ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 1. № 3 (2009). С. 11-27.

УДК 517.94

ШИРОКИЙ КЛАСС ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕРАВНОМЕРНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

А.Р. ГЕРФАНОВ, Ф.Х. МУКМИНОВ

Аннотация. Для неравномерно эллиптического уравнения второго порядка в неограниченной области установлен широкий класс единственности решения задачи с чередованием первого и третьего типа краевого условия. Построен также пример решения эллиптического уравнения, показывающий, что найденный класс единственности не может быть существенно расширен.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, класс единственности, неограниченная область.

1. Введение

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n,\ n \geq 2,\ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}_n$. Рассматривается линейное эллиптическое уравнение второго порядка:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} [b_i(x)u_{x_i} + (c_i(x)u)_{x_i}] - d(x)u = f(x). \tag{1}$$

Все коэффициенты уравнения измеримы и ограничены в Ω, $d \geq 0$. Матрица $\{a_{ij}(x)\}$ удовлетворяет условию эллиптичности: существуют положительные постоянная Γ и функция $s(x)$ такие, что для любого вектора $y \in \mathbb{R}_n$ и почти всех $x \in \Omega$ справедливы неравенства:

$$s(x)|y|^2 \leqslant \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(x)y_\alpha y_\beta \leqslant s(x)\Gamma|y|^2. \tag{2}$$

Непрерывная в Ω функция $s(x)$ может обращаться в ноль на границе области.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения (1) с сочетающимися краевыми условиями первого и третьего типа

$$u\Big|_{x\in\Gamma_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sum_{i=1}^{n} c_i n_i u\right)\Bigg|_{x\in\Gamma_2} = 0. \tag{3}$$

Здесь $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ — произвольное непустое замкнутое множество и $\Gamma_2 = \partial\Omega \backslash \Gamma_1$; $\mathbf{n}(n_1, n_2, \dots, n_n)$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$; $\quad \dfrac{\partial u}{\partial N} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}n_j.$

В том случае, когда коэффициенты уравнения (1) — гладкие функции и $\partial\Omega$ класса C^1, граничное условие на Γ_2 выполняется в обычном смысле поточечно, а на Γ_1 в смысле следа, то есть почти всюду.

A.R. Gerfanov, F.H. Mukminov, A wide class of uniqueness of the solution for non-uniformly elliptic equation in unbounded domain.

Работа поддержана РФФИ (грант 07-01-00037-а).

Поступила 27 мая 2009 г.

Работа посвящена доказательству единственности решения задачи (1), (3) в неограниченной области Ω.

Список работ и результатов, посвященных изучению поведения решений эллиптических уравнений и систем, огромен. Сюда относятся классическая теорема Лиувилля и её многочисленные обобщения, теоремы типа Фрагмена-Линделефа, а также обширный перечень результатов, полученных на основе сен-венановских оценок. Подробный, но всё же неполный обзор работ этого направления содержится в [3]. Не упомянута, например, работа Е.М. Ландиса [9], в которой на базе понятия емкости множества, введенного В.А. Кондратьевым в [10], доказаны обобщения теоремы Фрагмена-Линделефа. Отметим еще интересную работу В.А. Кондратьева и С.Д. Эйдельмана [11], в которой доказано L_1-неравенство Гарнака для эллиптических систем уравнений и в качестве приложения получено обобщение теоремы Лиувилля и установлено экспоненциальное убывание (рост) положительного решения в неограниченном цилиндре. В работе О.А. Олейник и Е.В. Радкевича [19] для равномерно эллиптических систем доказаны обобщения теоремы Лиувилля и теоремы Фрагмена-Линделефа. В работе О.А. Олейник, Г.А. Иосифьяна [18] изучался вопрос о поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка, удовлетворяющих на той части границы области, которая принадлежит некоторой окрестности бесконечности, однородным условиям Дирихле, либо условиям Неймана, либо условиям периодичности. Получены априорные оценки, характеризующие поведение таких решений в областях с некомпактной границей при $x \to +\infty$ в зависимости от геометрических свойств области и поведения функции f, стоящей в правой части уравнения, при $x \to +\infty$. В более поздних работах А.Ф. Тедеева, А.Е. Шишкова [20] и А.Е. Шишкова [21] установлены сен-венановские оценки для квазилинейных эллиптических уравнений второго и высокого порядков соответственно.

Отметим, что ранее вопрос о точности оценок сен-венановского типа практически не рассматривался. Исключение составляют работа [12], в которой точность утверждается для бигармонического уравнения в угле на плоскости, и работа [3], в которой доказана точность выделенных классов единственности решение задачи Дирихле для равномерно эллиптического уравнения второго порядка (точность в том смысле, что эти классы близки к максимально широким). В большинстве работ, посвященных установлению сен-венановских оценок для эллиптического уравнения, используется понятие емкости замкнутого множества $E \subset \mathbb{R}_n$ из работы [10] и его обобщения:

$$\lambda(Q,E) = \inf\left\{ \int\limits_Q |\nabla g|^2 dx \Big| g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n \backslash E), \ \int\limits_Q g^2\,dx = 1 \right\}.$$

Легко видеть, что число $\lambda(Q,E)$ является первым собственным значением оператора $-\triangle$ в области $Q\backslash E$ с граничным условием Дирихле на E и условием Неймана на оставшейся части границы. В работе В.М. Миклюкова [17] число $\lambda(Q,\partial Q)$ названо основной частотой множества Q и получены некоторые оценки снизу для этого числа.

Обычно при доказательстве сен-венановских оценок для эллиптического уравнения в области Ω используется емкость для пары $Q = S(t)$, $E = \partial\Omega$, где $S(t) = \{x \in \Omega \mid x_1 = t\}$ — какое-то сечение области Ω (не обязательно плоское.) В работе [3] показано, что в случае области с нерегулярным поведением границы оценки, базирующиеся на характеристике $\lambda(S(t),\partial Q)$, становятся заведомо неточными. Поэтому в работах [2], [3] предложена иная характеристика неограниченной области — λ-последовательность. В настоящей работе это понятие адаптируется на случай неравномерно эллиптического уравнения в неограниченной области, имеющей несколько ветвей.

Будем предполагать, что неограниченная область Ω имеет p ветвей, уходящих на бесконечность, и представлена в виде объединения $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^N$ последовательности вложенных $\Omega^N \subset \Omega^{N+1}$ ограниченных областей, удовлетворяющих следующим требованиям. Дополнения $\Omega_N^{N+1} = \Omega^{N+1} \setminus \overline{\Omega^N}$ распадаются на конечное число подобластей $\omega_i^N,\ i = 1, ..., p$: $\Omega_N^{N+1} = \bigcup\limits_{i=1}^{p} \omega_i^N$. Пересечение $(\partial\Omega^N) \bigcap \Omega$ распадается на конечное число гиперповерхностей $S_i^N,\ i = 1, ..., p$.

Определим векторы $t^N = (t_1^N, ..., t_p^N)$ и $\lambda^N = (\lambda_1^N, ..., \lambda_p^N)$ формулами $t_i^N = \operatorname{dist}(S_i^N, S_i^{N+1})$ и $\lambda_i^N = \lambda(\omega_i^N)$, где

$$\lambda(Q) = \inf \left\{ \int\limits_Q (s(x)|\nabla g|^2 + dg^2)\, dx \middle| g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n \backslash \Gamma_1),\ \int\limits_Q s(x) g^2\, dx = 1 \right\} \tag{4}$$

Будем предполагать, что существует число $\theta > 0$ такое, что при всех $N \geq 0$ выполняются неравенства

$$1 \leqslant \theta \lambda_i^N (t_i^N)^2, \quad i = 1, ..., p. \tag{5}$$

Отметим, что в случае, когда функция d оценивается снизу функцией s, т.е. $d \geq \delta s$, $\delta > 0$, $x \in \Omega$, условие (5) легко удовлетворить. В самом деле, поскольку $\lambda(Q) \geq \delta$, то достаточным для (5) является неравенство $1 \leqslant \theta\delta (t_i^N)^2, \quad i = 1, ..., p$, то есть сечения S_i^N следует выбирать "достаточно удаленными" друг от друга.

Описанное выше представление $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^N$ при выполнении неравенств (5) будем называть λ-разбиением области, соответствующим задаче (1), (3) (в дальнейшем просто λ-разбиением). Понятие λ-разбиения можно считать обобщением понятия λ-последовательности, введенного Л.М.Кожевниковой в [2] в случае $\Gamma_2 = \varnothing$ и $s \equiv 1$ для области, имеющей одну ветвь, уходящую на бесконечность "вдоль оси Ox_1", на случай многих ветвей, достаточно произвольным образом уходящих на бесконечность. В работе [2] области

$$\Omega^N = \{x \in \Omega \mid x_1 < z_N\},\ N = \overline{0, \infty} \tag{6}$$

определяются последовательностью чисел $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$. Приведено простое условие, необходимое и достаточное для существования последовательности чисел такой, что для разбиения $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^N$ выполнено требование (5) (в случае равномерно эллиптического уравнения без младших членов, т.е. $s \equiv 1$): для любого $r_1 > 0$ найдется $r_2 > r_1$ такое, что

$$\lambda(\Omega(r_2) \backslash \Omega(r_1)) > 0, \tag{7}$$

где $\Omega(r) = \{x \in \Omega \ \mid\ x_1 < r\}$. В §3 построены разбиения для вырождающегося уравнения.

Очевидно, что в рассматриваемых в работе вопросах единственности решения функцию $f(x)$ можно считать нулём.

Будем предполагать, что коэффициенты оператора L удовлетворяют неравенствам

$$|\mathbf{b} - \mathbf{c}|^2 \leq sd/2, \qquad |b_i| \leqslant A\sqrt{sd}, \qquad |c_i| \leqslant A\sqrt{sd}, \qquad x \in \Omega \tag{8}$$

где $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$; $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, A – постоянная. Потребуем, чтобы для вектора $\mathbf{c} = \{c_i\}$ при всех $N = 0, 1, ...$ и k таком, что $12\Gamma^2 k^2 \theta e^{2k} = 1$, были выполнены соотношения

$$\frac{\partial \operatorname{dist}(x, S_i^N)}{\partial \mathbf{c}} \leq \frac{k\Gamma^2 s}{t_i^N}, \quad x \in \omega_i^N, , \quad i = \overline{1, p}. \tag{9}$$

Это нужно, чтобы младшие члены уравнения (1) не сильно влияли на класс единственности решения задачи, определяемый старшими производными. В следующей теореме рассматривается обобщенное решение задачи (1), (3), определенное в § 1.

Теорема 1. *Пусть* $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^N$ *— некоторое* λ*-разбиение области* Ω. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют соотношениям* (8), (9). *Если решение* $u(x)$ *задачи* (1), (3) *удовлетворяет условию*

$$\lim_{N\to\infty} \exp(-2kN) \int\limits_{\Omega^N} (s|\nabla u|^2 + du^2)dx = 0, \tag{10}$$

то $u(x)$ *равно нулю тождественно.*

Рассмотрим область вращения

$$\Omega_f = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, x')\big|\ |x'| < f(x_1),\ x_1 > 0\} \tag{11}$$

с положительной функцией $f(x_1)$. Следуя [2], определим П-последовательность $\{z_N\}$ индуктивным равенством, начиная с произвольного $z_0 > 0$:

$$z_N = \sup\{t|\inf_{[z_{N-1},t)} f \geq t - z_{N-1}\},\ N = \overline{1, \infty}. \tag{12}$$

Ниже приводятся условия, при которых П-последовательность определяет λ-разбиение.

Будем предполагать существование постоянной w такой, что

$$\sup\{f(z)|z \in [t - f(t), t + f(t)]\} \leq wf(t),\ t \geq z_0. \tag{13}$$

Тогда (см. § 3) при некотором $c > 1$ справедливы оценки

$$\int\limits_{z_0}^{z_N} \frac{dt}{f(t)} \leq N \leq c \int\limits_{z_0}^{z_N} \frac{dt}{f(t)},\ N \geq 0. \tag{14}$$

Пусть множество Γ_1 распределено достаточно регулярно. А именно, предполагается существование положительных чисел D, δ и δ_1 таких, что при всех $b > a \geq D$, $b - a \geq \min\{f(a), f(b)\}/2$ выполнены неравенства

$$\operatorname{mes} Pr\Gamma_1 \cap [a, b] \geq \delta(b - a), \tag{15}$$

где "существенная" проекция $Pr\Gamma_1$ определяется равенством

$$Pr\Gamma_1 = \{t|\operatorname{mes}_{n-2}\Gamma_1 \cap \{x_1 = t\} \geq \delta_1 f^{n-2}(t)\}. \tag{16}$$

Тогда при $s(x) \equiv 1$ формула (6) определяет λ-разбиение области Ω_f (см. §3). Та же П-последовательность определяет λ-разбиение и в случае неравномерно эллиптического уравнения, если при некотором $C > 0$ выполнено условие локальной равномерности

$$s(x) \leqslant Cs(y), \quad x, y \in \Omega^1_{f,r},\ r > z_0, \tag{17}$$

где

$$\Omega^\alpha_{f,r} = \{(x_1, x')\big|\ \max(z_0, r - f(r)) < x_1 < r + f(r),\ |x'| < f(x_1)/\alpha\}.$$

Если же уравнение является вырождающимся, т.е. условие (17) не выполнено, мы требуем, чтобы всюду было граничное условие Дирихле, т.е. $\Gamma_1 = \partial\Omega$ и для простоты, ограничимся случаем $n = 2$. Функция $s(x)$ предполагается непрерывной в Ω_f, а по переменной x_2 — четной, непрерывно дифференцируемой и невозрастающей в интервалах $(0, f(x_1))$. Кроме того, предполагается существование числа $\nu \in (1, 2)$ такого, что

$$\frac{\partial}{\partial x_2}((f(x_1) - x_2)^{\nu-2} s(x_1, x_2)) \geq 0, \quad x \in \Omega^\infty_{z_0}, \quad x_2 > 0. \tag{18}$$

Если f — непрерывная функция, то условию (18) удовлетворяет, например, функция вида

$$s(x_1,x_2)=\beta(x_1)(f(x_1)+\varepsilon(x_1)-|x_2|)^{\mu},\quad \mu\in(0,1),$$

с непрерывными функциями $\beta(x_1)>0$, $\varepsilon(x_1)\geq 0$ и таким $\nu\in(1,2)$, что $\nu+\mu<2$. В частности, при $\varepsilon(x_1)\equiv 0$ получаем вырождающееся на границе области уравнение.

Отметим, что, с нашей точки зрения, значение показателя вырождения уравнения $\mu>1$ на границе области не допустимо. В самом деле, в работе В.П. Михайлова [14], (см. также [15], [16]) доказано, что необходимым и достаточным условием существования L_2-предела на границе решения $u(x)$ эллиптического уравнения является условие

$$\int\limits_Q |\nabla u(x)|^2 r(x)dx<\infty, \tag{19}$$

где $r(x)$ — расстояние от точки x до границы ∂Q. В том случае, когда $u(x)$ является решением вырождающегося на границе области Q эллиптического уравнения с показателем вырождения $\mu>1$, условие (19) может не выполняться. Это означает, что краевое условие Дирихле как бы теряется. В таком случае постановка краевой задачи (1), (3) теряет смысл. Более полно вопрос о принятии решением эллиптического уравнения краевого условия Дирихле был изучен в работах А.К. Гущина [5], [7], [8] на основе установленного свойства $C_{n-1}(\overline{Q})$ непрерывности (и других, более глубоких свойств) решения эллиптического уравнения. Но и при этих более общих подходах к определению решения задачи Дирихле условие (19) остается необходимым.

В § 3 доказано, что при выполнении условий (13), (18) П-последовательность определяет λ-разбиение.

Оценки (14) позволяют получить такое следствие из теоремы 1. Если решение исходной задачи (1), (3) удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to\infty}\exp(-2k\int\limits_{z_0}^{r}\frac{dt}{f(t)})\int\limits_{\Omega(r)} s|\nabla u|^2dx=0,$$

то $u(x)$ равно нулю тождественно.

В последнюю формулу зависимость от выбора λ-разбиения области входит только через постоянную k, которая определяется параметром θ. Легко видеть, что при больших θ постоянная k ведет себя как $C/\sqrt{\theta}$.

В области вращения Ω_f для задачи Дирихле

$$\operatorname{div}\,(s(x_1)\nabla u)=0 \tag{1*}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega_f}=0 \tag{3*}$$

построен следующий пример неединственности решения.

Теорема 2. *Пусть существует возрастающая последовательность положительных чисел $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям*

$$\frac{1}{\overline{\omega}}\leqslant\frac{z_{N+2}-z_{N+1}}{z_{N+1}-z_N}\leqslant\overline{\omega},\quad \overline{\omega}\geq 1,\quad N=\overline{0,\infty}; \tag{20}$$

$$\frac{1}{\omega_1}(z_{N+1}-z_N)\leqslant\inf\{f(x)|x\in[z_N,z_{N+1}]\}\leqslant\omega_1(z_{N+1}-z_N),\quad \omega_1\geq 1,\quad N=\overline{0,\infty}. \tag{21}$$

Пусть функция $s(x_1)$ удовлетворяет условию

$$s(x_1)\leqslant Cs(y_1),\quad x_1,y_1\in[r-f(r),r+f(r)],\ r>z_0. \tag{22}$$

Тогда в области вращения Ω_f существует неотрицательное ненулевое решение задачи (1∗), (3∗)*, подчиняющееся оценке*

$$u(x) \leqslant \exp(\kappa_* N), \quad x \in \Omega_f^{z_N}, \quad N \geq 1, \tag{23}$$

с положительной постоянной κ_*, зависящей только от n.

Таким образом, для неравномерно эллиптического уравнения второго порядка в дивергентной форме, в неограниченной области доказана точность класса единственности (10) в том смысле, что постоянная k в показателе экспоненты не может быть заменена на последовательность k_N , возрастающую к бесконечности.

2. Доказательство теоремы 1

На множестве функций $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ определим билинейную форму

$$(u,v)_{1,Q} = \int\limits_Q (duv + s\sum_{i,j=1}^n u_{x_i}v_{x_j})dx.$$

Через $\|v\|_{1,Q}$ будем обозначать полунорму, порождаемую этой билинейной формой. В случае, когда $Q = \Omega$, индекс Q опускаем. Пространство $\overset{\circ}{H}(\Omega;\Gamma_1)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}_n \setminus \Gamma_1)$ по норме $\|v\|_1$. Пространство $\overset{\circ}{H}_{lc}(\Omega;\Gamma_1)$ составим из функций u таких, что при каждом N найдется функция $v(x) \in \overset{\circ}{H}(\Omega;\Gamma_1)$ такая, что $u = v$ почти всюду в Ω^N.

Отметим, что из определения чисел λ_i^N следуют неравенства

$$\lambda_i^N \int\limits_{\omega_i^N} s(x)g^2dx \leqslant \int\limits_{\omega_i^N}(s(x)|\nabla g|^2 + dg^2)dx = \|g\|^2_{1,\omega_i^N}, \quad g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n\backslash\Gamma_1). \tag{24}$$

Обобщенным решением задачи (1), (3) при $f = 0$ будем называть функцию $u(x) \in \overset{\circ}{H}_{lc}(\Omega;\Gamma_1)$, удовлетворяющую интегральному тождеству:

$$\int\limits_\Omega [\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^n (c_i u v_{x_i} - b_i u_{x_i} v) + duv]dx = 0 \tag{25}$$

для любой функции $v(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n\backslash\Gamma_1)$.

Доказательство теоремы 1. Построим определенную в Ω липшицеву функцию $\xi(x)$, удовлетворяющую условиям $\xi(x) = 1$ при $x \in \Omega^\nu$, $\xi(x) = 0$ при $x \in \Omega\backslash\Omega^{N+1}$, $\xi(x) = \exp(-k(N-\nu))\ (1 - \min(1, \mathrm{dist}(S_i^N, x)/t_i^N))$ при $x \in \omega_i^N$, $\xi(x) = \exp(-k(q - \nu + \min(1, \mathrm{dist}(S_i^q, x)/t_i^q)))$ при $x \in \omega_i^q$, $q = \overline{\nu, N-1}$, $i = \overline{1,p}$.

Нетрудно установить следующие соотношения

$$|\nabla\xi| \leqslant \frac{\exp(-k(N-\nu))}{t_i^N}, \quad x \in \omega_i^N,\ i = \overline{1,p}; \tag{26}$$

$$|\nabla\xi| \leqslant \frac{k\xi}{t_i^q}, \quad x \in \omega_i^q,\ q = \overline{\nu, N-1},\ i = \overline{1,p}; \tag{27}$$

$$\max_{\Omega_q^{q+1}} \xi(x) = e^k \min_{\Omega_q^{q+1}} \xi(x), \quad q = \overline{\nu, N-1}; \quad \max_{\Omega_N^{N+1}} \xi(x) = \exp(-k(N-\nu)). \tag{28}$$

Подставим в (25) пробную функцию $v = u\xi^2$. Законность такой подстановки нетрудно обосновать, приближая функцию v последовательностью функций $v_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_1)$ и переходя к пределу при $m \to \infty$.

Поскольку $\xi = 0$ в $\Omega\backslash\Omega^{N+1}$, имеем

$$\int\limits_{\Omega^{N+1}} \left[\sum_{i,j=1}^{n} \xi^2 a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + d\ \xi^2 u^2\right] dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega^{N+1}} \left[\sum_{i,j=1}^{n} -2\xi u a_{ij} u_{x_i} \xi_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} \left(b_i \xi^2 u u_{x_i} - c_i u(\xi^2 u_{x_i} + 2u\xi\xi_{x_i})\right)\right] dx.$$

Заметив, что

$$\sum_{i,j=1}^{N} \left(b_i \xi^2 u u_{x_i} - c_i u(\xi^2 u_{x_i} + 2u\xi\xi_{x_i})\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\xi^2 u u_{x_i} (b_i - c_i) - 2u^2 \xi \xi_{x_i} c_i\right) \leq$$

$$\leq \xi^2 |u| |\mathbf{b} - \mathbf{c}| |\nabla u| - 2u^2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{c}},$$

нетрудно получить неравенство

$$\int\limits_{\Omega^{N+1}} \left[\xi^2 s |\nabla u|^2 + d\ \xi^2 u^2\right] dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega^{N+1}} \left[2\Gamma s \xi |\nabla \xi| |u \nabla u| + \xi^2 \left(\frac{s|\nabla u|^2}{4} + \frac{|\mathbf{b} - \mathbf{c}|^2 u^2}{s}\right) - 2u^2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{c}}\right] dx$$

Условия (8) позволяют записать неравенство

$$\frac{\xi^2 |\mathbf{b} - \mathbf{c}|^2 u^2}{s} \leqslant \frac{\xi^2 s d u^2}{2s} = \frac{d \xi^2 u^2}{2},$$

с помощью которого устанавливаем, что

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega^{N+1}} \left[s \xi^2 |\nabla u|^2 + d\ \xi^2 u^2\right] dx \leqslant \int\limits_{\Omega^{N+1}} \left[4\Gamma^2 s u^2 |\nabla \xi|^2 - 2u^2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{c}}\right] dx.$$

При $x \in \omega_i^q$, $q = \overline{\nu, N-1}$ имеем:

$$-\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{c}} = k\xi \frac{\partial dist(x, S_i^q)/t_i^q}{\partial \mathbf{c}} \leq \xi \left(\frac{1}{t_i^q}\right)^2 k^2 \Gamma^2 s.$$

Теперь воспользуемся соотношениями (9), (26), (27), (28), учитывая то, что при $j = \overline{0, \nu - 1}$ $\quad \nabla \xi = 0$:

$$\int\limits_{\Omega^{N+1}} \left[s \xi^2 |\nabla u|^2 + d\ \xi^2 u^2\right] dx \leqslant \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{\omega_i^N} \exp\left(-2k(N - \nu)\right) \Gamma^2 s u^2 \frac{8 + 4k}{(t_i^N)^2} dx +$$

$$+ \sum_{j=\nu}^{N-1} \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{\omega_i^j} \Gamma^2 s \xi^2 u^2 \frac{12k^2}{(t_i^j)^2} dx. \tag{29}$$

Из неравенства (24) и условия (5) следует оценка

$$\int\limits_{\omega_i^j} s \frac{u^2}{\left(t_i^j\right)^2} \leq \theta \lambda_i^j \int\limits_{\omega_i^j} s u^2 dx \leq \theta \int\limits_{\omega_i^q} \left(s |\nabla u|^2 + d u^2\right) dx.$$

Применяя (28), заключаем, что

$$(8+4k)\exp(-2k(N-\nu))\Gamma^2\sum_{i=1}^{p}\int\limits_{\omega_i^N}\frac{su^2}{\left(t_i^N\right)^2}dx+12k^2\Gamma^2\sum_{j=\nu}^{N-1}\sum_{i=1}^{p}\int\limits_{\omega_i^j}\xi^2\frac{su^2}{\left(t_i^j\right)^2}dx\leq$$

$$\leq(8+4k)\exp(-2k(N-\nu))\Gamma^2\theta\int\limits_{\Omega_N^{N+1}}\left(s\left|\nabla u\right|^2+du^2\right)dx+$$

$$+12k^2\Gamma^2\theta\exp(2k)\int\limits_{\Omega_\nu^N}\xi^2\left(s\left|\nabla u\right|^2+du^2\right)dx.$$

Поскольку $\xi=1$ в Ω^ν, благодаря выбору k, из (29) устанавливаем соотношение

$$\int\limits_{\Omega^\nu}(s|\nabla u|^2+d\,u^2)dx\leq C_0e^{-2k(N-\nu)}\int\limits_{\Omega_N^{N+1}}(s|\nabla u|^2+d\,u^2)dx.$$

Перейдем к пределу в правой части при $N\to\infty$. Учитывая (10), получим:

$$\int\limits_{\Omega^\nu}(s|\nabla u|^2+d\,u^2)dx=0$$

для любого ν. Из этого следует, что $u=0$ в Ω. Теорема доказана.

3. Существование λ-разбиения

Пусть Ω_f — область вращения и $\{z_N\}$ — П-последовательность. Мы покажем, что формула (6) определяет разбиение области сначала для равномерно эллиптического уравнения с краевыми условиями разных типов, а затем для уравнения, вырождающегося на границе области, в случае краевого условия Дирихле.

Оценим колебание функции f на отрезке $[z_N,z_{N+1}]$. Пусть t_N — точка минимума функции $f(t)$ на отрезке $[z_N,z_{N+1}]$. Существование точки минимума следует из замкнутости надграфика функции f. Очевидно из определения (12) последовательности $\{z_N\}$, что

$$f(t_N)\leq z_{N+1}-z_N, \tag{30}$$

при этом неравенство возможно лишь при $t_N=z_{N+1}$. Покажем, что

$$z_{N+1}-z_N\leq f(t)\leq w^2f(t_N),\ t\in[z_N,z_{N+1}). \tag{31}$$

Левое неравенство сразу следует из (12). Пусть $t_*\in(z_N,z_{N+1})$ — точка из малой окрестности точки t_N. Из (13) легко следует существование такого $\varepsilon_N>0$, что выполнено неравенство

$$f(t)\leq wf(t_*),\ t\in[z_N-\varepsilon_N,z_{N+1}+\varepsilon_N]. \tag{32}$$

Очевидно также, что $f(t_*)\leq wf(t_N)$. Неравенства (14) при $c=\omega^2$ являются простым следствием (30),(31).

Покажем еще, что для П-последовательности выполнено условие (20) с $\overline{\omega}=\omega^2$. При помощи (30),(31),(32) установим неравенства

$$\frac{z_{N+1}-z_N}{z_N-z_{N-1}}\geq\frac{f(t_N)}{f(z_N-\varepsilon_N)}\geq\frac{1}{\omega^2},$$

$$\frac{z_{N+1}-z_N}{z_N-z_{N-1}}\leqslant\frac{f(z_N+\varepsilon_{N-1})}{f(t_{N-1})}\leqslant\omega^2,$$

доказывающие (20).

Установим ещё два вспомогательных неравенства.

Пусть $E \subset [a,b]$ — измеримое подмножество и $v \in C^1[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b v^2(t)dt \le \frac{2(b-a)}{\operatorname{mes} E}\int\limits_E v^2(t)dt + 4(b-a)^2\int\limits_a^b v'^2(t)dt. \tag{33}$$

Действительно, из формулы Ньютона-Лейбница легко следует, что

$$v^2(t) - v^2(s) \le \int\limits_a^b 2|vv'|d\tau.$$

Проинтегрируем это сначала по $s \in E$, затем по $t \in [a,b]$. Получим

$$\operatorname{mes} E\int\limits_a^b v^2(t)dt \le (b-a)\int\limits_E v^2(s)ds + (b-a)\operatorname{mes} E\int\limits_a^b 2|vv'|ds.$$

Применив неравенство $2|vv'| \le \frac{v^2}{2(b-a)} + 2v'^2(b-a)$, выводим (33).

Следующее неравенство для шара B_ρ и его измеримого подмножества E является многомерным аналогом (33) для функции $v \in C^1(\overline{B_\rho})$:

$$\int\limits_{B_\rho} v^2(x)dx \le \frac{\operatorname{mes} B_\rho}{\operatorname{mes} E}\int\limits_E v^2(x)dx + C(n)\rho^2\frac{\operatorname{mes}^2 B_\rho}{\operatorname{mes}^2 E}\int\limits_{B_\rho}|\nabla v|^2dx. \tag{34}$$

Для доказательства при произвольных $x, y \in B_\rho$ запишем соотношение

$$u(y) - u(x) = \int\limits_0^{|x-y|}\frac{\partial u(x+r\omega)}{\partial r}dr,\ \omega = \frac{y-x}{|y-x|},$$

где (r,ω) — сферические координаты с центром в точке x. Обозначив через $\chi(r,\omega)$ характеристическую функцию шара B_ρ, запишем неравенство

$$|u(x)| \le |u(y)| + \int\limits_0^{2\rho}\chi|\nabla u(x+r\omega)|dr.$$

Проинтегрируем его по $y \in E$

$$|u(x)|\operatorname{mes} E \le \int\limits_E |u(y)|dy + \int\limits_E dy\int\limits_0^{2\rho}\chi|\nabla u(x+r\omega)|dr$$

и оценим сверху правую часть следующим образом:

$$\int\limits_E dy\int\limits_0^{2\rho}\chi|\nabla u(x+r\omega)|dr \le \int\limits_0^{2\rho}\tau^{n-1}d\tau\int\limits_{S_1}d\omega\int\limits_0^{2\rho}\chi|\nabla u(x+r\omega)|dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\rho}\tau^{n-1}d\tau\int\limits_{B_\rho}\frac{|\nabla u(\xi)|d\xi}{r^{n-1}} = \frac{(2\rho)^n}{n}\int\limits_{B_\rho}\frac{|\nabla u(\xi)|d\xi}{|x-\xi|^{n-1}}.$$

Получившееся неравенство

$$|u(x)|\operatorname{mes} E \le \int\limits_E |u(y)|dy + \frac{(2\rho)^n}{n}\int\limits_{B_\rho}\frac{|\nabla u(\xi)|d\xi}{|x-\xi|^{n-1}}$$

проинтегрируем по $x \in B_\rho$:

$$\operatorname{mes} E \int\limits_{B_\rho} |u(x)|dx \le \operatorname{mes} B_\rho \int\limits_{E} |u(y)|dy + \frac{(2\rho)^n}{n} \int\limits_{B_\rho} |\nabla u(\xi)|d\xi \int\limits_{B_\rho} \frac{dx}{|x-\xi|^{n-1}}.$$

Очевидно, что

$$(2\rho)^n \int\limits_{B_\rho} \frac{dx}{|x-\xi|^{n-1}} \le 2\rho \operatorname{mes} B_{2\rho}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{B_\rho} |u(x)|dx \le \frac{\operatorname{mes} B_\rho}{\operatorname{mes} E} \left(\int\limits_{E} |u(y)|dy + \frac{(2\rho)^n}{n} \rho \int\limits_{B_\rho} |\nabla u(\xi)|d\xi \right).$$

Положив теперь $u = v^2$ и применив неравенство $|\nabla u| = 2|v\nabla v| \le \varepsilon v^2 + \varepsilon^{-1}|\nabla v|^2$, получим (34).

Перейдем к оценке величины λ_1^N снизу. Покажем сначала, что для множеств $Pr(N) = Pr\Gamma_1 \cap [z_N, z_{N+1}]$ справедливы неравенства

$$\operatorname{mes} Pr(N) \ge \delta(z_{N+1} - z_N)/2,\ \ N = \overline{0, \infty}. \tag{35}$$

Пусть, для определенности, $t_N < (z_{N+1} + z_N)/2$. Тогда $z_{N+1} - t_N \ge (z_{N+1} - z_N)/2 \ge f(t_N)/2$. Поэтому из (15) следует неравенство

$$\operatorname{mes}\, [t_N, z_{N+1}] \cap Pr\Gamma_1 \ge \delta(z_{N+1} - t_N),$$

доказывающее (35). При $t_N \ge (z_{N+1} + z_N)/2$ (35) устанавливается аналогично.

Возьмем произвольное $t \in Pr(N)$. Запишем следующее неравенство в цилиндрических координатах для функции $v \in C_0^\infty(R^n \backslash \Gamma_1)$

$$\int\limits_0^{f(t)} r^{n-2} v^2(t,r,\omega)dr \le \lambda^{-1} f^2(t) \int\limits_0^{f(t)} r^{n-2} v_r^2(t,r,\omega)dr. \tag{36}$$

Здесь ω — такая "угловая" координата, что $(t, f(t), \omega) \in \Gamma_1$. Множество таких ω обозначим через E_t^0. Очевидно, что в качестве λ можно взять первое собственное значение оператора Лапласа в единичном шаре размерности $n-1$ с условием Дирихле на границе. Через E_t обозначим следующее множество

$$E_t = \{(t,r,\omega) | 0 < r < f(t),\ \omega \in E_t^0\}.$$

Положим также $S_t = \{(t,x')|\ |x'| < f(t)\}$. Интегрируя (36) по $\omega \in E_t^0$, устанавливаем неравенство

$$\int\limits_{E_t} v^2(t,x')dx' \le \lambda^{-1} f^2(t) \int\limits_{E_t} v_r^2(t,x')dx'. \tag{37}$$

Пользуясь (16), находим, что $\frac{\operatorname{mes} S_t}{\operatorname{mes} E_t} \le \frac{\sigma_{n-2}}{\delta_1}$, где σ_{n-2} — площадь единичной сферы. Неравенство (34) для S_t и E_t запишется в виде

$$\int\limits_{S_t} v^2(t,x')dx' \le 2\frac{\sigma_{n-2}}{\delta_1} \int\limits_{E_t} v^2(t,x')dx' + C(n) f^2(t) \frac{\sigma_{n-2}^2}{\delta_1^2} \int\limits_{S_t} |\nabla v(t,x')|^2 dx'$$

Соединяя это с (37), устанавливаем, что

$$\int\limits_{S_t} v^2(t,x')dx' \le f^2(t) \frac{C_1(n)}{\delta_1^2} \int\limits_{S_t} |\nabla v(t,x')|^2 dx'. \tag{38}$$

Запишем теперь неравенство (33) в виде

$$\int\limits_{z_N}^{z_{N+1}} v^2(t,x')dt \le \frac{2(z_{N+1}-z_N)}{\operatorname{mes} Pr(N)} \int\limits_{Pr(N)} v^2(t,x')dt + 4(z_{N+1}-z_N)^2 \int\limits_{z_N}^{z_{N+1}} v_t^2(t,x')dt.$$

Интегрируя последнее по $x' \in B(N) = \{|x'| < f(t_N)\}$, учитывая (35) и применяя (38),(31), нетрудно установить, что

$$\int\limits_{[z_N,z_{N+1}]\times B(N)} v^2(x)dx \le \frac{C_1(n)w^4 f^2(t_N)}{\delta\delta_1^2} \int\limits_{\omega_1^N} |\nabla v|^2 dx + 4(z_{N+1}-z_N)^2 \int\limits_{\omega_1^N} v_t^2 dx. \qquad (39)$$

Применим неравенство (34) на этот раз для S_t и $\widetilde{E_t} = \{(t,x') \in S_t | x' \in B(N)\}$ и учтем (31):

$$\int\limits_{S_t} v^2(t,x')dx' \le F \int\limits_{\widetilde{E_t}} v^2(t,x')dx' + C(n)F^2 w^4 f^2(t_N) \int\limits_{S_t} |\nabla v(t,x')|^2 dx'.$$

Здесь в качестве F можно взять $F = w^{2n-2}$. После интегрирования по t и применения неравенства (39) будем иметь

$$\int\limits_{\omega_1^N} v^2 dx \le \left(C_1(n) f^2(t_N) w^4 (\frac{F}{\delta\delta_1^2} + F^2) + 4(z_{N+1}-z_N)^2 \right) \int\limits_{\omega_1^N} |\nabla v|^2 dx.$$

Ввиду неравенства (30) отсюда следует оценка

$$1 \le \theta (z_{N+1}-z_N)^2 \lambda_1^N.$$

Поскольку очевидно, что $z_{N+1}-z_N = \operatorname{dist}(S^N, S^{N+1})$, то последнее неравенство доказывает, что Ω^N действительно является λ-разбиением при $s=1$. Заметим, что из (31) следует включение $[z_N, z_{N+1}] \subset [z_N, z_N + f(z_N)]$, поэтому Ω^N останется λ-разбиением и при s, удовлетворяющем условию (17).

Покажем теперь, что П-последовательность определяет λ-разбиение в случае вырождающегося уравнения с краевым условием Дирихле. Установим некоторые оценки, аналогичные неравенству Харди-Литтльвуда [22].

Лемма 2. Пусть функция $C(x) \in C^1[0,h]$ невозрастающая и неотрицательная, $\nu > 1$. Тогда для любой функции $g \in C_0^\infty(0,h]$ справедливо неравенство:

$$\int\limits_0^h C(x)x^{-\nu}g^2(x)dx \leqslant \left(\frac{2}{\nu-1}\right)^2 \int\limits_0^h C(x)x^{-\nu}(xg')^2 dx. \qquad (40)$$

Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$Cx^{1-\nu}g^2\Big|_0^h = \int\limits_0^h C'x^{1-\nu}g^2dx + 2\int\limits_0^h Cx^{1-\nu}gg'(x)dx + (1-\nu)\int\limits_0^h Cx^{-\nu}g^2(x)dx$$

Учитывая, что $C(h) \ge 0$, $C'(x) \leqslant 0$, можем записать неравенство

$$0 \leqslant 2\int\limits_0^h Cx^{1-\nu}gg'(x)dx + (1-\nu)\int\limits_0^h Cx^{-\nu}g^2(x)dx.$$

Применяя неравенство $2ab \leqslant \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon$, $\varepsilon = (\nu-1)/2$, перепишем это в виде

$$(\nu-1)\int\limits_0^h Cx^{-\nu}g^2(x)dx \leqslant \frac{\nu-1}{2}\int\limits_0^h Cx^{-\nu}g^2(x)dx + \frac{2}{\nu-1}\int\limits_0^h Cx^{-\nu}(xg')^2dx,$$

откуда и следует (40).

Теорема 3. *Пусть для неубывающей функции* $q(x) \in C^1[0,h]$ *существует число* $\nu \in (1;2)$ *такое, что* $(x^{\nu-2}q(x))' \leqslant 0$. *Тогда для* $g \in C_0^\infty(0,h]$ *справедливо неравенство:*

$$\int\limits_0^h g^2(t)qdt \leqslant \alpha h^2 \int\limits_0^h (g'(x))^2 qdx, \tag{41}$$

где $\alpha = \left(\frac{4\nu^2-12\nu+10}{(\nu-1)^2}\right)$.

Доказательство. Возведя равенство $\sqrt{q}g(t) = \int\limits_0^t (\frac{q'}{2\sqrt{q}}g(x) + \sqrt{q}g'(x))dx$ в квадрат, нетрудно получить, что

$$qg^2(t) \leqslant \left(\int\limits_0^t \frac{q'^2}{2q}g^2(x)dx + 2\int\limits_0^t qg'^2(x))dx\right)h.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по $t \in [0,h]$

$$\int\limits_0^h qg^2(t)dt \leqslant h^2\left(\int\limits_0^h \frac{q'^2}{2q}g^2(x)dx + 2\int\limits_0^h qg'^2(x))dx\right). \tag{42}$$

Из условия теоремы имеем: $x^{\nu-2}q' + (\nu-2)qx^{\nu-3} \leqslant 0$ или $q' \leqslant \dfrac{(2-\nu)q}{x}$. Отсюда следует, что $\dfrac{q'^2}{2q} \leqslant \dfrac{(2-\nu)^2q}{2x^2}$. Положим $C(x) = \dfrac{(2-\nu)^2qx^{\nu-2}}{2}$. Из условия теоремы находим, что $C(x)$ невозрастающая.

Оценим второй интеграл неравенства (42), применив (40)

$$\int\limits_0^h \frac{q'^2}{2q}g^2(x)dx \leqslant \int\limits_0^h C(x)x^{-\nu}g^2(x)dx \leqslant \left(\frac{2}{\nu-1}\right)^2\int\limits_0^h C(x)x^{-\nu}(xg')^2dx = \frac{2(2-\nu)^2}{(\nu-1)^2}\int\limits_0^h q(x)g'^2dx.$$

Тогда неравенство (42) примет вид:

$$\int\limits_0^h qg^2(t)dt \leqslant h^2\left(\frac{2(2-\nu)^2}{(\nu-1)^2}\int\limits_0^h q(x)g'^2dx + 2\int\limits_0^h qg'^2(x))dx\right).$$

Последнее совпадает с (41).

Пусть z_N — построенная выше последовательность и выполнено условие (18). Тогда при каждом $x_1 \geq z_0$ для функций $g(x_2) \in C_0^\infty[0, f(x_1))$ справедливо неравенство (41) в виде

$$\int\limits_0^{f(x_1)} s(x_1,x_2)g^2(x_2)dx_2 \leqslant \alpha f^2(x_1)\int\limits_0^{f(x_1)} s(x_1,x_2)g'^2(x_2)dx_2. \tag{43}$$

Используя это, можем записать оценки для $g(x) \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_{\omega^N} s(x)g^2(x)dx = \int\limits_{z_N}^{z_{N+1}} dx_1 \int\limits_{-f(x_1)}^{f(x_1)} s(x)g^2(x)dx_2 \leqslant \int\limits_{z_N}^{z_{N+1}} \alpha f^2(x_1)dx_1 \int\limits_{-f(x_1)}^{f(x_1)} s(x)g^2_{x_2}(x)dx_2 \leqslant$$

$$\leqslant \alpha M^2 \int\limits_{\omega^N} s(x)g^2_{x_2}(x)dx,$$

где $M = \max\limits_{[z_N;z_{N+1}]} f(x)$. Отсюда следует соотношение $\lambda_1^N \geq \frac{1}{\alpha M^2}$. Выбирая $\theta = \alpha\omega^2$, с помощью (30) и (31) получаем $\theta\lambda_1^N(z_{N+1}-z_N)^2 \geq 1$, т.е. формула (6) определяет λ-разбиение.

4. Доказательство теоремы 2

Доказательство теоремы 2 основано на неравенстве Гарнака (см., например, [4]) для равномерно эллиптического уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} = 0.$$

В нашем случае равномерную эллиптичность уравнения (1*) в области $\Omega^2_{f,r}$ при любом $r > z_0$ обеспечивает условие (22).

Сформулируем неравенство Гарнака в удобном для нас виде: для неотрицательного решения $u(x)$ уравнения (1*) в замкнутом шаре $B(2\rho, \mathrm{w}) \subset \Omega^2_{f,r}$ с центром в точке $\mathrm{w} \in \mathbb{R}_n$ справедливо неравенство

$$\max_{B(\rho,\mathrm{w})} u(x) \leqslant \overline{H} \min_{B(\rho,\mathrm{w})} u(x), \tag{44}$$

в котором постоянная $\overline{H} \geq 1$ зависит лишь от C, Γ, n.

Лемма. *Пусть*

$$Q = \{(x_1, x') \in \mathbb{R}_{n+1} \mid 0 < x_1 < 1,\ |\, x' \,| < \delta\}, \quad \widehat{Q} = Q \cup B(2\rho; (0, \mathbf{0})) \cup B(2\rho; (1, \mathbf{0})),\ \ \rho = \frac{\delta}{2\overline{\omega}}$$

где $\delta = \omega_1^{-1}$. Тогда существует $\widehat{H} > 0$ такое, что неотрицательное в $\widehat{Q}$ решение $u(x_1, x')$ уравнения $(1*)$ удовлетворяет неравенству

$$u(1, \mathbf{0}) \leqslant \widehat{H}u(0, \mathbf{0}). \tag{45}$$

Доказательство. Поскольку шар $B(2\rho; (0, \mathbf{0})) \subset \widehat{Q}$, то, согласно неравенству (44), имеем

$$u(\rho, \mathbf{0}) \leqslant \max_{B(\rho;(0,\mathbf{0}))} u(x) \leqslant \overline{H} \min_{B(\rho;(0,\mathbf{0}))} u(x) \leqslant \overline{H}u(0, \mathbf{0}). \tag{46}$$

Далее построим последовательность касающихся шаров $B(\rho_i, \overline{\mathbf{w}}_i)$, первым и последним из которых являются, соответственно, шары $B(\rho; (0, \mathbf{0}))$ и $B(\rho; (1, \mathbf{0}))$. Затем запишем неравенства, аналогичные (46). При этом радиусы шаров надо выбирать достаточно малыми, чтобы $B(2\rho_i, \overline{\mathbf{w}}_i) \subset \widehat{Q}$.

Доказательство теоремы 2. Обобщенным решением задачи $(1*)$, $(3*)$ назовем функцию $u(x) \in \overset{\circ}{H}_{\mathrm{lc}}(\Omega_f)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_f} s(x_1)\nabla u \nabla v dx = 0 \tag{47}$$

для любой функции $v(x) \in C_0^\infty(\Omega)$.

При каждом натуральном K в области $\Omega_f^{z_K}$ рассмотрим задачу (1∗), (3∗) с граничным условием

$$u\Big|_{z=z_K} = A_K\zeta(|\ x'\ |) = \phi(x'). \tag{48}$$

Здесь $\zeta(t) \in C_0^\infty(-f(z_K), f(z_K))$ — четная неотрицательная функция типа шапочки. Постоянная A_K подбирается так, чтобы

$$u(z_0, \mathbf{0}) = 1. \tag{49}$$

Обобщенным решением задачи (1∗), (3∗), (48) в $\Omega_f^{z_K}$ назовем функцию $u_K(x) \in \overset{\circ}{H}(\Omega_f)$, удовлетворяющую интегральному тождеству (47) для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega_f^{z_K})$ и граничному условию (48). Для любого натурального $K \geq 1$ обобщенное решение задачи (1∗), (3∗), (48) существует и единственно. Доказательство проводится обычными методами (см. например [13]).

Далее покажем, что существует функция $u \in \overset{\circ}{H}_{\mathrm{lc}}(\Omega_f)$ такая, что $(s(x_1)\nabla(u_K - u), \nabla v)_{\Omega_f} \to 0$ при $K \to \infty$; здесь $v \in C_0^\infty(\Omega_f)$ — произвольная функция. Для каждого $K \geq 1$ найдем числа μ_K^1:

$$\|\mu_K^1 \nabla u_K\|_{\Omega_f^{z_1}} = 1.$$

Выберем подпоследовательность u_{K_i} такую, что $\mu_{K_i}^1 u_{K_i} \rightharpoonup v^1$ в $H(\Omega_f^{z_1})$. При этом предельная функция v^1 может быть продолжена до некоторой функции из пространства $\overset{\circ}{H}(\Omega_f)$. Тогда, ввиду (24) $\mu_{K_i}^1 u_{K_i} \rightharpoonup v^1$ в $L_{2,loc}(\Omega_f^{z_1})$ и согласно теореме о среднем, устанавливаем поточечную сходимость этой последовательности, в частности в точке $(z_0, \mathbf{0})$: $\mu_{K_i}^1 u_{K_i}(z_0, \mathbf{0}) \to v^1(z_0, \mathbf{0}) = \mu^1$. Ввиду (49) имеем: $\mu_{K_i}^1 \to \mu^1$ при $i \to \infty$, следовательно $u_{K_i} \rightharpoonup v^1/\mu^1$ в $H(\Omega_f^{z_1})$ и $v^1 \in \overset{\circ}{H}(\Omega_f)$. Подпоследовательность u_{K_i} переобозначим через u_K^1.

Затем числа μ_K^2 выберем так, чтобы выполнялись равенства:

$$\|\mu_K^2 \nabla u_K^1\|_{\Omega_f^{z_2}} = 1.$$

Из последовательности u_K^1 выберем подпоследовательность $u_{K_i}^1$ (переобозначим ее через u_K^2), такую, что $\mu_K^2 u_K^2 \rightharpoonup v^2$ в $H(\Omega_f^{z_2})$. Повторяя предыдущие рассуждения установим, что $u_K^2 \rightharpoonup v^2/\mu^2$ в $H(\Omega_f^{z_2})$, $v^2 \in \overset{\circ}{H}(\Omega_f)$. Ввиду единственности предела имеем: $v^1/\mu^1 = v^2/\mu^2$ в $\Omega_f^{z_1}$. Продолжая это построение, выберем диагональную подпоследовательность u_K^K такую, что $u_K^K \rightharpoonup u$ при $K \to \infty$ в $H(\Omega_f^{z_N})$ при каждом фиксированном N, $N \geq 1$. Согласно (24) $u_K^K \rightharpoonup u$ при $K \to \infty$ в $L_{2,loc}(\Omega_f^{z_N})$, при каждом фиксированном N, $N \geq 1$, откуда, используя теорему о среднем, несложно установить поточечную сходимость $u_K^K(x) \to u(x)$ при $K \to \infty$ для $x \in \Omega_f$. Предельная функция $u(x) \in \overset{\circ}{H}_{\mathrm{lc}}(\Omega_f)$.

Покажем, что $u(x)$ является обобщенным решением задачи (1∗), (3∗). По определению обобщенного решения задачи (1∗), (3∗), (48) при каждом $N \geq 1$ для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega_f^{z_N})$ справедливо интегральное тождество (47)

$$\int\limits_{\Omega_f} s(x_1)\nabla u_K^K \nabla v dx = 0, \quad K \geq N.$$

Перейдя в нем к пределу при $K \to \infty$, получим (47) для предельной функции $u(x) \in \overset{\circ}{H}_{\mathrm{lc}}(\Omega_f)$.

Из строгого принципа максимума следует, что $u_K(x) > 0$ в $\Omega_f^{z_K}$, поэтому $u(x) \geq 0$ в Ω_f. Для областей вращения Ω_f вида (11) докажем, что функция $u_K(x)$ в каждом сечении

$\gamma_z(f) = \Omega_f \bigcap \{x_1 = z\}$ достигает своего максимума в центре сечения:

$$\max_{x' \in \gamma_z(f)} u_K(z, x') = u_K(z, \mathbf{0}), \quad d < z < z_K. \tag{50}$$

Отметим, что из единственности решения задачи Дирихле следует осесимметричность функции $u_K(x_1, x')$. Действительно, в противном случае, повернув график функции u_K на ненулевой угол вокруг оси Ox мы получили бы новое решение задачи Дирихле. Таким образом, в цилиндрических координатах функция $u_K(x_1, r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$s(x_1)\left(u_{Kx_1x_1} + u_{Krr} + \frac{n-1}{r} u_{Kr}\right) + s_{x_1} u_{Kx_1} = 0$$

в точках криволинейной трапеции $\Gamma_{f}{}_d^{z_K}$. Поделим обе части последнего уравнения на $s(x_1)$ и обозначим $\frac{s_{x_1}}{s} = h(x_1)$. Продифференцировав после этого по r получаем

$$u_{Krx_1x_1} + u_{Krrr} + \frac{n-1}{r} u_{Krr} + h u_{Krx_1} = \frac{n-1}{r^2} u_{Kr}. \tag{51}$$

Ввиду четности по аргументу r функция $u_{Kr}(x_1, r)$ на оси Ox равна нулю. По выбору функции $\zeta(t)$ имеем неравенство $u_{Kr}(z_K, r) \leqslant 0$. Предположим сначала, что $f(x_1) \in C^2(d, \infty)$, тогда на $\partial\Omega_f$ определены значения производной u_{Kr}. Поскольку функция u_K положительна внутри области, то u_{Kr} на границе $\{(x_1, r) \in \mathbb{R}_2 \bigm| d < x_1 < z_K,\ r = f(x_1)\}$ неположительна. Если u_{Kr} достигает максимума внутри $\Gamma_{f}{}_d^{z_K}$, то этот максимум положителен и из уравнения (51) в точке максимума получаем $u_{Krx_1x_1} + u_{Krrr} > 0$, что невозможно. Следовательно, функция u_{Kr} неположительна всюду. Тогда функция u_K в каждом сечении $\gamma_z(f),\ d < z < z_K$ достигает своего максимума в центре сечения. В случае области $\Omega_f^{z_K}$ с негладкой функцией $f(x_1)$ следует приблизить ее изнутри последовательностью гладких областей, сходящейся к $\Omega_f^{z_K}$, и перейти к поточечному пределу решений в этих областях, сохраняющему монотонность по r предельной функции.

Докажем неравенство (23). Ввиду неравенств (20), (21) имеем включения

$$(z_j, \mathbf{0}) + (z_{j+1} - z_j)\widehat{Q} \subset \Omega_f, \quad j = \overline{0, \infty} \tag{52}$$

где левую часть следует понимать как гомотетию и параллельный перенос, примененные к $\widehat{Q}$. По лемме 5 для пар $(z_j, \mathbf{0}),\ (z_{j+1}, \mathbf{0}),\ j = \overline{0, \infty}$, справедливы неравенства

$$u_K(z_{j+1}, \mathbf{0}) \leqslant \widehat{H} u_K(z_j, \mathbf{0}). \tag{53}$$

При $j = 0$ включение (52) может не выполняться, но тем не менее точка $(z_0, \mathbf{0})$ является внутренней для области Ω_f, поэтому неравенство (53) будет также справедливым и при $j = 0$, возможно с другой постоянной $\widehat{H}$. Применяя неравенство (53) N раз, выводим соотношения

$$u_K(z_N, \mathbf{0}) \leqslant \widehat{H}^N u_K(z_0, \mathbf{0}), \quad N \geq 1. \tag{54}$$

Согласно строгому принципу максимума и (50), при любом $N \geq 1$ для любой точки $x \in \Omega_f^{z_N}$ при всех $K \geq N$ выводим неравенства

$$u_K(x) \leqslant \max_{\partial\Omega_f^{z_N}} u_K(x) = \max_{\gamma_{z_N}(f)} u_K(x, \mathbf{y}) = u_K(z_N, \mathbf{0}).$$

Далее, применяя (54), (49), заключаем неравенства

$$u_K(x) \leqslant \widehat{H}^N, \quad x \in \Omega_f^{z_N}, \quad K \geq N,$$

из которых предельным переходом при $K \to \infty$ при фиксированном N получаем (23). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х. *Оценки скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения первой смешанной задачи для квазилинейной системы параболических уравнений второго порядка* // Матем. сб. Т. 191, № 2. 2000. С. 91–131.
2. Кожевникова Л.М. *Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения* // Матем. сб. Т. 196, № 7. 2005. С. 67–100.
3. Кожевникова Л.М. *Анизотропные классы единственности решения задачи Дирихле для квазиэллиптических уравнений* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 70, № 6. 2006. С 93–128.
4. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука. 1971. 512 с.
5. Гущин А.К. *О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка* // Матем. сб. Т. 137, № 1. 1988. С. 19–64.
6. Гущин А.К. *Некоторые свойства решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка* // Матем. сб. Т. 189, № 7. 1998. С. 53–90.
7. Гущин А.К. *О внутренней гладкости решений эллиптических уравнений второго порядка* // Сиб. матем. журн. Т. 46, № 5. 2005. С. 1036–1052.
8. Гущин А.К. *О гладкости решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с квадратично суммируемой граничной функцией* // ДАН СССР. Т. 415, № 1. 2007. С. 1–4.
9. Ландис Е.М. *О поведении решений эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях* // Тр. ММО. Т. 31. 1974. С. 35–58.
10. Кондратьев В.А. *О разрешимости первой краевой задачи для сильно эллиптических уравнений* // ДАН СССР. Т. 136, № 4. 1961. С. 771–774.
11. Кондратьев В.А., Эйдельман С.Д.*Положительные решения линейных уравнений с частными производными* // Тр. ММО. Т. 31. 1974. С. 85–146.
12. Кондратьев С.Д., Копачек Н., Леваншвим Д.М., Олейник О.А. *Неулучшаемые оценки в пространствах Гёльдера и точный принцип Сен-Венана для решения бигармонического уравнения* // Тр. МИАН СССР. Т. 166. 1984. С. 91–106.
13. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука. 1983. 424 с.
14. Михайлов В.П. *О граничных значениях решений эллиптических уравнений в областях с гладкой границей* // Матем. сб. Т. 101(143), № 2(10). 1976. С. 163–188.
15. Михайлов В.П. *О существовании граничного значения у бигармонических функций* // Матем. сб. Т. 195, № 12. 2004. С. 81–94.
16. Михайлов В.П. *О существовании граничного значения у полигармонической функции* // Сиб. матем. журн. Т. 46, № 5. 2005. С. 1125–1137.
17. Миклюков В.М. *Об асимпотических свойствах субрешений квазилинейных уравнений эллиптического типа и отображений с ограниченным искажением* // Матем. сб. Т. 111, № 1. 1980. С. 42–66.
18. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей* // Матем. сб. Т. 112, № 4. 1980. С. 588–610.
19. Олейник О.А., Радкевич Е.В. *Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена-Линделефа для общих эллиптических систем уравнений* // Матем. сб. Т. 95, № 1. 1974. С. 130–145.
20. Тедеев А.Ф., Шишков А.Е. *Поведение решений квазилинейных эллиптических уравнений в неограниченных областях* // ДАН УССР. Сер. А. Т. 9. 1984. С. 23–27.
21. Шишков А.Е. *Поведение решений задачи Дирихле для квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях* // Сиб. матем. журн. Т. 28, № 6. 1987. С. 134–146.
22. Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. *Неравенства.* М.: Издательство иностранной литературы. 1948. 456 с.

Айдар Ренатович Герфанов,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450025, г. Уфа, Россия
E-mail: ager4@yandex.ru

Фарит Хамзаевич Мукминов,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450025, г. Уфа, Россия
E-mail: mfkh@rambler.ru