ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 1. № 3 (2009). С. 111-118.

УДК 517.957

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ ЛИ МЕДЛЕННОГО РОСТА И УРАВНЕНИЕ МСГ

Р.Д. МУРТАЗИНА

Аннотация. Рассмотрено применение характеристической алгебры для описания высших симметрий для модифицированного уравнения синус-Гордона. В терминах образующих характеристической алгебры построен локальный дифференциальный оператор, переводящий высшие симметрии в высшие симметрии меньшего порядка, обратный к последнему является оператором рекурренции.

Ключевые слова: характеристическое уравнение, алгебра Ли, симметрии, оператор рекурренции.

1. Введение

Характеристическая алгебра Ли [1] модифицированного уравнения синус-Гордона (см. [2]–[4]) (мСГ)

$$u_{xy} = s(u)\sqrt{1-u_x^2}\sqrt{1-u_y^2}, \quad s'' - 2s^3 - \mu s = 0, \quad \mu = const \tag{1}$$

порождена образующими

$$X_1 = u_y\frac{\partial}{\partial u} + sb\bar{b}\frac{\partial}{\partial u_x} + D(sb\bar{b})\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \dots \quad \text{и} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u_y},$$

где $b = \sqrt{1-u_x^2}$, $\bar{b} = \sqrt{1-u_y^2}$.

Уравнение мСГ (1) в значительно более громоздкой форме впервые возникло в работе А.В. Борисова, С.А. Зыкова [2]. Последнее заменой (см. [3])

$$v = \arcsin u_x + \arcsin u_y + P(u), \quad P'^2 = 2s' - 2s^2 - \mu$$

сводится к уравнению синус-Гордона

$$u_{xy} = e^u + e^{-u}.$$

В работе показано, что размерности линейных пространств кратных коммутаторов L_i, $i = 2, \dots, 5$ уравнения (1) равны одному, а $\dim L_6 = \dim L_7 = 2$.

А также для уравнения мСГ (1) построен локальный дифференциальный оператор, переводящий высшие симметрии в высшие симметрии меньшего порядка, обратный к которому является оператором рекурренции (см. [9]). Приведены оператор, который симметрии переводит в интегралы и обратный оператор, переводящий интегралы в симметрии для вырожденного случая уравнения мСГ.

R.D. Murtazina, Characteristic Lie algebras of slow growth and mSG equation.

Работа поддержана РФФИ (гранты 08-01-00440-а, 09-01-92431-КЭ-а).

Поступила 26 августа 2009 г.

2. Характеристическая алгебра Ли

Введем понятие характеристической алгебры Ли уравнения (1). Рассмотрим пространство локально-аналитических функций $\Im$, зависящих от конечного числа переменных $u, \overline{u}_1 = u_y, u_1 = u_x, u_2 = u_{xx}, \ldots$. На этом классе функций оператор полного дифференцирования по y $\overline{D}$ в силу уравнения (1) задается формулой

$$\overline{D} = \overline{u}_2 \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \overline{u}_1 \frac{\partial}{\partial u} + sb\bar{b} \frac{\partial}{\partial u_1} + D(sb\bar{b}) \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots + D^{n-1}(sb\bar{b}) \frac{\partial}{\partial u_n} + \ldots,$$

где D — оператор полной производной по x.

Положим

$$X_1 = \overline{u}_1 \frac{\partial}{\partial u} + sb\bar{b} \frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + D^{n-1}(sb\bar{b}) \frac{\partial}{\partial u_n} + \ldots, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1},$$

тогда

$$\overline{D} = X_1 + \overline{u}_2 X_2. \tag{2}$$

Характеристическое уравнение (см. [1, 6, 7])

$$\overline{D} W(u, \overline{u}_1, u_1, \ldots, u_n) = 0$$

согласно (2) эквивалентно системе

$$X_1 W = 0, \quad X_2 W = 0. \tag{3}$$

С уравнениями (3) естественным образом связана алгебра Ли, порожденная векторными полями X_1 и X_2. Эту алгебру A будем называть характеристической алгеброй Ли уравнения (1).

Так как D и $\overline{D}$ коммутируют, то, используя (2), получаем

$$[D, \overline{D}] = \overline{u}_1 s' b\bar{b} X_2 + s^2 b b' \bar{b}^2 X_2 + \overline{u}_2 s b \bar{b}' X_2 + \overline{u}_2 [D, X_2] + [D, X_1] = 0.$$

Следовательно

$$[D, X_1] = -(\overline{u}_1 s' b\bar{b} + s^2 b b' \bar{b}^2) X_2 = -(\overline{u}_1 s' b\bar{b} - s^2 u_1 \bar{b}^2) X_2,$$
$$[D, X_2] = -s b \bar{b}' X_2.$$

Пусть L_n — линейное пространство коммутаторов, образующих длины $n-1$, $n = 2, 3, \ldots$. Например, L_2 — линейная оболочка векторных полей X_1, X_2, а L_3 порождается элементом $[X_2,\ X_1]$, L_4 — коммутаторами $[X_1,\ [X_2,\ X_1]]$, $[X_2,\ [X_2,\ X_1]]$ и т.д. Тогда x-характеристическую алгебру Ли A представим в виде

$$A = \sum_{i=2}^{\infty} L_i.$$

Аналогично вводится y-характеристическая алгебра Ли $\overline{A}$ уравнения (1)

$$\overline{A} = \sum_{i=2}^{\infty} \overline{L}_i.$$

Так как для уравнения мСГ (1) операторы имеют следующий вид

$$[X_2, [X_2, X_1]] = -\tfrac{1}{\bar{b}^2}(X_1 - \overline{u}_1 [X_2, X_1]),$$
$$[X_2, [X_1, [X_2, X_1]]] = \tfrac{\overline{u}_1}{\bar{b}^2} [X_1, [X_2, X_1]],$$
$$[[X_2, X_1], [X_1, [X_2, X_1]]] = -\tfrac{\overline{u}_1}{\bar{b}^2} [X_1, [X_1, [X_2, X_1]]] + [X_2, [X_1, [X_1, [X_2, X_1]]]],$$
$$[X_2, [X_2, [X_1, [X_1, [X_2, X_1]]]]] = \tfrac{3\overline{u}_1}{\bar{b}^2} [X_2, [X_1, [X_1, [X_2, X_1]]]],$$
$$[X_1, [X_2, [X_1, [X_1, [X_2, X_1]]]]] = -3ss' \overline{u}_1 (X_1 - \overline{u}_1 [X_2, X_1]) +$$
$$+ (3s^2 + \mu) \overline{u}_1 [X_1, [X_2, X_1]] + \tfrac{\overline{u}_1}{\bar{b}^2} [X_1, [X_1, [X_1, [X_2, X_1]]]],$$

то

$$\dim L_2 = \ldots = \dim L_5 = 1, \quad \dim L_6 = \dim L_7 = 2.$$

3. Симметрии модифицированного уравнения синус-Гордона

В данном параграфе показано, как с помощью образующих характеристической алгебры описать симметрии уравнения (1).

Определение 1. *Функция $F = F(u, u_1, \overline{u}_1, u_2, \overline{u}_2, \ldots, u_n, \overline{u}_n)$ из $\Im$ называется симметрией уравнения* (1), *если она удовлетворяет определяющему уравнению*

$$D\overline{D}F = sb\overline{b}'\overline{D}F + sb'\overline{b}DF + s'b\overline{b}F. \tag{4}$$

Каждая симметрия F задает однопараметрическую группу преобразований Ли-Беклунда с касательным векторным полем (см. [5])

$$F\frac{\partial}{\partial u} + DF\frac{\partial}{\partial u_1} + \overline{D}F\frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \ldots,$$

относительно которой уравнение (1) остается инвариантным. Множество решений определяющего уравнения (4) образует алгебру Ли, называемую алгеброй Ли-Беклунда уравнения (1).

Известно (см. [6, 8]), что любая симметрия F уравнения (1) представима в виде

$$F = F_1(u, u_1, u_2, \ldots, u_n) + F_2(u, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n),$$

где F_1 и F_2, в свою очередь, есть симметрии уравнения (1).

Вычисление высших симметрий Ли-Беклунда уравнения (1) основано на исследовании характеристических уравнений

$$\overline{D}W(u, u_1, u_2, \ldots) = 0, \quad D\overline{W}(u_1, u, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots) = 0. \tag{5}$$

Далее по другому определим x-характеристическую алгебру Ли уравнения (1). На множестве локально-аналитических функций из $\Im$

$$\begin{aligned}\overline{D}F(u, u_1, u_2, \ldots) &= \overline{u}_1\tfrac{\partial}{\partial u} + sb\overline{b}\tfrac{\partial}{\partial u_1} + D(sb\overline{b})\tfrac{\partial}{\partial u_2} + \ldots = \\ &= \overline{u}_1\tfrac{\partial}{\partial u} + sb\overline{b}\tfrac{\partial}{\partial u_1} + (s'u_1b\overline{b} - s\tfrac{u_1u_2}{b}\overline{b} - s^2b^2\overline{u}_1)\tfrac{\partial}{\partial u_2} + \ldots.\end{aligned}$$

Поэтому образующие x-характеристической алгебры Ли уравнения (1) имеют вид

$$X = \frac{\partial}{\partial u} - s^2b^2\overline{u}_1\frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots, \quad Y = sb\frac{\partial}{\partial u_1} + (s'u_1b - s\frac{u_1u_2}{b})\frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots. \tag{6}$$

Тогда $\overline{D} = \overline{u}_1X + \overline{b}Y$.

Так как

$$[D, \overline{D}] = [D, \overline{u}_1X + \overline{b}Y] = sb\overline{b}X + \overline{u}_1[D, X] - sb\overline{u}_1Y + \overline{b}[D, Y],$$

то

$$XD = DX - sbY, \quad YD = DY + sbX. \tag{7}$$

По определению симметрии уравнения (1) удовлетворяют соотношению (4)

$$D\overline{D}F = (-s\frac{u_1}{b}\overline{b}D - sb\frac{\overline{u}_1}{\overline{b}}\overline{D} + s'b\overline{b})F,$$

которое перепишем так:

$$(sb\overline{b}X + \overline{u}_1DX - sb\overline{u}_1Y + \overline{b}DY - s'b\overline{b} + s\frac{u_1}{b}\overline{b}D + sb\frac{\overline{u}_1}{\overline{b}}(\overline{u}_1X + \overline{b}Y))F = 0.$$

Последнее эквивалентно двум соотношениям вида

$$XF = 0, \quad DYF = s'bF - s\frac{u_1}{b}DF \tag{8}$$

или

$$XF = 0, \quad D(Y + s\frac{u_1}{b})F = (s'b + D(s\frac{u_1}{b}))F. \tag{9}$$

Подействовав на второе уравнение (8) операторами X и Y слева и используя (7), получим, что

$$D(XY + s'\frac{u_1}{b})F = sbY^2F + (s''\frac{1}{b} + s'\frac{u_2}{b^3})F + s^2u_1YF \tag{10}$$

и

$$\begin{gathered} D(Y^2 + s^2\tfrac{1}{b^2} + s\tfrac{u_1}{b}Y)F = -sbXYF + (-ss'u_1 + 2ss'\tfrac{u_1}{b^2} + \\ +2s^2\tfrac{u_1u_2}{b^4})F + (s'\tfrac{1}{b} + s\tfrac{u_2}{b^2})YF \end{gathered} \tag{11}$$

соответственно.

Теперь рассмотрим комбинацию

$$Y^2 + s^2\frac{1}{b^2} + s\frac{u_1}{b}Y + c(XY + s'\frac{u_1}{b}) + \alpha(Y + s\frac{u_1}{b}))F,$$

где $c = const,\ \alpha = \alpha(u, u_1)$. Согласно соотношениям (9)–(11) имеем

$$\begin{gathered} D(Y^2 + s^2\tfrac{1}{b^2} + s\tfrac{u_1}{b}Y + c(XY + s'\tfrac{u_1}{b}) + \alpha(Y+ \\ +s\tfrac{u_1}{b}))F = -sbXYF + (-ss'u_1 + 2ss'\tfrac{u_1}{b^2} + 2s^2\tfrac{u_1u_2}{b^4})F+ \\ +(s'\tfrac{1}{b} + s\tfrac{u_2}{b^2})YF + csbY^2F + c(s''\tfrac{1}{b} + s'\tfrac{u_2}{b^3})F + cs^2u_1YF+ \\ +D(\alpha)(Y + s\tfrac{u_1}{b})F + \alpha(s'\tfrac{1}{b} + s\tfrac{u_2}{b^3})F = -sbX(Y + s\tfrac{u_1}{b})F+ \\ +(s'\tfrac{1}{b} + s\tfrac{u_2}{b^3})(Y + s\tfrac{u_1}{b})F + (s'\tfrac{1}{b} + s\tfrac{u_2}{b^3})(\alpha + s\tfrac{u_1}{b})F+ \\ +csb(Y + s\tfrac{u_1}{b})YF + c(s''\tfrac{1}{b} + s'\tfrac{u_2}{b^3})F + D(\alpha)(Y + s\tfrac{u_1}{b})F. \end{gathered} \tag{12}$$

Если $c = 0, \quad \alpha = -s\frac{u_1}{b}$, то (12) приводится к виду

$$D(Y^2 + s^2)F = (s'b - sbX)(Y + s\frac{u_1}{b})F. \tag{13}$$

На уравнение (13) подействуем операторами X и Y слева, а на уравнение (10) – оператором Y

$$DX(Y^2 + s^2)F = sbY^3F + b(s^3 + s'')YF - sbX^2YF, \tag{14}$$

$$\begin{gathered} DY(Y^2 + s^2)F = -sb(YXY + ss')F + b(s' - sX)(Y^2+ \\ +s^2)F - s\tfrac{u_1}{b}D(Y^2 + s^2)F, \end{gathered} \tag{15}$$

$$D(YXY + ss')F = DX(Y^2 + s^2)F.$$

Из последнего соотношения видно ,что

$$(YXY + ss')F = X(Y^2 + s^2)F + c \quad (c = const).$$

Применим к уравнению (14), предварительно поделив его на sb, дифференцирование D

$$D\left(\frac{1}{sb}DX(Y^2 + s^2)F\right) = -4sbX(Y^2 + s^2)F - 2csb.$$

Лемма 1. *Пусть функция $F = F(u, u_1, \ldots, u_n)$ — симметрия уравнения* (1). *Тогда для векторных полей X, Y, заданных формулами* (6), *оператор $X(Y^2 + \ s^2)$ симметрию F обращает в нуль.*

Доказательство. Обозначим $X(Y^2 + s^2)F = A$, тогда

$$D(\frac{1}{sb}DA) = -4sbA - 2csb. \tag{16}$$

Если $A = A(u, u_1)$, то соотношение (16) примет вид

$$\begin{gathered} D\left(\frac{1}{sb}\right)(A_u u_1 + A_{u_1}u_2) + \frac{1}{sb}(A_{uu}u_1^2 + 2A_{uu_1}u_1u_2+ \\ +A_u u_2 + A_{u_1u_1}u_2^2 + A_{u_1}u_3) = -4sbA - 2csb. \end{gathered}$$

Коэффициент при переменной u_3 обращается в нуль только при условии, что $A_{u_1} = 0$.

Значит, $A = A(u)$ и (16) перепишем так:

$$D\left(\frac{1}{sb}\right)A_u u_1 + \frac{1}{sb}(A_{uu}u_1^2 + A_u u_2) = -4sbA - 2csb$$

или

$$\left(-\frac{s'}{s^2}\frac{u_1}{b} + \frac{1}{s}\frac{u_1}{b^3}u_2\right)A'u_1 + \frac{1}{sb}(A''u_1^2 + A'u_2) = -4sbA - 2csb.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{s}\frac{u_1}{b^3}A'u_1 + \frac{1}{sb}A' = \frac{1}{b^2}A' = 0.$$

Тогда $A = const$, $c = -2A$ и, уточняя структуру выражения $X(Y^2 + s^2)F$, получаем, что $A = 0$. Лемма доказана.

Значит, $X(Y^2 + s^2)F = 0$, и согласно (15)

$$D(Y + s\frac{u_1}{b})(Y^2 + s^2)F = (s'b + D(s\frac{u_1}{b}))(Y^2 + s^2)F.$$

Следовательно, по определению симметрии (см. (9)) $(Y^2+s^2)F$ тоже является симметрией уравнения (1).

Теперь рассмотрим задачу нахождения реккурентной формулы для вычисления алгебры симметрий уравнения мСГ.

Теорема 1. *Дифференциальный оператор*

$$Y^2 + s^2$$

переводит высшие симметрии порядка n в симметрии порядка $n-2$. Оператор рекурренции

$$D^2 + 2\frac{u_1u_2}{b^2}D - u_1D^{-1}(\frac{u_3}{b^2}D + \frac{u_1u_2^2}{b^4}D + 3s^2u_1D+$$
$$+3ss'u_1^2 - ss' + \lambda u_2) + s^2 + \lambda u_1^2$$

определяет алгебру симметрий уравнения мСГ.

Доказательство. Пусть F — симметрия порядка n уравнения мСГ. Тогда из формулы (13) следует, что $(Y^2 + s^2)F$ — симметрия порядка $n-2$. Следовательно,

$$(Y^2 + s^2)F^{(2k+1)} = \alpha_k F^{(2k-1)}, \quad \alpha_k = const, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Подействуем оператором $Y^2 + s^2$ на симметрию третьего порядка

$$F^{(3)} = u_3 + \frac{3u_1u_2^2}{2b^2} + u_1^3\left(-\frac{3}{2}s^2 + \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{3}{2}s^2u_1,$$

тогда

$$(Y^2 + s^2)\left(u_3 + \tfrac{3u_1u_2^2}{2b^2} + u_1^3\left(-\tfrac{3}{2}s^2 + \tfrac{\lambda}{2}\right) + \tfrac{3}{2}s^2u_1\right) =$$
$$= Y(-s\tfrac{u_1u_3}{b} + s''u_1^2b - s^3b^3 + 3su_1^2b(-\tfrac{3}{2}s^2 + \tfrac{\lambda}{2}) + \tfrac{3}{2}s^3b + s'\tfrac{u_2}{b}+$$
$$+u_2^2(\tfrac{1}{2}s\tfrac{1}{b^3} - \tfrac{3}{2}s\tfrac{u_1^2}{b^3})) + s^2\left(u_3 + \tfrac{3u_1u_2^2}{2b^2} + u_1^3(-\tfrac{3}{2}s^2 + \tfrac{\lambda}{2}) + \tfrac{3}{2}s^2u_1\right) =$$
$$= 2ss''u_1(1 - 2u_1^2) + 4s^4u_1b^2 + s'^2u_1 + \lambda s^2u_1(3 - 4u_1^2) - 3s^4u_1(3 - 4u_1^2).$$

Так как $s'' = 2s^3 - \lambda s$, то

$$(Y^2 + s^2)\left(u_3 + \tfrac{3u_1u_2^2}{2b^2} + u_1^3\left(-\tfrac{3}{2}s^2 + \tfrac{\lambda}{2}\right) + \tfrac{3}{2}s^2u_1\right) =$$
$$= (s'^2 - s^4 + \lambda s^2)u_1 = (s'^2 - ss'' + s^4)u_1.$$

Отметим, что

$$\left(s'^2 - s^4 + \lambda s^2\right)' = 2s'(s'' - 2s^3 + \lambda s),$$

а соотношение $s'' - 2s^3 + \lambda s$ обращается в нуль в силу условия для функции s уравнения мСГ. Значит, $\alpha_1 = \mu,\ \mu = const$ и

$$(Y^2 + s^2)F^{(3)} = \mu F^{(1)},$$

где $\mu = s'^2 - s^4 + \lambda s^2 = s'^2 - ss'' + s^4$. Соотношение $\alpha_k = \mu$ справедливо для любого $k = 1, 2, \dots$ и

$$(Y^2 + s^2)F^{(2k+1)} = \mu F^{(2k-1)}, \quad \mu \neq 0.$$

Имеем следующие соотношения:

$$\begin{gathered} D(Y^2 + s^2)F = b(s' - sX)YF, \\ D^2(Y^2 + s^2)F = -\mu \tfrac{u_1 b}{s} YF + \mu b^2 F - s^2 b^2 (Y^2 + s^2)F + \\ +D(\ln bs)D(Y^2 + s^2)F. \end{gathered} \tag{17}$$

Теперь найдем оператор L такой, что $F = L(Y^2 + s^2)F$. Для этого вычислим $D^3(Y^2 + s^2)F$ и перепишем так:

$$(D^3 + s^2 b^2 D - D^2(\ln bs)D + D(\ln \frac{u_1 b}{s})D(\ln bs)D - D(\ln bs)D^2 -$$

$$-D(\ln \frac{u_1 b}{s})D^2 + D(s^2 b^2) - D(\ln \frac{u_1 b}{s})s^2 b^2)(Y^2 + s^2)F = \mu u_1 D(\frac{1}{u_1}F).$$

Поделим левую и правую части последнего равенства на u_1 и преобразуем к виду

$$\begin{gathered} D(\tfrac{1}{u_1}D^2) + D(\tfrac{2u_2}{b^2}D) + D(\tfrac{s^2}{u_1} + \lambda u_1) - (\tfrac{u_3}{b^2} + \tfrac{u_1 u_2^2}{b^4} + 3s^2 u_1)D + \\ +ss'(1 - 3u_1^2) - \lambda u_1)(Y^2 + s^2)F = \mu D(\tfrac{1}{u_1}F). \end{gathered}$$

Подействовав оператором D^{-1} и умножив на $\frac{u_1}{\mu}$, получим

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{\mu}(D^2 + \tfrac{2u_1 u_2}{b^2}D + s^2 + \lambda u_1^2 - u_1 D^{-1}(\tfrac{u_3}{b^2}D + \tfrac{u_1 u_2^2}{b^4}D + \\ +3s^2 u_1 D - ss' + 3u_1^2 ss' + \lambda u_2))(Y^2 + s^2)F = F. \end{gathered}$$

Следовательно, оператор L принимает вид

$$\begin{gathered} L = D^2 + 2\tfrac{u_1 u_2}{b^2}D - u_1 D^{-1}(\tfrac{u_3}{b^2}D + \tfrac{u_1 u_2^2}{b^4}D + 3s^2 u_1 D + \\ +3ss' u_1^2 - ss' + \lambda u_2) + s^2 + \lambda u_1^2. \end{gathered}$$

Оператор L является оператором рекурренции, который позволяет описать алгебру симметрий

$$LF^{(2k-1)} = F^{(2k+1)}, \quad F^{(1)} = u_1, \quad i = 1, 2, \dots.$$

Теорема доказана.

Отметим, что оператор рекурренции был получен в работе Кузнецовой М.Н. [9] с использованием преобразования Беклунда.

4. Вырожденное уравнение мСГ

Если $\mu = 0$, т.е. $s'^2 - ss'' + s^4 = 0$, тогда функция s уравнения (1) определяется так:

$$s = \frac{\sqrt{\lambda}}{\cos(\sqrt{\lambda}u - c)}, \quad \lambda, c = const.$$

Согласно (17) имеем

$$(Y^2 + s^2)F = 0, \quad (X - \frac{s'}{s})YF = 0,$$

тогда любой оператор

$$X^{i_1}Y^{j_1}X^{i_2}Y^{j_2}\dots X^{i_k}Y^{j_k}$$

на алгебре Ли-Беклунда высших симметрий представляется в виде

$$\alpha_{i_1 j_1 \dots i_k j_k}Y + \beta_{i_1 j_1 \dots i_k j_k}.$$

Так как оператор $D(Y + s\frac{u_1}{b})$ не изменяет порядок симметрии F (см. (9)), то оператор $Y + s\frac{u_1}{b}$ понижает порядок F на единицу.

Теперь покажем, что не существует оператора, являющегося полиномом от переменных X и Y, переводящего симметрии в симметрии меньшего порядка уравнения

$$u_{xy} = \frac{1}{\cos u}\sqrt{1 - u_1^2}\sqrt{1 - \overline{u}_1^2}. \tag{18}$$

Допустим, что комбинация $\alpha Y + \beta$ есть оператор, переводящий симметрии в симметрии меньшего порядка. Тогда

$$\alpha Y + \beta = \alpha(Y + s\frac{u_1}{b}) \tag{19}$$

и первое соотношение (9) принимает вид

$$X\left(\alpha(Y + s\frac{u_1}{b})F\right) = 0$$

или

$$\left(X(\alpha) + \alpha\frac{s'}{s}\right)(Y + s\frac{u_1}{b})F = 0.$$

Следовательно,

$$X(\alpha) + \alpha\frac{s'}{s} = 0 \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{b}{s}.$$

Для оператора (19) второе соотношение (9) имеет вид

$$D\left((Y + s\frac{u_1}{b})\frac{b}{s}(Y + s\frac{u_1}{b})\right)F =$$

$$= \left(s'b + D(s\frac{u_1}{b})\right)\frac{b}{s}\left(Y + s\frac{u_1}{b}\right)F.$$

Если порядок функции $(Y + s\frac{u_1}{b})F$ равен n, то порядок функции $(Y + s\frac{u_1}{b})\frac{b}{s}(Y + s\frac{u_1}{b})F$ равен $n - 1$. С другой стороны получаем, что

$$(Y + s\frac{u_1}{b})\frac{b}{s}(Y + s\frac{u_1}{b})F = u_1(Y + s\frac{u_1}{b})F. \tag{20}$$

Значит, порядок левой части соотношения (20) равен $n - 2$, а правой части (20) – $n - 1$. Отсюда следует, что не существует оператора вида $\alpha Y + \beta$.

Определение 2. *Решения* $\overline{W}(u_1, u, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots)$, $W(u, u_1, \ldots)$ *характеристических уравнений* (5) *называются* x *и* y*-интегралами уравнения* (1).

Оказывается, существует оператор, который симметрии уравнения (18) переводит в y-интеграл.

Теорема 2. *Оператор*

$$\frac{b}{s}Y + u_1$$

симметрию F *переводит в интеграл* W *уравнения* (18). *А оператор*

$$\left(\frac{s'}{s} + \frac{u_2}{b^2}\right)^{-1}\left(D - \frac{s}{b}D\left(\frac{b}{s}\right)\right)$$

интеграл — в симметрию.

Доказательство. Операторы X и Y функцию

$$\left(\frac{b}{s}Y + u_1\right)F$$

обращают в нуль. Поэтому

$$\overline{D}\left(\frac{b}{s}Y + u_1\right) F = 0.$$

Значит,

$$W = \left(\frac{b}{s}Y + u_1\right) F \tag{21}$$

— интеграл уравнения (18).

Теперь приведем оператор, который переводит интеграл в симметрии уравнения (18). Дифференцирование D интеграла W определяется дифференцированием D правой части соотношения (21)

$$DW = \frac{s}{b}D\left(\frac{b}{s}\right)W + \left(\frac{u_2}{b^2} + \frac{s'}{s}\right)F.$$

Отсюда следует, что

$$F = \left(\frac{s'}{s} + \frac{u_2}{b^2}\right)^{-1}\left(D - D\left(\frac{b}{s}\right)\frac{s}{b}\right)W.$$

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность Жиберу А.В. за многочисленные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лезнов А.Н., Смирнов В.Г., Шабат А.Б. *Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем* // ТМФ. Т. 51, вып 1. 1982. С. 10–21.
2. Борисов А.Б., Зыков С.А. *Одевающая цепочка дискретных симметрий и размножение нелинейных уравнений* // ТМФ. Т. 115, вып. 2. 1998. С. 199–214.
3. Жибер А.В., Соколов В.В. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа* // УМН. Т. 56, вып 1. 2001. С. 63–106.
4. Муртазина Р.Д. *Нелинейные гиперболические уравнения и характеристические алгебры Ли* // Труды института математики и механики УрО РАН. Т. 13, вып. 4. 2007. С. 102–117.
5. Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике.* М.: Наука. 1983. 280 с.
6. Жибер А.В. *Квазилинейные гиперболические уравнения с бесконечной алгеброй симметрий* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 58, вып. 4. 1994. С. 33–54.
7. Жибер А.В., Гурьева А.М. *О характеристическом уравнении квазилинейной гиперболической системы уравнений* // Вестник УГАТУ. Т. 6, вып. 2 (13). 2005. С. 26–34.
8. Жибер А.В., Шабат А.Б. *Системы уравнений $u_x = p(u,v)$, $v_y = q(u,v)$ обладающие симметриями* // Доклады АН СССР. Т. 277, вып. 1. 1984. С. 29–33.
9. Кузнецова М.Н. *Симметрии уравнения эллиптического синуса* // Региональная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике. Математика. Уфа: БашГУ. 2007. С. 170–179.

Регина Димовна Муртазина,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450025, г. Уфа, Россия
E-mail: ReginaUFA@yandex.ru