Для таких уравнений в работе [2] построена явная формула решения задачи с данными на характеристиках

$$u(x, y_0) = \Psi(x), \quad u(x_0, y) = \Phi(y). \tag{1.3}$$

Между тем, хотя инварианты и преобразования Лапласа для скалярных линейных уравнений известны уже более сотни лет, для систем линейных уравнений эти понятия, по-видимому, начали изучаться лишь в последнее время (см. [3]–[8]).

A.V. Zhiber, Yu.G. Mihaylova, Algorithm of building the solution of hyperbolic system of equation.

Работа поддержана РФФИ (гранты 07-01-00081-а, 08-01-00440-а).
Поступила 24 августа 2009 г.

Рассмотрим теперь системы линейных уравнений (1.1). В дальнейшем будем считать u n-мерным вектором, а коэффициенты a, b и c — квадратными матрицами. Введем понятие обобщенных инвариантов, предложенное в [3], [5].

Определение 1. *Обобщенными x-инвариантами Лапласа системы (1.1) называются матрицы X_i, заданные рекуррентными формулами*

$$X_1 = H_1 = \frac{\partial}{\partial x}a + ba - c, \quad X_{i+1} = H_{i+1}X_i, \tag{1.4}$$

$$H_{i+1} = \frac{\partial}{\partial x}(a_i) - \frac{\partial}{\partial y}b + [b, a_i] + H_i, \ \ \frac{\partial}{\partial y}(X_i) + a_iX_i - X_ia = 0. \tag{1.5}$$

Аналогично, обобщенными y-инвариантами Лапласа системы (1.1) называются матрицы Y_i, заданные рекуррентными формулами

$$Y_1 = K_1 = \frac{\partial}{\partial y}a + ab - c, \quad Y_{i+1} = K_{i+1}Y_i,$$

$$K_{i+1} = \frac{\partial}{\partial y}(b_i) - \frac{\partial}{\partial x}a + [a, b_i] + K_i, \quad \frac{\partial}{\partial x}(Y_i) + b_iY_i - Y_ib = 0.$$

Заметим, что в случае вырожденных инвариантов Лапласа уравнения для нахождения матриц a_i и b_i могут быть неразрешимы, а при наличии решений матрицы a_i и b_i определены неоднозначно. Справедливо следующее утверждение (см. [3], [5], [9]):

Теорема 1. *Инвариант Лапласа X_i системы (1.1) существует и определен однозначно тогда и только тогда, когда для всех $k < i$ выполнены условия*

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)(\ker X_k) \subset \ker X_k, \tag{1.6}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)(ImX_k) \subset ImX_k. \tag{1.7}$$

Известно (см. [10], [11]), что если система уравнений (1.1) имеет решение

$$u = \sum_{i=0}^{m} p_i(x, y)\frac{d^i}{dx^i}X(x),$$

где $X(x)$ — столбец произвольных функций $x_1(x), \ldots, x_n(x)$ переменного x, а $p_0, p_1, \ldots, p_m$ — заданные матрицы-функции переменных x и y, причем $\det p_m \neq 0$, тогда обобщенный инвариант Лапласа $X_{m+1} = 0$.

В данной работе для систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа получена явная формула решения, содержащего $2n$ произвольных функций. Предлагаемая схема построения решения системы уравнений (1.1) является обобщением так называемого метода "спуска"нахождения высших симметрий для систем уравнений экспоненциального типа (см. [12], [13]). Также в работе предложен алгоритм построения решения краевой задачи с данными на характеристиках.

В качестве примера рассматривается линеаризованная цепочка Тоды серии D_n. Для линеаризованных цепочек Тоды с матрицами Картана A_n, B_n, C_n решение задачи Гурса приведено в работах [14], [15].

Предложенный в работе алгоритм позволяет строить решения и других краевых задач, например, решение задачи Коши.

2. Алгоритм построения общего решения линейной системы уравнений

Пусть для системы уравнений (1.1) найдутся $r > 0$ и $s > 0$ такие, что для всех $i \leqslant r, \ j \leqslant s$ ее инварианты Лапласа X_i и Y_j существуют, однозначно определены и $X_r = Y_s = 0$.

Из Теоремы 1 следует, что существуют матрицы B_k такие, что справедливы соотношения

$$(\frac{\partial}{\partial x} + b)X_k = X_k(\frac{\partial}{\partial x} + B_k),$$

$$(\frac{\partial}{\partial y}+a_k)X_k = X_k(\frac{\partial}{\partial y}+a), \quad k=1,2,\dots. \tag{2.1}$$

Первую формулу (1.5) можно записать следующим образом в виде

$$(\frac{\partial}{\partial y}+a_k)(\frac{\partial}{\partial x}+b)-H_k = (\frac{\partial}{\partial x}+b)(\frac{\partial}{\partial y}+a_k)-H_{k+1}. \tag{2.2}$$

Систему (1.1) можно представить в виде

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)(\frac{\partial}{\partial y}+a)u = H_1 u,$$

последнюю перепишем следующим образом:

$$(\frac{\partial}{\partial y}+a)u = u_1, \quad (\frac{\partial}{\partial x}+b)u_1 = H_1 u. \tag{2.3}$$

Предположим, что инварианты $X_1,\dots,X_k$ — невырожденные матрицы. Теперь, полагая

$$u_1 = X_1 v_1,$$

из уравнения (2.3), с учетом формулы (2.1) при $k=1$, получаем, что

$$u = (\frac{\partial}{\partial x}+B_1)v_1 \tag{2.4}$$

и

$$(\frac{\partial}{\partial y}+a)(\frac{\partial}{\partial x}+B_1)v_1 = H_1 v_1. \tag{2.5}$$

Умножим левую и правую часть уравнения (2.5) на матрицу H_1 и, учитывая формулу (2.2) при $k=1$, получим

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)(\frac{\partial}{\partial y}+a_1)X_1 v_1 = X_2 v_1. \tag{2.6}$$

Далее систему (2.6) запишем в следующем виде:

$$(\frac{\partial}{\partial y}+a_1)X_1 v_1 = u_2, \quad (\frac{\partial}{\partial x}+b)u_2 = X_2 v_1$$

Полагая $u_2 = X_2 v_2$, как и выше, получаем, что

$$v_1 = (\frac{\partial}{\partial x}+B_2)v_2, \tag{2.7}$$

где v_2 — решение системы уравнений

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)(\frac{\partial}{\partial y}+a_2)X_2 v_2 = X_3 v_2.$$

При этом из (2.4) и (2.7) имеем

$$u = (\frac{\partial}{\partial x}+B_1)(\frac{\partial}{\partial x}+B_2)v_2.$$

Напомним, что так как инварианты $X_1,\dots,X_k$ по предположению невырожденные матрицы, то этот процесс можно продолжить и после k-го шага получаем следующее представление решения u исходной системы уравнений (1.1)

$$u = (\frac{\partial}{\partial x}+B_1)(\frac{\partial}{\partial x}+B_2)\dots(\frac{\partial}{\partial x}+B_k)v_k, \tag{2.8}$$

где v_k — решение системы

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)(\frac{\partial}{\partial y}+a_k)X_k v_k = X_{k+1} v_k. \tag{2.9}$$

Формулу (2.8), учитывая соотношения (2.1), можно записать так:

$$u = X_1^{-1}(\frac{\partial}{\partial x}+b)X_1\dots X_k^{-1}(\frac{\partial}{\partial x}+b)X_k v_k. \tag{2.10}$$

Отметим, что обобщенные инварианты $X_{k+1},\dots,X_{r-1}$ являются вырожденными матрицами, при этом

$$rank X_{k_{j-1}+1} = rank X_{k_{j-1}+2} = \dots = rank X_{k_j} = n_j,$$

$$n-1 \geq n_1 > n_2 > \cdots > n_m \geq 1, \ \ j=1,2,\dots,m, \ \ k_0=k, \ \ k_m=r-1. \tag{2.11}$$

Так как $kerX_i \subseteq kerX_{i+1}$, $i=k+1,\dots,r-1$, то

$$kerX_{k_{j-1}+1} = \cdots = kerX_{k_j}, \ \ j=1,2,\dots,m. \tag{2.12}$$

Кроме условия (1.7) будем налагать на инварианты дополнительное ограничение, а именно, пусть

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)ImX_i = ImX_i, \ \ ImX_i \cap kerX_i = \{0\}, \ i=k+1,\dots,r-1. \tag{2.13}$$

Пусть P_j и Q_j, $j = 1,\dots,m$ — матрицы, столбцы которых образуют базис ImX_{k_j} и $kerX_{k_j}$, соответственно, причем P_j и Q_j имеют следующую структуру $P_j = (e_1, e_2, \dots, e_{n_j})$, $Q_j = (e_{n_j+1},\dots,e_n)$, $j = 1,\dots,m$. Матрицу Q_j можно выбрать так, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)Q_j = 0, j=1,\dots,m. \tag{2.14}$$

Действительно, в силу формулы (1.6) имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)Q_j = Q_jA_j, \tag{2.15}$$

где A_j — квадратная матрица порядка $(n-n_j)$. Далее представим матрицу Q_j в виде

$$Q_j = \tilde{Q}_jC_j,$$

где $detC_j \neq 0$. Тогда уравнение (2.15) запишется в виде

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)\tilde{Q}_j\right]C_j = -\tilde{Q}_j\left(\frac{\partial C_j}{\partial y}-C_jA_j\right).$$

Пусть C_j — решение линейной системы уравнений

$$\frac{\partial C_j}{\partial y} = C_jA_j,$$

тогда $\tilde{Q}_j$ — решение уравнения (2.14).

Из формулы (1.7) следует, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)P_j = P_j\lambda_j, \ j=1,\dots,m, \tag{2.16}$$

где λ_j — квадратные матрицы порядка n_j, причем λ_m можно положить равной нулю. Ясно, что справедливы соотношения

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)P_j = P_jp_j + Q_js_j, \quad X_iP_j = P_j\psi_i, \tag{2.17}$$

$$i=k_{j-1}+1,\dots,k_j, \ \ j=1,\dots,m,$$

здесь p_j, ψ_i — квадратные матрицы порядка n_j, а s_j — матрица размером $(n-n_j) \times n_j$.

Далее систему (2.9) запишем так:

$$(\frac{\partial}{\partial y}+a_k)X_kv_k = u_k, \quad (\frac{\partial}{\partial x}+b)u_k = X_{k+1}v_k. \tag{2.18}$$

Из равенств (2.13) следует, что u_k и v_k можно представить в виде

$$u_k = X_{k+1}v_{k+1}, \ v_k = X_{k+1}q_k + E_k, \ \ E_k \in kerX_{k+1}.$$

Теперь систему уравнений (2.18) перепишем следующим образом:

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial y}+a_k)X_k[X_{k+1}q_k+E_k] = X_{k+1}v_{k+1}, \\ (\frac{\partial}{\partial x}+b)X_{k+1}v_{k+1} = X_{k+1}^2q_k. \end{cases} \tag{2.19}$$

Умножая левую и правую части первого уравнения системы (2.19) на матрицу H_{k+1} слева, получаем систему:

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial y}+a_{k+1})X_{k+1}^2q_k = H_{k+1}X_{k+1}v_{k+1}, \\ (\frac{\partial}{\partial x}+b)X_{k+1}v_{k+1} = X_{k+1}^2q_k. \end{cases} \tag{2.20}$$

Нетрудно показать, что система (2.20) эквивалентна следующей системе:

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)(\frac{\partial}{\partial y}+a_{k+1})X_{k+1}v_{k+1}=X_{k+2}v_{k+1}, \tag{2.21}$$

которую перепишем в виде

$$(\tfrac{\partial}{\partial y}+a_{k+1})X_{k+1}v_{k+1}=u_{k+1},\ (\tfrac{\partial}{\partial x}+b)u_{k+1}=X_{k+2}v_{k+1}. \tag{2.22}$$

В силу (2.12), (2.13) справедливы следующие представления:

$$u_{k+1}=X_{k+2}v_{k+2},\ v_{k+1}=X_{k+2}q_{k+1}+E_{k+1},\ E_{k+1}\in kerX_{k+2}.$$

Тогда система (2.22) примет следующий вид:

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial y}+a_{k+1})X_{k+1}[X_{k+2}q_{k+1}+E_{k+1}]=X_{k+2}v_{k+2},\\ (\frac{\partial}{\partial x}+b)X_{k+2}v_{k+2}=X^2_{k+2}q_{k+1}. \end{cases} \tag{2.23}$$

Умножая левую и правую части первого уравнения системы (2.23) на матрицу H_{k+2}, приходим к системе

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial y}+a_{k+2})X^2_{k+2}q_{k+1}=H_{k+2}X_{k+2}v_{k+2},\\ (\frac{\partial}{\partial x}+b)X_{k+2}v_{k+2}=X^2_{k+2}q_{k+1}, \end{cases}$$

которая эквивалентна следующей:

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)(\frac{\partial}{\partial y}+a_{k+2})X_{k+2}v_{k+2}=X_{k+3}v_{k+2}.$$

Продолжая этот процесс, на $(i-1)$-м шаге мы приходим к системе

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)(\frac{\partial}{\partial y}+a_{k+i})X_{k+i}v_{k+i}=X_{k+i+1}v_{k+i}, \tag{2.24}$$

которую, как и выше, перепишем так

$$(\tfrac{\partial}{\partial y}+a_{k+i})X_{k+i}v_{k+i}=u_{k+i},\ \ (\tfrac{\partial}{\partial x}+b)u_{k+i}=X_{k+i+1}v_{k+i} \tag{2.25}$$

и, полагая

$$u_{k+i}=X_{k+i+1}v_{k+i+1},\ \ v_{k+i}=X_{k+i+1}q_{k+i}+E_{k+i},\ E_{k+i}\in kerX_{k+i+1},$$

приходим к уравнениям

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial y}+a_{k+i})X_{k+i}(X_{k+i+1}q_{k+i}+E_{k+i})=X_{k+i+1}v_{k+i+1},\\ (\frac{\partial}{\partial x}+b)X_{k+i+1}v_{k+i+1}=X^2_{k+i+1}q_{k+i}. \end{cases} \tag{2.26}$$

Умножая левую и правую части первого уравнения системы (2.26) на матрицу H_{k+i+1}, мы получим систему вида

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial y}+a_{k+i+1})X^2_{k+i+1}q_{k+i}=H_{k+i+1}X_{k+i+1}v_{k+i+1},\\ (\frac{\partial}{\partial x}+b)X_{k+i+1}v_{k+i+1}=X^2_{k+i+1}q_{k+i}. \end{cases} \tag{2.27}$$

Последняя эквивалентна следующей:

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)(\frac{\partial}{\partial y}+a_{k+i+1})X_{k+i+1}v_{k+i+1}=X_{k+i+2}v_{k+i+1}. \tag{2.28}$$

Далее, при $i=r-k-3$ уравнение (2.28) принимает вид

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)(\frac{\partial}{\partial y}+a_{r-2})X_{r-2}v_{r-2}=X_{r-1}v_{r-2},$$

которую перепишем так

$$(\tfrac{\partial}{\partial y}+a_{r-2})X_{r-2}v_{r-2}=u_{r-2},\ (\tfrac{\partial}{\partial x}+b)u_{r-2}=X_{r-1}v_{r-2}.$$

Полагая

$$u_{r-2}=X_{r-1}v_{r-1},\ v_{r-2}=X_{r-1}q_{r-2}+E_{r-2},\ E_{r-2}\in kerX_{r-1},$$

приходим к уравнениям

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial y}+a_{r-2})X_{r-2}(X_{r-1}q_{r-2}+E_{r-2})=X_{r-1}v_{r-1},\\ (\frac{\partial}{\partial x}+b)X_{r-1}v_{r-1}=X^2_{r-1}q_{r-2}. \end{cases} \tag{2.29}$$

Умножая левую и правую части первого уравнения системы (2.29) на матрицу H_{r-1}, мы получим систему

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial y}+a_{r-1})X_{r-1}^2q_{r-2}=H_{r-1}X_{r-1}v_{r-1}, \\ (\frac{\partial}{\partial x}+b)X_{r-1}v_{r-1}=X_{r-1}^2q_{r-2}. \end{cases} \tag{2.30}$$

Последняя эквивалентна следующей:

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)(\frac{\partial}{\partial y}+a_{r-1})X_{r-1}v_{r-1}=0, \tag{2.31}$$

поскольку $X_r=0$.
Будем искать v_{r-1} в виде

$$v_{r-1}=P_mH+Q_mG. \tag{2.32}$$

Напомним, что столбцы матриц P_m и Q_m образуют базисы ImX_{r-1} и $kerX_{r-1}$ соответственно. После подстановки (2.32) в уравнение (2.31) последнее примет вид

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)X_{r-1}(\frac{\partial}{\partial y}+a)\left(P_mH+Q_mG\right)=0,$$

здесь мы воспользовались соотношением (2.1). Теперь, используя выражения (2.14), (2.16), (2.17) и учитывая, что $\lambda_m=0$, последовательно получаем:

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)X_{r-1}\left([P_mp_m+Q_ms_m]H+P_m\frac{\partial}{\partial y}H+Q_m\frac{\partial}{\partial y}G\right)=0,$$

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)\left(P_m\psi_{r-1}p_mH+P_m\psi_{r-1}\frac{\partial}{\partial y}H\right)=0,$$

$$(\frac{\partial}{\partial y}+p_m)H=\psi_{r-1}^{-1}\phi(y), \tag{2.33}$$

здесь $\phi(y)$ — произвольная вектор-функция. Далее будем считать, что $\phi(y)$ тождественно равна нулю.
Таким образом, v_{r-1} определяется из формулы (2.32), где H — общее решение однородной системы уравнений

$$(\frac{\partial}{\partial y}+p_m)H=0,$$

содержащее n_m произвольных функций, зависящих от x, а G — произвольная вектор-функция.

Далее, из второго уравнения системы (2.30) определим $X_{r-1}q_{r-2}$, последнее представимо в виде $P_m\alpha_{r-2}$. Следовательно, второе уравнение (2.30) с учетом формулы (2.32) примет вид:

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)X_{r-1}\left(P_mH+Q_mG\right)=X_{r-1}P_m\alpha_{r-2}$$

или

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)P_m\psi_{r-1}H=P_m\psi_{r-1}\alpha_{r-2}.$$

Отсюда получаем, что

$$\alpha_{r-2}=\psi_{r-1}^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_{r-1}H\right).$$

Таким образом,

$$X_{r-1}q_{r-2}=P_m\psi_{r-1}^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_{r-1}H\right) \tag{2.34}$$

Из первого уравнения (2.30), с использованием равенства

$$H_{r-1}P_m=P_m\psi_{r-1}\psi_{r-2}^{-1},$$

которое проверяется так:

$$X_{r-1}P_m=P_m\psi_{r-1}=H_{r-1}X_{r-2}P_m=H_{r-1}P_m\psi_{r-2},$$

а также формулы (2.32), (2.17) последовательно получаем

$$X_{r-1}\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)P_m\alpha_{r-2}=H_{r-1}X_{r-1}P_mH,$$

$$X_{r-1}\left(P_m p_m \alpha_{r-2} + P_m \frac{\partial \alpha_{r-2}}{\partial y}\right) = H_{r-1} P_m \psi_{r-1} H,$$

$$(\frac{\partial}{\partial y} + p_m)\alpha_{r-2} = \psi_{r-2}^{-1}\psi_{r-1} H. \tag{2.35}$$

Учитывая формулы (2.32), (2.34) и (2.35) нетрудно показать, что первое уравнение системы (2.29) обращается в тождество. Таким образом

$$v_{r-2} = X_{r-1} q_{r-2} + E_{r-2} = P_m \psi_{r-1}^{-1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_{r-1} H\right) + Q_m A,$$

здесь A — произвольная вектор-функция. Тогда

$$X_{r-2} v_{r-2} = P_m \psi_{r-2} \psi_{r-1}^{-1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_{r-1} H\right). \tag{2.36}$$

Из второго уравнения системы (2.27), при $i = r-k-3$, как и выше, получаем следующее представление:

$$X_{r-2} q_{r-3} = P_m \psi_{r-2}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \psi_{r-2} \psi_{r-1}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \psi_{r-1} H. \tag{2.37}$$

Далее, используя соотношение

$$H_{r-2} P_m = P_m \psi_{r-2} \psi_{r-3}^{-1},$$

также получаем, что

$$X_{r-3} v_{r-3} = P_m \psi_{r-3} \psi_{r-2}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \psi_{r-2} \psi_{r-1}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \psi_{r-1} H.$$

Продолжая этот процесс и учитывая, что

$$rank X_{k_{m-1}+1} = rank X_{k_{m-1}+2} = \dots = rank X_{r-1},$$

получаем следующую формулу для вычисления $X_{k_{m-1}+1} v_{k_{m-1}+1}$:

$$X_{k_{m-1}+1} v_{k_{m-1}+1} = P_m \psi_{k_{m-1}+1} \psi_{k_{m-1}+2}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \psi_{k_{m-1}+2} \psi_{k_{m-1}+3}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \dots$$

$$\dots \frac{\partial}{\partial x} \psi_{r-2} \psi_{r-1}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \psi_{r-1} H. \tag{2.38}$$

Введем обозначение

$$R_{k_{m-1}+1} = \psi_{k_{m-1}+2}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \psi_{k_{m-1}+2} \psi_{k_{m-1}+3}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \dots \psi_{r-2} \psi_{r-1}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \psi_{r-1} H.$$

Далее, из второго уравнения системы

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial y} + a_{k_{m-1}+1}) X_{k_{m-1}+1}^2 q_{k_{m-1}} = H_{k_{m-1}+1} X_{k_{m-1}+1} v_{k_{m-1}+1}, \\ (\frac{\partial}{\partial x} + b) X_{k_{m-1}+1} v_{k_{m-1}+1} = X_{k_{m-1}+1}^2 q_{k_{m-1}} \end{cases} \tag{2.39}$$

найдем $X_{k_{m-1}+1} q_{k_{m-1}}$:

$$X_{k_{m-1}+1} q_{k_{m-1}} = P_m \psi_{k_{m-1}+1}^{-1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_{k_{m-1}+1} R_{k_{m-1}+1}\right). \tag{2.40}$$

Определим матрицу $h_{k_{m-1}+1}$ такую, что

$$H_{k_{m-1}+1} P_m = P_m h_{k_{m-1}+1}.$$

Действительно, существует F такое, что $P_m = X_{k_{m-1}} F$, поскольку $P_m \subset P_{m-1}$, тогда

$$H_{k_{m-1}+1} P_m = H_{k_{m-1}+1} X_{k_{m-1}} F = X_{k_{m-1}+1} F = P_m h_{k_{m-1}+1}.$$

Будем предполагать, что

$$rank X_{k_{m-1}+1} = n_m = rank X_{k_{m-1}+1} F,$$

то есть $h_{k_{m-1}+1}$ — невырожденная матрица.

Полагая $X_{k_{m-1}+1} q_{k_{m-1}} = P_m \alpha_{k_{m-1}}$ и подставляя функции (2.38), (2.40) в первое уравнение системы (2.39), получаем, что

$$(\frac{\partial}{\partial y} + p_m)\alpha_{k_{m-1}} = \psi_{k_{m-1}+1}^{-1} h_{k_{m-1}+1} \psi_{k_{m-1}+1} R_{k_{m-1}+1}. \tag{2.41}$$

Теперь выберем ядро $E_{k_{m-1}}$ такое, чтобы выполнялась система

$$\left\{\begin{array}{l}(\frac{\partial}{\partial y}+a_{k_{m-1}})X_{k_{m-1}}(X_{k_{m-1}+1}q_{k_{m-1}}+E_{k_{m-1}})=X_{k_{m-1}+1}v_{k_{m-1}+1},\\ (\frac{\partial}{\partial x}+b)X_{k_{m-1}+1}v_{k_{m-1}+1}=X^2_{k_{m-1}+1}q_{k_{m-1}}.\end{array}\right. \tag{2.42}$$

Для того чтобы найти $E_{k_{m-1}}$, положим $E_{k_{m-1}}=Q_m\gamma_m$. Подставляя функции (2.38), (2.40) в первое уравнение системы (2.42), при этом учитывая соотношение (2.41), последовательно получаем

$$X_{k_{m-1}}(\frac{\partial}{\partial y}+a)\left(P_m\alpha_{k_{m-1}}+Q_m\gamma_m\right)=P_m\psi_{k_{m-1}+1}R_{k_{m-1}+1}$$

или

$$X_{k_{m-1}}\left(P_m\psi^{-1}_{k_{m-1}+1}h_{k_{m-1}+1}\psi_{k_{m-1}+1}R_{k_{m-1}+1}+Q_ms_m\alpha_{k_{m-1}}+Q_m\frac{\partial}{\partial y}\gamma_m\right)=$$
$$=P_m\psi_{k_{m-1}+1}R_{k_{m-1}+1}.$$

Нетрудно показать, что справедливы соотношения

$$X_{k_{j-1}}P_j\psi^{-1}_{k_{j-1}+1}h_{k_{j-1}+1}\psi_{k_{j-1}+1}=P_j\psi_{k_{j-1}+1}+X_{k_{j-1}}Q_jS_j, \tag{2.43}$$
$$j=m,m-1,\ldots,1.$$

Теперь, используя (2.43) при $j=m$, последнее равенство можно переписать в виде

$$X_{k_{m-1}}Q_m\left(\frac{\partial}{\partial y}\gamma_m+S_mR_{k_{m-1}+1}+s_m\alpha_{k_{m-1}}\right)=0.$$

Выбираем γ_m такое, что

$$\frac{\partial}{\partial y}\gamma_m+S_mR_{k_{m-1}+1}+s_m\alpha_{k_{m-1}}=0,$$

тогда

$$\gamma_m=-\int\limits_{y_0}^{y}\left(s_m\psi^{-1}_{k_{m-1}+1}\frac{\partial}{\partial x}\psi_{k_{m-1}+1}R_{k_{m-1}+1}+S_mR_{k_{m-1}+1}\right)+W_m(x) \tag{2.44}$$

является решением последнего уравнения, $W_m(x)$ — столбец, состоящий из n_m произвольных функций.
Тогда из (2.40), (2.44) следует, что $v_{k_{m-1}}$ находится по формуле

$$v_{k_{m-1}}=P_m\psi^{-1}_{k_{m-1}+1}\frac{\partial}{\partial x}\psi_{k_{m-1}+1}R_{k_{m-1}+1}+Q_mW_m(x)-$$
$$-Q_m\int\limits_{y_0}^{y}\left(s_m\psi^{-1}_{k_{m-1}+1}\frac{\partial}{\partial x}\psi_{k_{m-1}+1}R_{k_{m-1}+1}+S_mR_{k_{m-1}+1}\right).$$

Отсюда получаем, что

$$X_{k_{m-1}}v_{k_{m-1}}=X_{k_{m-1}}P_{m-1}\begin{pmatrix}\psi^{-1}_{k_{m-1}+1}\frac{\partial}{\partial x}\psi_{k_{m-1}+1}R_{k_{m-1}+1}\\ \tilde{\gamma}_m\end{pmatrix}, \tag{2.45}$$

здесь $\tilde{\gamma}_m$ — первые $(n_{m-1}-n_m)$ координаты вектора γ_m.
Введем обозначение

$$R_{k_{m-1}}=\begin{pmatrix}\psi^{-1}_{k_{m-1}+1}\frac{\partial}{\partial x}\psi_{k_{m-1}+1}R_{k_{m-1}+1}\\ \tilde{\gamma}_m\end{pmatrix},$$

тогда вектор-функция (2.435) запишется в виде

$$X_{k_{m-1}}v_{k_{m-1}}=P_{m-1}\psi_{k_{m-1}}R_{k_{m-1}}.$$

Подставляя последнюю во второе уравнение системы (2.27), при $i=k_{m-1}-k-1$ получаем следующее представление для $X_{k_{m-1}}q_{k_{m-1}-1}$:

$$X_{k_{m-1}}q_{k_{m-1}-1}=P_{m-1}\psi^{-1}_{k_{m-1}}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_{m-1})\psi_{k_{m-1}}R_{k_{m-1}},$$

здесь λ_{m-1} определяются из уравнения $(\frac{\partial}{\partial x}+b)P_{m-1}=P_{m-1}\lambda_{m-1}$. Тогда

$$X_{k_{m-1}}v_{k_{m-1}-1}=P_{m-1}\psi_{k_{m-1}-1}\psi^{-1}_{k_{m-1}}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_{m-1})\psi_{k_{m-1}}R_{k_{m-1}}.$$

Далее, с учетом того, что

$$rankX_{k_{m-2}+1}=rankX_{k_{m-2}+2}=\dots=rankX_{k_{m-1}},$$

аналогично, как и на предыдущем шаге, определяем (см. (2.38))

$$X_{k_{m-2}+1}v_{k_{m-2}+1}=P_{m-1}\psi_{k_{m-2}+1}\psi^{-1}_{k_{m-2}+2}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_{m-1})\psi_{k_{m-2}+2}\times$$

$$\times\psi^{-1}_{k_{m-2}+3}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_{m-1})\dots\psi_{k_{m-1}-1}\psi^{-1}_{k_{m-1}}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_{m-1})\psi_{k_{m-1}}R_{k_{m-1}}.$$

Введя обозначение

$$R_{k_{m-2}+1}=\psi^{-1}_{k_{m-2}+2}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_{m-1})\psi_{k_{m-2}+2}\psi^{-1}_{k_{m-2}+3}\times$$

$$\times(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_{m-1})\dots\psi_{k_{m-1}-1}\psi^{-1}_{k_{m-1}}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_{m-1})\psi_{k_{m-1}}R_{k_{m-1}}$$

и используя последнюю формулу, как и выше, из системы (2.26) при $i=k_{m-1}-k$ определяем $v_{k_{m-2}}$

$$v_{k_{m-2}}=P_{m-1}\psi^{-1}_{k_{m-2}+1}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_{m-1})\psi_{k_{m-2}+1}R_{k_{m-2}+1}+Q_{m-1}W_{m-1}(x)-$$

$$-Q_{m-1}\int\limits_{y_0}^{y}\left(s_{m-1}\psi^{-1}_{k_{m-2}+1}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_{m-1})\psi_{k_{m-2}+1}R_{k_{m-2}+1}+B_{m-1}R_{k_{m-2}+1}\right).$$

Отсюда получаем (ср. (2.45))

$$X_{k_{m-2}}v_{k_{m-2}}=X_{k_{m-2}}P_{m-2}R_{k_{m-2}},$$

где

$$R_{k_{m-2}}=\begin{pmatrix}\psi^{-1}_{k_{m-2}+1}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_{m-1})\psi_{k_{m-2}+1}R_{k_{m-2}+1}\\ \tilde{\gamma}_{m-1}\end{pmatrix},$$

здесь $\tilde{\gamma}_{m-1}$ — первые $(n_{m-2}-n_{m-1})$ координаты вектора

$$\gamma_{m-1}=-\int\limits_{y_0}^{y}(s_{m-1}\psi^{-1}_{k_{m-2}+1}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_{m-1})\psi_{k_{m-2}+1}R_{k_{m-2}+1}+$$

$$+B_{m-1}R_{k_{m-2}+1})dy+W_{m-1}(x).$$

Продолжая этот процесс, мы получаем, что v_{k_j} вычисляются по формулам

$$X_{k_j}v_{k_j}=X_{k_j}P_jR_{k_j},$$

где R_{k_j} находятся:

$$R_{k_j}=\begin{pmatrix}\psi^{-1}_{k_j+1}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_{j+1})\psi_{k_j+1}R_{k_j+1}\\ \tilde{\gamma}_{j+1}\end{pmatrix},$$

$\tilde{\gamma}_{j+1}$ — первые (n_j-n_{j+1}) координаты вектора

$$\gamma_{j+1}=-\int\limits_{y_0}^{y}\left(s_{j+1}\psi^{-1}_{k_j+1}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_{j+1})\psi_{k_j+1}R_{k_j+1}+B_{j+1}R_{k_j+1}\right)+W_{j+1}(x),$$

а R_{k_j+1} находятся из рекуррентной формулы

$$R_{k_j+1}=\psi^{-1}_{k_j+2}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_{j+1})\psi_{k_j+2}\psi^{-1}_{k_j+3}\dots\psi_{k_{j+1}-1}\psi^{-1}_{k_{j+1}}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_{j+1})\psi_{k_{j+1}}R_{k_{j+1}},$$

$$j=m-1,m-2,\dots,0,\ \ k_m=r-1,\ k_0=k,\ R_{k_m}=H.$$

Используя последние формулы, мы получаем представление для v_k:

$$v_k = P_k R_k,$$

$$R_{k_j} = \begin{pmatrix} \psi^{-1}_{k_j+1}(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_{j+1})\psi_{k_j+1}R_{k_j+1} \\ \tilde{\gamma}_{j+1} \end{pmatrix}, \tag{2.46}$$

$$\gamma_{j+1} = -\int\limits_{y_0}^{y} \left(s_{j+1}\psi^{-1}_{k_j+1}(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_{j+1})\psi_{k_j+1}R_{k_j+1} + B_{j+1}R_{k_j+1} \right) + W_{j+1}(x), \tag{2.47}$$

где

$$R_{k_j+1} = \psi^{-1}_{k_j+2}(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_{j+1})\psi_{k_j+2}\psi^{-1}_{k_j+3}\dots\psi_{k_{j+1}-1}\psi^{-1}_{k_{j+1}}(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_{j+1})\psi_{k_{j+1}}R_{k_{j+1}}, \tag{2.48}$$

$$j = m-1, m-2, \dots, 0, \;\; k_m = r-1, \;\; k_0 = k, \; R_{k_m} = H.$$

Таким образом, решение системы уравнений (1.1), зависящее от n произвольных функций, вычисляется по формулам (2.10), (2.46)–(2.48). Аналогично строится другое специальное решение, содержащее n произвольных функций, зависящих от y.

Пусть обобщенные инварианты $Y_1, \dots, Y_l$ являются невырожденными матрицами, а инварианты $Y_{l+1}, \dots, Y_{s-1}$ устроены так:

$$rankY_{l_{j-1}+1} = rankY_{l_{j-1}+2} = \dots = rankY_{l_j} = m_j,$$

$$n-1 \geq m_1 > m_2 > \dots > m_p \geq 1, \;\; j = 1, 2, \dots, p, \;\; l_0 = l, \;\; l_p = s-1.$$

Тогда решение системы уравнений (1.1) имеет вид:

$$\bar{u} = Y_1^{-1}(\frac{\partial}{\partial y} + a)Y_1 \dots Y_l^{-1}(\frac{\partial}{\partial y} + a)Y_l \bar{v}_l, \tag{2.49}$$

$$\bar{v}_l = P_l \bar{R}_l,$$

$$\bar{R}_{l_j} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}^{-1}_{l_j+1}(\frac{\partial}{\partial y} + \bar{\lambda}_{j+1})\bar{\psi}_{l_j+1}\bar{R}_{l_j+1} \\ \tilde{\bar{\gamma}}_{j+1} \end{pmatrix}, \tag{2.50}$$

$$\bar{\gamma}_{j+1} = -\int\limits_{x_0}^{x} \left(\bar{s}_{j+1}\bar{\psi}^{-1}_{l_j+1}(\frac{\partial}{\partial y} + \bar{\lambda}_{j+1})\bar{\psi}_{l_j+1}\bar{R}_{l_j+1} + \bar{B}_{j+1}R_{l_j+1} \right) + \bar{W}_{j+1}(y),$$

где

$$\bar{R}_{k_j+1} = \bar{\psi}^{-1}_{k_j+2}(\frac{\partial}{\partial y} + \bar{\lambda}_{j+1})\bar{\psi}_{k_j+2}\bar{\psi}^{-1}_{k_j+3}\dots\bar{\psi}_{k_{j+1}-1}\bar{\psi}^{-1}_{k_{j+1}}(\frac{\partial}{\partial y} + \bar{\lambda}_{j+1})\bar{\psi}_{k_{j+1}}\bar{R}_{k_{j+1}},$$

$$j = p-1, p-2, \dots, 0, \;\; l_p = s-1, \;\; l_0 = l, \; \bar{R}_{l_p} = \bar{H}.$$

3. Задача Гурса

Обозначим через v сумму специальных решений (2.10), (2.46) и (2.49), (2.50) системы уравнений (1.1):

$$v = u + \bar{u} \tag{3.1}$$

и определим вектор-функции $W_j(x)$, H, $\bar{W}_q(y)$, $\bar{H}$, $j = 1, \dots, m$, $q = 1, \dots, p$, при которых выполнены граничные условия (1.3).

Полагая в формуле (3.1) $y = y_0$ и учитывая (2.10), будем иметь

$$X_1^{-1}(\frac{\partial}{\partial x} + b)X_1 X_2^{-1}(\frac{\partial}{\partial x} + b)X_2 \dots X_k^{-1}(\frac{\partial}{\partial x} + b)X_k v_k(x, y_0) = F(x), \tag{3.2}$$

где $F(x) = \Psi(x) - \bar{u}(x, y_0)$.

Отметим, что $\bar{u}(x, y_0)$ имеет следующую структуру

$$\bar{u}(x, y_0) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=0}^{l_{j-1}} \alpha_i^j(x)\frac{d^i}{dy^i}\bar{W}_j(y_0),$$

где $\alpha_i^j(x)$ — известные матрицы порядка $n \times (m_{j-1} - m_j)$, а $\bar{W}_j(y_0)$ столбец длины $(m_{j-1} - m_j)$.

Введем обозначения

$$Z_i(x) = X_i X_{i+1}^{-1}(\frac{\partial}{\partial x} + b)X_{i+1} \dots X_{k-1} X_k^{-1}(\frac{\partial}{\partial x} + b)X_k v_k(x, y_0), \tag{3.3}$$

$$i = 1, \dots, k-1,$$

$$V_i^j(x) = \psi_i^{-1}(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_{j+1})\psi_i \psi_{i+1}^{-1}(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_{j+1}) \dots$$

$$\dots \psi_{k_{j+1}-1}\psi_{k_{j+1}}^{-1}(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_{j+1})\psi_{k_{j+1}} R_{k_{j+1}}, \tag{3.4}$$

$$i = k_j + 1, \dots, k_{j+1},\ j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Ясно, что справедливы соотношения

$$Z_i = X_i X_{i+1}^{-1}(\frac{\partial}{\partial x} + b)Z_{i+1},\ \ i = 1, 2, \dots, k-1, \tag{3.5}$$

$$V_i^j = \psi_i^{-1}(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_{j+1})\psi_i V_{i+1}^j,\ i = k_j + 1, \dots, k_{j+1} - 1. \tag{3.6}$$

Теперь, используя формулы (3.3), уравнение (3.2) примет вид

$$X_1^{-1}(\frac{\partial}{\partial x} + b)Z_1 = F(x). \tag{3.7}$$

Пусть $A(x)$ — решение однородной системы уравнений

$$(\frac{\partial}{\partial x} + b)A = 0$$

такое, что $A(x_0) = E$.

Тогда решение системы (3.7) представляется в виде

$$Z_1(x) = A(x)Z_1(x_0) + A(x)\int\limits_{x_0}^{x} A^{-1}(\varsigma)X_1 F(\varsigma)d\varsigma, \tag{3.8}$$

а из (3.5) получаем

$$Z_{i+1}(x) = A(x)Z_{i+1}(x_0) + A(x)\int\limits_{x_0}^{x} A^{-1}(\varsigma)X_{i+1}X_i^{-1}Z_i(\varsigma)d\varsigma, \tag{3.9}$$

$$i = 1, 2, \dots, k-2.$$

Из формулы (3.9), с учетом (3.8), определяем $Z_{k-1}(x)$. Таким образом, для определения $v_k(x, y_0)$, согласно (3.3), получаем уравнение

$$X_{k-1}X_k^{-1}(\frac{\partial}{\partial x} + b)X_k v_k(x, y_0) = Z_{k-1}(x)$$

и, следовательно,

$$X_k v_k(x, y_0) = A(x)X_k v_k(x_0, y_0) + A(x)\int\limits_{x_0}^{x} A^{-1}(\varsigma)X_k X_{k-1}^{-1}Z_{k-1}(\varsigma)d\varsigma. \tag{3.10}$$

Далее, из формул (3.1) и (3.2) следует, что функция $v_k(x, y_0)$ устроена следующим образом:

$$v_k(x, y_0) = \alpha(x) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{k_{j-1}-k} \beta_i^j(x)\frac{d^i}{dx^i}W_j(x_0) + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=0}^{l_{j-1}} \bar{\beta}_i^j(x)\frac{d^i}{dy^i}\bar{W}_j(y_0), \tag{3.11}$$

где $\alpha(x)$ — известная вектор-функция, $\beta_i^j(x), \bar{\beta}_i^j(x)$ — известные матрицы.

С другой стороны, формулу (3.11) можно представить в виде

$$v_k(x, y_0) = P_1\gamma(x) + Q_1\delta(x), \tag{3.12}$$

где P_1 и Q_1 — матрицы, столбцы которых образуют базис ImX_{k+1} и $kerX_{k+1}$ соответственно. Из (2.46) следует, что

$$v_k = P_1\psi_{k+1}^{-1}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_1)\psi_{k+1}\psi_{k+2}^{-1}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_1)\psi_{k+2}\psi_{k+3}^{-1}\ldots$$
$$\ldots\psi_{k_1}^{-1}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_1)\psi_{k_1}R_{k_1}+Q_1\tilde{\gamma}_1, \qquad (3.13)$$

полагая $y=y_0$ и учитывая (3.12), имеем

$$W_1(x)=\delta(x),\quad V_{k+1}^0(x)=\gamma(x). \qquad (3.14)$$

Из (3.6) находим, что

$$V_{i+1}^j(x)=\psi_i^{-1}C_{j+1}(x,y_0)\psi_i(x_0,y_0)V_{i+1}^j(x_0)+$$
$$+\psi_i^{-1}C_{j+1}(x,y_0)\int\limits_{x_0}^{x}C_{j+1}^{-1}(\varsigma,y_0)\psi_i(\varsigma,y_0)V_i^j(\varsigma)d\varsigma, \qquad (3.15)$$
$$i=k_j+1,\ldots,k_{j+1}-1,\ j=0,\ldots,m-1,$$

где $C_j(x,y_0)$ — решение однородной системы

$$(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_j(x,y_0))C_j(x,y_0)=0,$$

здесь $C_j(x_0,y_0)=E$.
Из формул (3.14) и (3.15) при $j=0$ определяем $V_{k_1}^0(x)$ и поскольку

$$V_{k_1}^0(x)=\psi_{k_1}^{-1}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_1)\psi_{k_1}R_{k_1},$$

то

$$R_{k_1}=\psi_{k_1}^{-1}C_1(x,y_0)\psi_{k_1}(x_0)R_{k_1}(x_0)+\psi_{k_1}^{-1}C_1(x,y_0)\int\limits_{x_0}^{x}C_1^{-1}\varsigma,y_0\psi_{k_1}V_{k_1}^0(\varsigma)d\varsigma.$$

Из (2.44) следует, что

$$W_2(x)=\left(R_{k_1}^{n_2+1},\ldots,R_{k_1}^{n_2}\right)^T,$$
$$\psi_{k_1+1}^{-1}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_2)\psi_{k_1+1}\psi_{k_1+2}^{-1}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_2)\ldots\psi_{k_2-1}\psi_{k_2}^{-1}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_2)\psi_{k_2}R_{k_2}=$$
$$=\left(R_{k_1}^1,\ldots,R_{k_1}^{n_2},\right)^T. \qquad (3.16)$$

Выражение (3.16) перепишем в виде

$$V_{k_1+1}^1(x)=\left(R_{k_1}^1,\ldots,R_{k_1}^{n_2}\right)^T.$$

Из формул (3.15) при $j=1$ определим $V_{k_2}^1(x)$ и учитывая

$$V_{k_2}^1(x)=\psi_{k_2}^{-1}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_2)\psi_{k_2}R_{k_2},$$

получим

$$R_{k_2}=\psi_{k_2}^{-1}C_2(x)\psi_{k_2}(x_0)R_{k_2}(x_0)+\psi_{k_2}^{-1}C_2(x)\int\limits_{x_0}^{x}C_2^{-1}(\varsigma)\psi_{k_2}V_{k_2}^1(\varsigma)d\varsigma.$$

Из (2.46) следует, что

$$W_3(x)=\left(R_{k_2}^{n_3+1},\ldots,R_{k_2}^{n_2}\right)^T,\ V_{k_2+1}^2=\left(R_{k_2}^1,\ldots,R_{k_2}^{n_3}\right)^T.$$

Продолжая действовать предложенным способом, при $j=m-1$ получим

$$W_m(x)=\left(R_{k_{m-1}}^{n_m+1},\ldots,R_{k_{m-1}}^{n_{m-1}}\right)^T,\ V_{k_{m-1}+1}^{m-1}=\left(R_{k_{m-1}}^1,\ldots,R_{k_{m-1}}^{n_m}\right)^T.$$

Из формул (3.15) при $j=m-1$ определим $V_{k_m}^{m-1}$ и тогда

$$V_{k_m}^{m-1}(x)=\psi_{k_m}^{-1}(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_m)\psi_{k_m}H,$$

откуда следует

$$H=\psi_{k_m}^{-1}C_m(x)\psi_{k_m}(x_0)H(x_0)+$$
$$+\psi_{k_m}^{-1}C_m(x)\int\limits_{x_0}^{x}C_m^{-1}(\varsigma)\psi_{k_m}V_{k_m}^{m-1}(\varsigma)d\varsigma.$$

Аналогично, как и выше, используя второе граничное условие (1.3), определяем $\bar{W}_q(y)$, $\bar{H}$, $q=1,\ldots,p$.

Теперь, подставляя в (3.1) найденные выше функции $W_j(x)$, H, $\bar{W}_q(y)$, $\bar{H}$, $j=1,\ldots,m$, $q=1,\ldots,p$, мы получаем следующее представление решения краевой задачи (1.1), (1.3):

$$v(x,y)=f_0(x,y)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{k_{j-1}}f_i^j(x)\frac{d^i}{dx^i}W_j(x_0)+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=0}^{l_{j-1}}g_i^j(x)\frac{d^i}{dy^i}\bar{W}_j(y_0),$$

где $W_j(x)$, $\bar{W}_q(y)$, $j=1,\ldots,m$, $q=1,\ldots,p$ — произвольные постоянные. Так как решение задачи Гурса (1.1), (1.3) единственно, то коэффициенты f_i^j и g_i^j при этих постоянных равны нулю и, следовательно,

$$v(x,y)=f_0(x,y).$$

4. Линеаризованная цепочка Тоды серии D_n

В данном параграфе с помощью предложенного выше алгоритма построения решения задачи Гурса приводится решение задачи Гурса для линеаризованной цепочки Тоды серии D_n.

Рассматривается система уравнений

$$v_{xy}=D_nUv, \tag{4.1}$$

где $v=(v^1,v^2,\ldots,v^n)^T$ — столбец неизвестных, $U=diag(e^{u^1},e^{u^2},\ldots,e^{u^n})$, матрица Картана $D_n=||d_{ij}||$ устроена так:

$$d_{i\,i}=2,\quad i=1,\ldots,n,\quad d_{i\,i-1}=-1,\ i=3,\ldots,n,$$
$$d_{1\,3}=-1,\quad d_{3\,1}=-1,\quad d_{i\,i+1}=-1,\ i=2,\ldots,n-2,$$

остальные элементы равны нулю, а $u=(u^1,u^2,\ldots,u^n)^T$ — решение цепочки Тоды

$$u_{xy}=D_nUp,$$

где $p=(1,1,\ldots,1)^T$.

Используя формулы для обобщенных инвариантов [5], решение системы (4.1) запишется в виде

$$v_1=P_1\psi_1^{-1}D(\psi_1R_1), \tag{4.2}$$

где вектор R_1 вычисляется с помощью рекуррентных формул

$$R_{2k-1}=\begin{pmatrix}\psi_{2k}^{-1}D\psi_{2k}\psi_{2k+1}^{-1}D(\psi_{2k+1}R_{2k+1})\\ W_l(x)-\int\limits_{y_0}^{y}B_{2k}^{(1)}\psi_{2k+1}^{-1}D(\psi_{2k+1}R_{2k+1})dy\end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

$k=1,2,\ldots,r-1,r+1,\ldots,n-2,$

$$R_{2r-1}=\begin{pmatrix}\psi_{2r}^{-1}D\psi_{2r}\psi_{2r+1}^{-1}D(\psi_{2r+1}R_{2r+1})\\ \begin{pmatrix}W_{r+1}\\ W_r\end{pmatrix}-\int\limits_{y_0}^{y}\tilde{B}_{2r}^{(1)}\psi_{2r+1}^{-1}D(\psi_{2r+1}R_{2r+1})dy\end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

здесь $B_{2k}^{(1)}$ — первая строка матрицы B_{2k}, $\tilde{B}_{2r}$ — первые две строки матрицы B_{2r},

$$R_{2n-3}=W_n(x), \text{где}\ \ l=\begin{cases}k, k<r,\\ k+1, k>r.\end{cases}$$

Матрицы ψ_k находятся из формул: при $k<n$

$$\psi_k = F_m^{-1} S_k^* d_k F_m, \quad m = n - \left[\frac{k}{2}\right], \; k = 2, \ldots, n-1,$$

а при $k \geq n$

$$\psi_k = F_m^{-1} S_k^* \tilde{d}_k F_m, \quad m = n - \left[\frac{k}{2}\right] - 1, \; k = n, \ldots, 2n-3.$$

$\tilde{d}_k$ получается из d_k после вычеркивания последней строки и столбца:

$$\psi_1 = P_1^{-1} D_n U P_1.$$

Матрица S_k^* при $k<n$ имеет следующий вид

$$S_k^* = diag\left\{e^{\theta^k_{[\frac{k}{2}]+1}}, e^{\theta^k_{[\frac{k}{2}]+2}}, \ldots, e^{\theta^k_n}\right\},$$

а при $k \geq n$

$$S_k^* = diag\left\{e^{\theta^k_{[\frac{k}{2}]+1}}, e^{\theta^k_{[\frac{k}{2}]+2}}, \ldots, e^{\theta^k_{n-1}}\right\},$$

где элементы θ_j^k вычисляются по формулам:

$$\theta_k^k = u^1 + \sum_{i=3}^{k+1} u^i, \; \theta_i^k = \sum_{j=i-k+1}^{i} u^j,$$

$i = k+1, k+2, \ldots, n$, $k = 2, 3, \ldots, n-1$.

$$\theta_i^k = u^1 + u^2 + A_i^k + \sum_{j=k-i+2}^{i+1} u^j + \ln 4,$$

$i = \left[\frac{k}{2}\right]+1, \left[\frac{k}{2}\right]+2, \ldots, k-1, \quad k = 3, 4, \ldots, n-1,$
и $\quad i = \left[\frac{k}{2}\right]+1, \left[\frac{k}{2}\right]+2, \ldots, n-1, \quad k = n, n+1, n+2, \ldots, 2n-3,$
где

$$A_i^k = \begin{cases} 0, \; k-i<3, \\ 2\sum\limits_{j=3}^{k+1-i} u^j, k-i \geq 2. \end{cases}$$

d_k — квадратная матрица порядка $n - \left[\frac{k}{2}\right]$ такая, что

$$\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = A_k^T D_n A_k,$$

где $A_k = A_{k-1} G_k^{-1} L_k^{-1}$, $A_1 = E_n$.
Через L_k обозначена матрица n-го порядка

$$L_k = \begin{pmatrix} E_{k-2} & 0 & 0 \\ 0 & Q^2 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-k-1} \end{pmatrix}, \; k = 2, \ldots, n-1, \;\; L_n = \begin{pmatrix} E_{n-2} & 0 \\ 0 & Q^2 \end{pmatrix},$$

$$L_k = E_n, \; k = n+1, \ldots, 2n-2;$$

$$G_{2k} = J_n, \; k = 1, 2, \ldots, n-2,$$

$$G_{2k+1} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & J_{n-k} \end{pmatrix}, k = 1, 2, \ldots, n-3, \; G_{2n-3} = G_{2n-2} = E_n.$$

Матрицы Q^2 и Q^3:

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \; Q^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы F_m и F'_{n-m} находятся из выражений

$$P_k = D_n A_k \begin{pmatrix} 0 \\ F_m \end{pmatrix}, \quad Q_{2k} = (A_{2k}^T)^{-1} \begin{pmatrix} F'_{n-m} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$m = n - \left[\frac{k}{2}\right], k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$m = n - \left[\frac{k}{2}\right] - 1, k = n, n+1, \ldots, 2n-3,$$

где $P_k = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ — матрица, столбцами которой являются векторы базиса ImX_k. Аналогично определяется матрица $Q_k = (e_{m+1}, \ldots, e_n)$, столбцами которой являются векторы базиса $\ker X_k$.

Матрица B_{2k} при $2k < n$ находится из соотношения:

$$B_{2k} = (F'_k)^{-1}(b_{2k} d_{2k}^{-1} Z_{2k} + T_{2k}) d_{2k} F_{n-k},$$

в данном случае матрица T_{2k} содержит лишь один ненулевой элемент $t_{k,1} = e^{u^{k+2}}$; ненулевые элементы матрицы Z_{2k} находятся из формул:

$$z_{i\,i} = e^{u^{k+i+1}} + e^{u^{k-i+1}},\ i = 1, 2, \ldots, k-2, k,\ z_{k-1\,k-1} = e^{u^{2k}} + e^{u^2} + e^{u^1},$$

$$z_{i\,i} = e^{u^{i+k}} + e^{u^{i-k+1}},\ i = k+1, \ldots, n-k,$$

$$z_{i+1\,i} = -e^{u^{k-i+1}},\ i = 1, \ldots, k-2,\ z_{k\,k-1} = -2e^{u^2},\ z_{k+1\,k} = e^{u^1},$$

$$z_{i+1\,i} = -e^{u^{i-k+1}},\ i = k+1, \ldots, n-k-1,$$

$$z_{i-1\,i} = -e^{u^{k+i+1}},\ i = 2, \ldots, k-1,\ z_{k-1\,k} = -1/2e^{u^{2k+1}},\ z_{k-1\,k+1} = -1/2e^{u^{2k+1}},$$

$$z_{i-1\,i} = -e^{u^{k+i}},\ i = k+2, \ldots, n-k,\ z_{k\,k+1} = e^{u^2},\ z_{k+1\,k-1} = -2e^{u^1}.$$

А при $2k \geq n$ матрица B_{2k} вычисляется как

$$B_{2k} = (F'_{k+1})^{-1}(\tilde{b}_{2k} \tilde{d}_{2k}^{-1} Z_{2k} + T_{2k}) \tilde{d}_{2k} F_{n-k-1},$$

матрица T_{2k} порядка $(k+1) \times (n-k-1)$ в данном случае содержит два ненулевых элемента:

$$t_{k,1} = e^{u^{k+2}}, \ \text{ и } \ t_{k+1,n-k-1} = \begin{cases} e^{u^{2k-n+2}}, \, 2k > n \\ 2(e^{u^n}) - e^{u^1}), \, 2k = n, \end{cases}$$

$\tilde{b}_{2k}$ — матрица, порядка $(k+1) \times (n-k-1)$ такая, что первые k строк — это матрица b_{2k} без последнего столбца, а $(k+1)$-ая строка это последняя строка матрицы d_{2k} без последнего элемента.

Ненулевые элементы матрицы Z_{2k} при $2k \geq n$ устроены так:

$$z_{i\,i} = e^{u^{k+i+1}} + e^{u^{k-i+1}},\ i = 1, \ldots, n-k-2,$$

$$z_{i+1\,i} = -e^{u^{k-i+1}},\ i = 1, \ldots, n-k-2,\ z_{i-1\,i} = -e^{u^{k+i+1}},\ i = 2, \ldots, n-k-1,$$

$$z_{n-k-1,n-k-1} = \begin{cases} e^{u^n} + e^{u^{2k-n+2}}, \, 2k > n \\ e^{u^n} + e^{u^2} + e^{u^1}, \, 2k = n. \end{cases}$$

Пользуясь симметрией $x \leftrightarrow y$ системы уравнений (4.1), можно получить решение вида

$$v_2 = P_1 \bar{\psi}_1^{-1} \bar{D}(\bar{\psi}_1 \bar{R}_1), \tag{4.5}$$

где вектор $\bar{R}_1$ вычисляется с помощью рекуррентных формул

$$\bar{R}_{2k-1} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{2k}^{-1} \bar{D} \bar{\psi}_{2k} \bar{\psi}_{2k+1}^{-1} \bar{D}(\bar{\psi}_{2k+1} \bar{R}_{2k+1}) \\ \bar{W}_l(y) - \int\limits_{x_0}^{x} \bar{B}_{2k}^{(1)} \bar{\psi}_{2k+1}^{-1} \bar{D}(\bar{\psi}_{2k+1} \bar{R}_{2k+1}) dx \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

$k = 1, 2, \ldots, r-1, r+1,' \ldots, n-2$,

$$\bar{R}_{2r-1} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{2r}^{-1} \bar{D} \bar{\psi}_{2r} \bar{\psi}_{2r+1}^{-1} \bar{D}(\bar{\psi}_{2r+1} \bar{R}_{2r+1}) \\ \begin{pmatrix} \bar{W}_{r+1} \\ \bar{W}_r \end{pmatrix} - \int\limits_{x_0}^{x} \tilde{\bar{B}}_{2r}^{(1)} \bar{\psi}_{2r+1}^{-1} \bar{D}(\bar{\psi}_{2r+1} \bar{R}_{2r+1}) dx \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

$$\bar{R}_{2n-3} = \bar{W}_n(y), \text{где}\, l = \begin{cases} k, k < r, \\ k+1, k > r. \end{cases}$$

Решение задачи Гурса (4.1),(1.3) ищется в виде

$$v = v_1 + v_2,$$

где функции v_1, v_2 находятся из формул (4.2)–(4.7), а $W_k(x)$, $\bar{W}_k(y)$ из соотношений:

$$W_l(x) = \Gamma^{n-l+1}_{2k-1}, \text{где } l = \begin{cases} k,\ k \leqslant r, \\ k+1,\ k > r. \end{cases}$$

$$W_{r+1}(x) = \Gamma^{n-r}_{2r-1},\ k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

здесь

$$(\Gamma^1_{2k-1}, \ldots, \Gamma^{n-l+1}_{2k-1})^T = \psi^{-1}_{2k-1} \int\limits_{x_0}^{x} \psi_{2k-1}\psi^{-1}_{2k-2} \int\limits_{x_0}^{t} \psi_{2k-2}(\Gamma^1_{2k-3}, \ldots, \Gamma^{n-l+1}_{2k-3})^T d\xi dt,$$

$$k = 2, \ldots, n,\ \ \Gamma_1 = \psi_1^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \psi_1 P_1^{-1}(\Psi(\xi) - \Psi(x_0)) d\xi.$$

Аналогично

$$\bar{W}_l(y) = \bar{\Gamma}^{n-l+1}_{2k-1},\ \bar{W}_{r+1}(y) = \bar{\Gamma}^{n-r}_{2r-1},\ k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$(\bar{\Gamma}^1_{2k-1}, \ldots, \bar{\Gamma}^{n-l+1}_{2k-1})^T = \bar{\psi}^{-1}_{2k-1} \int\limits_{y_0}^{y} \bar{\psi}_{2k-1}\bar{\psi}^{-1}_{2k-2} \int\limits_{y_0}^{t} \bar{\psi}_{2k-2}(\bar{\Gamma}^1_{2k-3}, \ldots, \bar{\Gamma}^{n-l+1}_{2k-3})^T d\xi dt,$$

$$k = 2, \ldots, n,\ \ \bar{\Gamma}_1 = \bar{\psi}_1^{-1} \int\limits_{y_0}^{y} \bar{\psi}_1 P_1^{-1} \Phi(\xi) d\xi.$$

Например, для $n = 3$ решение задачи Гурса для линеаризованной цепочки Тоды серии D_3 представляется в виде

$$v = X_1^{-1} D(X_1 v_1) + Y_1^{-1} \bar{D}(Y_1 \bar{v}_1),$$

здесь $X_1 = D_3 U$, $Y_1 = D_3 \bar{U}$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 5 & -17 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \psi_2^{-1} D \psi_2 R_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} W_1(x) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \int\limits_{y_0}^{y} B R_2 dy,$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} (D + u_1^1 + u_1^2 + u_1^3) W_3(x) \\ W_2(x) - \int\limits_{y_0}^{y} 6(e^{u^1} + e^{u^2} + e^{u^3}) W_3 dy \end{pmatrix},$$

аналогично находятся

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 5 & -17 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \bar{\psi}_2^{-1} \bar{D} \bar{\psi}_2 \bar{R}_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{W}_1(y) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \int\limits_{x_0}^{x} \bar{B} \bar{R}_2 dx,$$

$$\bar{R}_2 = \begin{pmatrix} (\bar{D} + \bar{u}_1^1 + \bar{u}_1^2 + \bar{u}_1^3) \bar{W}_3(y) \\ \bar{W}_2(y) - \int\limits_{x_0}^{x} 6(e^{u^1} + e^{u^2} + e^{u^3}) \bar{W}_3 dx \end{pmatrix},$$

где матрицы

$$\psi_2 = \frac{2e^{u^3}}{23} \begin{pmatrix} 64e^{u^1} + 49e^{u^2} & 40e^{u^1} - 70e^{u^2} \\ 8e^{u^1} - 14e^{u^2} & 5e^{u^1} + 20e^{u^2} \\ -9 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 32e^{u^1} + 28e^{u^2} - 50e^{u^3} & 20e^{u^1} - 40e^{u^2} - 60e^{u^3} \end{pmatrix},$$

$$W_1(x) = \Gamma_1^3, \quad \begin{pmatrix} \Gamma_1^1 \\ \Gamma_1^2 \\ \Gamma_1^3 \end{pmatrix} = P_1^{-1} X_1^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} X_1(\Psi(\xi) - \Psi(x_0)) d\xi,$$

$$W_2(x) = \Gamma_2^2, \quad \begin{pmatrix} \Gamma_2^1 \\ \Gamma_2^2 \end{pmatrix} = \psi_2^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \psi_2(\xi) \begin{pmatrix} \Gamma_1^1 \\ \Gamma_1^2 \end{pmatrix} d\xi, \quad W_3(x) = \psi_3^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \psi_3(\xi) \Gamma_2^1 d\xi.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Goursat *Legon sur J'integretion des equations aux derivees partielles du second ordre a deux variables independantes* Hermann. Paris. 1896. 200 p.
2. Михайлова Ю.Г. *Решение задачи Гурса для линейного гиперболического уравнения интегрируемого каскадным методом Лапласа* // Региональная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике. Уфа, БГУ. Т. 1. 2004. С. 153–164.
3. Жибер А.В., Соколов В.В. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа* // УМН. Т. 56, вып 1. 2001. С. 63–106.
4. Жибер А.В., Старцев С.Я. *Интегралы, решения и существование преобразований Лапласа линейной гиперболической системы уравнений* // Математ. заметки. Т. 74, вып 6. 2003. С. 848–857.
5. Гурьева А.М., Жибер А.В. *Инварианты Лапласа двумеризованных открытых цепочек Тоды* // ТМФ. Т. 138, вып 3. 2004. С. 401–421.
6. J.M. Anderson, N. Kamran *The variational bicomplex for second order scalar partial differential equations in the plane* // Duke. Math. J. V. 87. № 2. 1997. P. 265–319.
7. Царев С.П. *Факторизация линейных дифференциальных операторов с частными производными и метод Дарбу интегрирования нелинейных уравнений с частными производными* // ТМФ. Т. 122, вып 1. 2000. С. 144–160.
8. Старцев С.Я. *О построении симметрий систем уравнений лиувиллевского типа* // Труды международной конференции. Орел: ОГУ. Т. 1. 2006. С. 117–122.
9. Жибер А.В., Соколов В.В., Старцев С.Я. *Нелинейные гиперболические системы уравнений лиувиллевского типа* // Международная конференция "Тихонов и современная математика": тезисы докладов. М.: МГУ. 2006. С. 305–306.
10. Жибер А.В., Михайлова Ю.Г. *О гиперболических системах уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа* // Труды Института математики и механики. Екатеринбург. Т. 13, вып 4. 2007. С. 74–83.
11. Старцев С.Я. *Метод каскадного интегрирования Лапласа для линейных гиперболических систем уравнений* // Математ. заметки. Т. 83, вып 1. 2008. С. 107–118.
12. Лезнов А.Н., Шабат А.Б. *Интегрируемые системы* // Уфа: БФАНСССР. 1982. С. 34–44.
13. Лезнов А.Н., Смирнов В.Г., Шабат А.Б. *Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем* // ТМФ. Т. 51, вып 1. 1982. С. 10–21.
14. Михайлова Ю.Г. *Краевыые задачи с данными на характеристиках для линеаризованных цепочек Тоды серий A_n и B_n* // Труды Института математики с ВЦ УНЦ РАН. Уфа: БашГУ. 2008. № 1. С. 146–155.
15. Михайлова Ю.Г. *О задаче Гурса для линеаризованных цепочек Тоды серий C_n и D_n* // Проблемы теоретической и прикладной математики. Екатеринбург. 2009. С. 160–165.

Анатолий Васильевич Жибер,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: zhiber@mail.ru

Юлия Геннадьевна Михайлова,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: mihaylovaj@mail.ru