ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 1. № 3 (2009). С. 139-153.

УДК 517.958

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ РАНГА ОДИН ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ

Л.З. УРАЗБАХТИНА

Аннотация. В работе приведена классификация инвариантных подмоделей, построенных на трехмерных подалгебрах из оптимальной системы. Классификация подмоделей проведена по порядку инвариантной подмодели, модифицированной с помощью нормализатора и дополнительных интегралов.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, уравнение состояния, подалгебра, подмодель, нормализатор.

1. Введение

Рассмотрим уравнения газовой динамики (УГД)

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt}+\nabla p=0,\quad \frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\vec{u}=0,\quad \frac{dS}{dt}=0 \tag{1}$$

со специальным уравнением состояния, описывающие движение жидкости при больших давлениях и высоких температурах [1]

$$p=B\rho^{\gamma}+F(S).$$

Здесь $\vec{u}$ — вектор скорости; ρ — плотность; p — давление; $F(S)$ — функция энтропии; B,γ — постоянные, $B\gamma>0,\gamma\neq 0,1$; $d/dt=\partial_t+\vec{u}\cdot\nabla$ — оператор полного дифференцирования. Скорость звука c определяется по формуле $c^2=B\gamma\rho^{\gamma-1}$.

В этом случае УГД (1) допускают группу преобразований с 13-мерной алгеброй Ли. Неподобные подалгебры сведены в оптимальную систему [2].

Базис алгебры Ли L_{13} состоит из операторов: $X_1,\dots,X_{13}$, где X_1,X_2,X_3 — переносы по пространственным координатам; X_4,X_5,X_6 — галилеевы переносы; X_7,X_8,X_9 — вращения; X_{10} — перенос по времени; X_{11} — равномерное растяжение независимых декартовых переменных x,y,z,t; $X_{12}=t\partial_t-u\partial_u-v\partial_v-w\partial_w-(\bar{\gamma}-2)\rho\partial_\rho-\bar{\gamma}p\partial_p$ — растяжение, $\bar{\gamma}=2\gamma(\gamma-1)^{-1},\bar{\gamma}\neq 0,2$; X_{13} — перенос по давлению.

В оптимальной системе имеется 27 серий трехмерных подалгебр с одним инвариантом, зависящим от независимых переменных. Все они сведены в таблицу (см. Приложение). В первом столбце указан номер подалгебры из оптимальной системы [2]. Первая цифра номера указывает на размерность подалгебры. Последующие цифры номера указывают на порядковый номер поадлгебры данной размерности. Номер подалгебры с одним штрихом указывает на то, что параметр $\overline{\gamma}=1$, с двумя штрихами — $\overline{\gamma}=-1$. Во втором столбце записаны инварианты в декартовых переменных t,x,y,z,u,v,w или в цилиндрических переменных t,x,r,θ,U,V,W, а в третьем столбце записан номер нормализатора.

L.Z. Urazbachtina, Invariant submodels of a rank of one gas dynamics with the special equation of state.

© Уразбахтина Л.З. 2009.

Работа поддержана грантом ГНТП-РБ госконтракт 13/3-ФМ.
Поступила 3 августа 2009 г.

На трехмерных подалгебрах такого типа можно строить инвариантные подмодели. Для того, чтобы получить подмодель, нужно записать представление решения. Оно получается приравниванием инвариантов, зависящих от газодинамических функций, к новым функциям от инварианта, зависящего от независимых переменных. Затем из этих выражений находим искомые газодинамические функции. После их подстановки в УГД (1) получаем инвариантую подмодель, которая представляет собой систему из 5 обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [3].

Основная задача — найти интегралы у этой фактор-системы. Согласно теореме Коши-Ковалевской любая подмодель является интегрируемой. Однако очень сложно найти интегралы в простой алгебраической форме. С помощью нормализатора подалгебры можно понизить порядок фактор-системы или найти интегралы. Порядок нормализатора определяет число интегралов. Поэтому для последующей классификации в таблице (см. Приложение) в последнем столбце указана размерность нормализатора. Если размерность нормализатора равняется 3, то подалгебра самонормализована и симметрий, наследуемых из L_{13}, у подмодели нет. Порядок инвариантной подмодели можно понизить за счет симметрий нормализатора или за счет дополнительных интегралов, не связанных с этими симметриями. Дополнительные интегралы получаются эвристическим путем по аналогии с известными примерами [4].

Классификация подмоделей проводится по порядку инвариантной подмодели, модифицированной с помощью нормализатора и дополнительных интегралов. В уравнения подмодели входят параметры: алгебраические коэффициетны из оптимальной системы или постоянные интегралы. При некоторых соотношениях на параметры можно найти новые интегралы, и подмодель полностью интегрируется.

Во второй части статьи рассмотрены подалгебры $3.2', 3.3', 3.6'$. Эти подалгебры имеют нормализаторы размерности 6 и 7. Все эти подмодели сводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению Риккати. При некоторых значения параметров уравнения Риккати интегрируются.

В третьей части работы рассмотрены подалгебры $3.1', 3.4', 3.1'', 3.14$. Подмодели подалгебр $3.1', 3.4'$ сводятся к линейным фактор-системам дифференциальных уравнений второго порядка.

В четвертом пункте описаны подалгебры $3.22', 3.3''$. У фактор-системы подалгебры $3.22'$ найдены особое и частное решения. У фактор-системы подалгебры $3.3''$ найдены квадратура и интеграл.

В пятой части рассмотрена самонормализованная подалгебра 3.26. У подмодели найден один интеграл и получено точное(особое) решение.

2. Подмодели, сводящиеся к одному обыкновенному дифференциальному уравнению

Сделано оригинальное наблюдение: подмодели с нормализаторами размерности 6 и 7 сводятся к одному уравнению Риккати. Это достигается нахождением дополнительных интегралов. Для некоторых значений параметров уравнение Риккати интегрируется.

2.1. Подалгебра $3.3'$. Представление инвариантного решения имеет вид (см. Приложение):

$$u = \frac{x}{t} + \frac{u_1(z)}{t}, v = \frac{y}{t} + \frac{v_1(z)}{t}, w = \frac{w_1(z)}{t}, \rho = t\rho_1(t), p = \frac{y}{at} + \frac{p_1(z)}{at}, a \neq 0.$$

После подстановки представления в УГД (1) получим фактор-систему

$$\begin{gathered} w_1 u_1' = 0, \quad w_1 v_1' = -\frac{1}{a\rho_1}, \quad w_1(1 - w_1') = \frac{p_1'}{a\rho_1}, \\ \frac{\rho_1'}{\rho_1} + \frac{w_1'}{w_1} + \frac{3}{w_1} = 0, \quad w_1 p_1' - \frac{aB(w_1'+2)}{\rho_1} = p_1 - v_1. \end{gathered} \tag{2}$$

Из первого уравнения видно, что $u_1 = C$, иначе возникает противоречие в четвертом уравнении. Постоянную C можно положить нулем, т.к. она убирается галилеевым переносом по оси x (оператор X_4), а решения УГД мы рассматриваем с точностью до допускаемых преобразований. Ненулевые операторы нормализатора в инвариантах подалгебры примут вид:

$$X_1 = -\partial_{u_1}, \quad X_2 = -\partial_{v_1} - \partial_{p_1}, \quad X_3 = -\partial_z,$$

$$X_{11} = z\partial_z + u_1\partial_{u_1} + v_1\partial_{v_1} + w_1\partial_{w_1} - \rho_1\partial_{\rho_1} + p_1\partial_{p_1}.$$

Инварианты нормализатора назначим новыми функциями:

$$p_2 = \frac{p_1 - v_1}{w_1}, \ \rho_2 = \rho_1 w_1.$$

В этих переменных операторы нормализатора примут простейший вид. По простейшему виду нормализатора можно понять, каким образом можно понизить порядок системы.

Фактор-система (2) в новых переменных примет вид:

$$\begin{gathered} v_1' = -\frac{1}{a\rho_2}, \quad w_1' = \frac{\rho_2^2 - 2B}{(\rho_2^2 + B)} - \frac{p_2\rho_2}{a(\rho_2^2 + B)}, \quad \rho_2' = -\frac{3\rho_2}{w_1}, \\ w_1 p_2' = \frac{\rho_2 p_2^2}{a(\rho_2^2 + B)} + \frac{2Bp_2}{(\rho_2^2 + B)} + \frac{3aB\rho_2}{(\rho_2^2 + B)} + \frac{1}{a\rho_2}. \end{gathered} \tag{3}$$

В системе (3) поделим 1-е, 2-е и 4-е уравнения на 3-е уравнение. Таким образом, перейдем от дифференцирования по переменной z к дифференцированию по переменной $s = \rho_2$. Для определения p_2 получим уравнение Риккати

$$-3a(s^2 + B)p_{2s} = p_2^2 + 2aBp_2 s^{-1} + 1 + 3a^2 B + Bs^{-2}.$$

Приведем последнее уравнение к каноническому виду с помощью замены $p_3 = p_2 + aBs^{-1}$:

$$-3a(s^2 + B)p_{3s} = p_3^2 + 1 + 6a^2 B + (2a^2 B + 1)s^{-2}.$$

Для того, чтобы привести уравнение Риккати к линейному неоднородному уравнению, необходимо найти частное решение. Частное решение будем искать в виде $p_3 = Ds^{-1}$. Существует действительное частное решение $p_3 = (6as)^{-1}$ при условии на постоянные $\sqrt{12}a\beta = 1 (B = -\beta^2)$. Тогда $p_2 = (4as)^{-1} + 3a\Phi_s\Phi^{-1}(s^2 - \beta^2)$, где для упрощения записи введена новая функция $\Phi = \Phi(s)$ такая, что

$$\Phi_s = \frac{s^{4/3}}{3a(s^2 - \beta^2)^{5/3}}.$$

Из системы (3) определим оставшиеся функции

$$v_1 = v_0 + \frac{w_0}{3a}\int s^{-7/3}\Phi ds, \quad w_1 = w_0 s^{-1/3}\Phi, \quad z = z_0 - \frac{w_0}{3}\int s^{-4/3}\Phi ds,$$

где v_0, w_0, z_0 — постоянные. После подстановки найденных функций $u_1, v_1, w_1, \rho_2, p_2$ в представление решения физические величины примут вид:

$$\begin{gathered} u=\frac{x}{t}, \quad v=\frac{y}{t}-\frac{w_0}{4at}\int \Phi d(s^{-4/3}), \quad w=\frac{w_0 s^{-1/3}\Phi}{t}, \\ \rho=\frac{ts^{4/3}}{w_0\Phi}, \quad z=z_0+w_0\int \Phi d(s^{-1/3}), \\ p=\frac{y}{at}+\frac{w_0}{4a^2t}\int s^{-4/3}d\Phi+\frac{3w_0\Phi_s s^{-1/3}(s^2-\beta^2)}{t}. \end{gathered} \tag{4}$$

Замечание. Значения параметра s берутся из интервала $[0,\beta)$ или $(\beta,+\infty)$, так как интеграл $\int_0^s s^{4/3}(s^2-\beta^2)^{-5/3}ds$ сходится при $s<\beta$ и в этом случае $\Phi<0$, а интеграл $\int_s^\infty s^{4/3}(s^2-\beta^2)^{-5/3}ds$ сходится при $s>\beta$ и $\Phi>0$. Тогда функция $z=z(s)$ однозначно определена, монотонна и, значит, обратима.

Вывод. Фактор-система (2) является полностью интегрируемой в квадратурах, если выполнено соотношение $\sqrt{12}a\beta=1$.

2.2. Подалгебра 3.2$'$.

Подалгебра имеет представление инвариантного решения вида (см. Приложение)

$$u=\frac{x-\ln|t|}{t}+\frac{u_1(z)}{t}, v=\frac{y}{t}+\frac{v_1(z)}{t}, w=\frac{w_1(z)}{t}, \rho=t\rho_1(t), p=\frac{y}{at}+\frac{p_1(z)}{at}, a\neq 0.$$

После подстановки представления в УГД (1) получим фактор-систему

$$\begin{gathered} w_1u_1'=1, \quad w_1v_1'=-\frac{1}{a\rho_1}, \quad w_1(1-w_1')=\frac{p_1'}{a\rho_1}, \\ \frac{\rho_1'}{\rho_1}+\frac{w_1'}{w_1}+\frac{3}{w_1}=0, \quad w_1p_1'-\frac{aB(w_1'+2)}{\rho_1}=p_1-v_1. \end{gathered} \tag{5}$$

Из первого уравнения системы определяется u_1. Оставшиеся уравнения системы совпадают с уравнениями (3). Таким образом, физическое представление решения отличается от (4) лишь формулой:

$$u=\frac{x-\ln|ts^{1/3}|}{t}.$$

Вывод. Фактор-система (5) является полностью интегрируемой в квадратурах для значения параметра $\sqrt{12}a\beta=1$.

2.3. Подалгебра 3.6$'$, $b\neq 0$.

Представление инвариантного решения имеет вид (см. Приложение)

$$u=\frac{ay}{bt}+\frac{u_1(z)}{bt}, \quad v=\frac{y}{t}+\frac{v_1(z)}{t}, \quad w=\frac{w_1(z)}{t}, \quad \rho=t\rho_1(z), \quad p=\frac{y}{bt}+\frac{p_1(z)}{bt},$$

где a, b — произвольные постоянные.

После подстановки представления в УГД (1) получим фактор-систему

$$\begin{gathered} w_1u_1'=u_1-av_1, \quad w_1v_1'=-\frac{1}{b\rho_1}, \quad w_1(1-w_1')=\frac{p_1'}{b\rho_1}, \\ \frac{\rho_1'}{\rho_1}+\frac{w_1'}{w_1}+\frac{2}{w_1}=0, \quad w_1p_1'-\frac{bB(w_1'+1)}{\rho_1}=p_1-v_1. \end{gathered} \tag{6}$$

Ненулевые операторы нормализатора в инвариантах подалгебры примут вид:

$$X_2=a\partial_{u_1}-\partial_{v_1}-\partial_{p_1}, \;\; X_3=\partial_z, \;\; X_{11}=z\partial_z+u_1\partial_{u_1}+v_1\partial_{w_1}+w_1\partial_{w_1}-\rho_1\partial_{p_1}.$$

С помощью инвариантов нормализатора сделаем замену:

$$p_2 = \frac{p_1 - v_1}{w_1}, \quad \rho_2 = \rho_1 w_1.$$

Третий инвариант нормализатора мы использовать не будем, так как функция u_1 входит только в 1-е уравнение, которое служит для определения u_1.

Фактор-система (6) в новых переменных примет вид:

$$\begin{gathered} w_1 u_1' = u_1 - a v_1, \quad v_1' = -\frac{1}{b\rho_2}, \quad w_1' = \frac{\rho_2^2 - B}{(\rho_2^2 + B)} - \frac{p_2 \rho_2}{b(\rho_2^2 + B)}, \\ \rho_2' = -\frac{2\rho_2}{w_1}, \quad w_1 p_2' = \frac{\rho_2 p_2^2}{b(\rho_2^2 + B)} + \frac{B p_2}{(\rho_2^2 + B)} + \frac{2bB\rho_2}{(\rho_2^2 + B)} + \frac{1}{b\rho_2}. \end{gathered} \tag{7}$$

По аналогии с интегрированием системы (2) подалгебры $3.3'$ в системе (7) поделим 1-е, 2-е и 4-е уравнение на 3-е уравнение. Таким образом, перейдем от дифференцирования по переменной z к дифференцированию по переменной $s = \rho_2$. Для определения p_2 получим уравнение Риккати

$$-2b(s^2 + B) p_{2s} = p_2^2 + bBp_2 s^{-1} + 1 + 2b^2 B + Bs^{-2}.$$

Приведем последнее уравнение к каноническому виду с помощью следующей замены $p_3 = p_2 + (1/2) bBs^{-1}$

$$-2b(s^2 + B) p_{3s} = p_3^2 + 1 + 3b^2 B + ((3/4) b^2 B + 1) Bs^{-2}.$$

У последнего уравнения существует действительное частное решение $p_3 = (4bs)^{-1}$, при условии выполнения равенства на постоянные $\sqrt{6} b\beta = 1 (B = -\beta^2)$. Для того чтобы упростить запись, введем новую функцию $\Phi = \Phi(s)$ такую, что

$$\Phi_s = \frac{|s|^{3/2}}{2b|s^2 - \beta^2|^{7/4}}.$$

Тогда $p_2 = (3bs)^{-1} + 2b\Phi_s \Phi^{-1}(s^2 - \beta^2)$. Из системы (7) определим оставшиеся функции

$$u_1 = u_0 |s|^{-1/2} + \frac{a|s|^{-1/2}}{2} \int v_1 |s|^{-1/2} ds, \quad v_1 = v_0 + \frac{w_0}{2b} \int |s|^{-5/2} \Phi ds,$$

$$w_1 = |s|^{-1/2} w_0 \Phi, \quad z = z_0 - \frac{w_0}{2} \int |s|^{-3/2} \Phi ds,$$

где u_0, v_0, w_0, z_0 — постоянные. После подстановки найденных функций $u_1, v_1, w_1, \rho_2, p_2$ в представление решения физические величины примут вид:

$$u = \frac{y}{bt} + \frac{u_0 |s|^{-1/2}}{bt} + \frac{a|s|^{-1/2}}{2bt} \int v_1 |s|^{-1/2} ds, v = \frac{y}{t} + \frac{w_0}{2bt} \int |s|^{-5/2} \Phi ds,$$

$$w = \frac{w_0 \Phi |s|^{-1/2}}{t}, \quad \rho = \frac{t|s|^{3/2}}{w_0 \Phi}, \quad z = z_0 - \frac{w_0}{2} \int |s|^{-3/2} \Phi ds,$$

$$p = \frac{y}{bt} + \frac{w_0}{3b^2 t} \int |s|^{-3/2} d\Phi + \frac{2w_0 \Phi_s |s|^{-1/2} (s^2 - \beta^2)}{t}.$$

Замечание. Так как интеграл $\int_s^\infty |s|^{3/2} |s^2 - \beta^2|^{-7/4} ds$ сходится при $s > \beta$ и $\int_0^s |s|^{3/2} |s^2 - \beta^2|^{-7/4} ds$ сходится при $0 < s < \beta$, то функция $z = z(s)$ будет монотонной и, значит, обратимой на соответствующих интервалах.

Вывод. Фактор-система (6) является полностью интегрируемой в квадратурах, если выполнено равенство $\sqrt{6} b\beta = 1$.

3. Подмодели, сводящиеся к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

Основным результатом данного параграфа является тот факт, что некоторые полученные системы являются линейными. Теория интегрирования линейных систем достаточно хорошо развита [5].

3.1. Подалгебра 3.1$'$, $c = 0,\ b \neq 0$. Представление решения имеет вид

$$u = \frac{x - a\ln|t|}{t} + \frac{u_1(z)}{t}, \quad v = \frac{y - \ln|t|}{t} + \frac{v_1(z)}{t}, \quad w = \frac{w_1(z)}{t}, \quad \rho = t\rho_1(z)$$

$$p = \frac{y - \ln|t|}{bt} + \frac{p_1(z)}{bt}.$$

Подставим представление в УГД (1)

$$\begin{gathered} w_1 u_1' = a, \quad w_1' v_1' = 1 - \frac{1}{b\rho_1}, \quad w_1(1 - w_1') = \frac{p_1'}{b\rho_1}, \\ \frac{\rho_1'}{\rho_1} + \frac{w_1'}{w_1} + \frac{3}{w_1} = 0, \quad w_1 p_1' + \frac{b\beta^2(w_1' + 2)}{\rho_1} - 1 = p_1 - v_1. \end{gathered} \tag{8}$$

Ненулевые операторы нормализатора 6.7$'$ в инвариантах подалгебры примут вид:

$$X_1 = -\partial_{u_1}, \;\; X_2 = -\partial_{v_1} - \partial_{p_1}, \;\; X_3 = \partial_z.$$

Инварианты нормализатора имеют вид $p_2 = p_1 - v_1$. Сделаем дополнительные замены $\rho_2 = \rho_1 w_1$ и $p_2 = p_1 - v_1 + 1$. В последней системе перейдем к дифференцированию по новой переменной $s = \beta^{-1}\rho_2$ и введем новую постоянную $d = 3b\beta$ и функцию $w_2 = dw_1$. В результате система примет вид:

$$\begin{gathered} u_{1s}' = -\frac{a}{3s}, \quad v_{1s}' = -\frac{1}{3s} + \frac{w_2}{d^2 s^2}, \quad w_{2s}' = \left(\frac{2}{3s} - \frac{s}{s^2 - 1}\right) w_2 + \frac{p_2}{(s^2 - 1)}, \\ p_{2s}' = \left(\frac{1}{3(s^2 - 1)} - \frac{1}{d^2 s^2}\right) w_2 - \frac{s p_2}{3(s^2 - 1)} + \frac{1}{3s}. \end{gathered}$$

У последней системы имеются две квадратуры

$$u_1 = u_0 - \frac{a}{3}\ln|s|, \;\; v_1 = v_0 - \frac{1}{3}\ln|s| + I, \;\; I = \frac{1}{d^2}\int \frac{w_2 ds}{s^2},$$

где u_0, v_0 — постоянные.

Подмодель сводится к системе двух линейных уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{gathered} w_{2s}' = \left(\frac{2}{3s} - \frac{s}{s^2 - 1}\right) w_2 + \frac{p_2}{(s^2 - 1)}, \\ p_{2s}' = \left(\frac{1}{3(s^2 - 1)} - \frac{1}{d^2 s^2}\right) w_2 - \frac{s p_2}{3(s^2 - 1)} + \frac{1}{3s}. \end{gathered} \tag{9}$$

Физические величины примут вид

$$u = \frac{x - a\ln|t\sqrt[3]{s}|}{t}, \;\; v = \frac{y - \ln|t\sqrt[3]{s}| + I}{t}, \;\; w = \frac{w_2}{dt}, \;\; \rho = \frac{\beta dts}{w_2},$$

$$p = \frac{y + p_2 - \ln|t\sqrt[3]{s}| + I}{bt},$$

где p_2, w_2 определяются из системы (9). Связь между переменными s и z такова

$$z = z_0 - \frac{1}{3d}\int s^{-1} w_2 ds,$$

где z_0 — постоянная.

Вывод. Фактор-система (8) сводится к системе двух линейных уравнений (9) и трем квадратурам.

3.2. Подалгебра 3.4$'$, $c = 0, b \neq 0$. Подалгебра имеет представление инвариантного решения вида (см. Приложение)

$$u = \frac{a(y - \ln|t|)}{bt} + \frac{u_1(z)}{bt}, \quad v = \frac{y - \ln|t|}{t} + \frac{v_1(z)}{t}, \quad w = \frac{w_1(z)}{t}, \quad \rho = t\rho_1(z),$$
$$p = \frac{y - \ln|t|}{bt} + \frac{p_1(z)}{bt}.$$

После подстановки представления в УГД (1) получим фактор-систему

$$\begin{gathered} w_1 u_1' = a + u_1 - a v_1, \quad w_1 v_1' = 1 - \frac{1}{b\rho_1}, \quad w_1(1 - w_1') = \frac{p_1'}{b\rho_1}, \\ \frac{\rho_1'}{\rho_1} + \frac{w_1'}{w_1} + \frac{2}{w_1} = 0, \quad w_1 p_1' - \frac{bB(w_1' + 1)}{\rho_1} = p_1 - v_1 + 1. \end{gathered} \tag{10}$$

Ненулевые операторы пятимерного нормализатора в инвариантах подалгебры имеют вид $X_2 = -a\partial_{u_1} - \partial_{v_1} - \partial_{p_1}, X_3 = \partial_z$. С помощью инвариантов нормализатора в системе (10) сделаем замену $p_2 = p_1 - v_1 + 1$, $u_2 = u_1 - a v_1$ и дополнительную замену $\rho_2 = \rho_1 w_1$.

Систему (10) запишем в виде разрешенном относительно производных по переменной $s = \beta^{-1}\rho_2$

$$\begin{gathered} u_{2s}' = -\frac{u_2}{2s} - \frac{a w_2}{d^2 s^2}, \quad v_{1s}' = -\frac{1}{2s} + \frac{w_2}{d^2 s^2}, \\ w_{2s}' = \left(\frac{1}{2s} - \frac{s}{s^2 - 1}\right) w_2 + \frac{p_2}{s^2 - 1}, \\ p_{2s}' = \left(\frac{1}{2(s^2 - 1)} - \frac{1}{d^2 s^2}\right) w_2 - \frac{s p_2}{2(s^2 - 1)} + \frac{1}{2s}, \end{gathered}$$

где $d = 2b\beta, w_2 = d w_1$.

Решения первых двух уравнений системы находятся в квадратурах

$$u_2 = \left(u_0 - \frac{a}{d^2}\int \frac{w_2(s)}{|s|^{3/2}} ds\right)|s|^{-1/2}, \quad v_1 = v_0 - \frac{1}{2}\ln|s| + I, \quad I = \frac{1}{d^2}\int \frac{w_2(s)}{s^2} ds,$$

где u_0, v_0 — постоянные. Оставшиеся уравнения образуют систему линейных уравнений второго порядка

$$\begin{gathered} w_{2s}' = \left(\frac{1}{2s} - \frac{s}{s^2 - 1}\right) w_2 + \frac{p_2}{s^2 - 1}, \\ p_{2s}' = \left(\frac{1}{2(s^2 - 1)} - \frac{1}{d^2 s^2}\right) w_2 - \frac{s p_2}{2(s^2 - 1)} + \frac{1}{2s}. \end{gathered} \tag{11}$$

Связь между переменными s и z такова

$$z = z_0 - (2d)^{-1}\int s^{-1} w_2(s) ds,$$

где z_0 — постоянная. Физические величины имеют вид

$$u = \frac{a}{bt}\left(y - \ln\left|t|s|^{1/2}\right| + I - \frac{|s|^{-1/2}}{d^2}\int \frac{w_2(s)}{|s|^{3/2}} ds\right) + \frac{u_0|s|^{-1/2}}{bt},$$
$$v = \frac{y - \ln\left|t|s|^{1/2}\right| + I}{t}, \quad w = \frac{w_2(s)}{dt}, \quad \rho = \frac{\beta d t s}{w_2(s)},$$
$$p = \frac{y - \ln\left|t|s|^{1/2}\right| + p_2(s) + I}{bt}.$$

Вывод. Фактор-система (10) сводится к системе двух линейных уравнений (11) и трем квадратурам.

3.3. Подалгебра 3.4$'$, $c \neq 0$, $b \neq 0$. Представление решения имеет вид

$$u = \frac{a\ln|t| - ay}{bt} + \frac{u_1(I)}{bt}, \quad v = \frac{y - \ln|t|}{t} + \frac{v_1(I)}{t}, \quad w = \frac{w_1(I) + z}{t}, \quad \rho = t\rho_1(I),$$
$$p = \frac{z}{ct} + \frac{p_1(I)}{ct},$$

где $I = y - \ln|t| - c^{-1}bz$.

Нормализатор у подалгебры 6-мерный. В инвариантах подалгебры ненулевые операторы нормализатора имеют вид

$$X_1 = -\partial_{u_1}, \quad X_2 = \partial_I - \partial_{v_1}, \quad X_3 = -\frac{b}{c}\partial_I - \partial_{w_1} - \partial_{p_1}.$$

В фактор-системе сделаем замены $J = I + v_1 - bc^{-1}w_1 + 1, p_2 = p_1 - w_1, \rho_2 = J\rho_1$, где J, p_2 — инварианты нормализатора,

$$Ju_1' = u_1 - a, \quad v_1' = J^{-1} - \frac{p_2' + w_1'}{c\rho_2}, \quad w_1' = \frac{b(p_2' + w_1') - c}{c^2\rho_2}, \quad J\rho_2' = -2\rho_2,$$
$$p_2' + w_1' - \frac{p_2}{J} - \frac{cB(J' + 2)}{\rho_2} = 0.$$

Из первого уравнения находим квадратуру $u_1(I) = u_0 \exp \int J^{-1} dI + a$, где u_0 — постоянная.

В оставшихся уравнениях обозначим $\rho_2 = s$ и поделим 2-е, 3-е и 5-е уравнения на 4-е уравнение. Получим систему линейных уравнений третьего порядка

$$\begin{aligned} csJ_s + (bs + 1)w_{1s} + p_{2s} &= -\frac{c(J+1)}{2}, \\ s(c^2s - b)w_{1s} - bsp_{2s} &= \frac{c}{2}J, \\ cBsJ_s - s^2w_{1s} - s^2p_{2s} &= \frac{cBJ}{2} + \frac{sp_2}{2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Связь между переменными s и I дается квадратурой

$$I = I_0 - \frac{1}{2}\int \frac{Jds}{s},$$

где I_0 — постоянная.

Замечание. Если исключить w_{1s} из системы (12), то получим систему второго порядка для функций J и p_2.

Вывод. Система (12) сводится к линейной системе двух уравнений и трем квадратурам.

3.4. Подалгебра 3.1$''$. Представление инвариантного решения имеет вид (см. Приложение):

$$u = u_1(z)\exp(-y), \quad v = v_1(z)\exp(-y), \quad w = w_1(z)\exp(-y), \quad \rho = \rho_1(z)\exp(3y),$$
$$p = p_1(z)\exp(-y) + t.$$

После подстановки представления в УГД (1) получим фактор-систему

$$\begin{gathered} w_1u_1' = u_1v_1, \quad w_1v_1' = v_1^2 - \frac{p_1}{\rho_1}, \quad w_1(v_1 - w_1') = \frac{p_1'}{\rho_1} \\ \frac{\rho_1'}{\rho_1} + \frac{w_1'}{w_1} + \frac{2v_1}{w_1} = 0, \quad 1 + v_1p_1 + w_1p_1' + \frac{B\rho_1^{1/3}(w_1' - v_1)}{3} = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Запишем ненулевые операторы нормализатора в инвариантах подалгебры

$$X_2 = u_1\partial_{u_1} + v_1\partial_{v_1} + w_1\partial_{w_1} - 3\rho_1\partial_{\rho_1} - p_1\partial_{p_1}, \ \ X_3 = \partial_z.$$

Вычислив инварианты нормализатора, сделаем замену

$$u_2 = \rho_1^{1/3}u_1, \ \ v_2 = \rho_1^{1/3}v_1, \ \ w_2 = \rho_1^{1/3}w_1, \ \ p_2 = \rho_1^{-1/3}p_1.$$

При исследовании подмоделей мы пытаемся понизить порядок системы с помощью нормализатора. Но у некоторых систем интегралы находятся без использования нормализатора. Из первого уравнения с помощью четвертого уравнения системы найдем интеграл $u_2^2w_2 = u_0$, где u_0 — постоянная. Оставшиеся уравнения системы (13) в новых переменных примут вид:

$$\begin{gathered} w_2v_2' - w_2v_2\frac{\rho_1'}{3\rho_1} - v_2^2 + p_2 = 0, \ \ w_2w_2' - w_2^2\frac{\rho_1'}{3\rho_1} - w_2v_2 + p_2' + p_2\frac{\rho_1'}{3\rho_1} = 0, \\ w_2' + w_2\frac{2\rho_1'}{3\rho_1} + 2v_2 = 0, \\ 1 + v_2p_2 + w_2p_2' + w_2p_2\frac{\rho_1'}{3\rho_1} + \frac{B(w_2' - v_2)}{3} - w_2\frac{B\rho_1'}{9\rho_1} = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

У системы (14) можно найти еще один интеграл слудующим образом: прибавим к первому уравнению, умноженному на v_2, второе уравнение, умноженное на w_2, и полученный результат упростим с помощью четвертого и пятого уравнений. Получим обыкновенное дифференциальное уравнение $((v_2^2 + w_2^2 - B)w_2)' = 2$. Интегрирование с точностью до переноса по z дает интеграл

$$v_2^2 = \frac{2z}{w_2} - w_2^2 + B.$$

Если у системы (14) найти все производные, то из уравнения для ρ_1 получим квадратуру

$$\rho_1 = \rho_0 \exp\left(-\int\left(\frac{3v_2}{w_2} + \frac{p_2v_2 + 1}{w_2(w_2^2 - \frac{B}{3})}\right)dz\right).$$

В силу найденых интегралов остается два уравнения

$$\begin{gathered} (w_2^2 - \frac{B}{3})w_2' = \frac{2}{3}(1 + p_2v_2), \\ 3w_2(w_2^2 - \frac{B}{3})p_2' = p_2(1 + p_2v_2) - p_2v_2B - 3w_2^2. \end{gathered} \tag{15}$$

Уравнения системы (15) после исключения z в силу интеграла в переменных $s = w_2^2, \ \ v_2 = s^{-1/4}V(s), \ \ p_2 = s^{1/4}p(s)$ примут вид

$$4s^{1/2}V' = -(3s - B)\frac{p}{1 + pV}, \ \ 4s^{5/4}p' = -B - \frac{(3s - B)}{1 + pV}.$$

Вывод. Фактор-система (13) сводится к системе двух нелинейных уравнений.

3.5. Подалгебра 3.14. Подалгебра имеет четырехмерный нормализатор. Значит, должен определиться всего один интеграл. Но без использования нормализатора возможно найти два дополнительных интеграла подмодели.
Представление решения имеет вид (см. Приложение)

$$U = U_1(r)\exp(-\theta/a), \ \ V = V_1(r)\exp(-\theta/a), \ \ W = W_1(r)\exp(-\theta/a),$$
$$\rho = \rho_1(r)\exp(3\theta/a), \ \ p = p(r)\exp(\theta/a) + t.$$

Ненулевой оператор нормализатора в инвариантах подалгебры имеет вид

$$X_{12} = U_1\partial_{U_1} + V_1\partial_{V_1} + W_1\partial_{W_1} - 3\rho_1\partial_{\rho_1} - p_1\partial_{p_1}.$$

Вычислив инварианты нормализатора сделаем замену

$$U_2 = \rho_1^{1/3}U_1, \;\; V_2 = \rho_1^{1/3}V_1, \;\; W_2 = \rho_1^{1/3}W_1, \;\; p_2 = \rho_1^{-1/3}p_1.$$

После подстановки представления решения УГД (1) примут вид:

$$\begin{gathered} V_2U'_{2r} - \frac{U_2V_2}{3}\frac{\rho'_{1r}}{\rho_1} - \frac{U_2W_2}{ar} = 0, \;\; V_2V'_{2r} + \frac{p_2 - V_2^2}{3}\frac{\rho'_{1r}}{\rho_1} + p'_2 - \frac{V_2W_2}{ar} = \frac{W_2^2}{r}, \\ V_2W'_{2r} - \frac{W_2V_2}{3}\frac{\rho'_{1r}}{\rho_1} + \frac{V_2W_2}{r} + \frac{p_2}{ar} = \frac{W_2^2}{ar}, \;\; V'_2 + \frac{2V_2}{3}\frac{\rho'_{1r}}{\rho_1} + \frac{2W_2}{ar} + \frac{V_2}{r} = 0, \\ 1 + p'_2V_2 + \frac{p_2V_2}{3}\frac{\rho'_{1r}}{\rho_1} + \frac{W_2p_2}{ar} + \frac{B}{3}(V'_2 - \frac{V_2}{3}\frac{\rho'_{1r}}{\rho_1} - \frac{W_2}{ar} + \frac{V_2}{r}) = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Запишем систему (16) в виде системы Коши-Ковалевской

$$\begin{gathered} (\frac{B}{3} - V_2^2)V_2\frac{U'_2}{U_2} = \frac{1}{3}m, (\frac{B}{3} - V_2^2)V'_2 = -(\frac{B}{3} - V_2^2)\frac{V_2}{r} - \frac{2}{3}m, \\ (\frac{B}{3} - V_2^2)V_2W'_2 = -(\frac{B}{3} - V_2^2)(\frac{p_2 + aV_2W_2}{ar}) + \frac{W_2}{3}m, \\ (\frac{B}{3} - V_2^2)V_2\frac{\rho'_1}{\rho_1} = m - (\frac{B}{3} - V_2^2)\frac{3W_2}{ar}, \\ (\frac{B}{3} - V_2^2)V_2p'_2 = -(\frac{B}{3} - V_2^2) - \frac{(p_2 - B)}{3}m, \end{gathered} \tag{17}$$

где $m = 1 + (ar)^{-1}p_2W_2 + (V_2^2 + W_2^2)V_2r^{-1}$.

Из системы (17) видно, что функции U_2 и ρ_1 определяются через квадратуры (следствие инвариантности относительно оператора X_{12})

$$U_2 = U_0 \exp\left(\int \frac{mdr}{V_2(B - 3V_2^2)}\right),$$

$$\rho_1 = \rho_0 \exp\left(3\int\left(\frac{m}{V_2(B - 3V_2^2)} - \frac{W_2}{arV_2}\right)dr\right),$$

где U_0, ρ_0 — постоянные.

Первое уравнение системы (16) умножим на $2(U_2V_2)^{-1}$ и результат прибавим к четвертому уравнению, деленному на V_2. Получим интеграл $V_2U_2^2 = C_1r^{-1}$,C_1 — постоянная, который равносилен квадратуре для U_2. Второе и третье уравнения умножим на V_1, W_1 соответственно, сложим и результат подставим в 5-е уравнение, найдем еще один интеграл $(V_2^2 + W_2^2 - B)V_2 = r + C_2r^{-1}$, где C_2 — постоянная. Оставшиеся уравнения системы (16), с учетом найденных интегралов, образуют систему второго порядка.

$$\begin{gathered} (\frac{B}{3} - V_2^2)V'_2 = -(\frac{B}{3} - V_2^2)\frac{V_2}{r} - \frac{2}{3}m, \\ (\frac{B}{3} - V_2^2)V_2p'_2 = -(\frac{B}{3} - V_2^2) - \frac{(p_2 - B)}{3}m. \end{gathered}$$

Вывод. Фактор-система (16) сводится к системе двух дифференциальных уравнений, двум квадратурам и интегралу.

4. Подмодели, сводящиеся к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений

4.1. Подалгебра 3.22′, $c \neq 0$. Для подалгебры 3.22′ представление решения имеет вид (см. Приложение)

$$U = \frac{U_1(r) + x}{t}, \;\; V = \frac{V_1(r)}{t}, \;\; W = \frac{W_1(r)}{t}, \;\; \rho = \rho_1(r)t, \;\; p = \frac{x - p_1(r)}{ct}.$$

Подставим представление решения в УГД (1)

$$\begin{gathered} V_1U_1' + \frac{1}{c\rho_1} = 0,\ \ V_1V_1' - V_1 - \frac{p_1'}{c\rho_1} = \frac{W_1^2}{r},\ \ V_1W_1' - W_1 = -\frac{V_1W_1}{r}, \\ (\rho_1V_1)' + 2\rho_1 + \frac{\rho_1V_1}{r} = 0,\ \ p_1 + U_1 - p_1'V_1 + \frac{c\beta^2}{\rho_1}(1 + V_1' + \frac{V_1}{r}) = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Ненулевые операторы нормализатора $5.53'$ в инвариантах подалгебры имеют вид $X_1 = \partial_{U_1} + \partial_{p_1}$, $X_{11} = r\partial_r + U_1\partial_{U_1} + V_1\partial_{V_1} + W_1\partial_{W_1} - \rho_1\partial_{\rho_1} + p_1\partial_{p_1}$. Вычислив инварианты нормализатора, сделаем замены

$$V_2 = \frac{V_1}{r},\ \ W_2 = \frac{W_1}{r},\ \ \rho_2 = \rho_1 r,\ \ p_2 = \frac{p_1 + U_1}{r}.$$

Из первого уравнения системы (18) находим функцию

$$U_1(r) = U_0 - \int \frac{dr}{c\rho_2V_2},$$

где U_0 — постоянная. Тем самым, использована инвариантность относительно оператора X_1. В новых переменных $V_2, W_2, \rho_2, p_2, s = \ln r$ система (18) становится автономной системой

$$\begin{gathered} V_2V_{2s}' - \frac{p_{2s}'}{c\rho_2} = W_2^2 - V_2^2 + V_2 + \frac{p_2}{c\rho_2} - \frac{1}{c^2\rho_2^2V_2}, \\ V_2W_{2s}' = W_2 - 2V_2W_2,\ \ (\rho_2V_2)_s' + \rho_2V_2 + 2\rho_2 = 0, \\ V_2p_{2s}' + \frac{cB}{\rho_2}V_{2s}' = p_2(1 - V_2) - \frac{1}{c\rho_2} + \frac{c\beta^2}{\rho_2}(1 + 2V_2). \end{gathered} \tag{19}$$

Условие автономности возможно в силу инвариантности относительно оператора X_{11}. Поделим второе уравнение системы (19) на V_2W_2, а третье уравнение на ρ_2V_2, и, исключая V_2, получим интеграл

$$\rho_2V_2W_2^2 = C_0\exp^{-5s},$$

где C_0 — постоянная. После подстановки функции W_2, найденную из интеграла, в систему (19) получим систему третьего порядка

$$\begin{gathered} c\rho_2V_2V_{2s}' - p_{2s}' = \frac{cC_0\exp^{-5s}}{V_2} - c\rho_2V_2^2 + c\rho_2V_2 + p_2 - \frac{1}{c\rho_2V_2}, \\ (\rho_2V_2)_s' + \rho_2V_2 + 2\rho_2 = 0, \\ \rho_2V_2p_{2s}' + cBV_{2s}' - \rho_2p_2(1 - V_2) - c^{-1} + c\beta^2(1 + 2V_2). \end{gathered}$$

У этой системы имеется особое решение, когда определитель матрицы при производных равен нулю:

$$U_1 = U_0 \mp \sqrt{0.6}r,\ \ V_2 = -2,\ \ W_2 = 0,\ \ \rho_2 = -\frac{\beta}{2},\ \ p_2 = \mp 4\sqrt{0.6}.$$

Физические величины примут вид

$$U = \frac{x \mp 4\sqrt{0.6}r}{t},\ \ V = -\frac{2r}{t},\ \ W = 0,\ \ \rho = -\frac{t\beta}{2r},\ \ p = \frac{x \pm \sqrt{15}r}{ct}. \tag{20}$$

Подмодель (18) имеет частное решение

$$U_1 = -\frac{r^4}{4cC_2} - C_3,\ \ V_1 = r,\ \ W_1 = 0,\ \ \rho_1 = \frac{C_2}{r^4},\ \ p_1 = C_3,$$

где $\sqrt{12}c\beta = 1$, $C_2 \neq 0$, C_3 — постоянные.

Физические величины в данном случае примут вид

$$U = -\frac{r^4}{4cC_2t} + \frac{x}{t}, \quad V = \frac{r}{t}, \quad W = 0, \quad \rho = \frac{C_2t}{r^4}, \quad p = \frac{x}{ct}. \tag{21}$$

Вывод. Фактор-система (18) сводится к системе трех уравнений, одному интегралу и одной квадратуре. Найдены 2 точных решения (20) и (21).

4.2. Подалгебра 3.3$''$, $b \neq 0$. Рассматривается подалгебра с четырехмерным нормализатором. У подалгебры с четырехмерным нормализатором найдено 2 интеграла. Один интеграл найден с помощью нормализатора, другой интеграл найден по аналогии с нахождением интеграла типа Бернулли. Представление инвариантного решения имеет вид (см. Приложение)

$$U = U_1(r)\exp(\alpha), \quad V = V_1(r)\exp(\alpha), \quad W = W_1(r)\exp(\alpha), \quad \rho = \rho_1(r)\exp(-3\alpha),$$

$$p = p_1(r)\exp(-\alpha) + t, \quad \alpha = \frac{a\theta - x}{b}.$$

Запишем ненулевой оператор нормализатора в инвариантах подалгебры

$$X_{12} = U_1\partial_{U_1} + V_1\partial_{V_1} + W_1\partial_{W_1} - 3\rho_1\partial_{\rho_1} - p_1\partial_{p_1}.$$

Вычислив инварианты нормализатора, сделаем замену

$$U_2 = \rho_1^{1/3}U_1, \quad V_2 = \rho_1^{1/3}V_1, \quad W_2 = \rho_1^{1/3}W_1, \quad p_2 = \rho_1^{-1/3}p_1.$$

Подставим представление решения в УГД (1) и, используя замену, получим фактор-систему:

$$\begin{aligned}
-\frac{U_2}{b}n + V_2U_2' - \frac{U_2V_2}{3}\frac{\rho_1'}{\rho_1} + \frac{p_2}{b} &= 0,\\
-\frac{V_2}{b}n + V_2V_2' - \frac{V_2^2}{3}\frac{\rho_1'}{\rho_1} + p_2' + \frac{p_2}{3}\frac{\rho_1'}{\rho_1} &= \frac{W_2^2}{r},\\
-\frac{W_2}{b}n + V_2W_2' - \frac{W_2V_2}{3}\frac{\rho_1'}{\rho_1} - \frac{ap_2}{br} &= -\frac{V_2W_2}{r},\\
-\frac{2}{b}n &= \frac{2V_2}{3}\frac{\rho_1'}{\rho_1} + V_2' + \frac{V_2}{r},\\
1 + (p_2 - \frac{B}{3})\frac{n}{b} + V_2p_2' + \frac{V_2p_2}{3}\frac{\rho_1'}{\rho_1} + \frac{B}{3}(V_2' + \frac{V_2}{r} - \frac{V_2}{3}\frac{\rho_1'}{\rho_1}) &= 0,
\end{aligned} \tag{22}$$

где $n = U_2 - aW_2r^{-1}$.

У фактор-системы (22) найдем интеграл типа Бернулли. Умножим первое уравнение на U_2, второе уравнение на V_2, третье уравнение на W_2. Сложим полученные уравнения. Из полученного вычтем пятое уравнение. Затем исключим величину $nb^{-1} + V_2\rho_1'\rho^{-1}3^{-1}$, найденную из четвертого уравнения. В результате получим интеграл

$$V_2(|\vec{U}|^2 - B) = r + Cr^{-1},$$

где C — постоянная.

Запишем в новых переменных оператор $X_{12} = \rho_1\partial_{\rho_1}$. Значит, в системе (22) исключается величина $\rho_1^{-1}\rho_1'$. Для ρ_1 получим квадратуру

$$\rho_1 = \rho_0 \exp\left(\int \frac{k - (B - 3V_2^2)nb^{-1}}{V_2(\frac{B}{3} - V_2^2)}dr\right),$$

где $k = 1 + b^{-1}np_2 + (V_2^2 + W_2^2)V_2r^{-1}, \rho_0$ — произвольная постоянная.

Останется система трех уравнений, в силу полученного интеграла:

$$(\frac{B}{3} - V_2^2)V_2' = -(\frac{B}{3} - V_2^2)\frac{V_2}{r} - \frac{2k}{3},$$
$$(\frac{B}{3} - V_2^2)V_2W_2' = (\frac{B}{3} - V_2^2)(\frac{ap_2 - bV_2W_2}{br}) + \frac{kW_2}{3},$$
$$(\frac{B}{3} - V_2^2)V_2p_2' = -(\frac{B}{3} - V_2^2) - \frac{k(p_2 - B)}{3}.$$

У системы имеется особое решение при $V_2 = \beta,\ \ 3\beta^2 = B$. При этом физические величины примут вид

$$\begin{gathered} U = U_2\rho_1^{-1/3}\exp(\alpha),\ \ V = \beta\rho_1^{-1/3}\exp(\alpha),\ \ W = W_2\rho_1^{-1/3}\exp(\alpha), \\ \rho = \rho_1(r)\exp(-3\alpha),\ \ p = -b\frac{(r + \beta\,(\beta^2 + W_2^2))}{rn}\rho_1^{1/3}\exp(-\alpha) + t, \end{gathered} \tag{23}$$

где U_2, W_2, ρ_1 — произвольные.

Вывод. Фактор-система (22) сводится к системе трех уравнений, одной квадратуре и интегралу. Найдено точное решение (23).

5. Подмодель для самонормализованной подалгебры

Рассматривается самонормализованная подалгебра 3.26. Представление инвариантного решения имеет вид (см. Приложение)

$$U = U_1(s)r^\alpha,\ \ V = V_1(s)r^\alpha,\ \ W = W_1(s)r^\alpha,\ \ \rho = \rho_1(s)r^{(\bar\gamma-2)\alpha},$$
$$p = p_1(s)r^{\alpha\bar\gamma} + t,\ \ \alpha = \frac{1}{\bar\gamma + 1},\ \ s = \frac{x}{r}.$$

УГД (1) редуцируются к виду:

$$\begin{aligned} (U_1 - sV_1)U_1' + \alpha U_1V_1 + \frac{p_1'}{\rho_1} &= 0, \\ (U_1 - sV_1)V_1' + \alpha V_1^2 - \frac{sp_1'}{\rho_1} + \alpha\bar\gamma\frac{p_1}{\rho_1} &= W_1^2, \\ (U_1 - sV_1)W_1' + (\alpha + 1)V_1W_1 &= 0, \\ ((U_1 - sV_1)\rho_1)' + (\alpha(\bar\gamma - 1) + 2)\rho_1V_1 &= 0, \\ 1 + (U_1 - sV_1)p_1' + \alpha\bar\gamma p_1V_1 + B\gamma\rho_1^\gamma(U_1' + (\alpha + 1)V_1 - sV_1') &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Поделим третье уравнение системы на $(U_1 - sV_1)W_1$, четвертое на $(U_1 - sV_1)\rho_1$ и, исключая величину $(U_1 - sV_1)^{-1}V_1$, получим интеграл

$$(U_1 - sV_1)\rho_1 = W_0W_1^{(3\bar\gamma+1)\alpha},$$

где W_0 — постоянная. Значит, система (24) сводится к системе четвертого порядка.

Если в полученном интеграле положить $W_1 = 0$, то найдем точное решение при $\gamma = 1/7$:

$$U_1 = sV_1,\ \ p_1 = \frac{p_0}{\sqrt[4]{s^2+1}},\ \ V_1 = -2\left(B\rho_1^{1/7} - \frac{p_0}{\sqrt[4]{s^2+1}}\right)^{-1},$$
$$\frac{12\rho_1(s^2+1)^{5/4}}{p_0} = B^2\rho_1^{2/7} + \frac{p_0^2}{\sqrt{s^2+1}} - \frac{2B\rho_1^{1/7}p_0}{\sqrt[4]{s^2+1}}.$$

Замечание. Полученное точное решение совпадает с особым решением системы (24).

Если в интеграле положить $\gamma = 1/7$, тогда $(U_1 - sV_1)\rho_1 = W_0$. Четвертое уравнение системы (24) обращается в тождество и останется система четвертого порядка.

Вывод. У фактор-системы (24) найден один интеграл и точное(особое) решение.

6. Приложение. Таблица трехмерных подалгебр с одним инвариантом, зависящим от независимых переменных

3.6	$tz^{(1-\bar\gamma)/\bar\gamma}; (ut-x+ay)z^{-1}, vz^{-1/\bar\gamma}, wz^{-1/\bar\gamma};$ $\rho z^{(2-\bar\gamma)/\bar\gamma}, (p-y)z^{-1}$	=3.6
3.7	$zt^{\bar\gamma/(1-\bar\gamma)}; \vec{u}z^{-1/\bar\gamma}; \rho z^{(2-\bar\gamma)/\bar\gamma}, (p-y)z^{-1}$	=3.7
3.14	$\bar\gamma=-1: r; \vec{U}\exp(\theta/a); \rho\exp(-3\theta/a), (p-t)\exp(-\theta/a)$ $\bar\gamma\neq-1, \beta=(\bar\gamma+1)^{-1}: \theta+a\beta\ln\|r\|; \vec{U}r^{-\beta};$ $\rho r^{(2-\bar\gamma)\beta}, (p-t)r^{-\bar\gamma\beta}$	4.52
3.24	$\alpha=1/\bar\gamma: \theta+a\alpha\ln\|r\|; \vec{U}r^{-\alpha}; \rho r^{(2-\bar\gamma)\alpha}, (p-x)r^{-1}$	4.60
3.26	$\alpha=(\bar\gamma+1)^{-1}: xr^{-1}; \vec{U}r^{-\alpha}; \rho r^{(2-\bar\gamma)\alpha}, (p-t)r^{-\alpha\bar\gamma}$	=3.26
3.29	$rt^{\bar\gamma/(1-\bar\gamma)}; \vec{U}tr^{-1}; \rho t^{-1}r^{1/(\bar\gamma)}, (p-x)r^{-1}$	=3.29
$3.1'$	$c=0, b\neq0: z; tu-x+a\ln\|t\|, tv-y+\ln\|t\|, tw;$ $\rho t^{-1}, btp-y+\ln\|t\|$ $c\neq0: y-\ln\|t\|-bc^{-1}z; tu-x+a\ln\|t\|, tv-y+\ln\|t\|, tw-z;$ $\rho t^{-1}, ctp-z$	$6.7'$, $a=0$
$3.2'$	$z; tu-x+\ln\|t\|, tv-y, tw; \rho t^{-1}, atp-y$	6.7,$a=0$
$3.3'$	$z; tu-x, tv-y, tw; \rho t^{-1}, atp-y$	$7.8'$
$3.4'$	$c=0, b\neq0: z; btu-aI, tv-I, tw-z; \rho t^{-1}, btp-I$ $c\neq0: I-bc^{-1}z; ctu-az, ctv-bz, tw-z; \rho t^{-1}, ctp-z,$ $I=y-\ln\|t\|$	$5.14'$, $a=b=0$
$3.6'$	$b\neq0: z; btu-ay, tv-y, tw; \rho t^{-1}, btp-y$	$6.22'$
$3.7'$	$a, b\neq0,: tz^{-(a+1)/a}; (tu-x)z^{-1}, (tv-y)z^{-1}, wz^{1/a};$ $\rho z^{1/a}, (btp-y)z^{-1}$	$4.36'$
$3.8'$	$a, c\neq0: tz^{-1-1/a}; (tu-bc^{-1}y)z^{-1}, (tv-y)z^{-1}, wtz^{-1};$ $\rho zt^{-1}, (ctp-y)z^{-1}$	$4.37'$
$3.9'$	$d^2+c^2+a^2=0: t, (\alpha(tu-x)+\beta)z^{-1}, (\alpha v-\beta d)z^{-1},$ $\alpha wz^{-1}, \rho z, (\alpha p-\beta)z^{-1}, \alpha=dt^2+ct-a, \beta=ty-ax$ $b^2+e^2\neq0: t; ((et^2-b)(tu-x)+tz-bx)\,I^{-1},$ $((et^2-b)v-dtz+dbx)\,I^{-1}, ((et^2-b)w-etz+ebx)\,I^{-1},$ $\rho I, ((et^2-b)p-tz+bx)\,I^{-1},$ $I=\alpha(tz-bx)-\beta(et^2-b)$	$=3.9'$
$3.10'$	$b\neq0: t; (u-ay)I^{-1}, vI^{-1}, (w-by)I^{-1}; I\rho, (p-y)I^{-1},$ $I=z-bty$	$=3.10'$
$3.11'$	$t; (u-ay)z^{-1}, vz^{-1}, wz^{-1}; \rho z, (p-y)z^{-1}$	$4.44'$
$3.12'$ $b\neq0$	$(y-2^{-1}bt^2)z^{-1}; (u-at)z^{-1/2}, (v-bt)z^{-1/2}, wz^{-1/2};$ $\rho z^{1/2}, (p-t)z^{-1/2}$	$=3.12'$
$3.13'$	$a\neq0: z\exp t; (au-by)\exp t, v\exp t, w\exp t;$ $\rho\exp t, (ap-y)\exp t$	$4.44'$
$3.16'$	$\theta+2^{-1}a\ln\|r\|; (U-bt)r^{-1/2}, Vr^{-1/2}, Wr^{-1/2};$ $\rho r^{1/2}, (p-t)r^{-1/2}$	$4.47'$
$3.18'$	$b\neq0: \theta-a\ln\|tr^{-1}\|; (Ut-x)r^{-1}, Vtr^{-1}, Wtr^{-1}; \rho rt^{-1},$ $(bpt-x)r^{-1}$	$4.49'$
$3.19'$	$c\neq0: (b+1)\ln\|r\|-b\ln\|t\|-a\theta; (U-cp)tr^{-1}, Vtr^{-1}, Wtr^{-1};$ $\rho rt^{-1}, (cpt-x)r^{-1}$	$4.49'$
$3.20'$	$(x-2^{-1}t^2)r^{-1}; (U-t)r^{-1/2}, Vr^{-1/2}, Wr^{-1/2};$ $\rho r^{1/2}, (p-t)r^{-1/2}$	$=3.20'$

$3.21'$	$c \neq 0, a^2+b^2=1: r; Ut-x+a\theta+b\ln\|t\|, Vt, Wt; \rho t^{-1}$, $ctp-x+a\theta t+b\ln\|t\|$	4.47 $a=b=0$
$3.22'$	$c \neq 0: r; Ut-x, Vt, Wt; \rho t^{-1}, cpt-x$	$5.53'$
$3.23'$	$b\ln\|r\|-a\theta+t; \vec{U}r^{-1}; \rho r, (p-x)r^{-1}$	$4.60, \bar{\gamma}=1$
$3.1''$	$z; \vec{u}\exp(y); \rho\exp(-3y), (p-t)\exp(-y)$	5.32 $\bar{\gamma}=-1$
$3.3''$	$b \neq 0: r; \vec{U}I; \rho I^{-3}, (p-t)I^{-1}, I=\exp(x-a\theta)b^{-1}$	4.52 $\bar{\gamma}=-1$ $a=b=0$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Станюкович К.П. *Неустановившиеся движения сплошной среды.* М.: ГИТТЛ. 1955. 804 с.
2. Хабиров С.В. *Оптимальные системы подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики.* Препринт института механики УНЦ РАН. Уфа. 1998. 33 с.
3. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука. 1978. 399 с.
4. Хабиров С.В. *Аналитические методы в газовой динамике.* Уфа: Гилем. 2003. 192 с.
5. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. *Дифференциальные уравнения.* М.: ФИЗМАТЛИТ. 2002. 256 с.

Лилия Зинфировна Уразбахтина,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450025, г. Уфа, Россия
E-mail: ylz@ya.ru