ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 1. № 3 (2009). С. 154-159.

УДК 517.9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

С.В. ХАБИРОВ

Аннотация. Для подмоделей ранга 2 газовой динамики предложен способ перечисления дифференциально-инвариантных решений на допускаемом нормализаторе. В качестве примера рассмотрена подмодель осесимметричных течений газа, для которой приведены неизобарические частично инвариантные и дифференциально-инвариантные решения.

Ключевые слова: газовая динамика, дифференциально-инвариантные решения.

Введение

Инвариантные подмодели ранга 2 допускают фактор нормализатора по исходной подалгебре [1]. Список таких подмоделей для уравнений газовой динамики с общим уравнением состояния приведен в [2]. По нормализатору можно находить дифференциально-инвариантные решения. Правила нахождения заключаются в следующем. Сначала надо вычислить базис дифференциальных инвариантов и операторы инвариантного дифференцирования [3]. Далее инвариантную подмодель надо записать через инварианты и выделить независимые дифференциальные инварианты базиса. Следующий шаг — выбор одного инварианта в качестве независимого от других. Часть остальных инвариантов назначить новыми функциями от выбранного независимого инварианта. Оставшаяся часть инвариантов базиса есть функции общего вида, т.е. функции двух аргументов в соответствии с рангом подмодели.

Если независимые дифференциальные инварианты базиса состоят из инвариантов нулевого порядка (не выражаются через производные), то указанные представления решений есть представления частично инвариантных решений ранга 1 различного дефекта (по числу базисных инвариантов общего вида). Для получения дифференциально-инвариантных решений надо взять независимые дифференциальные инварианты первого порядка, часть из них выбрать новыми функциями от выбранного инварианта-аргумента. Множество представлений определяется количеством возможных выборов непостоянного инварианта-аргумента и множеством выбора инваринтов-функций. Это множество конечно, так как базис конечен.

Перечисленные представления включают в себя инвариантные решения по лемме Ли -Овсянникова-Талышева [4] и частично инвариантные решения, которые в нашем случае будут простыми волнами [5]. Для этого надо все инварианты назначить функциями инварианта-аргумента.

Приведем часть классификации на примере подмодели осесимметричных течений газа.

S.V. Khabirov, The differential-invariant solutions for the axis-symmetric gas flows.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00047-а) и Советом по грантам Президента РФ для государсвтенной поддержки научных школ (№ НШ-2826.2008.1).

Поступила 23 июня 2009 г.

1. Интегралы осесимметричных течений газа

Установившиеся осесимметричные течения газа задаются инвариантной подмоделью по подалгебре переносов ∂_t, ∂_θ [2]:

$$
\begin{gathered}
DU + \rho^{-1} p_x = 0, \quad DV + \rho^{-1} p_r = r^{-1} W^2, \quad DW = r^{-1} VW, \\
D\rho + \rho\left(U_x + V_r + r^{-1} V\right) = 0, \quad DS = US_x + VS_r = 0,
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где давление p, плотность ρ и энтропия S связаны уравнением состояния; U, V, W — продольная, радиальная, окружная компоненты скорости $\vec{u}$ в цилиндрической системе координат. Фактор нормализатора порождается операторами: переносом ∂_x и растяжением $x\partial_x + r\partial_r$. Базис дифференциальных инвариантов состоит из инвариантов нулевого порядка: U, V, W, p, ρ. Энтропия определяется из уравнения состояния. Операторы инвариантного дифференцирования — rD_x, rD_r. Для неизобарических движений выберем p в качестве инварианта-аргумента. Если остальные инварианты базиса назначить функциями p, то получим представление простой волны. Если k инвариантов $(1 \le k \le 3)$ назначить функциями p, то получим частично инвариантное решение дефекта $5-k$ ранга 1. Дефект определяется по числу функций общего вида.

Для получения представления дифференциально-инвариатного решения возьмем диффференциальные инварианты первого порядка: $\vec{u}_1 = r\vec{u}_x$, $\vec{u}_2 = r\vec{u}_r$, $p_1 = rp_x$, $p_2 = rp_r$, $\rho_1 = r\rho_x$, $\rho_2 = r\rho_r$. В силу системы (1.1) инварианты $\vec{u}_1$, p_1, ρ_1 выражаются через $\vec{u}$, p, ρ, $\vec{u}_2$, p_2, ρ_2. Инварианты $\vec{u}_2$, p_2, ρ_2 — независимые инварианты первого порядка. Часть из них назначим функциями p для представления дифференциально-инвариантного решения.

Система (1.1) имеет интегралы. Уравнения для ρ запишем в дивиргентном виде $(rU\rho)_x + (rU\rho)_r = 0$. Функция тока $\psi = \psi(x,r)$ определяется равенствами $\psi_r = r\rho U$, $\psi_x = -r\rho V$. Уравнения для W и S из (1.1) дают интегралы

$$
U = r^{-1}\rho^{-1}\psi_r, \quad V = -r^{-1}\rho^{-1}\psi_x, \quad W = r^{-1}C(\psi), \quad S = S(\psi). \tag{1.2}
$$

Интеграл Бернулли получим скалярным умножением на $\vec{u}$ векторного уравнения для скорости

$$
U^2 + V^2 + W^2 + 2i = B(\psi) > 0, \tag{1.3}
$$

где $i = \varepsilon + \rho^{-1}p$ — энтальпия, ε — внутренняя энергия. Если уравнение состояния задать в виде $i = i(p,S)$, то из термодинамического тождества $TdS = di - \rho^{-1}dp$ получим $\rho = i_p^{-1}$, $T = i_S$ — температура. Система (1.1) равносильна двум уравнениям для ψ и p:

$$
I_p^2\left(\psi_r^2 + \psi_x^2\right) + 4C^2 = 4(B - I)r^2, \tag{1.4}
$$

$$
\psi_r\left(I_p r^{-1}\psi_r\right)_x - \psi_x\left(I_p r^{-1}\psi_r\right)_r + 2rp_x = 0, \tag{1.5}
$$

где $I(p,\psi) = 2i(p, S(\psi))$ — функция, определенная уравнением состояния. Система (1.4), (1.5) сводится к одному квазилинейному уравнению второго порядка для ψ, если выразить давление p из (1.4):

$$
r^{-1}I_p\left[\left(r^{-1}I_p\psi_x\right)_x + \left(r^{-1}I_p\psi_r\right)_r\right] = 2\left(B' - 2r^{-2}CC' - I_\psi\right). \tag{1.6}
$$

2. Баротропные течения

Представление частично инвариатного решения ранга 1 дефекта 4 зададим в виде $\rho = \rho(p)$ (баротропное течение). Из равенства $\rho i_p = 1$ следует $S = S(p)$. Два последних уравнения системы (1.1) примут вид

$$
S' Dp = 0, \quad \rho' Dp + \rho\left(U_x + V_r + r^{-1}V\right) = 0. \tag{2.1}
$$

Для изоэнтропических течений $S = S_0$ — постоянная, из (1.4), (1.6) получим подмодель для функций ψ, p:

$$I_p^2\left(2s\psi_s^2 + \psi_x^2\right) + 4C^2 = 8s(B - I),$$

$$2s(I_p\psi_s)_s - (I_p\psi_x)_x = 4\left(sB' - CC'\right)I_p^{-1},$$

где $2s = r^2$, функция $I(p) = 2\int\rho^{-1}(p)dp$ определяется уравнением состояния.

Для неизоэнтропических течений из (2.1), (1.1) следует:

$$p = P(\psi), \quad U = r^{-1}\psi_r, \quad V = -r^{-1}\psi_x, \quad S = S(\psi), \quad W = r^{-1}C(\psi),$$

$$2s\psi_s^2 + \psi_x^2 + C^2 = 2sB(\psi) > 0,$$

$$\psi_s\psi_{sx} - \psi_x\psi_{ss} + A(\psi)\psi_x = 0,$$

где $A = \rho^{-1}P'(\psi)$.

Замена $\psi = \psi(x,s)$ ($x = x(\psi,s)$ — обратная функция, если считать s параметром) позволяет интегрировать последнее уравнение по s:

$$x_\psi = Q(s)^{-1/2}, \quad x_s = (\mathcal{D}(\psi) - sA(\psi))Q(s)^{-1/2}, \tag{2.2}$$

где $Q = -2As^3 + 4A\mathcal{D}s^2 + 2(B - \mathcal{D}^2)s - C^2$, $\mathcal{D}(\psi)$ — произвольная функция как результат интегрирования по s.

Можно показать, что существует интервал $0 < s_1 \leqslant s \leqslant s_2$, где $Q(s) \geq 0$ при выполнении условия

$$9C^2B^{-1} > 16\mathcal{D}A^{-1}. \tag{2.3}$$

Условие совместности системы (2.2) дает подмодель из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$3A^2 + 2BA' - AB' = 0, \quad B = \mathcal{D}^2 + 2C\left(C\mathcal{D}' - \mathcal{D}C'\right),$$

$$4A\mathcal{D} = \mathcal{D}B' - 2B\mathcal{D}' + C\left(AC' - CA'\right).$$

Функцию C можно выбрать произвольно, лишь бы выполнялось неравенство (2.3).

При $s \to s_i$, $Q(s_i) = 0$, $i = 1, 2$, имеем $x_\psi \to \infty$ или $\psi_x = 0$, т.е. происходит примыкание к инвариантному ∂_x-решению.

Другие частично инвариантные решения можно получить, назначив одну или две компоненты скорости функциями p.

3. Вырожденные дифференциально-инвариантные решения наибольшего дефекта

Неизобарические дифференциально-инвариантные решения дефекта 4 задаются одним равенством, например, $rp_r = f(p)$. Если $f \neq 0$, то получим представление для давления $p = P(rp_0(x))$, которое обобщает представление дифференциально-инвариантного решения на подалгебре растяжений. Если $f = 0$, то получим вырожденное представление $p = p(x)$. В (1.4), (1.5) делаем замену $2s = r^2$, $p = p(x)$, $\psi = \psi(x,s)$ ($x = x(p)$, $s = s(\psi,p)$ — обратные функции). Уравнение (1.5) после замены интегрируем по p: $I_p^2 = (A(\psi) - 4I)s_\psi^2$. Получаем подмодель

$$J_p + 2s_\psi = 0, \quad J = x's_p^{-1}\left(C_1s + 4C^2\right)^{1/2}, \tag{3.1}$$

где $J = (A - 4I)^{1/2}$, $C_1 = 2(4B - A)$. Подмодель (3.1) эквивалентна эволюционному уравнению второго порядка для функции $s(\psi,p)$. По любому решению этого уравнения находим уравнение состояния $I = I(p,\psi)$. На участках, где уравнение состояния удовлетворяет свойствам нормального газа [5], решение имеет физический смысл.

Если уравнение состояния задано, то система (3.1) переопределена и требуются дополнительные исследования на совместность.

Например, пусть $2i = I(p,\psi) = \dfrac{1}{4}A(\psi) + q^2(p)\mathcal{D}'(\psi)^2$. Тогда из (3.1) следуют равенства

$$s = e(p) - \frac{1}{2}q'\mathcal{D}, \quad \mathcal{D}'^2\left(\dot{e} - \frac{1}{2}\mathcal{D}\dot{q}'\right)^2 = C_1\left(e - \frac{1}{2}\mathcal{D}q'\right) + 4C^2,$$

где новое дифференцирование определено равенством $\dot{e} = qx'^{-1}e'$. В последнее уравнение входят функции только от одного переменного: $\mathcal{D}$, C_1, C от ψ и e, q от p.

Разделение переменных дает два решения:

$$\begin{aligned} &(a) \quad q = p, \quad e = 0, \quad 2C^2 = C_1\mathcal{D};\\ &(б) \quad x' = q\,|q'|^{-1/2}\,q'', \quad e = q' + 2K_0\,|q'|^{1/2} + K_0^2, \quad C_1 = \mathcal{D}'^2\,(1 - 2^{-1}\mathcal{D}), \end{aligned}$$

где K_0 — постоянная.

В случае уравнения состояния с разделенной энтальпией $I = \mathcal{D}^2(\psi)q(p)$ система (3.1) при $A = K\mathcal{D}^2$ (K — постоянная) принимает вид

$$s_y = f(z), \quad s_z^2 = s\alpha(y) - \beta^2(y), \tag{3.2}$$

где $z = \int x'(K-4q)^{-1/2}dp$, $y = \int \mathcal{D}d\psi$, $\alpha(y) = 2(4B\mathcal{D}^{-2} - K)$; $\beta = 2C\mathcal{D}^{-1}$, $f(z) = q'(K-4q))^{-1/2}$. Условие совместности системы (3.2) определяет решение

$$\begin{aligned} &s = f(z)y + g(z), && f = 4^{-1}L_0z^2 + L_2z + L_4, \quad g = 4^{-1}L_1z^2 + L_3z + L_5,\\ &\alpha = L_0y + L_1, && \beta^2 = (L_0y + L_1)(L_4y + L_5) - (L_2y + L_3)^2, \end{aligned}$$

где $L_i, i = 0, ..., 5$ — постоянные.

4. Дифференциально-инвариантное решение ранга 1 дефекта 4

Представление решения из пункта 3 общего вида $p = P(rp_0(x))$, $\psi = \psi(x,r)$ выберем в качестве замены переменных. Обратная замена задается равенствами $r = R(p)p_0(x)$, $x = x(\psi,p)$. Уравнения (1.4), (1.5) примут вид

$$\left(I_p\frac{x_p}{x_\psi}\frac{p_0^2}{RR'}\right)_p = \left(\frac{R^2}{p_0^2}\right)_\psi \quad \Rightarrow \quad R^2 = \chi_p p_0^2, \quad I_p x_p p_0^2 = \chi_\psi x_\psi RR',$$

$$\left(\chi_\psi R p_0^{-1}\right)^2 + \left(I_p x_\psi^{-1} - \chi_\psi R^2 p_0' p_0^{-3}\right)^2 + 4C^2 = 4(B - I)R^2p_0^{-2},$$

где функция $\chi = \chi(p,\psi)$ задает общее решение первого уравнения. Можно исключить функции $I(p,\psi)$, $x(p,\psi)$ и получить одно уравнение для функции $\chi(p,\psi)$ третьего порядка.

5. Дифференциально-инвариантное решение ранга 1 дефекта 3

Представление решения задаем в виде $rp_r = f(p)$, $rS_r = g(p)$. Отсюда следуют равенства $p = P(\tau)$, $S = S_1(\tau) + S_0(x)$, $\tau = rp_0(x)$. Из (1.2) имеем $\psi = \Psi(S)$. Подставка в (1.4), (1.5) дает

$$I_p^2\Psi'^2\left[S_1'^2p_0^2 + S_0'^2\right] + C^2 = (B - I)\tau^2p_0^{-2}, \tag{5.1}$$

$$\begin{gathered} \Psi'S_1'\left(\partial_x + p_0'p_0^{-1}\tau\partial_\tau\right)\left(I_p\Psi'S_1'p_0^2\tau^{-1}\right) - \\ -\Psi'S_0'\left(I_p\Psi'S_1'p_0^2\tau^{-1}\right)_\tau + 2P'\tau^2p_0'p_0^{-3} = 0. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Рассмотрим частное решение для уравнения состояния вида $I = I_1(p) + \chi(S)$: $S_1' = \tau^{-1}$, $S_0' = p_0'p_0^{-1}$, $B = \chi$. В этом случае $S = \ln(\tau p_0)$ и уравнение (5.2) можно интегрировать по x:

$$4^{-1}I_1'^2\tau^{-8}e^{4S}\Psi'^2 + I_1'P'(S - \ln\tau) = \lambda(\tau). \tag{5.3}$$

После дифференцирования по S уравнения (5.3) переменные разделяются

$$\left(e^{4S}\Psi'^2\right)' = -4P'I_1'^{-1}\tau^8 = K \neq 0,$$

где K — постоянная. Отсюда и из (5.3) получим

$$e^{4S}\Psi'^2 = KS + K_0, \quad P' = -4^{-1}KI_1'\tau^{-8}, \quad \lambda = 4K^{-2}P'^2\tau^8(K_0 + K\ln\tau). \tag{5.4}$$

Уравнение (5.1) в силу (5.4) можно представить в виде

$$-4K^{-1}\left(\tau^{-2} + p_0'^2p_0^{-4}\right) + C_1(S)\alpha(\tau) + E(S)\beta(\tau) = 0, \tag{5.5}$$

где $E = (KS + K_0)^{-1}$, $C_1 = e^{2S}C^2E$, $\alpha = \tau^{-6}I_{1\tau}^{-1} \neq 0$, $\beta = I_1\tau^{-2}I_{1\tau}^{-1}$.

Дифференцируем (5.5) по τ:

$$8K^{-1}\tau^{-3} + C_1\alpha' + E\beta' + C_1'\alpha\tau^{-1} + E'\beta\tau^{-1} = 0. \tag{5.6}$$

Здесь переменные S и τ можно считать независимыми. Дифференцируем (5.6) по S:

$$C_1'\alpha' + E'\beta' + C_1''\alpha\tau^{-1} + E'\beta\tau^{-1} = 0. \tag{5.7}$$

Умножим на $\tau\alpha^{-1}$ и дифференцируем по τ:

$$C_1'\left(\tau\alpha^{-1}\alpha'\right) + E'\left(\tau\alpha^{-1}\beta'\right)' + E''\left(\alpha^{-1}\beta\right)' = 0.$$

Делим на E' и дифференцируем по S:

$$\left(C_1'E'^{-1}\right)'\left(\tau\alpha^{-1}\alpha'\right)' + \left(E''E'^{-1}\right)'\left(\alpha^{-1}\beta\right)' = 0. \tag{5.8}$$

Переменные в (5.8) разделяются.

Можно показать, что предположение $(\tau\alpha^{-1}\alpha') \neq 0$ приводит к противоречию. Из (5.8) получим $\alpha = A\tau^\kappa$, $\beta = K_1\alpha$, где A, κ, K_1 — постоянные. Из (5.7) следует уравнение для C_1:

$$(C_1 + K_1E)' + \kappa(C_1 + K_1E) = K_2, \tag{5.9}$$

где K_2 — постоянная.

Из (5.6) следует $\kappa = -2$, $KK_2A = -8$. Уравнение (5.9) определяет $C_1 + K_1E = -2^{-1}K_2 - E_0e^{2S}$. Уравнение (5.5) принимает вид $p_0'^2p_0^{-6} = AE_0$. Отсюда следует $p_0 = x^{-1/2}$, $4AE_0 = 1$.

Таким образом, $\tau = rx^{-1/2}$ не является инвариантом допускаемой подмодели группы растяжений, значит, дифференциально-инвариантное решение не редуцируется к автомодельному решению. Из уравнения $\beta = K_1\alpha$ получим $I_1 = I_0\exp\left(\tau K_1^{-1}A^{-1}\right)$. Из (5.4) определяется

$$P = P_0 - 4^{-1}KN\int\tau^{-4}\exp\left(2^{-1}\tau K_1^{-1}A^{-1}\right)d\tau,$$

где P_0 — постоянная, $4I_0 = -N^2KK_1A$.

Полученные формулы определяют параметрически $I_1 = I_1(P)$. С уравнением состояния $I = I_1(P) + \chi(S)$, где $\chi(S)$ — произвольная функция, течение задается формулами (1.2), где $\rho = 2I_{1p}^{-1}$; $\Psi = \Psi_0 + \int e^{-2S}\sqrt{KS + K_0}dS$,

$$C^2 = e^{-2S}\left(4A^{-1}S + 4K_0K^{-1}A^{-1} - K_1\right) - 4^{-1}A^{-1}(KS + K_0).$$

Здесь энтропия $S = \ln(rx^{-1})$ есть инвариант допускаемой группы растяжений, Ψ_0, K, K_0, A, K_1, N — постоянные.

Заключение

Представление дифференциально-инвариатного решения есть дифференциальная связь специального вида, а именно, инвариантная дифференциальная связь [6]. Классификация дифференциально-инвариантных решений предполагает перебор всех возможных инвариантных дифференциальных связей, не редуцируемых к инвариантным решениям. Предложено обобщение частично инвариантного решения, когда лишь часть инвариантов базиса назначаются функциями выбранного инварианта-аргумента, и остальные инварианты базиса есть функции общего вида. Приведена лишь часть классификации, для которой изучение совместности удалось проделать до конца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. *Программа подмодели. Газовая динамика* // Прикладная математика и механика. Т. 58, вып. 4. 1994. С. 30–55.
2. Мамонтов Е.В. *Инвариантные подмодели ранга два уравнений газовой динамики* // Прикладная механика и техническая физика. Т. 40, № 2. 1999. С. 50–55.
3. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений* М.: Наука. 1978. 399 с.
4. Овсянников Л.В. *Об иерархии инвариантных подмоделей дифференциальных уравнений* // Доклады РАН. Т. 361, № 6. 1998. С. 740–742.
5. Овсянников Л.В. *Лекции по основам газовой динамики.* М.: Наука. 1981. 368 с.
6. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. *Методы дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике.* Новосибирск.: Наука. 1984. 272 с.

Салават Валеевич Хабиров,
Институт механики УНЦ РАН,
ул. Проспект Октября, 71,
450054, г. Уфа, Россия
E-mail: `habirov@anrb.ru`