ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 1. № 3 (2009). С. 125-131.

УДК 533:517.958

ПОДМОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА С ЛИНЕЙНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ И С НУЛЕВОЙ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ

Ю.В. ТАРАСОВА

Аннотация. Разыскиваются решения в виде линейного поля скоростей для уравнений газовой динамики с произвольным уравнением состояния. Найдены все подмодели движения газа с линейным полем скоростей, когда вспомогательная матрица нулевая.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, линейное поле скоростей, вспомогательная матрица, интегралы движения.

1. Введение

Работа посвящена нахождению решений уравнений газовой динамики в виде линейного поля скоростей. Похожие движения сплошной среды изучались G.L. Dirichlet [1] и Б. Риманом [2]. Ими рассматривались движения с однородной деформацией несжимаемой жидкости. При этом предполагалось, что жидкость движется в силовом поле, обусловленном взаимным притяжением частиц по закону всемирного тяготения Ньютона. Следующим крупным достижением было сведение Л.В. Овсянниковым [3] системы уравнений газодинамики для политропного газа к системе девяти обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Найдено несколько первых интегралов такой системы. J.F. Dyson [4] нашел другие первые интегралы системы и выяснил, за какие физические законы сохранения они отвечают.

В дальнейшем многие ученые на основании работ [3], [4] изучали движения газа с линейным полем скоростей. В работе В.К. Андреева [5] рассматриваются уравнения газовой динамики в лагранжевых переменных и найдена функция давления при условии, что плотность зависит только от времени. О.И. Богоявленским [6] доказаны некоторые общие свойства динамики газового эллипсоида. С.И. Анисимовым и Ю.И. Лысиковым в [7] была изучена задача о разлете в вакуум газового облака. Для случая идеального газа без внутренних степеней свободы найден дополнительный интеграл, который следует из работы [3]. При помощи этого интеграла построено точное численное решение задачи о разлете сфероида в отсутствии вращения и точное решение задачи о разлете вращающегося эллиптического цилиндра. В работе С.И. Анисимова и Н.А. Иногамова [8] исследовано нелинейное развитие возмущений при изэнтропическом сжатии сферической капли под действием приложенного к ее поверхности внешнего давления.

В данной статье, в отличие от перечисленных, разыскивались решения с линейным полем скоростей уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных с произвольным

Y.V. Tarasova, Submodels of gas movements with liner field of velocity and with intermediate matrix of rank 0.

Работа поддержана ГНТП РБ госконтракт 13/3 — ФМ.

Поступила 17 августа 2009 г.

уравнением состояния. И хотя задачи о нахождении решения в эйлеровом и лагранжевом представлениях эквивалентны, но при решении задачи в эйлеровых переменных намечается полная классификация подмоделей по рангу вспомогательной матрицы и по видам уравнений состояния. Ранее было рассмотрен случай невырожденной вспомогательной матрицы [10]. Теперь рассмотрим случай нулевой вспомогательной матрицы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим уравнения газовой динамики (УГД)

$$D\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad D\rho + \rho\nabla\cdot\vec{u} = 0, \quad Dp + \rho a^2(p,\rho)\nabla\cdot\vec{u} = 0$$

с произвольным уравнением состояния $p = f(\rho, S)$, где $p = p(t,\vec{x})$ — давление, $\rho = \rho(t,\vec{x})$ — плотность, $\vec{u} = \vec{u}(t,\vec{x})$ — вектор скорости, $a^2 = f_\rho$ — квадрат скорости звука, $D = \partial_t + \vec{u}\cdot\nabla$ — оператор полного дифференцирования. Решение УГД разыскиваем в виде линейного поля скоростей

$$\vec{u} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t), \tag{1}$$

где $A(t)$ и $\vec{u}_0(t)$ — матрица и вектор. Из УГД находим все производные от давления

$$\nabla p = -\rho\left(B\vec{x} + \vec{v}\right), \quad p_t = \rho\left(A\vec{x} + \vec{u}_0\right)\cdot\left(B\vec{x} + \vec{v}\right) - \rho a^2 \mathrm{tr} A, \tag{2}$$

где вектор $\vec{v} = \vec{u}_0' + A\vec{u}_0$, матрица $B = \|b_{ij}\| = A' + A^2$, $\mathrm{tr}A$ — след матрицы A. Сравнение смешенных вторых производных функции p в силу (2) дает переопределенную систему для плотности [9]

$$\rho_t + (A\vec{x} + \vec{u}_0)\cdot\nabla\rho + \rho\mathrm{tr}A = 0, \tag{3}$$

$$\nabla\rho\otimes\vec{c} + \rho B^T = \rho B + \vec{c}\otimes\nabla\rho, \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\left(BA + A^T B + B' - B\mathrm{tr}A\right)\vec{x} + \vec{v}' + A^T\vec{v} - \mathrm{tr}A\vec{v} + B\vec{u}_0 = \\ = \mathrm{tr}A\left[\left(\rho a^2\right)_\rho \nabla\ln\rho - \rho\left(a^2\right)_p \vec{c}\right],\end{gathered} \tag{5}$$

где $\vec{c} = B\vec{x} + \vec{v}$, $\otimes$ — тензорное произведение.

Матричное равенство (4) симметричное и диагональные скалярные равенства есть тождества. Остальные три равенства имеют вид

$$\nabla\ln\rho\times\vec{c} = -2\vec{\omega}, \tag{6}$$

где $-2\vec{\omega} = (b_{23} - b_{32}, b_{31} - b_{13}, b_{12} - b_{21})$. Скалярное умножение уравнения (6) на $\vec{c}$ и $\nabla\rho$ дает

$$\vec{c}\cdot\vec{\omega} = 0, \quad \vec{\omega}\cdot\nabla\rho = 0. \tag{7}$$

Первое равенство в (7) линейно по $\vec{x}$ с коэффициентами, зависящими от t. Приравнивание к нулю коэффициентов при $\vec{x}$ (расщепление), дает равенства

$$S\vec{\omega} = 0, \quad \vec{v}\cdot\vec{\omega} = 0, \tag{8}$$

где использовано разложение матрицы B на симметричную и антисимметричную части: $B = S + \Omega$, $S = S^T$ — вспомогательная матрица, $\Omega = -\Omega^T = \left\|\begin{matrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{matrix}\right\| = E\langle\vec{\omega}\rangle$, $\vec{\omega} = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)$. В работе [10] рассмотрен случай невырожденной матрицы S и $\vec{\omega} = 0$. В статье [11] перечислены все подмодели для произвольных матриц S и Ω при условии $\mathrm{tr}A = 0$. В данной статье рассмотрим случай $S = 0$, $\vec{\omega} \neq 0$ и $\mathrm{tr}A \neq 0$, т.е. $B = \Omega$.

3. Подмодели

Уравнения (6), (7), (8) равносильны следующей переопределенной системе

$$\vec{v}\cdot\vec{\omega}=0,\quad \vec{\omega}\cdot\nabla\rho=0,\quad \vec{\omega}\left(\vec{x}\cdot\nabla\ln\rho+2\right)=\vec{v}\times\nabla\ln\rho. \tag{9}$$

Пусть $\vec{\omega}\neq 0$, например $\omega^1\neq 0$. Общее решение 2-го уравнения в (9) имеет вид

$$\rho=\rho\left(t,\alpha,\beta\right),\quad \alpha=x^2-\frac{\omega^2}{\omega^1}x^1,\quad \beta=x^3-\frac{\omega^3}{\omega^1}x^1.$$

Тогда векторное уравнение в (9) сводится к одному скалярному уравнению

$$\rho_\alpha\left(\alpha\omega^1+v^3\right)+\rho_\beta\left(\beta\omega^1-v^2\right)=-2\omega^1\rho.$$

Для нахождения решения этого уравнения использум замену переменных

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_0,\quad \beta=\beta_1+\beta_0,\quad \text{где}\quad \alpha_0=-\frac{v^3}{\omega^1},\quad \beta_0=\frac{v^2}{\omega^1},$$

после которой уравнение примет вид

$$\rho_{\alpha_1}\alpha_1+\rho_{\beta_1}\beta_1=-2\rho.$$

Общее решение запишем в виде

$$\rho=\alpha_1^{-2}R(t,I), \tag{10}$$

где $I=\beta_1/\alpha_1$, $R(t,I)$ — произвольная функция.

С учетом того, что $B=\Omega$ и $\Omega\vec{s}=\vec{\omega}\times\vec{s}$, где $\vec{s}$ — любой вектор, уравнение (5) запишется в виде

$$\begin{gathered}\vec{\omega}\times A\vec{x}+A^T\left(\vec{\omega}\times\vec{x}\right)+\vec{\omega}'\times\vec{x}-\vec{\omega}\times\vec{x}\,\mathrm{tr}A+\vec{v}'+A^T\vec{v}-\\ -\vec{v}\,\mathrm{tr}A+\vec{\omega}\times\vec{u}_0=\mathrm{tr}A\left[\left(\rho a^2\right)_\rho\nabla\ln\rho-\left(\rho a^2\right)_p\left(\vec{\omega}\times\vec{x}+\vec{v}\right)\right].\end{gathered} \tag{11}$$

После скалярного умножения (11) на вектор $\vec{\omega}$ получим

$$\vec{x}\cdot\left(\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}'-A\vec{\omega}\right)\right)+\left(\vec{v}'+A^T\vec{v}\right)\cdot\vec{\omega}=0.$$

Расщепление последнего равенства по $\vec{x}$ дает дифференциальное уравнение для $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega}'=A\vec{\omega}+\sigma(t)\vec{\omega}, \tag{12}$$

где $\sigma(t)$ — произвольная функция и соотношение $\left(\vec{v}'+A^T\vec{v}\right)\cdot\vec{\omega}=0$, которое в силу (8), (12) тождественно выполняется.

Тогда, учитывая (10), (12), уравнение (11) с независимыми переменными t,I,p,ρ примет вид:

$$\begin{gathered}\sqrt{R\rho}\,\vec{\tau}+R\sigma\left(\vec{e}_3-I\vec{e}_2\right)=\mathrm{tr}A[(\omega^1)^{-1}\rho(\rho a^2)_\rho\left(R_IR^{-1}\left(\vec{e}_3-I\vec{e}_2\right)-2\vec{e}_2\right)-\\ -R(\rho a^2)_p(\vec{e}_3-I\vec{e}_2)],\end{gathered} \tag{13}$$

где $\vec{\tau}=(\tau_1,\tau_2,\tau_3)=\vec{v}'+A^T\vec{v}-\left(\sigma+\mathrm{tr}A\right)\vec{v}+\vec{\omega}\times\vec{u}_0$, $\vec{e}_2=-\omega^2\vec{i}+\omega^1\vec{j}$, $\vec{e}_3=-\omega^3\vec{i}+\omega^1\vec{k}$; $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ — декартовый базис.

В уравнение (13) входят независимые переменные t,p,ρ,I. При дифференцировании по p получим уравнение

$$(\omega^1)^{-1}\rho(\rho a^2)_{p\rho}\left(R_IR^{-1}\left(\vec{e}_3-I\vec{e}_2\right)-2\vec{e}_2\right)=R(\rho a^2)_{pp}(\vec{e}_3-I\vec{e}_2).$$

Если в последнем уравнении $\left(\rho a^2\right)_{p\rho}\neq 0$, то получим, разделяя переменные,

$$R_IR^{-1}\left(\vec{e}_3-I\vec{e}_2\right)-2\vec{e}_2=\omega^1\gamma R\left(\vec{e}_3-I\vec{e}_2\right),$$

где γ — произвольная постоянная. Вектора $\vec{\omega},\vec{e}_2,\vec{e}_3$ образуют базис. Приравнивание коэффициентов при базисных векторах дает противоречивые соотношения. Значит, $\left(\rho a^2\right)_{pp}=\left(\rho a^2\right)_{p\rho}=0$ и уравнение состояния определяется из соотношения $\rho a^2=\gamma p+h(\rho)$, где $h(\rho)$ — произвольная функция.

С учетом найденного уравнения состояния уравнение (13) примет вид

$$\sqrt{R\rho}\vec{\tau} + (\sigma + \gamma \mathrm{tr}A)\, R(\vec{e}_3 - I\vec{e}_2) = \omega_1^{-1}\rho h' \left(R_I R^{-1}(\vec{e}_3 - I\vec{e}_2) - 2\vec{e}_2\right) \mathrm{tr}A. \qquad (14)$$

В него входят независимые переменные t, I, ρ. Дифференцирование по ρ приводит к разделению переменных. Отсюда следует: $h = \gamma_1\sqrt{\rho} + \gamma_2 \ln\rho + \gamma_3$, где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — произвольные постоянные. Подстановка в (14) и расщепления по $\sqrt{\rho}$ дают

$$\omega^1\sqrt{R}\vec{\tau} = 2^{-1}\gamma_1 \mathrm{tr}A \left(R^{-1}R_I(\vec{e}_3 - I\vec{e}_2) - 2\vec{e}_2\right),$$

$$\omega^1 R(\sigma + \gamma\mathrm{tr}A)(\vec{e}_3 - I\vec{e}_2) = \gamma_2 \mathrm{tr}A \left(R^{-1}R_I(\vec{e}_3 - I\vec{e}_2) - 2\vec{e}_2\right).$$

Проектируя эти равенства на вектора $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, получим соотношения:

$$\gamma_2 = 0, \quad \sigma + \gamma\mathrm{tr}A = 0,$$

$$2\omega^1\sqrt{R}\vec{\tau}\cdot\vec{e}_2 = \gamma_1\left(R_I R^{-1}\omega^2\omega^3 - \Delta\right)\left(IR_I R^{-1} + 2\right)\mathrm{tr}A,$$
$$2\omega^1\sqrt{R}\vec{\tau}\cdot\vec{e}_3 = \gamma_1\left(R_I R^{-1}\Delta - \left(IR_I R^{-1} + 2\right)\omega^2\omega^3\right)\mathrm{tr}A, \qquad (15)$$

где $\Delta = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$ При решении системы (15) получим два случая.

Случай 1: $\gamma_1 \neq 0 \Rightarrow$

$$R^{-1/2} = -\frac{\tau_2 + \tau_3 I}{\gamma_1 \mathrm{tr}A}. \qquad (16)$$

Случай 2: $\gamma_1 = 0 \Rightarrow \vec{\tau} = 0$, R – произвольная функция. В обоих случаях уравнение (3) в переменных t, I принимает вид

$$\left(R_t R^{-1} + \mathrm{tr}A\right)\omega^1 + (\vec{a}_2 + I\vec{a}_3)\cdot\left(R^{-1}R_I(\vec{e}_3 - I\vec{e}_2) - 2\vec{e}_2\right) = 0. \qquad (17)$$

В случае 2 уравнение (17) определяет функцию R. Получили вполне определенную подмодель:

$$\vec{v}' + A^T\vec{v} + \vec{\omega}\times\vec{u}_0 + (\gamma - 1)\mathrm{tr}A\vec{v} = 0, \quad \vec{v} = \vec{u}_0' + A\vec{u}_0, \qquad (18)$$

$$A' + A^2 = \Omega, \quad \vec{\omega}' = A\vec{\omega} - \gamma\mathrm{tr}A\vec{\omega}, \quad \vec{v}\cdot\vec{\omega} = 0 \qquad (19)$$

с уравнением состояния $p = B(S)\rho^\gamma - \gamma^{-1}\gamma_3$, где $B(S)$ — произвольная функция энтропии S, а плотность определяется по формуле (10). Дополнительное соотношение $\vec{v}\cdot\vec{\omega} = 0$ выполняется для любого t, если оно выполнено в начальный момент времени.

В случае 1 из (16) и (17) получим вместо (18) равенства

$$\tau_2' + \vec{a}_2\cdot\vec{\tau} = \tau_2\left(\frac{(\mathrm{tr}A)'}{\mathrm{tr}A} + \frac{\mathrm{tr}A}{2}\right), \quad \tau_3' + \vec{a}_3\cdot\vec{\tau} = \tau_3\left(\frac{(\mathrm{tr}A)'}{\mathrm{tr}A} + \frac{\mathrm{tr}A}{2}\right),$$

уравнения (19) остаются в этой подмодели, но с уравнением состояния

$$p = \frac{2\gamma_1\sqrt{\rho}}{1 - 2\gamma} + B(S)\rho^\gamma - \gamma^{-1}\gamma_3,$$

а плотность определяется по формуле (16). Дополнительное соотношение $\vec{v}\cdot\vec{\omega} = 0$ здесь вполне определяет подмодель. Давление в обоих случаях определяется из совместной системы (2). Энтропия определяется из уравнения состояния. Давление для случая 1 имеет вид

$$p = \omega^1\gamma_1\mathrm{tr}A\sqrt{R}\tau_3^{-1} + p_0(t),$$

где функция $p_0(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$p_0' + \gamma_1\mathrm{tr}A\tau_3^{-2}\vec{a}_3\cdot\vec{e}_2 + (\gamma p_o + \gamma_3)\,\mathrm{tr}A = 0.$$

4. Интегралы

Дифференциальные уравнения (19) для матрицы A и вектора $\vec{\omega}$ одинаковые в обеих подмоделях. Разыскиваем интегралы эти уравнений. Обеими частями матричного уравнения подействуем на вектор $\vec{\omega}$. В это новое векторное выражение входит вектор $A\vec{\omega}$, который выражаем из дифференциального уравнения для вектора $\vec{\omega}$ в (19). Получаем дифференциальное уравнение на вектор $A\vec{\omega}$

$$(A\vec{\omega})' = -\gamma \mathrm{tr} A\,(A\vec{\omega}),$$

решение которого запишем в виде

$$A\vec{\omega} = \vec{\sigma}_1 e^{-\gamma\mu}, \tag{20}$$

где $\vec{\sigma}_1$ — постоянный единичный вектор, $\mu' = \mathrm{tr}A$. Из (19) получим линейное дифференциальное уравнение для $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega}' + \gamma\,(\mathrm{tr}A)\,\vec{\omega} = \vec{\sigma}_1 e^{-\gamma\mu},$$

решение которого имеет вид

$$\vec{\omega} = (\vec{\sigma}_1 t + \sigma\vec{\sigma}_2)e^{-\gamma\mu}, \tag{21}$$

где $\vec{\sigma}_2$ — постоянный единичный вектор, $\sigma = \mathrm{const}$. Из (20) и (21) следуют интегралы системы (19)

$$A(\vec{\sigma}_1 t + \sigma\vec{\sigma}_2) = \vec{\sigma}_1. \tag{22}$$

Преобразованием $t \to t + t_0$, где t_0 — произвольная постоянная, допускаемым системой (19), можно добиться, чтобы вектора $\vec{\sigma}_1$, $\vec{\sigma}_2$ и $\vec{\sigma}_3 = \vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2$ образовали ортонормированный базис. Разложим вектора $A\vec{\sigma}_1$, $A\vec{\sigma}_2$, $A\vec{\sigma}_3$ по этому базису:

$$A\vec{\sigma}_1 = a_{11}\vec{\sigma}_1 + a_{21}\vec{\sigma}_2 + a_{31}\vec{\sigma}_3,$$

$$A\vec{\sigma}_2 = a_{12}\vec{\sigma}_1 + a_{22}\vec{\sigma}_2 + a_{32}\vec{\sigma}_3,$$

$$A\vec{\sigma}_3 = a_{13}\vec{\sigma}_1 + a_{23}\vec{\sigma}_2 + a_{33}\vec{\sigma}_3.$$

Поочередно действуя на матричное уравнение (19) векторами $\vec{\sigma}_1$, $\vec{\sigma}_2$, $\vec{\sigma}_3$ и приравнивая коэффициенты при базисных векторах $\vec{\sigma}_1$, $\vec{\sigma}_2$, $\vec{\sigma}_3$, получим 9 дифференциальных уравнений на элементы матрицы A. Из выражения (22) с учетом разложения векторов по новому базису получим соотношения:

$$\begin{gathered} ta_{11} + \sigma a_{12} = 1, \\ ta_{21} + \sigma a_{22} = 0, \\ ta_{31} + \sigma a_{32} = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Интегралы (23) сводят матричное уравнение (19) к системе 7-го порядка

$$\begin{gathered} a_{12}' + a_{12}\left(\tfrac{1-\sigma a_{12}}{t} + a_{22}\right) + a_{32}a_{13} = 0, \\ a_{22}' + \left(a_{22} - \tfrac{\sigma}{t}a_{12}\right)a_{22} + a_{23}a_{32} = 0, \\ a_{32}' + a_{32}\left(a_{22} + a_{33} - \tfrac{\sigma}{t}a_{12}\right) = te^{-\gamma\mu}, \\ a_{13}' + a_{12}\left(a_{23} - \tfrac{\sigma}{t}a_{13}\right) + a_{13}\left(t^{-1} + a_{33}\right) = \sigma e^{-\gamma\mu}, \\ a_{23}' + a_{22}\left(a_{23} - \tfrac{\sigma}{t}a_{13}\right) + a_{33}a_{23} = -te^{-\gamma\mu}, \\ a_{33}' + a_{32}\left(a_{23} - \tfrac{\sigma}{t}a_{13}\right) + a_{33}^2 = 0, \\ \mu' = (1 - \sigma a_{12})t^{-1} + a_{22} + a_{33}. \end{gathered} \tag{24}$$

Запишем матричное уравнение (19) в лагранжевом представлении, используя замену $A = M'M^{-1}$ и равенство $\mathrm{tr}A = |M|' \, |M|^{-1}$

$$M'' = |M|^{-\gamma} \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & -t \\ -\sigma & t & 0 \end{array} \right\| M, \quad M(0) = I, \tag{25}$$

где I – единичная матрица, $|M|$ — определитель матрицы M. Уравнение (25) имеет более простой вид, чем уравнение в работе Л.В. Овсянникова [3].

Интеграл (22) в лагранжевом представлении имеет вид

$$\vec{\sigma}_1 t + \sigma \vec{\sigma}_2 = M \vec{m}_0, \tag{26}$$

где $\vec{m}_0$ — произвольный постоянный вектор. Из интеграла (26) определяются координаты вектора $\vec{m}_0$ в базисе векторов $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3$. Так как матрица M единичная в начальный момент времени, то $\sigma \vec{\sigma}_2 = \vec{m}_0$. Раскладывая вектор $\vec{m}_0$ по базису $\vec{m}_0 = m_{01}\vec{\sigma}_1 + m_{02}\vec{\sigma}_2 + m_{03}\vec{\sigma}_3$ и приравнивая коэффициенты при базисных векторах, получим $\vec{m}_0 = (0, \sigma, 0)$. Зная теперь координаты вектора $\vec{m}_0$, интеграл (26) перепишем в виде $\vec{\sigma}_1 t + \sigma \vec{\sigma}_2 = \sigma M \vec{\sigma}_2$. Раскладывая вектор $M\vec{\sigma}_2$ по базису $M\vec{\sigma}_2 = m_{12}\vec{\sigma}_1 + m_{22}\vec{\sigma}_2 + m_{32}\vec{\sigma}_3$ и приравнивая коэффициенты при базисных векторах, получим точные значения элементов второго столбца матрицы M: $m_{12} = t\sigma^{-1}, m_{22} = 1, m_{32} = 0$.

Еще два интеграла содержатся в равнестве $\big(M^T M' - (M^T)' M\big)' = N, n_{11} = n_{33} = 0$, $n_{21} = n_{22} = n_{23} \equiv 0$. Они имеют вид

$$J_{12}\sigma = t m'_{11} - m_{11} + \sigma m'_{21}, \quad J_{23}\sigma = t m'_{13} - m_{13} + \sigma m'_{23}, \tag{27}$$

где J_{12}, J_{23} — произвольные постоянные. Действительно, дифференцируя (27) по t получим равенства, которые тождественно выполняются в силу уравнений системы (25).

Найденный второй столбец матрицы M и интегралы (27) сводят систему (25) к системе 10-го порядка:

$$\begin{aligned} m''_{21} &= -\, |M|^{-\gamma} \, t m_{31}, \\ m''_{23} &= -\, |M|^{-\gamma} \, t m_{33}, \\ m''_{31} &= |M|^{-\gamma} \left(t m_{21} - \sigma m_{11} \right), \\ m''_{33} &= |M|^{-\gamma} \left(t m_{23} - \sigma m_{13} \right). \end{aligned} \tag{28}$$

Для удобства сделаем замену

$$m_{11} = \varphi', \quad m_{13} = \psi', \tag{29}$$

где φ и ψ — произвольные функции, определенные с точностью до константы.

Тогда из интегралов (27) следует

$$m_{21} = J_{21} t - \left(t\varphi' - 2\varphi \right) \sigma^{-1}, \quad m_{23} = J_{23} t - \left(t\psi' - 2\psi \right) \sigma^{-1}. \tag{30}$$

Подставляя равенства (30) в дифференциальные уравнения для m_{21} и m_{23} системы (28), получим

$$\sigma m_{31} = |M|^{\gamma} \, \varphi''', \quad \sigma m_{33} = |M|^{\gamma} \, \psi'''. \tag{31}$$

Выражение для определителя матрицы M имеет вид:

$$|M| = t\sigma^{-1} \left(m_{23} m_{31} - m_{21} m_{33} \right) + m_{11} m_{33} - m_{13} m_{31}.$$

Подстановка (28), (30), (31) дает

$$|M|^{1-\gamma} \, \sigma^3 = \varphi''' \Psi - \psi''' \Phi, \tag{32}$$

где $\Psi = \sigma J_{23} t^2 + 2t\psi - (t^2 + \sigma^2)\psi'$, $\Phi = \sigma J_{21} t^2 + 2t\varphi - (t^2 + \sigma^2)\varphi'$.

Все неизвестные элементы матрицы M и определитель выражены через функции φ и ψ. Подставляя их в последие два уравнения системы (28), получим систему из двух дифференциальных уравнений 5-го порядка на функции φ и ψ

$$|M|^\gamma \left(|M|^\gamma \psi'''\right)'' = \Psi,$$
$$|M|^\gamma \left(|M|^\gamma \varphi'''\right)'' = \Phi.$$

Таким образом, в работе найдено две подмодели движения газа с линейным полем скоростей. Матричное уравнение подмоделей записано в эйлеровом и лагранжевом представлениях. Причем в лагранжевом представлении получено уравнение более простого вида, чем уравнения, полученные в ранее опубликованных работах. Найдены интегралы таких систем, при помощи которых система в эйлеровом представлении сведена к системе 7-го пордяка, а в лагранжевом представлении — к системе 10-го порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G.L. Dirichlet *Untersuchunger uber eih Problem der Gydrodynamik* // J. Reine Angev. Math. Vol. 58. 1860. 181 p.
2. Риман Б. *Сочинения* М.-Л.: ГИТТЛ. 1948. С 339–366.
3. Овсянников Л.В. *Новое решение уравнений гидродинамики* // Докл. АН СССР. Т. 111, № 1. 1956. С. 47–49.
4. J.F.Dyson *Dynamics of a spinning gas cloud* // J. Math. Mech. Vol. 18, № 1. 1968. P. 91–101.
5. Андреев В.К. *К задаче о неустановившемся движении сжимаемой жидкости со свободной границей* // ДАН СССР. Т. 244, № 5. 1979. С. 1107–1110.
6. Богоявленский И.О. *Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике.* М.: Наука. 1980. 314 с.
7. Анисимов С.И., Лысиков Ю.И. *О расширении газового облака в вакуум* // ПММ. Т. 34, № 5. 1970. С. 926–929.
8. Анисисмов С.И., Иногамов Н.А. *Развитие неустойчивости и потеря симметрии при изэнтропическом сжатии сферической капли* // Письма в ЖЭТФ. Т. 20, № 3. 1974. С. 174–176.
9. Тарасова Ю.В. *Движение газа с линейным полем скоростей и плотностью, зависящей от времени* // сб. "Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 37-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН. 2006. С. 258–262.
10. Тарасова Ю.В. *Подмодели газовой динамики с линейным полем скоростей с нулевой вспомогательной матрицей* // сб. "Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 40-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН. 2009. С. 186–190.
11. Хабиров С.В. *Движение газа без расхождения с линейным полем скоростей* // Труды института математики с ВЦ УНЦ РАН, вып. 1. Уфа: 2008. С. 208–215.

Юлия Валерьевна Тарасова,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450025, г. Уфа, Россия
E-mail: tarasova_yulya@mail.ru