ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 1. № 3 (2009). С. 46-56.

УДК 517.91+514.763.8+514.8

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ

В.В. КАРТАК

Аннотация. Для произвольного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка построен тест, проверяющий его эквивалентность уравнениям Пенлеве I и II, а также Пенлеве III с тремя нулевыми параметрами относительно точечных замен переменных. В случае положительного ответа для уравнений Пенлеве I и II явная замена переменных записывается через дифференциальные инварианты уравнения.

Ключевые слова: уравнения Пенлеве, проблема эквивалентности, дифференциальные инварианты.

1. Введение

Известно, что класс обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$y'' = P(x,y) + 3\,Q(x,y)y' + 3\,R(x,y)y'^2 + S(x,y)y'^3 \tag{1}$$

переходит в себя под действием произвольных точечных преобразований

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x,y), \quad \tilde{y} = \tilde{y}(x,y). \tag{2}$$

Этим обстоятельством обуславливается применение геометрических методов для исследования таких уравнений (см. [1], [2], [3], [4], [5]) В частности, из коэффициентов уравнения (1) – функций $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $R(x,y)$, $S(x,y)$ и их производных можно строить дифференциальные инварианты, ассоциированные с уравнением. Такие инварианты называют *инвариантами Картана*. См., например, [6], [7], [8], [9].

Все шесть уравнений Пенлеве ([10], [11], [12]) имеют вид (1). Уравнения Пенлеве I, II и III соответственно выглядят следующим образом:

$$y'' = 6y^2 + x, \qquad y'' = 2y^3 + xy + a, \qquad y'' = \frac{1}{y}(y')^2 - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x}(ay^2+b) + cy^3 + \frac{d}{y}.$$

Используем методы построения дифференциальных инвариантов, описанные в работах [13], [14], [15] для решения проблемы эквивалентности этих уравнений (третье уравнение берется с тремя нулевыми параметрами).

Аналогичные исследования проводились ранее, см. [16], [17], [18], [19], [20]. Однако впервые тест проверки на эквивалентность сформулирован в эффективно проверяемой форме, он легко программируется. Настоящие исследования являются продолжением работы [21].

Для дальнейших вычислений понадобится определение псевдотензорного поля и его ковариантной производной (как они были сформулированы в работе [13]).

V.V. Kartak, Explicit solution of the equivalence problem for certain Painleve equations.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-97020-р_поволжье_а).

Поступила 11 августа 2009 г.

Замену переменных (2) можно трактовать как замену криволинейных координат (x, y) другими координатами $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Тогда соответствующая матрица перехода S и обратная ей матрица T имеют вид:

$$S = \begin{pmatrix} x_{1.0} & x_{0.1} \\ y_{1.0} & y_{0.1} \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{1.0} & \tilde{x}_{0.1} \\ \tilde{y}_{1.0} & \tilde{y}_{0.1} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Здесь $x_{1.0} = \partial x(\tilde{x}, \tilde{y})/\partial \tilde{x}$, $x_{0.1} = \partial x(\tilde{x}, \tilde{y})/\partial \tilde{y}$, $y_{1.0} = \partial y(\tilde{x}, \tilde{y})/\partial \tilde{x}$, $y_{0.1} = \partial y(\tilde{x}, \tilde{y})/\partial \tilde{y}$, а $\tilde{x}_{1.0} = \partial \tilde{x}(x, y)/\partial x$, $\tilde{x}_{0.1} = \partial \tilde{x}(x, y)/\partial y$, $\tilde{y}_{1.0} = \partial \tilde{y}(x, y)/\partial x$, $\tilde{y}_{0.1} = \partial \tilde{y}(x, y)/\partial y$.

Определение 1. *Псевдотензорным полем веса m валентности (r, s) назовем индексированный набор величин, при замене системы координат преобразующийся по правилу*

$$F^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = (\det T)^m \sum_{p_1 \ldots p_r} \sum_{q_1 \ldots q_s} S^{i_1}_{p_1} \ldots S^{i_r}_{p_r} T^{q_1}_{j_1} \ldots T^{q_s}_{j_s} \tilde{F}^{p_1 \ldots p_r}_{q_1 \ldots q_s}$$

Видим, что от определения обычного тензорного поля оно отличается лишь множителем $(\det T)^m$, где T — обратная матрица перехода при замене одной системы координат на плоскости другой.

Определение 2. *Ковариантной производной псевдотензорного поля F валентности (r, s) и веса m назовем следующий объект:*

$$\nabla_k F^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = \frac{\partial F^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}}{\partial x^k} + \sum_{n=1}^{r} \sum_{v_n=1}^{2} \Gamma^{i_n}_{k v_n} F^{i_1 \ldots v_n \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} -$$
$$- \sum_{n=1}^{s} \sum_{w_n=1}^{2} \Gamma^{w_n}_{k j_n} F^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots w_n \ldots j_s} + m \varphi_k F^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}, \qquad k = 1, 2.$$

При ковариантном дифференцировании псевдотензорное поле F валентности (r, s) и веса m переходит в псевдотензорное поле валентности $(r, s + 1)$ и веса m. От определения ковариантной производной тензорного поля она отличается только слагаемым $m\varphi_k F^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$, здесь φ_1 и φ_2 — вспомогательные величины. Явные формулы (26), (27) для их вычисления содержатся в Приложении.

2. Уравнение Пенлеве I

Пусть дано некоторое уравнение (1). Будем искать замену переменных, которая переводит его в уравнение Пенлеве I

$$\tilde{y}'' = 6\tilde{y}^2 + \tilde{x}. \tag{4}$$

С данным уравнением ассоциированы два псевдовекторных поля α веса 2 и θ веса -1 (подробнее см. [14]). Явные формулы (17), (25) для вычисления координат полей содержатся в Приложении. Для уравнения (4) они равны:

$$\tilde{\alpha}^1 = \tilde{B} = 0, \quad \tilde{\alpha}^2 = -\tilde{A} = -12, \quad \tilde{\theta}^1 = -\frac{1}{12}, \quad \tilde{\theta}^2 = 0.$$

Выразим матрицу перехода (3) через функции $\tilde{x}$, $\tilde{y}$:

$$S = \frac{1}{\det T} \begin{pmatrix} \tilde{y}_{0.1} & -\tilde{x}_{0.1} \\ -\tilde{y}_{1.0} & \tilde{x}_{1.0} \end{pmatrix}.$$

Поля α и θ при замене координат (2) преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix} &= \det T \begin{pmatrix} \tilde{y}_{0.1} & -\tilde{x}_{0.1} \\ -\tilde{y}_{1.0} & \tilde{x}_{1.0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\det^2 T} \begin{pmatrix} \tilde{y}_{0.1} & -\tilde{x}_{0.1} \\ -\tilde{y}_{1.0} & \tilde{x}_{1.0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/12 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5}$$

Кроме того, по коэффициентам уравнения находятся псевдоинварианты, явные формулы для вычисления которых содержатся в Приложении: N веса 2 (19); Ω веса 1 (22), (23); Θ веса -2 (24); L веса -4 (28); L_1 веса -5 (29); V веса -3 (31); W веса -6 (30). Из них можно построить инварианты:

$$I_1=\frac{L_1^4}{L^5},\qquad I_2=\frac{\Theta^2}{L}.$$

Значения псевдоинвариантов для уравнения (4) равны:

$$\tilde N=0,\quad \tilde\Omega=0,\quad \tilde\Theta=-\frac{\tilde y}{12},\quad \tilde L=\frac{\tilde x}{12^3},\quad \tilde L_1=-\frac{1}{12^4},\quad \tilde V=0,\quad \tilde W=0.$$

Видим, что псевдоинвариант $\tilde L_1$ веса -5 для уравнения Пенлеве I (4) равен константе. Запишем для $\tilde L_1$ закон преобразования при замене координат. Из этого закона выразим определитель обратной матрицы перехода $\det T$:

$$L_1=\frac{\tilde L_1}{(\det T)^5}=\frac{-1}{12^4(\det T)^5},\quad \det T=\sqrt[5]{-\frac{1}{12^4L_1}}.$$

Теперь из формул (5) выразим частные производные координатных функций:

$$\tilde x_{1.0}=-A\sqrt[5]{-\frac{L_1}{12}},\quad \tilde x_{0.1}=-B\sqrt[5]{-\frac{L_1}{12}},\quad \tilde y_{1.0}=\frac{\theta^2}{\sqrt[5]{12^3L_1^2}},\quad \tilde y_{0.1}=-\frac{\theta^1}{\sqrt[5]{12^3L_1^2}}.$$

Для любого уравнения (1) функции A, B, θ^1, θ^2, L_1 известны, они определяются через функции P, Q, R, S по явным формулам (17), (25), приведенным в Приложении. Из последних формул легко получаются условия совместности:

$$\left(A\sqrt[5]{-\frac{L_1}{12}}\right)_y=\left(B\sqrt[5]{-\frac{L_1}{12}}\right)_x,\quad \left(\frac{\theta^2}{\sqrt[5]{12^3L_1^2}}\right)_y=\left(-\frac{\theta^1}{\sqrt[5]{12^3L_1^2}}\right)_x.$$

Первое условие совместности равносильно равенству нулю следующего выражения

$$\begin{aligned}&5L_1(A_y-B_x)+A(L_1)_y-B(L_1)_x=5L_1(A_y-B_x)-\nabla_\alpha L_1+5L_1(\varphi_1B-\varphi_2A)=\\&=5L_1(A_y-B_x-\varphi_1B+\varphi_2A)-V=6L_1N-V=0.\end{aligned}$$

Здесь использовано определение псевдоинварианта V

$$V=\nabla_\alpha L_1=(L_1)_xB-(L_1)_yA-5L_1(B\varphi_1-A\varphi_2),$$

а также следующее явно проверяемое тождество:

$$B_x-A_y=-\frac{6}{5}N+\varphi_2A-\varphi_1B. \tag{6}$$

Из второго условия совместности следует:

$$\begin{aligned}&\frac{5}{2}L_1\left(\theta^1_x+\theta^2_y\right)-\left((L_1)_x\theta^1+(L_1)_y\theta^2\right)=\\&=\frac{5}{2}L_1\left(\theta^1_x+\theta^2_y\right)-\nabla_\theta L_1-5L_1(\varphi_1\theta^1+\varphi_2\theta^2)=\\&=\frac{5}{2}L_1\left((\Theta_y-2\varphi_2\Theta)_x+(-\Theta_x+2\varphi_1\Theta)_y\right)-W-\\&-5L_1\left(\varphi_1(\Theta_y-2\varphi_2\Theta)+\varphi_2(-\Theta_x+2\varphi_1\Theta)\right)=\\&=\frac{5}{2}L_1\left((\Theta_{xy}-2(\varphi_2)_x\Theta-2\varphi_2\Theta_x)+(-\Theta_{xy}+2(\varphi_1)_y\Theta+2\varphi_1\Theta_y)\right)-W-\\&-5L_1\left(\varphi_1\Theta_y-\varphi_2\Theta_x\right))=5L_1((\varphi_1)_y-(\varphi_2)_x)\Theta-W=3L_1\Omega\Theta-W=0.\end{aligned}$$

Использовано определение псевдоинвариантов W, Ω, псевдовекторного поля θ:

$$W = \nabla_\theta L_1 = (L_1)_x\theta^1 + (L_1)_y\theta^2 - 5L_1(\varphi_1\theta^1 + \varphi_2\theta^2), \quad \Omega = \frac{5}{3}\left((\varphi_1)_y - (\varphi_2)_x\right),$$

$$\theta^1 = \Theta_y - 2\varphi_2\Theta, \qquad \theta^2 = -\Theta_x + 2\varphi_1\Theta.$$

Так как для уравнения Пенлеве I псевдоинварианты $\tilde{N}$, $\tilde{\Omega}$, $\tilde{V}$, $\tilde{W}$ тождественно равны нулю, то они должны быть равны нулю и для любого уравнения, ему эквивалентного. Тогда в силу $N = 0$ и $V = 0$ выполнено первое условие совместности, а в силу $W = 0$ и $\Omega = 0$ выполнено второе условие совместности. Таким образом, при выполнении этих условий существует точечная замена переменных, сводящая исходное уравнение (1) к уравнению (4).

Инварианты уравнения (4) равны:

$$I_1 = \frac{1}{12\tilde{x}^5}, \quad I_2 = \frac{12\tilde{y}^2}{\tilde{x}}.$$

Разрешим I_1 и I_2 относительно $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ и тем самым найдем явный вид искомой замены переменных:

$$\tilde{x} = \frac{1}{\sqrt[5]{12I_1}}, \qquad \tilde{y} = \pm\frac{\sqrt{I_2}}{\sqrt[5]{12^3}\,\sqrt[10]{I_1}}. \tag{7}$$

Теорема 1. *Уравнение (1) эквивалентно уравнению Пенлеве I (4) относительно замен переменных (2) тогда и только тогда, когда выполнены условия: 1) $F = 0$ (18), но $A \neq 0$ или $B \neq 0$ (17), 2) $\Omega = 0$ (22), (23), 3) $N = 0$ (19), 4) $W = 0$ (30), 5) $V = 0$ (31), 6) $\Theta \neq 0$ (24), 7) $L_1 \neq 0$ (29). Явный вид замены переменных задается формулой (7).*

Пример 1. Следующее уравнение эквивалентно уравнению Пенлеве I:

$$y'' = -\sin^3 y(6x\cos^2 y + \sin y) + \frac{1}{x}(-18x^3\cos^3 y\sin^2 y - 3x^2\sin^3 y\cos y - 2)y' -$$
$$- (18x^3\cos^4 y\sin y + 3x^2\sin^2 y\cos^2 y)y'^2 - (6x^4\cos^5 y + x^3\sin y\cos^3 y + x)y'^3.$$

Для него значения инвариантов и явная замена переменных имеют вид

$$I_1 = \frac{1}{12}\frac{1}{x^5\sin^5 y}, \quad I_2 = \frac{12x\cos^2 y}{\sin y}, \quad \tilde{y} = x\cos y, \quad \tilde{x} = x\sin y.$$

3. Уравнение Пенлеве II

Для некоторого уравнения (1) ищем замену переменных, которая переводит его в уравнение Пенлеве II

$$\tilde{y}'' = 2\tilde{y}^3 + \tilde{x}\tilde{y} + a. \tag{8}$$

С уравнением (8) ассоциированны 2 псевдовекторных поля α веса 2 (17) и ξ веса 3 (32). Явные формулы для их вычисления содержатся в Приложении 1. Для уравнения (8) координаты этих полей равны:

$$\tilde{\alpha}^1 = \tilde{B} = 0, \quad \tilde{\alpha}^2 = -\tilde{A} = -12\tilde{y}, \quad \tilde{\xi}^1 = -\frac{24}{5\tilde{y}}, \quad \tilde{\xi}^2 = 0.$$

При замене переменных их компоненты преобразуются по правилу:

$$\begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix} = (\det T)\begin{pmatrix} \tilde{y}_{0.1} & -\tilde{x}_{0.1} \\ -\tilde{y}_{1.0} & \tilde{x}_{1.0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -12\tilde{y} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = (\det T)^2\begin{pmatrix} \tilde{y}_{0.1} & -\tilde{x}_{0.1} \\ -\tilde{y}_{1.0} & \tilde{x}_{1.0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -24/(5\tilde{y}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Четыре псевдоинварианта M веса 4 (20), (21), N веса 2 (19), Ω веса 1 (22), (23) и Γ (33) для уравнения (8) равны

$$\tilde{M}=\frac{288}{5},\qquad \tilde{N}=4,\qquad \tilde{\Omega}=0,\qquad \tilde{\Gamma}=\frac{48}{25}\frac{2\tilde{y}^3+\tilde{x}\tilde{y}+a}{\tilde{y}^3}.$$

Инварианты уравнения вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}&I_1=\frac{M}{N^2},\quad I_3=\frac{\Gamma}{M},\quad I_6=\frac{\nabla_\alpha I_3}{N}=\frac{B(I_3)'_x-A(I_3)'_y}{N},\\&I_9=\frac{(\nabla_\gamma I_3)^2}{N^3}=\frac{(\xi^1(I_3)'_x+\xi^2(I_3)'_y)^2}{N^3}.\end{aligned}\tag{9}$$

Аналогично рассмотренному ранее случаю, из формулы преобразования N найдем $\det T$:

$$N=4(\det T)^2,\qquad \det T=\frac{\sqrt{N}}{2},$$

тогда

$$\frac{\tilde{y}_{0.1}}{\tilde{y}}=-\frac{5}{6}\frac{\xi^1}{N},\quad \frac{\tilde{y}_{1.0}}{\tilde{y}}=\frac{5}{6}\frac{\xi^2}{N}\tag{10}$$

и соответствующее условие совместности имеет вид:

$$\left(-\frac{\xi^1}{N}\right)_x=\left(\frac{\xi^2}{N}\right)_y.$$

Оно равносильно

$$\begin{aligned}&N(\xi^1_x+\xi^2_y)-(\xi^1N_x+\xi^2N_y)=N(N_y+2\varphi_2N)_x+N(-N_x-2\varphi_1N)_y-\\&-N_x(N_y+2\varphi_2N)-N_y(-N_x-2\varphi_1N)=2N^2((\varphi_2)_x-(\varphi_1)_y)=\frac{10}{3}N^2\Omega=0.\end{aligned}$$

Здесь использовано определение

$$\xi^1=N_y+2\varphi_2N,\qquad \xi^2=-N_x-2\varphi_1N.\tag{11}$$

Это условие выполняется если $\Omega=0$. Так как существует $\tilde{y}$, подставим его в первое равенство:

$$\tilde{x}_{0.1}=\frac{B}{6\tilde{y}\sqrt{N}},\quad \tilde{x}_{1.0}=\frac{A}{6\tilde{y}\sqrt{N}},\quad \left(\frac{B}{\tilde{y}\sqrt{N}}\right)_x=\left(\frac{A}{\tilde{y}\sqrt{N}}\right)_y.$$

Распишем подробнее:

$$\begin{aligned}&\frac{B_x-A_y}{\tilde{y}\sqrt{N}}+\frac{A\tilde{y}_{0.1}-B\tilde{y}_{1.0}}{\tilde{y}^2\sqrt{N}}+\frac{AN_y-BN_x}{2\tilde{y}N\sqrt{N}}=\\&=\frac{-\frac{6}{5}N+\varphi_2A-\varphi_1B}{\tilde{y}\sqrt{N}}-\frac{5(B\xi^2+A\xi^1)}{6\tilde{y}N\sqrt{N}}+\frac{A(\xi^1-2\varphi_2N)+B(\xi^2+2\varphi_1N)}{2\tilde{y}N\sqrt{N}}=\\&=\frac{-6N}{5\tilde{y}\sqrt{N}}-\frac{B\xi^2+A\xi^1}{3\tilde{y}N\sqrt{N}}=\frac{-18N^2+5M}{15\tilde{y}N\sqrt{N}}=\frac{-18+5I_1}{15\tilde{y}N^3\sqrt{N}}=0.\end{aligned}$$

Первое условие совместности выполняется, если $I_1=18/5$. Использовались равенства (6), (10), (11), а также определение

$$M=-A\xi^1-B\xi^2.$$

Значения базовых инвариантов (9) для уравнения (8):

$$I_1=\frac{18}{5},\quad I_3=\frac{2\tilde{y}^3+\tilde{x}\tilde{y}+a}{30\tilde{y}^3},\quad I_6=\frac{2\tilde{x}\tilde{y}+3a}{10\tilde{y}^3},\quad I_9=\frac{1}{2500\tilde{y}^6}.$$

Построим новый инвариант, который с точностью до знака равен параметру уравнения (8):

$$J = \frac{1}{50}\frac{4 + 10I_6 - 60I_3}{\sqrt{I_9}} = \pm a. \tag{12}$$

Лемма 1. *Уравнения Пенлеве II с разными параметрами $a_1 \neq \pm a_2$ не эквивалентны.*
Через формулы для инвариантов находим замену переменных:

$$\tilde{y} = \frac{1}{\sqrt[6]{2500I_9}}, \qquad \tilde{x} = \frac{5I_6}{\sqrt[6]{2500I_9}} - \frac{3}{2}J\sqrt[6]{2500I_9}. \tag{13}$$

Теорема 2. *Произвольное уравнение (1) эквивалентно уравнению Пенлеве II с параметром $a = \pm J$ (12) тогда и только тогда, когда выполнены равенства 1) $F = 0$ (18), но $A \neq 0$ или $B \neq 0$ (17), 2) $\Omega = 0$ (22), (23) , 3) $M \neq 0$ (20), (21), 4) $I_1 = 18/5$ (9). Явный вид замены переменных задается формулой (13).*

Пример 2. Уравнение 6.9 из справочника Камке [22] линейной заменой переменных сводится к уравнению Пенлеве II с параметром $\pm J$:

$$y'' = -ay^3 - bxy - cy - d.$$

$$J = -\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\frac{d}{b}, \qquad \tilde{y} = \sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\frac{y}{\sqrt[3]{b}}, \qquad \tilde{x} = -\frac{bx + c}{\sqrt[3]{b^2}}.$$

4. Уравнение Пенлеве III с тремя нулевыми параметрами

Общий вид уравнения Пенлеве III следующий:

$$y'' = \frac{1}{y}(y')^2 - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x}(ay^2 + b) + cy^3 + \frac{d}{y}.$$

Оно представляет собой четырехпарметрическое семейство уравнений, которое обозначим PIII(a,b,c,d).

Если три из четырех этих параметров равны нулю, то такие уравнения Пенлеве III имеют специальные свойства:

1. Они имеют двумерную алгебру точечных симметрий и, следовательно, интегрируемы в квадратурах (см. [12]).

2. Все такие уравнения эквивалентны между собой. Фактически следуя работе [19], запишем замены переменных:

$$PIII(0, b, 0, 0) \xrightarrow{1)} PIII(-b, 0, 0, 0) \xrightarrow{2)} PIII(0, 0, -b, 0) \xrightarrow{3)} PIII(0, 0, 0, b),$$

здесь 1), 3) $x = \tilde{x}$, $y = 1/\tilde{y}$, 2) $x = \tilde{x}^2/2$, $y = \tilde{y}^2$.

Поэтому имеет смысл решать проблему эквивалентности для одного типа уравнений. В качестве базового уравнения выбрано PIII(0,b,0,0):

$$y'' = \frac{1}{y}(y')^2 - \frac{1}{x}y' + \frac{b}{x}. \tag{14}$$

Для уравнения (14) координаты псевдовекторных полей α веса 2 (17) и ξ веса 3 (32) равны:

$$\tilde{A} = \frac{b}{\tilde{x}\tilde{y}^3}, \qquad \tilde{B} = 0, \qquad \tilde{\xi}^1 = -\frac{1}{15}\frac{b}{\tilde{x}\tilde{y}^4}, \qquad \tilde{\xi}^2 = -\frac{1}{15}\frac{b}{\tilde{x}^2\tilde{y}^3},$$

а значения псевдоинвариантов M веса 4 (20), (21), N веса 2 (19) и Ω веса 1 (22), (23) равны

$$\tilde{N} = -\frac{1}{3}\frac{b}{\tilde{x}\tilde{y}^3}, \qquad \tilde{M} = \frac{1}{15}\frac{b^2}{\tilde{x}^2\tilde{y}^6}, \qquad \tilde{\Omega} = 0.$$

Базовые инварианты уравнения равны

$$I_1 = \frac{M}{N^2} = \frac{3}{5}, \qquad I_2 = \frac{\Omega^2}{N} = 0, \qquad I_3 = \frac{\Gamma}{M} = \frac{1}{15}.$$

Выразим $\det T$ из закона преобразования псевдоинварианта N:

$$\det T = \frac{\sqrt{-3N\tilde{x}\tilde{y}^3}}{\sqrt{b}},$$

тогда из законов преобразования псевдовекторных полей α и ξ получим

$$\tilde{x}_{0.1} = \frac{B\sqrt{\tilde{x}\tilde{y}}}{\sqrt{-3bN}}, \qquad \tilde{x}_{1.0} = \frac{A\sqrt{\tilde{x}\tilde{y}}}{\sqrt{-3bN}}, \tag{15}$$

$$\tilde{y}_{0.1} = \frac{5\xi^1\tilde{y}}{N} + \frac{B\tilde{y}^2}{\sqrt{-3bN\tilde{x}\tilde{y}}}, \qquad \tilde{y}_{1.0} = -\frac{5\xi^2\tilde{y}}{N} + \frac{A\tilde{y}^2}{\sqrt{-3bN\tilde{x}\tilde{y}}}. \tag{16}$$

В этом случае условия совместности выглядят так:

$$\left(\frac{B\sqrt{\tilde{y}}}{\sqrt{N}}\right)_x = \left(\frac{A\sqrt{\tilde{y}}}{\sqrt{N}}\right)_y, \quad \left(\frac{5\xi^1}{N} + \frac{B\sqrt{\tilde{y}}}{\sqrt{-3bN\tilde{x}}}\right)_x = \left(-\frac{5\xi^2}{N} + \frac{A\sqrt{\tilde{y}}}{\sqrt{-3bN\tilde{x}}}\right)_y$$

Распишем первое условие совместности, используя формулы (15), (16):

$$\frac{(B_{1.0} - A_{0.1})\sqrt{\tilde{y}}}{\sqrt{N}} + \frac{(B\tilde{y}_{1.0} - A\tilde{y}_{0.1})}{2\sqrt{N}\sqrt{\tilde{y}}} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\tilde{y}}(BN_{1.0} - AN_{0.1})}{\sqrt{N^3}} =$$

$$= -\frac{6}{5}\sqrt{N}\sqrt{\tilde{y}} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\tilde{y}}M}{\sqrt{N^3}} - \frac{5\sqrt{\tilde{y}}}{2\sqrt{N}}(B\xi^2 + A\xi^1) = \sqrt{\tilde{y}}\sqrt{N}\left(-\frac{6}{5} - \frac{1}{2}\frac{M}{N^2} + \frac{5}{2}\frac{M}{N^2}\right) =$$

$$= \sqrt{\tilde{y}}\sqrt{N}\left(-\frac{6}{5} + 2I_1\right) = 0.$$

Оно выполнено если $I_1 = 3/5$. Второе условие запишется так:

$$\frac{5(\xi^1_x + \xi^2_y)}{N} - \frac{5(\xi^1 N_{1.0} + \xi^2 N_{0.1})}{N^2} + \frac{(B_{1.0} - A_{0.1})\sqrt{\tilde{y}}}{\sqrt{-3bN\tilde{x}}} -$$

$$- \frac{\sqrt{\tilde{y}}(BN_{1.0} - AN_{0.1})}{2\sqrt{-3b\tilde{x}N^3}} + \frac{(B\tilde{y}_{1.0} - A\tilde{y}_{0.1})}{2\sqrt{-3bN\tilde{x}\tilde{y}}} - \frac{\sqrt{\tilde{y}}(B\tilde{x}_{1.0} - A\tilde{x}_{0.1})}{2\sqrt{-3bN\tilde{x}^3}} =$$

$$= \frac{50}{3}\Omega + \frac{\sqrt{\tilde{y}}}{\sqrt{-3bN\tilde{x}}}\left(-\frac{6}{5}N - \frac{M}{2N} + \frac{5M}{2N}\right) = \frac{50}{3}\Omega + \frac{\sqrt{\tilde{y}}N}{\sqrt{-3bN\tilde{x}}}\left(-\frac{6}{5} + 2I_1\right) = 0.$$

Второе условие выполнено, если $\Omega = 0$.

Теорема 3. *Произвольное уравнение (1) эквивалентно уравнению Пенлеве III с тремя нулевыми параметрами тогда и только тогда, когда выполнены равенства 1) $F = 0$ (18), но $A \neq 0$ или $B \neq 0$ (17), 2) $\Omega = 0$ (22), (23) , 3) $M \neq 0$ (20), (21), 4) $I_1 = 3/5$.*

В этом случае явная замена переменных не может быть выражена через инварианты уравнения, потому что все они равны константам.

5. Заключение

Таким образом в явно проверяемой форме найден тест проверки эквивалентности некого заданного ОДУ второго порядка уравнениям Пенлеве I, II и III с тремя нулевыми параметрами. Для первых двух уравнений найдена точечная замена переменных, которая записывается через дифференциальные инварианты уравнения.

6. Приложение

Введем обозначение $K_{i.j} = \partial^{i+j} K / \partial x^i \partial y^j$.

Для псевдовекторного поля α координаты равны $\alpha^1 = B$, $\alpha^2 = -A$, где

$$\begin{aligned} A &= P_{0.2} - 2Q_{1.1} + R_{2.0} + 2PS_{1.0} + SP_{1.0} - 3PR_{0.1} - 3RP_{0.1} - 3QR_{1.0} + 6QQ_{0.1}, \\ B &= S_{2.0} - 2R_{1.1} + Q_{0.2} - 2SP_{0.1} - PS_{0.1} + 3SQ_{1.0} + 3QS_{1.0} + 3RQ_{0.1} - 6RR_{1.0}. \end{aligned} \tag{17}$$

Первый псевдоинвариант F веса 5:

$$3F^5 = AG + BH, \qquad \text{где} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} G &= -BB_{1.0} - 3AB_{0.1} + 4BA_{0.1} + 3SA^2 - 6RBA + 3QB^2, \\ H &= -AA_{0.1} - 3BA_{1.0} + 4AB_{1.0} - 3PB^2 + 6QAB - 3RA^2. \end{aligned}$$

Псевдоинвариант N веса 2 в случаях $A \neq 0$ и $B \neq 0$:

$$N = -\frac{H}{3A}, \qquad\qquad N = \frac{G}{3B}. \tag{19}$$

Псевдоинвариант M веса 4 в случае $A \neq 0$:

$$M = -\frac{12BN(BP + A_{1.0})}{5A} + BN_{1.0} + \frac{24}{5}BNQ + \frac{6}{5}NB_{1.0} + \frac{6}{5}NA_{0.1} - AN_{0.1} - \frac{12}{5}ANR \tag{20}$$

и в случае $B \neq 0$:

$$M = -\frac{12AN(AS - B_{0.1})}{5B} - AN_{0.1} + \frac{24}{5}ANR - \frac{6}{5}NA_{0.1} - \frac{6}{5}NB_{1.0} + BN_{1.0} - \frac{12}{5}BNQ. \tag{21}$$

Псевдоинвариант Ω веса 1 в случае $A \neq 0$:

$$\begin{aligned} \Omega = {} & \frac{2BA_{1.0}(BP + A_{1.0})}{A^3} - \frac{(2B_{1.0} + 3BQ)A_{1.0}}{A^2} + \frac{(A_{0.1} - 2B_{1.0})BP}{A^2} - \\ & - \frac{BA_{2.0} + B^2P_{1.0}}{A^2} + \frac{B_{2.0}}{A} + \frac{3B_{1.0}Q + 3BQ_{1.0} - B_{0.1}P - BP_{0.1}}{A} + Q_{0.1} - 2R_{1.0} \end{aligned} \tag{22}$$

и в случае $B \neq 0$:

$$\begin{aligned} \Omega = {} & \frac{2AB_{0.1}(AS - B_{0.1})}{B^3} - \frac{(2A_{0.1} - 3AR)B_{0.1}}{B^2} + \frac{(B_{1.0} - 2A_{0.1})AS}{B^2} + \\ & + \frac{AB_{0.2} - A^2S_{0.1}}{B^2} - \frac{A_{0.2}}{B} + \frac{3A_{0.1}R + 3AR_{0.1} - A_{1.0}S - AS_{1.0}}{B} + R_{1.0} - 2Q_{0.1}. \end{aligned} \tag{23}$$

Псевдоковекторное поле ω веса -1 в случае $A \neq 0$:

$$\begin{aligned} \omega_1 = {} & \frac{12PR}{5A} - \frac{54}{25}\frac{Q^2}{A} - \frac{P_{0.1}}{A} + \frac{6Q_{1.0}}{5A} - \frac{PA_{0.1} + BP_{1.0} + A_{2.0}}{5A^2} - \frac{2B_{1.0}P}{5A^2} + \\ & + \frac{3QA_{1.0} - 12PBQ}{25A^2} + \frac{6B^2P^2 + 12BPA_{1.0} + 6A_{1.0}^2}{25A^3}, \\ \omega_2 = {} & \frac{-5BP_{0.1} + 6BQ_{0.1} + 12RBP}{5A^2} - \frac{54}{25}\frac{BQ^2}{A^2} - \frac{2BB_{1.0}P + BA_{0.1}P + B^2P_{1.0} + BA_{2.0}}{5A^3} - \\ & - \frac{12B^2PQ}{25A^3} + \frac{3BQA_{1.0}}{25A^3} + \frac{6BA_{1.0}^2 + 6B^3P^2 + 12B^2A_{1.0}P}{25A^4} \end{aligned}$$

и в случае $B \neq 0$:

$$\omega_1 = \frac{5AS_{1.0} - 6AR_{0.1} + 12QAS}{5B^2} - \frac{54}{25}\frac{AR^2}{B^2} + \frac{2AA_{0.1}S + AB_{1.0}S + A^2S_{0.1} - AB_{0.2}}{5B^3} - \\ - \frac{12A^2SR}{25B^3} + \frac{3ARB_{0.1}}{25B^3} + \frac{6AB_{0.1}^2 + 6A^3S^2 - 12A^2B_{0.1}S}{25B^4},$$

$$\omega_2 = \frac{12SQ}{5B} - \frac{54}{25}\frac{R^2}{B} + \frac{S_{1.0}}{B} - \frac{6R_{0.1}}{5B} + \frac{SB_{1.0} + AS_{0.1} - B_{0.2}}{5B^2} + \frac{2A_{0.1}S}{5B^2} - \\ - \frac{3RB_{0.1} + 12SAR}{25B^2} + \frac{6A^2S^2 - 12B_{0.1}AS + 6B_{0.1}^2}{25B^3}.$$

Псевдоинвариант Θ веса -2 равен:

$$\Theta = \frac{\omega_1}{A}, \qquad \Theta = \frac{\omega_2}{B}. \tag{24}$$

Псевдовекторное поле θ веса -1:

$$\theta^1 = \Theta_{0.1} - 2\varphi_2\Theta, \qquad \theta^2 = -\Theta_{1.0} + 2\varphi_1\Theta, \tag{25}$$

где величины φ_i при $A \neq 0$ равны

$$\varphi_1 = -3\frac{BP + A_{1.0}}{5A} + \frac{3}{5}Q, \;\; \varphi_2 = 3B\frac{BP + A_{1.0}}{5A^2} - 3\frac{B_{1.0} + A_{0.1} + 3BQ}{5A} + \frac{6}{5}R, \tag{26}$$

а при $B \neq 0$ равны

$$\varphi_1 = -3A\frac{AS - B_{0.1}}{5B^2} - 3\frac{A_{0.1} + B_{1.0} - 3AR}{5B} - \frac{6}{5}Q, \quad \varphi_2 = 3\frac{AS - B_{0.1}}{5B} - \frac{3}{5}R. \tag{27}$$

Псевдоинвариант L веса -4:

$$L = \theta^1\theta^2(\theta^1_{1.0} - \theta^2_{0.1}) + (\theta^2)^2\theta^1_{0.1} - (\theta^1)^2\theta^2_{1.0} - \\ - P(\theta^1)^3 - 3Q(\theta^1)^2\theta^2 - 3R\theta^1(\theta^2)^2 - S(\theta^2)^3 - \frac{1}{2}\Theta^2. \tag{28}$$

Псевдоинвариант L_1 веса -5:

$$L_1 = L_{1.0}\theta^1 + L_{0.1}\theta^2 - 4L(\varphi_1\theta^1 + \varphi_2\theta^2). \tag{29}$$

Псевдоинвариант W веса -6:

$$W = \nabla_\theta L_1 = (L_1)_{1.0}\theta^1 + (L_1)_{0.1}\theta^2 - 5L_1(\varphi_1\theta^1 + \varphi_2\theta^2). \tag{30}$$

Псевдоинвариант V веса -3:

$$V = \nabla_\alpha L_1 = (L_1)_{1.0}B - (L_1)_{0.1}A - 5L_1(B\varphi_1 - A\varphi_2). \tag{31}$$

Псевдовекторное поле ξ веса 3:

$$\xi = -2\Omega\alpha - \gamma, \tag{32}$$

где в случае $A \neq 0$ поле γ равно

$$\gamma^1 = -\frac{6BN(BP + A_{1.0})}{5A^2} + \frac{18NBQ}{5A} + \\ + \frac{6N(B_{1.0} + A_{0.1})}{5A} - N_{0.1} - \frac{12}{5}NR - 2\Omega B,$$

$$\gamma^2 = -\frac{6N(BP + A_{1.0})}{5A} + N_{1.0} + \frac{6}{5}NQ + 2\Omega A,$$

а в случае $B \neq 0$ равно

$$\gamma^1 = -\frac{6N(AN - B_{0.1})}{5B} - N_{0.1} + \frac{6}{5}NR - 2\Omega B,$$

$$\gamma^2 = -\frac{6AN(AS - B_{0.1})}{5B^2} + \frac{18NAR}{5B} - \\ -\frac{6N(A_{0.1} + B_{1.0})}{5B} + N_{1.0} - \frac{12}{5}NQ + 2\Omega A.$$

Псевдоинвариант Γ веса 4:

$$\Gamma = \frac{\gamma^1\gamma^2(\gamma^1_{1.0} - \gamma^2_{0.1})}{M} + \frac{(\gamma^2)^2\gamma^1_{0.1} - (\gamma^1)^2\gamma^2_{1.0}}{M} + \\ + \frac{P(\gamma^1)^3 + 3Q(\gamma^1)^2\gamma^2 + 3R\gamma^1(\gamma^2)^2 + S(\gamma^2)^3}{M}. \tag{33}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Liouville *Sur les invariants de certaines equations differentielles et sur leurs applications* // J. de L'Ecole Polytechnique. V. 59. 1889. P. 7–76
2. S. Lie *Theorie der Transformationsgruppen III* Teubner Verlag. Leipzig. 1930.
3. A. Tresse *Sur les invariants differenties des groupes continus de transformations* // Acta Math. V. 18. 1894. P. 1–88.
4. A. Tresse *Determination des Invariants ponctuels de l"Equation differentielle ordinaire de second ordre:* $y'' = w(x, y, y')$ // Preisschriften der fi̇stlichen Jablonowski'schen Gesellschaft XXXII. S. Hirzel. Leipzig. 1896.
5. E. Cartan *Sur les varietes a connection projective* // Bulletin de Soc. Math. de France. V. 52. 1924. P. 205–241.
6. G. Thomsen *Über die topologischen Invarianten der Differentialgleichung* $y'' = f(x, y)y'^3 + g(x, y)y'^2 + h(x, y)y' + k(x, y)$ // Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität. V. 7. 1930. P. 301–328.
7. C. Grissom, G. Thompson and G. Wilkens *Linearisation of Second Order Ordinary Differential Equations via Cartan's Equivalence Method* // Diff. Equations. V. 77. 1989. P. 1–15.
8. Романовский Ю.Р. *Вычисление локальных симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом эквивалентности Картана* // Рукопись. С. 1–20.
9. L.A. Bordag and V.S. Dryuma *Investigation of dynamical systems using tools of the theory of invariants and projective geometry* // NTZ-Preprnt 24/95 "addr Leipzig, 1995; Electronic archive at LANL (1997). solv-int #9705006. P. 1–18.
10. A.R. Its and V.Yu. Novokshenov *The Isomonodromic Deformation Method in the Theory of Painleve Equations* // Lecture Notes in Mathematics. V. 1191. Springer-Verlag. New York/Berlin. 1986.
11. Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи* Мир. Москва. 1987.
12. Громак В.И., Лукашевич Н.А. *Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве* Минск. 1990. 150 с.
13. V.V. Dmitrieva, R.A. Sharipov *On the point transformations for the second order differential equations* // Electronic archive at LANL (1997). solv-int #9703003. P. 1–14.
14. R.A. Sharipov *On the point transformations for the equation* $y'' = P + 3\,Q\,y' + 3\,R\,y'^2 + S\,y'^3$ // Electronic archive at LANL (1997). solv-int #9706003. P. 1–35.
15. R.A. Sharipov *Effective procedure of point classification for the equations* $y'' = P + 3\,Q\,y' + 3\,R\,y'^2 + S\,y'^3$ // Electronic archive at LANL (1998). MathḊG#9802027. P. 1–35.
16. N. Kamran, K.G. Lamb & W.F. Shadwick *The local equivalence problem for* $d^2y/dx^2 = F(x, y, dy/dx)$ *and the Painleve transcendents* // J.Differential geometry. V. 22. 1985. P. 139–150.
17. A.V. Bocharov, V.V. Sokolov, and S.I. Svinolupov *On some equivalence problem for diffrential equations* // Preprint ESI-54, International Erwin Schrödinger Institute for Mathematical Physics. Wien. Austria. 1993. P. 1–12.

18. M.V. Babich and L.A. Bordag *Projective Differential Geometrical Structure ot the Painleve Equations* // J. of Diff. Equations. V. 157 (2). 1999. P. 452–485.
19. J. Hietarinta and V. Dryuma *Is my ODE is Painleve equation in disguise?* // J.of Nonlin. Math. Phys. 2002. 9(1). P. 67–74.
20. Raouf Dridi *On the geometry of the first and second Painleve equations* // J. Phys. A: Math. Theor. V. 42. 2009. P. 1–9.
21. Картак В.В. *Решение проблемы эквивалентности для уравнений Пенлеве I и II* // Депонировано ВИНИТИ. № 612-В 2006.
22. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* Москва. Наука. 1976.

Вера Валерьевна Картак,
Башкирский государственный университет,
ул. Фрунзе, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: kvera@mail.ru