ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 1. № 3 (2009). С. 119-124.

УДК 517.9

РАСШИРЕНИЯ ГРУПП И ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ

А.А. ТАЛЫШЕВ

Аннотация. Если система дифференциальных уравнений допускает группу Ли и некоторое ее расширение на дополнительные переменные (параметры), то решение системы инвариантное относительно расширения группы может быть частично инвариантным решением относительно исходной группы.

Ключевые слова: инвариантные решения, частично инвариантные решения, расширение группы.

1. Введение

Построение частично инвариантных решений несколько сложнее построения инвариантных решений в силу необходимости приведения к инволютивному виду уравнений для *параметрических* переменных [1, с. 284].

В настоящей работе предлагается метод, позволяющий свести построение некоторых частично инвариантных решений к построению инвариантных решений относительно расширения исходной группы на пространство бо́льшей размерности. Поиск частично инвариантных решений часто вызван нехваткой подходящих инвариантов для построения инвариантных решений. Расширение группы, как правило, приводит к увеличению размерности универсального инварианта и это повышает возможности построения инвариантных решений, но относительно расширения группы. Естественно, при этом требуется, чтобы система допускала расширение группы.

Даже если система не зависит от параметров, на которые производится расширение группы, она не обязана автоматически допускать расширение группы. Технически зависимость от параметров проявляется при продолжении действия группы на производные зависимых переменных по независимым. И поэтому эта зависимость присутствует в условиях инвариантности системы. Например, уравнения газовой динамики допускают расширение группы тогда и только тогда, когда коэффициенты инфинитезимального оператора при параметрах не зависят от исходных переменных.

Далее в силу взаимно однозначного соответствия между группами и алгебрами Ли все построения производятся для алгебр Ли.

2. Определяющие уравнения расширения алгебры

Пусть векторные поля

$$L_i = \xi_i(X,U)\cdot\partial_X + \eta_i(X,U)\cdot\partial_U, \quad i=1,\dots,r, \quad X\in \boldsymbol{R}^n, \quad U\in\boldsymbol{R}^m$$

образуют базис алгебры Ли $\mathfrak{L}$ со структурными константами C^{α}_{ij}, т.е.

$$[L_i, L_j] = C^{\alpha}_{ij} L_\alpha\,, \quad i,j=1,\dots,r.$$

А.А. Talyshev, Widening groups and partially invariant solutions.

Поступила 12 августа 2009 г.

Векторные поля

$$L'_i = L_i + \mu_i(X,U,h)\cdot\partial_h\,,\quad i=1,\dots,r\quad h\in\boldsymbol{R}^k$$

определяют расширение алгебры Ли $\mathfrak{L}$, если

$$[L'_i, L'_j] = C^\alpha_{ij}L'_\alpha\,,\quad i,j=1,\dots,r$$

откуда следует

$$L'_i\mu_j - L'_j\mu_i = C^\alpha_{ij}\mu_\alpha\,,\quad i,j=1,\dots,r. \tag{1}$$

Уравнения (1) образуют квазилинейную систему из $kr(r-1)/2$ дифференциальных уравнений на kr функций от $n+m+k$ аргументов и являются определяющими уравнениями для расширения алгебры Ли. При $r>3$ система (1) переопределенная, но для любых r она не противоречива, хотя бы потому, что в силу однородности допускает нулевое решение. Для коммутативной алгебры решением также будут любые постоянные μ_j. Два класса расширений группы и, тем самым решений уравнений (1), отмечены в [1, с. 236]. Это кратные группы и продолжения действия группы на производные зависимых переменных по независимым. В обоих этих случаях размерность k зависит от размерностей n и m. Еще один класс частных решений уравнений (1) дает следующая теорема.

Теорема 1. *Для произвольной k-мерной вектор-функции $\mu(X,U,h)$, такой что матрица $I-\mu_h$ обратима, отображения*

$$\mu_i = (I-\mu_h)^{-1}L_i\mu,\quad i=1,\dots,r \tag{2}$$

удовлетворяют системе (1) (здесь I — единичная матрица размерности k).

Доказательство. Действие оператора L'_j на соотношение

$$(I-\mu_h)\mu_i = L_i\mu$$

дает

$$(I-\mu_h)L'_j\mu_i - (L'_j\mu_h)\mu_i = L'_j(L_i\mu),$$

т.е.

$$L'_j\mu_i = (I-\mu_h)^{-1}\left((L'_j\mu_h)(I-\mu_h)^{-1}L_i\mu + L'_j(L_i\mu)\right). \tag{3}$$

для всех $1\leqslant i,j\leqslant r$.

Подстановка выражений (2) и (3) в систему (1) дает

$$\begin{gathered}(I-\mu_h)^{-1}\big((L'_i\mu_h)(I-\mu_h)^{-1}L_j\mu + L'_i(L_j\mu)\\ -(L'_j\mu_h)(I-\mu_h)^{-1}L_i\mu - L'_j(L_i\mu) - C^\alpha_{ij}L_\alpha\mu\big) = 0\end{gathered}$$

и подстановка в это выражение

$$L'_j = L_j + ((I-\mu_h)^{-1}L_j\mu)\cdot\partial_h,\quad 1\leqslant j\leqslant r$$

обращает его левую часть в ноль. ∎

Следующая теорема в некотором смысле является обращением предыдущей теоремы, т.е. устанавливает, что в невырожденных случаях представление (2) всегда справедливо.

Теорема 2. *Если универсальный инвариант $J(X,U,h)$ расширения алгебры удовлетворяет условию*

$$rank\left(\frac{\partial J}{\partial h}\right) = k,$$

то найдется такая k-мерная вектор-функция $\mu(X,U,h)$, что для компонент μ_i расширения имеет место представление (2).

Доказательство. Из представления (2) следует, что искомая μ должна удовлетворять системе

$$(I-\mu_h)\mu_i = L_i\mu, \quad i=1,\dots,r,$$

или

$$L_i(h-\mu)+\frac{\partial(h-\mu)}{\partial h}\mu_i = 0, \quad i=1,\dots,r.$$

Таким образом $h-\mu$ должно быть инвариантом расширения группы и условия теоремы обеспечивают его существование. ∎

Теорема 3. *Отображения*

$$h-\mu(X,U,h)$$

являются дополнительными инвариантами расширения алгебры с μ_i *вида (2).*

Доказательство. Для всех $i=1,\dots,r$

$$\begin{aligned} L_i'(h-\mu) &= -L_i\mu+\frac{\partial(h-\mu)}{\partial h}(I-\mu_h)^{-1}L_i\mu \\ &= -L_i\mu+(I-\mu_h)(I-\mu_h)^{-1}L_i\mu = 0. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Представление (2) имеет теоретическое значение, а практической пользы от этого представления немного, так как требование инвариантности системы относительно расширения группы сложно выражается через отображение μ.

3. Пример 1

В этом и последующих примерах будут рассматриваться уравнения газовой динамики в виде

$$\rho DU+\nabla p = 0, \quad D\rho+\rho\operatorname{div}U = 0, \quad Dp+A(\rho,p)\operatorname{div}U = 0,$$

где $D=\partial_t+U\cdot\nabla$, $\nabla=(\partial_x,\partial_y,\partial_z)$, $U=(u,v,w)$ — вектор скорости, ρ — плотность, p — давление.

Подалгебра $L(4,47)$ [2, Таблица 6] с базисными операторами

$$L_1=\partial_y, \quad L_2=\partial_z, \quad L_3=t\partial_y+\partial_v, \quad L_4=t\partial_z+\partial_w \tag{4}$$

порождает группу G^4 преобразований пространства $\boldsymbol{R}^{5+n_1}$. Значение n_1 определяется рассматриваемой системой дифференциальных уравнений. Для уравнений газовой динамики $n_1=4$ и координатное представление $\boldsymbol{R}^9$ — x,y,z,t, u,v,w,p,ρ, а для уравнений Навье–Стокса $n_1=3$ и координатное представление то же самое за исключением переменной ρ. Полный набор инвариантов алгебры (4) для уравнений газовой динамики есть t,x,u,p,ρ. Данный набор инвариантов позволяет искать регулярные частично инвариантные решения [3] ранга два и дефекта два в виде

$$u=u(x,t), \quad p=p(x,t), \quad \rho=\rho(x,t), \quad v=v(x,y,z,t), \quad w=w(x,y,z,t).$$

Для уравнений газовой динамики такой класс решений рассмотрен в [4], а для уравнений Навье–Стокса в [5].

С целью получения частично инвариантных решений дефекта два рассматривается расширение алгебры (4)

$$L_i' = L_i+\mu_i\cdot\partial_h, \quad i=1,\dots,4, \quad h\in\boldsymbol{R}^2,$$

где μ_i постоянны.

Дополнительными инвариантами здесь будут

$$\begin{aligned} \bar v &= h_1-\mu_1^1 y-\mu_2^1 z-(\mu_3^1-t\mu_1^1)v-(\mu_4^1-t\mu_2^1)w, \\ \bar w &= h_2-\mu_1^2 y-\mu_2^2 z-(\mu_3^2-t\mu_1^2)v-(\mu_4^2-t\mu_2^2)w, \end{aligned} \tag{5}$$

Из соотношений (5) следует представление инвариантных решений

$$\begin{aligned} &u = \bar{u}(x,t), \quad p = \bar{p}(x,t), \quad \rho = \bar{\rho}(x,t),\\ &v = \alpha_1(\bar{v}(x,t) - h_1) + \beta_1(\bar{w}(x,t) - h_2) + \gamma_1 y + \theta_1 z,\\ &w = \alpha_2(\bar{v}(x,t) - h_1) + \beta_2(\bar{w}(x,t) - h_2) + \gamma_2 y + \theta_2 z, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = -(\mu_4^2 - t\mu_2^2)d^{-1}, \quad \beta_1 = (\mu_4^1 - t\mu_2^1)d^{-1},\\ &\gamma_1 = (\mu_4^1\mu_1^2 - \mu_1^1\mu_4^2 + t(\mu_1^1\mu_2^2 - \mu_2^1\mu_1^2))d^{-1}, \quad \theta_1 = (\mu_4^1\mu_2^2 - \mu_2^1\mu_4^2)d^{-1},\\ &\alpha_2 = (\mu_3^2 - t\mu_1^2)d^{-1}, \quad \beta_2 = -(\mu_3^1 - t\mu_1^1)d^{-1},\\ &\gamma_2 = (\mu_3^2\mu_1^1 - \mu_3^1\mu_1^2)d^{-1}, \quad \theta_2 = (\mu_3^2\mu_2^1 - \mu_3^1\mu_2^2 + t(\mu_1^1\mu_2^2 - \mu_1^2\mu_2^1))d^{-1},\\ &d = \mu_3^1\mu_4^2 - \mu_3^2\mu_4^1 + t(\mu_3^2\mu_2^1 + \mu_1^2\mu_4^1 - \mu_3^1\mu_2^2 - \mu_1^1\mu_4^2) + t^2(\mu_1^1\mu_2^2 - \mu_1^2\mu_2^1). \end{aligned}$$

Подстановка представления (6) в уравнения газовой динамики приводит к следующей фактор системе

$$\begin{aligned} D\bar{u} + \bar{\rho}^{-1}\bar{p}_x &= 0,\\ \alpha_1 D\tilde{v} + \beta_1 D\tilde{w} + (\alpha_{1t} + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\theta_1)\tilde{v} + (\beta_{1t} + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\theta_1)\tilde{w} &= 0,\\ \alpha_2 D\tilde{v} + \beta_2 D\tilde{w} + (\alpha_{2t} + \alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\theta_2)\tilde{v} + (\beta_{2t} + \beta_1\gamma_2 + \beta_2\theta_2)\tilde{w} &= 0,\\ D\bar{p} + A(\bar{\rho},\bar{p})(\bar{u}_x + \gamma_1 + \theta_2) &= 0,\\ D\bar{\rho} + \bar{\rho}(\bar{u}_x + \gamma_1 + \theta_2) &= 0, \end{aligned}$$

где $\tilde{v} = \bar{v} - h_1$ и $\tilde{w} = \bar{w} - h_2$ и $D = \partial_t + \bar{u}\partial_x$.

Для уравнений Навье–Стокса

$$U_t + U \cdot \nabla U + \nabla p = \Delta U, \quad \nabla \cdot U = 0$$

представление (6) приводит к фактор системе

$$\begin{aligned} D\bar{u} + \bar{\rho}^{-1}\bar{p}_x - \nu\bar{u}_{xx} &= 0,\\ \alpha_1 D\tilde{v} + \beta_1 D\tilde{w} + (\alpha_{1t} + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\theta_1)\tilde{v} + (\beta_{1t} + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\theta_1)\tilde{w} &= 0,\\ \alpha_2 D\tilde{v} + \beta_2 D\tilde{w} + (\alpha_{2t} + \alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\theta_2)\tilde{v} + (\beta_{2t} + \beta_1\gamma_2 + \beta_2\theta_2)\tilde{w} &= 0,\\ (\bar{u}_x + \gamma_1 + \theta_2) &= 0. \end{aligned}$$

4. Пример 2

Подалгебра $L(3,47)$ [2, Таблица 6] с базисными операторами

$$L_1 = \partial_x, \quad L_2 = \partial_y, \quad L_3 = \partial_z, \tag{7}$$

имеет для уравнений газовой динамики следующий полный набор инвариантов: t, u, v, w, p, ρ. С целью получения *нерегулярных* частично инвариантных решений ранга 2 и дефекта 1 рассматривается расширение алгебры (7)

$$L_i' = L_i + \mu_i(h)\partial_h, \quad i = 1,2,3, \quad h \in \boldsymbol{R}. \tag{8}$$

В данном случае удается полностью проинтегрировать определяющие уравнения (1):

$$\mu_i = \frac{c_i}{\theta'(h)}, \quad i = 1,2,3,$$

где c_i постоянны, θ — произвольная функция одного аргумента и θ' — производная этой функции. Дополнительным инвариантом здесь будет

$$\bar{x} = \theta(h) - c_1 x - c_2 y - c_3 z.$$

Представление инвариантных решений относительно расширенной алгебры (8) в виде

$$u = \bar{u}(t,\bar{x}), \quad v = \bar{v}(t,\bar{x}), \quad w = \bar{w}(t,\bar{x}), \quad p = \bar{p}(t,\bar{x}), \quad \rho = \bar{\rho}(t,\bar{x})$$

дает следующую фактор систему

$$\begin{aligned} D\bar{u} + c_1\bar{\rho}^{-1}\bar{p}_{\bar{x}} &= 0,\\ D\bar{v} + c_2\bar{\rho}^{-1}\bar{p}_{\bar{x}} &= 0,\\ D\bar{w} + c_3\bar{\rho}^{-1}\bar{p}_{\bar{x}} &= 0,\\ D\bar{p} + A(\bar{\rho},\bar{p})(c_1\bar{u}_{\bar{x}} + c_2\bar{v}_{\bar{x}} + c_3\bar{w}_{\bar{x}}) &= 0,\\ D\bar{\rho} + \bar{\rho}(c_1\bar{u}_{\bar{x}} + c_2\bar{v}_{\bar{x}} + c_3\bar{w}_{\bar{x}}) &= 0, \end{aligned}$$

где $D = \partial_t + (c_1\bar{u} + c_2\bar{v} + c_3\bar{w})\partial_{\bar{x}}$.

Данный пример показывает, что с помощью расширения (8) невозможно получить весь класс частично инвариантных решений для алгебры (7), рассмотренный в работе [3].

5. Пример 3

Подалгебра $L(7,14)$ [2, Таблица 6] с базисными операторами

$$\begin{aligned} &L_1 = \partial_x, \quad L_2 = \partial_y, \quad L_3 = \partial_z, \quad L_4 = t\partial_x + \partial_u,\\ &L_5 = t\partial_y + \partial_v, \quad L_6 = t\partial_z + \partial_w, \quad L_7 = \partial_t, \end{aligned} \tag{9}$$

имеет для уравнений газовой динамики два инварианта: p, ρ. С целью получения «простых» решений [6], т.е. решений ранга 0, рассматривается расширение алгебры (9)

$$L_i' = L_i + \mu_i(h)\partial_h, \quad i = 1, \ldots, 7, \quad h \in \boldsymbol{R}^3, \tag{10}$$

где

$$\mu_k = \mu_{k1}h + \mu_{k0} = \begin{pmatrix} 0 & c_{k1} & c_{k2}\\ 0 & 0 & c_{k1}\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1\\ h_2\\ h_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{k3}\\ c_{k4}\\ c_{k5} \end{pmatrix}, \quad k = 4,5,6,$$

$$\mu_7 = \begin{pmatrix} c_{71}\\ c_{72}\\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_1 = \begin{pmatrix} c_{41}c_{72}\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} c_{51}c_{72}\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_3 = \begin{pmatrix} c_{61}c_{72}\\ 0\\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mu_{k1}\mu_{j0} = \mu_{j1}\mu_{k0}, \quad k,j = 4,5,6,$$

и все c_{kj} постоянны.

Дополнительными инвариантами здесь будут

$$\begin{aligned} \bar{h} &= e^{-\mu_{41}u - \mu_{51}v - \mu_{61}w}(h - x\mu_1 - y\mu_2 - z\mu_3 - t\mu_7)\\ &- e^{-\mu_{51}v - \mu_{61}w}\theta_4(u) - e^{-\mu_{61}w}\theta_5(v) - \theta_6(w), \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\theta_k(q) = \left(qI - \frac{1}{2}q^2\mu_{k1} + \frac{1}{6}q^3\mu_{k1}^2\right)\mu_{k0}, \quad k = 4,5,6.$$

Здесь I — единичная матрица размерности 3.

Так как $\mu_{k1}^3 = 0$ для $k = 4,5,6$, то инварианты (11) имеют кубическую зависимость от переменных u, v, w. Более того кубическую зависимость имеет только $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$ имеет квадратичную зависимость, а $\bar{h}_3 = h_3 - c_{45}u - c_{55}v - c_{65}w$, т.е. — линейную. Несимметричность выражений (11) относительно переменных u, v, w объясняется способом их получения и сохранением компактности записи. После замены экспонент их представлением в виде рядов (здесь ряды будут конечны) и раскрытия всех скобок запись станет симметрична, но значительно менее компактна. Итак соотношения $\bar{h}(x,y,z,t,u,v,w) = \mathrm{const}$ при постоянных p и ρ дают неявную запись инвариантных решений ранга 0 относительно алгебры (10) и тем самым частично инвариантных решений ранга 0 относительно алгебры (9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука. 1978.
2. Овсянников Л.В. *Программа подмодели. Газовая динамика* // Прикл. математика и механика. Т. 58, вып. 4. 1994. С. 30–55.
3. Овсянников Л.В. *Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения.* // Докл. РАН. Т. 343, № 2. 1995. С. 156–159.
4. Овсянников Л.В., Чупахин А.П. *Регулярные частично инвариантные подмодели уравнений газовой динамики* // Прикл. математика и механика. Т. 60, вып. 6. 1996. С. 990–999.
5. Мелешко С.В., Пухначев В.В. *Об одном классе частично инвариантных решений уравнений Навье-Стокса* // Прикл. механика и техническая физика. Т. 40, № 2. 1999. С. 24–33.
6. Овсянников Л.В. *О «простых» решениях уравнений движения политропного газа* // Прикл. механика и техническая физика. Т. 40, № 2. 1999. С. 5–12.

Александр Алексеевич Талышев,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090, г. Новосибирск, Россия
E-mail: `tal@academ.org`