ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 1. № 3 (2009). С. 87-96.

УДК 517.9

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И НЕЛИНЕЙНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

М.Н. КУЗНЕЦОВА

Аннотация. Описаны пары нелинейных уравнений, линеаризации которых связаны преобразованиями Лапласа первого и второго порядков. Показано, как преобразования Лапласа могут быть использованы для нахождения преобразования Беклунда, связывающего решения нелинейных уравнений.

Ключевые слова: нелинейные гиперболические уравнения, преобразование Лапласа, преобразование Беклунда.

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются пары нелинейных гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными вида

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1}$$

$$q_{xy} = F(x, y, q, q_x, q_y). \tag{2}$$

Преобразование Лапласа представляет собой основу каскадного метода интегрирования линейных дифференциальных уравнений (см. [1]). В то же время, известно, что существует некоторая связь между свойствами нелинейных уравнений и свойствами их линеаризаций (например, см. [2]–[4]). Эта связь может быть описана в терминах инвариантов Лапласа. В частности, в работе [2] показано, как инварианты Лапласа могут быть использованы для построения общего решения уравнений лиувиллевского типа. Необходимым условием наличия у уравнения (1) дифференциальной подстановки, переводящей решения этого уравнения в решения линейного уравнения, является ограниченность порядков инвариантов Лапласа его линеаризации [3]. Оказывается, преобразования Лапласа могут быть использованы для нахождения преобразования Беклунда, связывающего решения нелинейных уравнений [4].

В настоящей работе описаны пары нелинейных уравнений (1), (2), линеаризации которых связаны преобразованиями Лапласа первого и второго порядков. Для каждой пары построено соответствующее преобразование Беклунда.

Преобразование Лапласа определяется для линейного уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + c(x, y)\right) v = 0. \tag{3}$$

Функции

$$h_0 = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c, \quad k_0 = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c \tag{4}$$

являются инвариантами при преобразованиях вида $v \to \alpha(x, y)v$ (см. [1]) и называются главным инвариантами Лапласа уравнения (3).

M.N. Kuznetsova, Laplace transformation and nonlinear hyperbolic equations.

Поступила 25 августа 2009 г.

Нетрудно проверить, что уравнение (3) эквивалентно каждой из систем уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)v=v_1, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)v_1=h_0v, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)v=v_{-1}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)v_{-1}=k_0v. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) показывают, что если хотя бы один из инвариантов h_0, k_0 тождественно равен нулю, то уравнение (3) интегрируется в квадратурах [1]. В случае $h_0=k_0=0$ уравнение (3) эквивалентно волновому уравнению $u_{xy}=0$.

Первая из формул (5) задает так называемое y-преобразование Лапласа, которое состоит в переходе от неизвестной v к неизвестной v_1. Если $h_0\neq 0$, то функция v_1 удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+a_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+b_1(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+c_1(x,y)\right)v_1=0. \tag{E_1}$$

Далее, если инвариант $h_1\neq 0$, можно применить y-преобразование к уравнению E_1 и т.д. Продолжая процесс, получаем цепочку уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+a_i(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+b_i(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+c_i(x,y)\right)v_i=0, \quad i\in N, \tag{E_i}$$

коэффициенты и инварианты которых связаны между собой соотношениями:

$$a_i=a_{i-1}-(\ln h_{i-1})_y\,, \quad b_i=b_{i-1}, \quad c_i=a_ib_i+(b_i)_y-h_{i-1},$$

$$h_i=2h_{i-1}-h_{i-2}-(\ln h_{i-1})_{xy}\,, \quad k_i=h_{i-1}.$$

Здесь $a_0=a$, $b_0=b$, $c_0=c$.

X-преобразование Лапласа описывается первой из формул (6) и состоит в переходе от неизвестной v к неизвестный v_{-1}. Если $k_0\neq 0$, то в результате указанного преобразования получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+a_{-1}(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+b_{-1}(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+c_{-1}(x,y)\right)v_{-1}=0. \tag{E_{-1}}$$

Аналогично, если инвариант $k_{-1}\neq 0$, можно применить x-преобразование к уравнению E_{-1} и т.д. В результате получим цепочку уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+a_{-i}(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+b_{-i}(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+c_{-i}(x,y)\right)v_{-i}=0, \quad i\in N, \tag{E_{-i}}$$

коэффициенты и инварианты которых связаны между собой соотношениями:

$$a_{-i-1}=a_{-i}, \quad b_{-i-1}=b_{-i}-(\ln k_{-i})_x\,,$$

$$c_{-i-1}=a_{-i-1}b_{-i-1}+(a_{-i})_x-k_{-i}, \tag{7}$$

$$h_{-i}=2h_{-i-1}-h_{-i-2}-(\ln h_{-i-1})_{xy}\,, \quad k_{-i}=h_{-i-1}. \tag{8}$$

Таким образом, мы имеем целую последовательность уравнений

$$\ldots, \quad E_{-3}, \quad E_{-2}, \quad E_{-1}, \quad E_0, \quad E_1, \quad E_2, \quad E_3, \quad \ldots, \tag{9}$$

не обрывающуюся с той или другой стороны до тех пор, пока, возможно, не встретится уравнение, один из инвариантов которого тождественно равен нулю (через (E_0) обозначим уравнение (3)). Эти уравнения находятся в такой взаимной связи, что, проинтегрировав любое из них, мы проинтегрируем и все другие, в частности, исходное уравнение E_0.

Изучение последовательности (9) оказывается полезным при исследовании уравнения E_0 даже в случае, когда она оказывается бесконечной в обе стороны. При этом представляет интерес последовательность инвариантов, соотвествующих этим уравнениям.

Определение 1. *Множество главных инвариантов* h_i, $i \in Z$ *уравнений* (9) *называется последовательностью инвариантов Лапласа для уравнения* (3).

Последовательность инвариантов Лапласа однозначно определяется рекуррентной формулой

$$h_i = 2h_{i-1} - h_{i-2} - (\ln h_{i-1})_{xy}\,, \quad i \in Z$$

и начальными данными (4), при этом $k_i = h_{i-1}$.

2. Преобразование Лапласа первого порядка

В данном параграфе рассматривается пара нелинейных уравнений (1), (2). Предположим, что решения $u(x,y,\tau)$, $q(x,y,\tau)$ зависят от некоторого параметра τ, и определим функции

$$v = u_\tau, \quad p = q_\tau. \tag{10}$$

Легко показать, что эти функции удовлетворяют линеаризованным уравнениям

$$\left(D\overline{D} - f_{u_x}D - f_{u_y}\overline{D} - f_u\right) v = 0, \tag{11}$$

$$\left(D\overline{D} - F_{q_x}D - F_{q_y}\overline{D} - F_q\right) p = 0. \tag{12}$$

Здесь введены обозначения D и $\overline{D}$ для операторов полного дифференцирования по переменным x и y соответственно.

Предположим, что уравнение (12) получено из уравнения (11) в результате применения x-преобразования Лапласа первого порядка. Задача состоит в описании соответствующих нелинейных уравнений (1.2), (1.1). В силу формул (7), (8) коэффициенты уравнений (11), (12) связаны соотношениями:

$$F_{q_x} = f_{u_x}, \quad F_{q_y} = f_{u_y} + D(\ln k_0), \quad F_q = D(F_{q_x}) - F_{q_x}F_{q_y} + k_0, \tag{13}$$

где

$$k_0 = -\overline{D}(f_{u_y}) + f_{u_x}f_{u_y} + f_u \tag{14}$$

— главный инвариант уравнения (11). Согласно определению x-преобразования Лапласа (см. формулы (6)), функции p, v связаны формулами

$$\left(D - f_{u_y}\right) v = p, \quad \left(\overline{D} - f_{u_x}\right) p = k_0 v. \tag{15}$$

Одним из основных результатов работы является следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть линеаризованное уравнение* (12) *является результатом применения x-преобразования Лапласа первого порядка к уравнению* (11)*, тогда соответствующие нелинейные уравнения* (1.2), (1.1) *имеют вид*

$$u_{xy} = \varphi(x,y,u,u_x) + \lambda_u(x,y,u)u_y, \tag{16}$$

$$\begin{gathered} q_{xy} = \varphi_x\big(x,y,w,q+\lambda(x,y,w)\big) - \lambda_{xy}(x,y,w) + \\ +\Big(\varphi_w\big(x,y,w,q+\lambda(x,y,w)\big) + \varphi_{q+\lambda}\big(x,y,w,q+\lambda(x,y,w)\big)\lambda_w(x,y,w) - \\ -\lambda_{yw}(x,y,w)\Big)\big(q+\lambda(x,y,w)\big) + \varphi_{q+\lambda}\big(x,y,w,q+\lambda(x,y,w)\big)\times \\ \times\big(q_x + \lambda_x(x,y,w)\big), \end{gathered} \tag{17}$$

где функция $w(x,y,q,q_y)$ неявным образом определяется из соотношения

$$q_y = \varphi\big(x,y,w,q+\lambda(x,y,w)\big) - \lambda_y(x,y,w). \tag{18}$$

Из условия теоремы и определения преобразования Лапласа следует, что инвариант k_0, заданный формулой (14), не равен нулю. Для уравнения (16) последнее требование записывается в виде

$$\varphi_u + \varphi_{u_x}\lambda_u - \lambda_{yu} \neq 0.$$

Доказательство. Введем некоторые обозначения и правила, которыми мы будем пользоваться далее, в частности, при доказательстве теоремы. А именно, если функция $u(x, y)$ является решением уравнения вида (1.1), те частные производные, которые можно выразить из уравнения (1.1) и его дифференциальных следствий, будем исключать из всех выражений. Таким образом, u_{xy} всегда заменяется на $f(x, y, u, u_x, u_y)$, u_{xyy} — на выражение

$$f_y + f_u u_y + f_{u_x} f + f_{u_y} u_{yy}$$

и т.д. Это означает, что всякая смешанная производная от u может быть выражена через

$$x, \quad y, \quad u, \quad u_1 = u_x, \quad \overline{u}_1 = u_y, \quad u_2 = u_{xx}, \quad \overline{u}_2 = u_{yy}, \quad .... \tag{19}$$

Функции (19) нельзя связать между собой, пользуясь уравнением (1.1) и его дифференциальными следствиями. Поэтому во всех выкладках они считаются независимыми переменными.

Несмотря на то, что основой для доказательства теоремы являются соотношения (13), исследовать их довольно трудно. Поэтому мы дифференцируем эти соотношения по параметру τ, учитывая равенства (10), (15) и независимость функций $v_1, \overline{v}_1, v_2, ...$ Такой прием существенно упрощает процесс решения задачи.

Дифференцируем первое соотношение (13) по параметру τ, учитывая равенства (10),(14),(15),

$$\begin{aligned} f_{u_1 u} v + f_{u_1 u_1} v_1 + f_{u_1 \overline{u}_1} \overline{v}_1 = F_{q_1 q} \left(v_1 - f_{\overline{u}_1} v\right) + F_{q_1 q_1} \big(v_2 - D(f_{\overline{u}_1}) v - f_{\overline{u}_1} v_1\big) + \\ + F_{q_1 \overline{q}_1} \big(k_0 v + f_{u_1} \left(v_1 - f_{\overline{u}_1} v\right)\big). \end{aligned} \tag{20}$$

Сравнивая коэффициенты при независимых переменных в формуле (20), получаем, что

$$f_{u_1 \overline{u}_1} = 0, \quad F_{q_1 q_1} = 0, \tag{21}$$

$$f_{u_1 u} = -F_{q_1 q} f_{\overline{u}_1} - F_{q_1 q_1} D(f_{\overline{u}_1}) + F_{q_1 \overline{q}_1} \big(k_0 - f_{u_1} f_{\overline{u}_1}\big), \tag{22}$$

$$f_{u_1 u_1} = F_{q_1 q} - F_{q_1 q_1} f_{\overline{u}_1} + F_{q_1 \overline{q}_1} f_{u_1}. \tag{23}$$

Обращаясь к формулам (21), имеем

$$f = \varphi(x, y, u, u_1) + \psi(x, y, u, \overline{u}_1), \tag{24}$$

$$F = \alpha(x, y, q, \overline{q}_1) q_1 + \beta(x, y, q, \overline{q}_1). \tag{25}$$

Учитывая равенства (24), (25), перепишем соотношение (23)

$$\varphi_{u_1 u_1} = \alpha_q + \alpha_{\overline{q}_1} \varphi_{u_1}. \tag{26}$$

Обращаясь к формулам (14), (22), учитывая (26), имеем

$$\varphi_{u_1 u} = -\alpha_q \psi_{\overline{u}_1} + \big(-\psi_{y \overline{u}_1} - \psi_{\overline{u}_1 u} \overline{u}_1 - \psi_{\overline{u}_1 \overline{u}_1} \overline{u}_2 + \varphi_u + \psi_u\big) \alpha_{\overline{q}_1}.$$

Дифференцируя последнее соотношение по параметру τ и сравнивая коэффициенты при переменной $\overline{v}_2$, получаем

$$\alpha_{\overline{q}_1}(x, y, q, \overline{q}_1) \psi_{\overline{u}_1 \overline{u}_1}(x, y, u, \overline{u}_1) = 0.$$

Отсюда следует, что $\alpha_{\overline{q}_1} = 0$ либо $\psi_{\overline{u}_1 \overline{u}_1} = 0$. В первом случае уравнение (1.2) превращается в линейное. Поэтому мы рассматриваем второй вариант, тогда

$$\psi(x, y, u, \overline{u}_1) = g(x, y, u) \overline{u}_1 + r(x, y, u).$$

Следовательно, согласно формуле (24)

$$f = \varphi(x, y, u, u_1) + g(x, y, u) \overline{u}_1 + r(x, y, u).$$

Последнее равенство можно записать так:

$$f = \varphi(x, y, u, u_1) + g(x, y, u)\overline{u}_1. \tag{27}$$

Далее заметим, что первая из формул (15) справедлива, если

$$q = u_1 - \lambda(x, y, u), \tag{28}$$

где $\lambda_u = g$. Иначе говоря, функция f, описанная формулой (27), приобретает вид

$$f = \varphi(x, y, u, u_1) + \lambda_u(x, y, u)\overline{u}_1. \tag{29}$$

После взятия полной производной в силу уравнения (1.1) по y равенства (28) имеем

$$\overline{q}_1 = \varphi(x, y, u, u_1) - \lambda_y(x, y, u), \tag{30}$$

или, согласно (28)

$$\overline{q}_1 = \varphi\big(x, y, u, q + \lambda(x, y, u)\big) - \lambda_y(x, y, u). \tag{31}$$

Заметим, что дифференцирование равенства (31) по параметру τ приводит к формуле, совпадающей со второй из формул (15). В то же время, используя соотношение (30), получаем

$$\begin{gathered} F = \varphi_x\big(x, y, u, q + \lambda(x, y, u)\big) - \lambda_{xy}(x, y, u) + \\ +\Big(\varphi_u\big(x, y, u, q + \lambda(x, y, u)\big) + \varphi_{q+\lambda}\big(x, y, u, q + \lambda(x, y, u)\big)\lambda_u(x, y, u) - \\ -\lambda_{yu}(x, y, u)\Big)\big(q + \lambda(x, y, u)\big) + \varphi_{q+\lambda}\big(x, y, u, q + \lambda(x, y, u)\big)\times \\ \times\big(q_1 + \lambda_x(x, y, u)\big), \end{gathered} \tag{32}$$

где функция $u(x, y, q, \overline{q}_1)$ определяется из соотношения (31).

Далее, нетрудно показать, что функции f и F, описанные формулами (29), (32) соответственно, удовлетворяют соотношениям (13). Теорема доказана.

В процессе доказательства теоремы было найдено преобразование Беклунда

$$q = u_x - \lambda(x, y, u), \quad q_y = \varphi\big(x, y, u, u_x\big) - \lambda_y(x, y, u),$$

связывающее решения нелинейных уравнений (16), (17).

Теперь приведем ряд конкретных примеров. Уравнения

$$u_{xy} = \frac{\exp u}{x + y}, \quad q_{xy} = qq_y - \frac{q_y}{x + y}$$

связаны преобразованием Беклунда

$$q = u_x, \quad u = \ln\big(q_y(x + y)\big).$$

Преобразование, связывающее решения двух уравнений

$$u_{xy} = \sin x + \sin u, \quad q_{xy} = \cos x + \sqrt{\cos^2 x + 2q_y \sin x - q_y^2}\,q,$$

имеет вид

$$q = u_x, \quad u = \arcsin(q_y - \sin x).$$

Для уравнений

$$u_{xy} = \frac{\sin u}{x + y}, \quad q_{xy} = \frac{q\sqrt{1 - (x + y)^2 q_y^2} - q_y}{x + y}$$

преобразование Беклунда записывается в форме

$$q = u_x, \quad u = \arcsin\big((x + y)q_y\big).$$

Далее, в качестве примера можно рассмотреть уравнение

$$u_{xy} = A(x, y)\exp(u)u_x + A_x(x, y)\exp(u) - \exp(-u)u_y + C(x, y), \tag{33}$$

связанное подстановкой $u = -\ln(w_x/w + \beta)$ с линейным уравнением

$$w_{xy} + \alpha(x,y)w_x + \beta(x,y)w_y + \gamma(x,y)w = 0,$$

если $A = \gamma - \alpha\beta - \beta_y$ и $C = \alpha_x - \beta_y$ (см. [3]). Кроме того, в силу теоремы 1 уравнение (33) связано с уравнением

$$q_{xy} = q \cdot q_y - qC(x,y) + 2A_x(x,y) + C_x(x,y) +$$
$$+\big(q_y - A(x,y) - C(x,y)\big)\frac{A_x(x,y)q + A(x,y)q_x + A_{xx}(x,y)}{A(x,y)q + A_x(x,y)}$$

преобразованием Беклунда

$$q = u_x - \exp(-u), \quad u = \ln\left(\frac{q_y - A(x,y) - C(x,y)}{A(x,y)q + A_x(x,y)}\right).$$

Теперь рассмотрим уравнения

$$u_{xy} = f(y,u)u_x, \tag{34}$$
$$q_{xy} = f_w(y,w)\big(q + \lambda(x,y)\big)^2 + f(y,w)\big(q_x + \lambda_x(x,y)\big) - \lambda_{xy}(x,y),$$

где функция $w(x,y,q,q_y)$ неявным образом определяется из соотношения

$$q_y = f(y,w)\big(q + \lambda(x,y)\big) - \lambda_y(x,y).$$

Согласно приведенной выше теореме эти уравнения связаны преобразованием

$$q = u_x - \lambda(x,y), \quad q_y = f(y,u)u_x - \lambda_y(x,y).$$

Здесь λ — произвольная функция. При этом уравнение (34) переводится подстановкой $r = P(y,u,u_y)$, где P находится из условия $P_{u_y}f + P_u = 0$, в уравнение $r_x = 0$ (см. [3]).

3. Преобразование Лапласа второго порядка

В настоящем параграфе рассматриваются нелинейные уравнения (1.1), (1.2), правые части которых не зависят от независимых переменных x, y, а именно,

$$u_{xy} = f(u,u_x,u_y), \tag{35}$$

$$q_{xy} = g(q,q_x,q_y). \tag{36}$$

Так же, как и в предыдущем разделе, предположим, что решения $u(x,y,\tau)$, $q(x,y,\tau)$ зависят от некоторого параметра τ, и введем фунции v, p по формулам (10). Линеаризации уравнений (35), (36) имеют вид (11), (12) соответственно. Усложним задачу, по сравнению с предыдущим разделом, полагая, что уравнение (12) получено из уравнения (11) в результате применения x-преобразования Лапласа второго порядка. Требуется описать соответствующие нелинейные уравнения (35), (36).

Согласно определению преобразования Лапласа справедливы следующие соотношения:

$$F_{q_1} = f_{u_1}, \quad F_{\overline{q}_1} = f_{\overline{u}_1} + D\ln(k_0 \cdot k_{-1}), \quad F_q = D(F_{q_1}) - F_{q_1}F_{\overline{q}_1} + k_{-1}, \tag{37}$$

где

$$k_{-1} = k_0 + D(f_{u_1}) - \overline{D}(f_{\overline{u}_1}) - D\overline{D}(\ln k_0), \tag{38}$$

а k_0 — главный инвариант уравнения (11), определенный по формуле

$$k_0 = -\overline{D}(f_{\overline{u}_1}) + f_{u_1}f_{\overline{u}_1} + f_u. \tag{39}$$

Кроме того, функции p, v связаны формулами

$$\big(D - f_{\overline{u}_1} - D(\ln k_0)\big)\big(D - f_{\overline{u}_1}\big)v = p, \quad \big(\overline{D} - f_{u_1}\big)p = k_{-1}\big(D - f_{\overline{u}_1}\big)v. \tag{40}$$

Теорема 2. *Пусть линеаризованное уравнение* (12) *является результатом применения x-преобразования Лапласа второго порядка к уравнению* (11). *Тогда соответствующие нелинейные уравнения* (36), (35) *имеют вид*

$$u_{xy} = \exp(u) - A\exp(-u)u_y + \Psi\big(u_x - A\exp(-u)\big), \quad \Psi \neq 0, \tag{41}$$

$$q_{xy} = \Psi'(w)q_x - \Psi(w)\big(q + \frac{w^2}{2}\big) + \Psi''(w)\big(q + \frac{w^2}{2}\big)^2, \tag{42}$$

где функция $w(q, q_y)$ определяется неявным образом из соотношения

$$q_y - \Psi'(w)q - \frac{w^2}{2}\Psi'(w) + \Psi(w)w - A = 0. \tag{43}$$

Доказательство. Дифференцируем первое из соотношений (37) по параметру τ, учитывая формулы (10)

$$F_{q_1q}p + F_{q_1q_1}p_1 + F_{q_1\overline{q}_1}\overline{p}_1 = f_{u_1u}v + f_{u_1u_1}v_1 + f_{u_1\overline{u}_1}\overline{v}_1. \tag{44}$$

Используя равенства (40), в силу независимости переменных $v, v_1, \overline{v}_1, v_2, \overline{v}_2, \ldots$ из последнего соотношения имеем

$$F_{q_1q_1} = 0, \quad f_{u_1\overline{u}_1} = 0. \tag{45}$$

Отсюда делаем вывод, что правые части уравнений (35), (36) имеют вид

$$f = \varphi(u, u_1) + \psi(u, \overline{u}_1), \quad F = \alpha(q, \overline{q}_1)q_1 + \beta(q, \overline{q}_1) \tag{46}$$

соответственно. Теперь подставим полученные выражения для f, F в первую формулу (37)

$$\alpha(q, \overline{q}_1) = \varphi_{u_1}(u, u_1). \tag{47}$$

Возьмем производную по параметру τ равенства (47)

$$\varphi_{u_1u}v + \varphi_{u_1u_1}v_1 = \alpha_q p + \alpha_{\overline{q}_1}\overline{p}_1 \tag{48}$$

и, учитывая формулы (40), из последнего равенства получим

$$\alpha_q + \alpha_{\overline{q}_1}\varphi_{u_1} = 0. \tag{49}$$

Отсюда в силу (47)

$$\alpha_q + \alpha_{\overline{q}_1}\alpha = 0. \tag{50}$$

Следует отметить, что уравнение (50) — это так называемое уравнение Хопфа. Оно интересно тем, что моделирует уравнения газовой динамики. Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$\alpha \cdot q - \overline{q}_1 + \Phi(\alpha) = 0,$$

где Φ — произвольная функция.

Далее, преобразуем вторую формулу (40)

$$p = v_2 + \Big((\psi_{\overline{u}_1})^2 - D(\psi_{\overline{u}_1}) + \psi_{\overline{u}_1}D\big(\ln(k_0)\big)\Big)v - \Big(2\psi_{\overline{u}_1} + D(\ln(k_0))\Big)v_1.$$

В формуле (48), используя последнее соотношение и равенства (40), сравниваем коэффициенты при переменной v_1

$$\varphi_{u_1u_1} = \alpha_q\big(-2\psi_{\overline{u}_1} - D(\ln k_0)\big) + \alpha_q\varphi_{u_1}\big(-2\psi_{\overline{u}_1} - D(\ln k_0)\big) + k_{-1}\alpha_{\overline{q}_1}, \tag{51}$$

откуда, согласно (49), получаем, что

$$\varphi_{u_1u_1} = k_{-1}\alpha_{\overline{q}_1}. \tag{52}$$

Теперь, сравнивая коэффициенты в формуле (48) при переменной v, получаем

$$\varphi_{u_1u} = -k_{-1}\psi_{\overline{u}_1}\alpha_{\overline{q}_1}. \tag{53}$$

Поскольку из соотношений (52), (53) следует, что

$$\psi_{\overline{u}_1}(u,\overline{u}_1) = -\frac{\varphi_{u_1 u}(u,u_1)}{\varphi_{u_1 u_1}(u,u_1)}, \tag{54}$$

делаем вывод: $\psi_{\overline{u}_1}(u,\overline{u}_1)=\lambda(u)$. В связи с этим

$$\psi(u,\overline{u}_1) = \lambda(u)\overline{u}_1 + \rho(u). \tag{55}$$

Заметим, что из формул (54),(55) следует равенство

$$\varphi_{u_1 u} + \lambda\cdot\varphi_{u_1 u_1} = 0. \tag{56}$$

Преобразуем формулу (39), учитывая последнее соотношение,

$$k_0 = \varphi_{u_1}(u,u_1)\lambda(u) + \varphi_u(u,u_1) + \rho'(u). \tag{57}$$

Отсюда

$$(k_0)_{u_1} = \varphi_{u_1 u_1}\lambda + \varphi_{u u_1}.$$

Обращаясь к формулам (56), (57), из последнего равенства получаем, что функция k_0 зависит только от переменной u. Этот факт существенно упрощает дальнейшие преобразования. Используя последнюю из формул (37), имеем

$$\begin{gathered}\beta_q = \alpha_{\overline{q}_1}\beta - \alpha\beta_{\overline{q}_1} - \lambda'\cdot\overline{u}_1 + D(\varphi_{u_1}) + \varphi_{u_1}\lambda + \varphi_u + \rho' - \\ -D\left(\frac{k_0'}{k_0}\right)\overline{u}_1 + \frac{k_0'}{k_0}(\varphi + \lambda\cdot\overline{u}_1 + \rho). \end{gathered} \tag{58}$$

Дифференцируем соотношение (58) по параметру τ и, учитывая формулы (40), сравниваем коэффициенты при переменной $\overline{v}_1$

$$\lambda'(u) + \frac{k_0''(u)}{k_0(u)}u_1 - \frac{k_0'^2(u)}{k_0^2(u)}u_1 + \frac{k_0'(u)}{k_0(u)}\lambda(u) = 0. \tag{59}$$

Поскольку мы считаем, что переменые u, u_1, фигурирующие в соотношении (59), независимые, получаем

$$\frac{k_0''(u)}{k_0(u)} - \frac{k_0'^2(u)}{k_0^2(u)} = 0, \quad \lambda'(u) + \frac{k_0'(u)}{k_0(u)}\lambda(u) = 0. \tag{60}$$

Из первого соотношения имеем

$$k_0 = \exp(a_1 u + a_2), \tag{61}$$

из второго

$$\lambda = \exp(-a_1 u + a_3). \tag{62}$$

Здесь a_1, a_2, a_3 — произвольные постоянные. Теперь подставим формулы (61), (62) в равенство (57),

$$\exp(a_1 u + a_2) = \varphi_{u_1}(u,u_1)\exp(-a_1 u + a_3) + \varphi_u(u,u_1) + \rho'(u).$$

Последнее соотношение можно записать так:

$$\exp(a_1 u + a_2) = \varphi_{u_1}(u,u_1)\exp(-a_1 u + a_3) + \varphi_u(u,u_1). \tag{63}$$

Решая уравнение (63) относительно функции $\varphi(u,u_1)$, получаем

$$\varphi = \frac{1}{a_1}\exp(a_1 u + a_2) + \Psi\left(u_1 + \frac{1}{a_1}\exp(-a_1 u + a_3)\right). \tag{64}$$

Одним словом, формулы (55), (63) дают следующий вид правой части уравнения (35):

$$\begin{gathered} f = \frac{1}{a_1}\exp(a_1 u + a_2) + \exp(-a_1 u + a_3)\overline{u}_1 + \\ +\Psi\left(u_1 + \frac{1}{a_1}\exp(-a_1 u + a_3)\right). \end{gathered} \tag{65}$$

Умножим обе части уравнения (65) на a_1, тогда после преобразования $u \to a_1 u$, получим

$$u_{xy} = \exp(u + a_2) + \exp(-u + a_3)\overline{u}_1 + \Psi\left(u_1 + \exp(-u + a_3)\right).$$

Теперь умножим обе части последнего равенства на $\exp(-u_2)$. Обозначим $A = \exp(a_3 - a_2)$. После растяжения переменной $x \to \exp(a_2)x$ получим

$$u_{xy} = f = \exp u - A\exp(-u)\overline{u}_1 + \Psi\big(u_1 - A\exp(-u)\big). \tag{66}$$

Далее, отметим, что первая формула (40) справедлива, если

$$q = u_2 - \frac{u_1^2}{2} + 2A\exp(-u)u_1 - \frac{A^2}{2}\exp(-2u). \tag{67}$$

Возьмем полную производную по y в силу уравнения (35) последнего равенства

$$\begin{gathered}\overline{q}_1 = \Psi'\big(u_1 - A\exp(-u)\big)\big(u_2 + A\exp(-u)u_1\big) - \\ -\Psi\big(u_1 - A\exp(-u)\big)\big(u_1 - A\exp(-u)\big) + A.\end{gathered} \tag{68}$$

Дифференцирование соотношения (68) по τ приводит ко второй формуле (40). Кроме того, из последней формулы, учитывая равенство (65), получаем

$$\begin{gathered}\overline{q}_1 = \Psi'\big(u_1 - A\exp(-u)\big)q + \frac{1}{2}\Psi'\big(u_1 - A\exp(-u)\big)\big(u_1 - A\exp(-u)\big)^2 - \\ -\Psi\big(u_1 - A\exp(-u)\big)\big(u_1 - A\exp(-u)\big) + A.\end{gathered} \tag{69}$$

Обозначим $w = u_1 - A\exp(-u)$. Тогда

$$\overline{q}_1 = \Psi'(w)q + \frac{w^2}{2}\Psi'(w) - \Psi(w)w + A. \tag{70}$$

Далее, возьмем полную производную равенства (70) по переменной y

$$F = \Psi'(w)q_1 - \Psi(w)\big(q + \frac{w^2}{2}\big) + \Psi''(w)\big(q + \frac{w^2}{2}\big)^2. \tag{71}$$

Здесь функция w удовлетворяет соотношению (70).

Итак, мы получили вид правых частей уравнений (35), (36). Нетрудно проверить, что для функций (66), (71) формулы (37) справедливы. Теорема доказана.

В процессе доказательства теоремы было найдено преобразование Беклунда

$$q = u_{xx} - \frac{u_x^2}{2} + 2A\exp(-u)u_x - \frac{A^2}{2}\exp(-2u),$$

$$q_{yy} = \Psi'(w)q_y + \Psi''(w)\Big(\exp(u) + \Psi(w)\Big)\Big(q + \frac{w^2}{2}\Big) - \Psi(w)\Big(\exp(u) + \Psi(w)\Big),$$

связывающее решения нелинейных уравнений (41), (42).

Результат предыдущего параграфа позволяет нам найти уравнение

$$s_{xy} = \big(s_y - \Psi(s)\big)s + \Psi'(s)s_x + A, \tag{72}$$

линеаризация которого может быть получена из линеаризации уравнения (41) применением преобразования Лапласа первого порядка. При этом соответствующее преобразование Беклунда имеет вид

$$s = u_x - A\exp(-u), \quad s_y = \exp(u) + \Psi(s).$$

Далее, обращаясь к теореме 1, получаем что линеаризации уравнений (72), (42) также связаны преобразованием Лапласа первого порядка. Преобразование Беклунда для этих уравнений имеет вид

$$q = s_x - \frac{s^2}{2}, \quad q_y = -\Psi(s)s + \Psi'(s)\big(q + \frac{s^2}{2}\big) + A.$$

Другими словами, для уравнений (41), (42), линеаризации которых связаны преобразованием Лапласа второго порядка, имеется уравнение (72) такое, что линеаризации уравнений (41) и (72), (72) и (42) связаны преобразованием Лапласа первого порядка.

В заключение приведем ряд примеров уравнений (41), (42). Уравнения

$$u_{xy} = \exp(u) + 1, \quad q_{xy} = -q - \frac{q_y^2}{2}$$

связаны преобразованием Беклунда

$$q = u_{xx} - \frac{u_x^2}{2}, \quad q_{yy} = -\exp(u) - 1.$$

Преобразование Беклунда, связывающее решения уравнений

$$u_{xy} = \exp(u) + u_x^2, \quad q_{xy} = 2q^2 + \frac{q_y^2}{4q} + \frac{q_y q_x}{q}$$

имеет вид

$$q = u_{xx} - \frac{u_x^2}{2}, \quad q_{yy} = 2\exp(u)q + \frac{3q_y^2}{2q}.$$

Для уравнений

$$u_{xy} = \exp(-u)u_y + \exp(u) + 1, \quad q_{xy} = -q - \frac{(q_y+1)^2}{2}$$

преобразование Беклунда записывается в форме

$$q = u_{xx} - \frac{u_x^2}{2} - \frac{\exp(-2u)}{2} - 2\exp(-u)u_x, \quad q_{yy} = -\exp(u) - 1.$$

Таким образом, в работе описаны пары нелинейных уравнений, линеаризации которых связаны преобразованиями Лапласа первого и второго порядков. Для каждой пары построено соответствующее преобразование Беклунда.

Автор благодарен своему научному руководителю Жиберу А.В. за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Goursat *Legon sur J'integretion des equations aux derivees partielles du second ordre a deux variables independantes* Hermann. Paris. 1896. 200 p.
2. Жибер А.В., Соколов В.В. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа* // УМН. Т. 56, вып 1. 2001. С. 63–106.
3. Старцев В.Н. *Об инвариантах Лапласа гиперболических уравнений, линеаризуемых дифференциальной подстановкой* // ТМФ. Т. 120, вып. 2. 1999. С. 237–247.
4. Жибер А.В., Муртазина Р.Д. *Инварианты Лапласа и характеристические алгебры Ли* // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 30-й Региональной молодежной конференции. ИММ УрО РАН. Екатеринбург. 2008. С. 118–122.

Мария Николаевна Кузнецова,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450025, г. Уфа, Россия
E-mail: mariya.kuznetsova@gmail.com