ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 1. № 3 (2009). С. 57-64.

УДК 517.9

ДВУХКОМПОНЕНТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА С КОНЕЧНОМЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРОЙ ЛИ

О.С. КОСТРИГИНА

Аннотация. Рассматриваются характеристические алгебры Ли линеаризаций двухкомпонентных гиперболических систем уравнений с экспоненциальной правой частью. Получен полный список систем уравнений, для которых размерность алгебры Ли не превышает 9.

Ключевые слова: интеграл системы, интегрируемость по Дарбу, характеристичекая алгебра Ли.

1. Введение

Один из способов классификации интегрируемых по Дарбу гиперболических систем уравнений

$$u_{xy} = F(u, u_x, u_y)\ (u^i_{xy} = F^i,\ i = 1, 2, \dots, n) \tag{1}$$

основан на изучении структуры характеристических алгебр Ли этих систем. Впервые этот подход был предложен в работах [1], [2] для экспоненциальных систем вида

$$u_{xy} = a_{i1}e^{u^1} + \dots + a_{in}e^{u^n},\ i = 1, 2, \dots, n. \tag{2}$$

Введем набор независимых переменных

$$u_1 = u_x,\ \bar{u}_1 = u_y,\ u_2 = u_{xx},\ \bar{u}_2 = u_{yy}, \dots$$

и обозначим через $\bar{D}(D)$ оператор полного дифференцирования по переменной y (x).

Определение 1. *Функция $W(u, u_1, u_2, \dots, u_m)$ называется $x-$интегралом порядка m системы (1), если $\bar{D}(W) = 0$. Аналогично, $y-$интеграл $m-$го порядка — это функция $\bar{W}(u, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m)$, удовлетворяющая соотношению $D(\bar{W}) = 0$.*

$X-$интегралы W^1, $W^2, \dots$, W^k называются независимыми, если D^iW^j функционально независимы. В статье [3] показано, что максимальное число независимых $x-$интегралов равно порядку n исходной системы.

Определение 2. *Система уравнений (1) называется интегрируемой по Дарбу, если у нее существует максимальное число независимых $x-$ и $y-$интегралов.*

Классификация нелинейных гиперболических систем уравнений, интегрируемых по Дарбу, основана на следующем критерии (см. [4]).

O.S. Kostrigina, Two-component hyperbolic systems of equations of exponential type with the finite-dimensional characteristic Lie algebra.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00440-а).

Поступила 24 августа 2009 г.

Теорема 1. *Система уравнений (1) интегрируема по Дарбу, если и только если $x-$ и $y-$характеристические алгебры Ли Λ и $\bar{\Lambda}$ конечномерны. При этом, если n_k — число $x-$интегралов $k-$го порядка, $k = 1, 2, \ldots, m$, то*

$$dim\Lambda = n + \sum_{i=1}^{m} in_i.$$

Рассмотрим линеаризацию системы уравнений (1)

$$v_{xy} = F_u v + F_{ux} v_x + F_{uy} v_y. \tag{3}$$

Следствие 1. *Если система уравнений (1) интегрируема по Дарбу, то характеристические алгебры линеаризованного уравнения (3) конечномерны.*

В настоящей работе рассматриваются системы уравнений (2) для случая $n = 2$

$$u_{xy} = a_{11}e^u + a_{12}e^v, \quad v_{xy} = a_{21}e^u + a_{22}e^v. \tag{4}$$

При этом для решения задачи классификации используется иной подход. А именно, исследуется структура характеристической алгебры линеаризации системы уравнений (4).

Получены все уравнения, для которых размерность характеристической алгебры линеаризации не превышает 9. Показано, что правые части этих систем задаются матрицами Картана простой алгебры Ли.

2. Характеристическая алгебра линеаризованной системы

Линеаризация системы уравнений (4) имеет вид

$$p_{xy} = a_{11}e^u p + a_{12}e^v q, \quad q_{xy} = a_{21}e^u p + a_{22}e^v q. \tag{5}$$

Далее считаем, что u и v — заданные функции и $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Определим $x-$ и $y-$характеристические алгебры Ли системы уравнений (5). Пусть F — пространство локально аналитических функций, зависящих от конечного числа независимых переменных $x, y, p, q, p_1, q_1, p_2, q_2 \ldots$. Оператор $\bar{D}$ на функциях из F действует по правилу

$$\bar{D} = \bar{p}_1 Y_1^{(0)} + \bar{q}_1 Y_2^{(0)} + X_1,$$

где

$$Y_1^{(0)} = \frac{\partial}{\partial p},\ Y_2^{(0)} = \frac{\partial}{\partial q},$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y} + (a_{11}e^u p + a_{12}e^v q)\frac{\partial}{\partial p_1} + (a_{21}e^u p + a_{22}e^v q)\frac{\partial}{\partial q_1} + \ldots.$$

$X-$характеристическая алгебра Ли системы уравнений (5) есть алгебра A, порожденная векторными полями $Y_1^{(0)}$, $Y_2^{(0)}$, X_1. Аналогично определяется $y-$характеристическая алгебра Ли $\bar{A}$.

Приведем важное для дальнейшего утверждение.

Лемма 1. *Пусть*

$$Z = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \frac{\partial}{\partial q_i},\ \alpha_i, \beta_i \in F,\ i = 1, 2, \ldots.$$

Тогда соотношение

$$[D, Z] = 0 \tag{6}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $Z = 0$.

Доказательство. Условие (6) запишем в виде

$$\sum_{i=1}^{\infty} D(\alpha_i)\frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{\infty} D(\beta_i)\frac{\partial}{\partial q_i} = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial p} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial q} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i+1}\frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{i+1}\frac{\partial}{\partial q_i}.$$

Отсюда получаем, что $\alpha_1 = \beta_1 = 0,\ D(\alpha_i) = D(\alpha_{i+1}),\ D(\beta_i) = D(\beta_{i+1}),\ i = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $\alpha_i = \beta_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots$ и $Z = 0$.
Лемма доказана.

Рассмотрим коммутаторы

$$Y_1^{(1)} = [Y_1^{(0)}, X_1] = e^u[a_{11}\frac{\partial}{\partial p_1} + a_{21}\frac{\partial}{\partial q_1} + a_{11}u_1\frac{\partial}{\partial p_2} + a_{21}u_1\frac{\partial}{\partial q_2} + \ldots],$$

$$Y_2^{(1)} = [Y_2^{(0)}, X_1] = e^v[a_{12}\frac{\partial}{\partial p_1} + a_{22}\frac{\partial}{\partial q_1} + a_{12}v_1\frac{\partial}{\partial p_2} + a_{22}v_1\frac{\partial}{\partial q_2} + \ldots].$$

Введем обозначения

$$Y_1^{(0)} = Z_1^{(0)},\ Y_2^{(0)} = Z_2^{(0)},$$
$$Y_1^{(1)} = e^u Z_1^{(1)},\ Y_2^{(1)} = e^v Z_2^{(1)}.$$

Далее, по определению положим

$$Z_1^{(n+1)} = [Z_1^{(n)}, X_1],\ Z_2^{(n+1)} = [Z_2^{(n)}, X_1],\ n = 1, 2, \ldots.$$

Отметим, что векторные поля $X_1,\ Z_1^{(0)},\ Z_2^{(0)},\ Z_1^{(1)},\ Z_2^{(1)}$ являются линейно независимыми. С учетом последних обозначений оператор $\bar{D}$ будет иметь вид

$$\bar{D} = \bar{p}_1 Z_1^{(0)} + \bar{q}_1 Z_2^{(0)} + X_1.$$

Легко проверить, что

$$[D, Z_1^{(0)}] = [D, Z_2^{(0)}] = 0,$$
$$[Z_1^{(i)}, [D, X_1]] = [Z_2^{(i)}, [D, X_1]] = 0,\ i = 1, 2, \ldots.$$

Покажем справедливость следующих формул:

$$\begin{aligned}
&[D, X_1] = -(a_{11}e^u p + a_{12}e^v q)Z_1^{(0)} - (a_{21}e^u p + a_{22}e^v q)Z_2^{(0)},\\
&[D, Z_1^{(1)}] = -u_1 Z_1^{(1)} - a_{11}Z_1^{(0)} - a_{21}Z_2^{(0)},\\
&[D, Z_2^{(1)}] = -v_1 Z_2^{(1)} - a_{12}Z_1^{(0)} - a_{22}Z_2^{(0)},\\
&[D, Z_1^{(2)}] = -u_1 Z_1^{(2)} + a_{12}e^v Z_1^{(1)} - a_{21}e^v Z_2^{(1)},\\
&[D, Z_2^{(2)}] = -v_1 Z_2^{(2)} - a_{12}e^u Z_1^{(1)} + a_{21}e^u Z_2^{(1)}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Из соотношения $[D, \bar{D}] = 0$ находим

$$[D, X_1] = -[D, \bar{p}_1 Z_1^{(0)} + \bar{q}_1 Z_2^{(0)}] = -p_{xy}Z_1^{(0)} - q_{xy}Z_2^{(0)}.$$

Используя тождество Якоби, вычислим $[D, Z_1^{(1)}]$ и $[D, Z_1^{(2)}]$. Имеем

$$[D, Z_1^{(1)}] = [D, e^{-u}Y_1^{(1)}] = [D, e^{-u}[Z_1^{(0)}, X_1]] = -e^{-u}u_1[Z_1^{(0)}, X_1] +$$
$$+ e^{-u}[D, [Z_1^{(0)}, X_1]] = -e^{-u}u_1[Z_1^{(0)}, X_1] - e^{-u}[X_1, [D, Z_1^{(0)}]] -$$
$$-e^{-u}[Z_1^{(0)}, [X_1, D]] = -e^{-u}u_1[Z_1^{(0)}, X_1] + e^{-u}[Z_1^{(0)}, -(a_{11}e^u p + a_{12}e^v q)Z_1^{(0)}] +$$
$$+e^{-u}[Z_1^{(0)}, -(a_{21}e^u p + a_{22}e^v q)Z_2^{(0)}] = -e^{-u}u_1 Y_1^{(1)} - a_{11}Z_1^{(0)} - a_{21}Z_2^{(0)},$$

$$[D, Z_1^{(2)}] = [D, [Z_1^{(1)}, X_1]] = -[X_1, [D, Z_1^{(1)}]] - [Z_1^{(1)}, [X_1, D]] =$$
$$= [X_1, u_1 Z_1^{(1)} + a_{11}Z_1^{(0)} + a_{21}Z_2^{(0)}] = (a_{11}e^u + a_{12}e^v)Z_1^{(1)} - u_1 Z_1^{(2)} -$$
$$-a_{11}e^u Z_1^{(1)} - a_{21}e^v Z_2^{(1)} = a_{12}e^v Z_1^{(1)} - a_{21}e^v Z_2^{(1)} - u_1 Z_1^{(2)}.$$

Аналогично вычисляются коммутаторы $[D, Z_2^{(1)}]$ и $[D, Z_2^{(2)}]$.

Лемма 2. *Для операторов $Z_1^{(2)}$ и $Z_2^{(2)}$ верно соотношение*

$$e^u Z_1^{(2)} + e^v Z_2^{(2)} = 0. \tag{8}$$

Доказательство. Согласно лемме 1 равенство (8) выполняется тогда и только тогда, когда $[D, e^u Z_1^{(2)} + e^v Z_2^{(2)}] = 0$.

Учитывая соотношения (7), имеем

$$[D, e^u Z_1^{(2)} + e^v Z_2^{(2)}] = e^u u_1 Z_1^{(2)} + e^u \left(-u_1 Z_1^{(2)} + a_{12} e^v Z_1^{(1)} - a_{21} e^v Z_2^{(1)}\right) + \\ + e^v v_1 Z_2^{(2)} + e^v \left(-v_1 Z_2^{(2)} - a_{12} e^u Z_1^{(1)} + a_{21} e^u Z_2^{(1)}\right) = 0.$$

Таким образом, лемма доказана.

Далее, для удобства введем обозначения

$$Z_1^{(0)} = W_1^{(0)},\ Z_2^{(0)} = W_2^{(0)},\ Z_1^{(1)} = W_1^{(1)},\ Z_2^{(1)} = W_2^{(1)}, \\ Z_1^{(2)} = e^v W_1^{(2)},\ Z_2^{(2)} = e^u W_2^{(2)}.$$

По определению положим

$$W_1^{(n+1)} = [W_1^{(n)}, X_1],\ n = 2, 3, \ldots .$$

При этом легко показать справедливость следующих равенств:

$$[W_1^{(n)}, [D, X_1]] = 0, \\ [D, W_1^{(n+1)}] = -[X_1, [D, W_1^{(n)}]].$$

Отметим, что векторные поля $X_1,\ W_1^{(0)},\ W_2^{(0)},\ W_1^{(1)},\ W_2^{(1)},\ W_1^{(2)}$ являются линейно независимыми, а операторы $W_2^{(2)}$ и $W_1^{(2)}$ связаны формулой

$$W_2^{(2)} = -W_1^{(2)}.$$

Лемма 3. *Справедливо следующее соотношение:*

$$[D, W_1^{(n)}] = -(u_1 + v_1) W_1^{(n)} + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{n-i-1} C_{n-2}^{i-2} X_1^{n-i} (u_1 + v_1) W_1^{(i)} + \\ + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{n-i-1} C_{n-3}^{i-2} X_1^{n-i-1} (a_{12} e^v + a_{21} e^u) W_1^{(i)},\ n = 3, 4, \ldots . \tag{9}$$

Доказательство. Проверим формулу (9) для $n = 3$. Учитывая соотношение

$$[D, Z_1^{(2)}] = v_1 e^v W_1^{(2)} + e^v [D, W_1^{(2)}],$$

а также равенства (7), находим

$$[D, W_1^{(3)}] = -[X_1, e^{-v}(a_{12} e^v Z_1^{(1)} - a_{21} e^v Z_2^{(1)} - u_1 Z_1^{(2)}) - v_1 W_1^{(2)}] = \\ = -[X_1, -(u_1 + v_1) W_1^{(2)} + a_{12} W_1^{(1)} - a_{21} W_2^{(1)}] = \\ = -(u_1 + v_1) W_1^{(3)} + ((a_{11} + 2a_{21}) e^u + (a_{22} + 2a_{12}) e^v) W_1^{(2)}.$$

Предположим, что формула (9) верна для некоторого значения n. Проверим ее для $n + 1$.

$$[D, W_1^{(n+1)}] = -[X_1, [D, W_1^{(n)}]] = X_1 (u_1 + v_1) W_1^{(n)} - (u_1 + v_1) W_1^{(n+1)} + \\ + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{n-i} \left(C_{n-2}^{i-2} X_1^{n-i+1} (u_1 + v_1) + C_{n-3}^{i-2} X_1^{n-i} (a_{12} e^v + a_{21} e^u)\right) W_1^{(i)} + \\ + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{n-i+1} \left(C_{n-2}^{i-2} X_1^{n-i} (u_1 + v_1) + C_{n-3}^{i-2} X_1^{n-i-1} (a_{12} e^v + a_{21} e^u)\right) W_1^{(i+1)}.$$

Сделав в последней сумме замену $i = k - 1$, получим

$$\begin{aligned}
[D, W_1^{(n+1)}] &= -[X_1, [D, W_1^{(n)}]] = X_1(u_1 + v_1)W_1^{(n)} - (u_1 + v_1)W_1^{(n+1)} + \\
&+ \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{n-i} \left(C_{n-2}^{i-2} X_1^{n-i+1}(u_1 + v_1) + C_{n-3}^{i-2} X_1^{n-i}(a_{12}e^v + a_{21}e^u) \right) W_1^{(i)} + \\
&+ \sum_{k=3}^{n} (-1)^{n-k} \left(C_{n-2}^{k-3} X_1^{n-k+1}(u_1 + v_1) + C_{n-3}^{k-3} X_1^{n-k}(a_{12}e^v + a_{21}e^u) \right) W_1^{(k)} = \\
&= -(u_1 + v_1)W_1^{(n+1)} + (-1)^{n-2} \left(X_1^{n-1}(u_1 + v_1) + X_1^{n-2}(a_{12}e^v + a_{21}e^u) \right) W_1^{(2)} + \\
&+ \sum_{i=3}^{n-1} (-1)^{n-i} \left(C_{n-1}^{i-2} X_1^{n-i+1}(u_1 + v_1) + C_{n-2}^{i-2} X_1^{n-i}(a_{12}e^v + a_{21}e^u) \right) W_1^{(i)} + \\
&+ \left(X_1(u_1 + v_1) + C_{n-2}^{n-3} X_1(u_1 + v_1) + C_{n-3}^{n-3}(a_{12}e^v + a_{21}e^u) \right) W_1^{(n)} = \\
&= \sum_{i=2}^{n} (-1)^{n-i} \left(C_{n-1}^{i-2} X_1^{n-i+1}(u_1 + v_1) + C_{n-2}^{i-2} X_1^{n-i}(a_{12}e^v + a_{21}e^u) \right) W_1^{(i)} - \\
&- (u_1 + v_1)W_1^{(n+1)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, согласно методу математической индукции лемма доказана.

Предположим теперь, что характеристическая алгебра Ли системы уравнений (5) конечномерна. Это означает, что найдется $n \geq 2$, для которого операторы $X_1, W_1^{(0)},\ W_2^{(0)},\ W_1^{(1)},\ W_2^{(1)}$, $W_1^{(2)},\ W_1^{(3)}, \dots\ W_1^{(n)}$ образуют базис этой алгебры. Тогда оператор $W_1^{(n+1)}$ есть линейная комбинация элементов базиса.

Поскольку

$$W_1^{(0)} = \frac{\partial}{\partial p}, \quad W_2^{(0)} = \frac{\partial}{\partial q},$$

а операторы старших порядков имеют структуру

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \dots,\ i = 1, 2, \dots,$$

то

$$W_1^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} A_k W_1^{(k)} + B_1 W_2^{(1)},$$

где $A_k,\ B_1$ — функции переменных $u, v, u_1, v_1, \bar{u}_1, \bar{v}_1, \dots$.
Последнее соотношение эквивалентно равенству

$$[D, W_1^{(n+1)}] = \sum_{k=1}^{n} D(A_k) W_1^{(k)} + D(B_1) W_2^{(1)} + \sum_{k=1}^{n} A_k [D, W_1^{(k)}] + B_1 [D, W_2^{(1)}].$$

По лемме 3 получаем

$$\begin{gathered}
D(A_1)W_1^{(1)} + D(B_1)W_2^{(1)} + A_1(-u_1 W_1^{(1)} - a_{11}W_1^{(0)} - a_{21}W_2^{(0)}) + \\
+ A_2(a_{12}W_1^{(1)} - a_{21}W_2^{(1)}) + B_1(-v_1 W_2^{(1)} - a_{12}W_1^{(0)} - a_{22}W_2^{(0)}) = 0.
\end{gathered}$$

Сравнивая коэффициенты правой и левой частей последнего равенства при векторных полях $W_1^{(0)}, W_2^{(0)}, W_1^{(1)}, W_2^{(1)}$, получаем систему

$$\begin{gathered}
-a_{11}A_1 - a_{12}B_1 = 0, \\
-a_{21}A_1 - a_{22}B_1 = 0, \\
D(A_1) + a_{12}A_2 - u_1 A_1 = 0, \\
D(B_1) - a_{21}A_2 - v_1 B_1 = 0.
\end{gathered}$$

Отсюда находим $A_1 = B_1 = 0$ и $A_2 = 0$. Таким образом, доказано следующее предложение.

Лемма 4. *$X-$характеристическая алгебра A системы уравнений (5) конечномерна тогда и только тогда, когда либо $W_1^{(3)}=0$, либо*

$$W_1^{(n+1)}=\sum_{k=3}^{n} A_k W_1^{(k)},\ A_k=A_k(u,v,u_1,v_1,\bar u_1,\bar v_1,\ldots),\ n=3,4,\ldots .$$

При этом $dimA=6$, либо $dimA=n+4,\ n=3,4,\ldots$ соответственно.

Теперь, пользуясь леммами 3 и 4, выпишем необходимые и достаточные условия конечномерности характеристической алгебры системы (5).
При $dimA=6$ получаем

$$X_1(u_1+v_1)+a_{12}e^v+a_{21}e^u=0, \tag{10}$$

а в случае $dimA=n+4$ $(n\geq 3)$ имеем

$$\begin{gathered}(-1)^{n-2}X_1^{n-2}((a_{11}+2a_{21})e^u+(a_{22}+2a_{12})e^v)=\\ =\sum_{p=3}^{n} A_p(-1)^{p-3}X_1^{p-3}((a_{11}+2a_{21})e^u+(a_{22}+2a_{12})e^v),\\ (-1)^{n-i}\left(C_{n-1}^{i-2}X_1^{n-i+1}(u_1+v_1)+C_{n-2}^{i-2}X_1^{n-i}(a_{12}e^v+a_{21}e^u)\right)=\\ =\sum_{p=i+1}^{n} A_p(-1)^{p-i-1}\left(C_{p-2}^{i-2}X_1^{p-i}(u_1+v_1)+C_{p-3}^{i-2}X_1^{p-i-1}(a_{12}e^v+a_{21}e^u)\right)+\\ +D(A_i),\ i=3,4,\ldots,n-1,\\ (n-1)X_1(u_1+v_1)+a_{12}e^v+a_{21}e^u=D(A_n).\end{gathered} \tag{11}$$

Можно показать, что для системы (11) неизвестные A_i есть функции переменных $\bar u_1,\bar v_1,\ldots,$ $\bar u_{n-i+1},\bar v_{n-i+1}$, $i=3,4,\ldots,n-1$.

Теорема 2. *Если характеристическая алгебра Ли системы уравнений (5) конечномерна, то система (4) приводится к виду*

$$u_{xy}=2e^u+a_{12}e^v,\quad v_{xy}=-e^u+2e^v. \tag{12}$$

Доказательство. Точечной заменой $u\to u+ln(2/a_{11}),\ v\to v+ln(2/a_{22})$ система (4) может быть преобразована

$$u_{xy}=2e^u+a_{12}e^v,\quad v_{xy}=a_{21}e^u+2e^v.$$

Рассмотрим первое равенство системы (11)

$$\begin{gathered}(-1)^{n-2}(a_{11}+2a_{21})\left(\bar u_{n-2}+f(\bar u_1,\bar u_2,\ldots,\bar u_{n-3})\right)e^u+\\ +(-1)^{n-2}(a_{22}+2a_{12})(\bar v_{n-2}+g(\bar v_1,\bar v_2,\ldots,\bar v_{n-3}))e^v=\\ =A_3(\bar u_1,\bar v_1,\bar u_2,\bar v_2,\ldots,\bar u_{n-2},\bar v_{n-2})((a_{11}+2a_{21})e^u+(a_{22}+2a_{12})e^v)+\\ +e^u\varphi(\bar u_1,\bar v_1,\bar u_2,\bar v_2,\ldots,\bar u_{n-3},\bar v_{n-3})+e^v\psi(\bar u_1,\bar v_1,\bar u_2,\bar v_2,\ldots,\bar u_{n-3},\bar v_{n-3}).\end{gathered}$$

Приравнивая коэффициенты при множителях e^u и e^v, получаем

$$\begin{gathered}(-1)^{n-2}(a_{11}+2a_{21})\bar u_{n-2}=A_3(a_{11}+2a_{21})+\tilde\varphi(\bar u_1,\bar v_1,\bar u_2,\bar v_2,\ldots,\bar u_{n-3},\bar v_{n-3}),\\ (-1)^{n-2}(a_{22}+2a_{12})\bar v_{n-2}=A_3(a_{22}+2a_{12})+\tilde\psi(\bar u_1,\bar v_1,\bar u_2,\bar v_2,\ldots,\bar u_{n-3},\bar v_{n-3}).\end{gathered}$$

Если $(a_{11}+2a_{21})(a_{22}+2a_{12})\neq 0$, то $A_3=(-1)^{n-2}\bar u_{n-2}+\tilde\varphi=(-1)^{n-2}\bar v_{n-2}+\tilde\psi$, что невозможно. Следовательно, возможны случаи либо $(a_{11}+2a_{21})=0,\ (a_{22}+2a_{12})=0$, тогда $a_{11}=a_{22}=2,\ a_{12}=a_{21}=-1$; либо $(a_{11}+2a_{21})=0,\ (a_{22}+2a_{12})\neq 0$, тогда $a_{11}=a_{22}=2,\ a_{21}=-1$; либо $(a_{11}+2a_{21})\neq 0,\ (a_{22}+2a_{12})=0$, тогда $a_{11}=a_{22}=2,\ a_{12}=-1$.
При этом случаи 2 и 3 сводятся один к другому заменой $u\to v,\ v\to u$.

Теорема доказана.

3. Классификация систем уравнений

Далее будем рассматривать системы уравнений вида (12).

Напомним, что алгебра Ли A линеаризованной системы уравнений (5) порождается векторными полями $X_1,\ W_1^{(0)},\ W_2^{(0)},\ W_1^{(1)},\ W_2^{(1)},\ W_1^{(2)}$, поэтому $dimA \geq 6$. В этом параграфе будут описаны системы уравнений, для которых $dimA \leqslant 9$.

Результат этого параграфа формулируется следующим образом.

Теорема 3. *Размерность $x-$характеристической алгебры A линеаризованной системы уравнений (5) не превышает 9 тогда и только тогда, когда коэффициент a_{12} принимает одно из следующих значений: $-1,\ -2$ или -3. При этом $dimA = 6,\ 7,\ 9$ соответственно.*

Доказательство. Доказательство теоремы для случая $dimA = 6$ очевидным образом следует из равенства (10).

Если $dimA = 7$ $(n = 3)$, то $W_1^{(4)} = A_3 W_1^{(3)}$ и система (11) сводится к виду

$$
\begin{gathered}
-X_1((a_{11}+2a_{21})e^u + (a_{22}+2a_{12})e^v) = A_3((a_{11}+2a_{21})e^u + (a_{22}+2a_{12})e^v),\\
2X_1(u_1+v_1) + a_{12}e^v + a_{21}e^u = D(A_3).
\end{gathered}
$$

Подставляя в последнюю систему значения $a_{11} = a_{22} = 2,\ a_{21} = -1$, получаем

$$
\begin{gathered}
-(2+2a_{12})e^v\bar{v}_1 = A_3(2+2a_{12}),\\
(4+3a_{12})e^v + e^u = D(A_3),
\end{gathered}
$$

откуда находим $A_3 = -\bar{v}_1,\ a_{12} = -2$.

Если $dimA = 8$ $(n = 4)$, то $W_1^{(5)} = A_3 W_1^{(3)} + A_4 W_1^{(4)}$ и система (11) запишется

$$
\begin{gathered}
X_1^2((a_{11}+2a_{21})e^u + (a_{22}+2a_{12})e^v) = A_3((a_{11}+2a_{21})e^u + (a_{22}+2a_{12})e^v)-\\
-A_4X_1((a_{11}+2a_{21})e^u + (a_{22}+2a_{12})e^v)),\\
-3X_1^2(u_1+v_1) - 2X_1(a_{12}e^v + a_{21}e^u) = D(A_3) + 2A_4X_1(u_1+v_1)+\\
+A_4(a_{12}e^v + a_{21}e^u),\\
3X_1(u_1+v_1) + a_{12}e^v + a_{21}e^u = D(A_4).
\end{gathered}
$$

Для системы (12) последние соотношения преобразуются следующим образом:

$$
\begin{gathered}
(2+2a_{12})e^v(\bar{v}_2+\bar{v}_1^2) = A_3(2+2a_{12})e^v - A_4(2+2a_{12})e^v\bar{v}_1,\\
-e^u\bar{u}_1 - (6+5a_{12})e^v\bar{v}_1 = A_4(e^u + (4+3a_{12})e^v) + D(A_3),\\
2e^u + (6+4a_{12})e^v = D(A_4).
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Из первого уравнения видно, что $A_3 = \bar{v}_2 + \bar{v}_1^2 + A_4\bar{v}_1$. Подставляя найденное значение A_3 во второе уравнение системы (13), получаем

$$
A_4(2+a_{12}) = -3(2+a_{12})\bar{v}_1.
$$

Так как a_{12} принимает значение -2 только когда $dimA = 7$, то $A_4 = -3\bar{v}_1$ и $D(A_4) = 3e^u - 6e^v$, что протеворечит последнему уравнению системы (13). Таким образом, система (11) при $n = 4$ не имеет решения.

И наконец, если $dimA = 9$ $(n = 5)$, то $W_1^{(6)} = A_3W_1^{(3)} + A_4W_1^{(4)} + A_5W_1^{(5)}$. В этом случае система (11) для значений $a_{11} = a_{22} = 2,\ a_{21} = -1$ сводится к виду

$$
\begin{gathered}
-(2+2a_{12})(\bar{v}_1^3 + 3\bar{v}_2\bar{v}_1 + \bar{v}_3)e^v = A_3(2+2a_{12})e^v - A_4(2+2a_{12})\bar{v}_1e^v+\\
+A_5(2+2a_{12})(\bar{v}_1^2+\bar{v}_2)e^v,\\
(\bar{u}_1^2+\bar{u}_2)e^u + (8+7a_{12})(\bar{v}_1^2+\bar{v}_2)e^v = A_4(e^u + (4+3a_{12})e^v)-\\
-A_5\,(\bar{u}_1e^u + (6+5a_{12})\bar{v}_1e^v) + D(A_3),\\
-3e^u\bar{u}_1 - (12+9a_{12})e^v\bar{v} = A_5(2e^u + (6+4a_{12})e^v) + D(A_4),\\
3e^u + (8+5a_{12})e^v = D(A_5).
\end{gathered}
$$

Решая полученную систему аналогично системе (13), находим

$$
\begin{aligned}
&A_5 = -\bar{u}_1 - 5\bar{v}_1,\\
&A_4 = 4\bar{v}_2 - 3\bar{u}_1\bar{v}_1 - 8\bar{v}_1^2,\\
&A_3 = -\bar{v}_3 - 4\bar{v}_1^3 - 2\bar{u}_1\bar{v}_1^2 + 6\bar{v}_1\bar{v}_2 + \bar{u}_1\bar{v}_2,\\
&a_{12} = -3.
\end{aligned}
$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шабат А.Б., Ямилов Р.И. *Экспоненциальные системы типа 1 и матрицы Картана* // Уфа: Препринт БФ АН СССР. 1981.
2. Лезнов А.Н., Смирнов В.Г., Шабат А.Б. *Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем* // Теоретическая и математическая физика. 1982. Т. 51, № 1. С. 10–21.
3. Гурьева А.М., Жибер А.В. *О характеристическом уравнении квазилинейной гиперболической системы уравнений* // Вестник УГАТУ. Т. 6, № 2 (13). 2005. С. 26–33.
4. А.В. Жибер, О.С. Костригина, *Точно интегрируемые модели волновых процессов* // Вестник УГАТУ. Т. 9, № 7 (25). 2007. С. 83–89.

Ольга Сергеевна Костригина,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450025, г. Уфа, Россия
E-mail: kostrigina@mail.ru