ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 1 (2016). С. 3-14.

УДК 517.538.2 + 517.984.26 + 517.547

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГЛАВНЫХ ПОДМОДУЛЕЙ В МОДУЛЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА И ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Н.Ф. АБУЗЯРОВА

Аннотация. В работе рассматривается топологический модуль целых функций $\mathcal{P}(a;b)$ – изоморфный образ при преобразовании Фурье-Лапласа пространства Шварца распределений с компактными носителями в конечном или бесконечном интервале $(a;b)\subset\mathbb{R}$. Изучаются условия, при которых главный подмодуль модуля $\mathcal{P}(a;b)$ может быть однозначно восстановлен по нулям порождающей функции.

Ключевые слова: целые функции, субгармонические функции, преобразование Фурье-Лапласа, главные подмодули, локальное описание подмодулей, инвариантные подпространства, спектральный синтез.

Mathematics Subject Classification: 30D15, 30H99, 42A38, 47E05

1. Введение

Пусть $[a_1;b_1]\Subset[a_2;b_2]\Subset\ldots$ – последовательность отрезков, исчерпывающая конечный или бесконечный интервал $(a;b)$ вещественной прямой, P_k – банахово пространство, состоящее из всех целых функций φ, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_k=\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|\varphi(z)|}{(1+|z|)^k\exp(b_ky^+-a_ky^-)},\quad y^\pm=\max\{0,\pm y\},\quad z=x+\mathrm{i}y. \tag{1.1}$$

Обозначим через $\mathcal{P}(a;b)$ индуктивный предел последовательности $\{P_k\}$. В этом пространстве операция умножения на независимую переменную z непрерывна, поэтому $\mathcal{P}(a;b)$ – топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$. Каждое из вложений $P_k\subset P_{k+1}$ вполне непрерывно, следовательно, $\mathcal{P}(a;b)$ есть локально-выпуклое пространство типа (LN^*) (см. [1]). Известно (см., например, [2, гл. I, лек. 16, теоремы 1 и 2]), что всякий элемент пространства $\mathcal{P}(a;b)$ является функцией вполне регулярного роста при порядке 1, индикаторная диаграмма которой есть отрезок мнимой оси $[\mathrm{i}c_\varphi;\mathrm{i}d_\varphi]\subset(\mathrm{i}a;\mathrm{i}b)$.

В данной работе мы исследуем главные подмодули модуля $\mathcal{P}(a;b)$. Напомним, что *главным подмодулем $\mathcal{J}_\varphi$, порожденным функцией $\varphi\in\mathcal{P}(a;b)$*, называется замыкание в $\mathcal{P}(a;b)$ множества $\{p\varphi:\ \ p\in\mathbb{C}[z]\}$.

Для краткости всюду ниже, если не оговорено противное, будем пользоваться термином *«подмодуль»*, имея в виду замкнутый подмодуль.

Подмодули модуля $\mathcal{P}(a;b)$ состоят в двойственности с замкнутыми подпространствами пространства $C^\infty(a;b)$, инвариантными относительно оператора дифференцирования

N.F. Abuzyarova, Some properties of principal submodules in the module of entire functions of exponential type and polynomial growth on the real axis.

Работа выполнена при поддержке гранта 01201456408 Минобрнауки РФ.

Поступила 2 июня 2015 г.

(см. [3], [4]). А именно, преобразование Фурье-Лапласа $\mathcal{F}$, действующее в сильном сопряженном пространстве $(C^\infty(a;b))'$ по правилу

$$\mathcal{F}(S)(z) = (S, e^{-itz}), \quad S \in (C^\infty(a;b))',$$

есть линейный топологический изоморфизм пространств $(C^\infty(a;b))'$ и $\mathcal{P}(a;b)$ [5, теорема 7.3.1]. При этом между совокупностью $\{\mathcal{J}\}$ замкнутых подмодулей модуля $\mathcal{P}(a;b)$ и совокупностью $\{W\}$ замкнутых инвариантных относительно дифференцирования подпространств пространства $C^\infty(a;b)$ имеет место взаимно однозначное соответствие по правилу: $\mathcal{J} \longleftrightarrow W$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$, где замкнутое подпространство $W^0 \subset (C^\infty(a;b))'$ состоит из всех распределений $S \in (C^\infty(a;b))'$, аннулирующих W. Задача спектрального синтеза для замкнутых инвариантных относительно дифференцирования подпространств $W \subset C^\infty(a;b)$ была впервые рассмотрена в работе [6] (для случая произвольного интервала $(a;b) \subset \mathbb{R}$). Эта задача двойственна задаче о (слабой) локализуемости подмодулей в $\mathcal{P}(a;b)$.

Напомним ряд понятий, характеризующих свойства подмодулей (см. [3], [4], [7], [8]). Для подмодуля $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(a;b)$ положим $c_{\mathcal{J}} = \inf\limits_{\varphi\in\mathcal{J}} c_\varphi$, $d_{\mathcal{J}} = \sup\limits_{\varphi\in\mathcal{J}} d_\varphi$. Множество $[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$ называется *индикаторным отрезком* подмодуля $\mathcal{J}$.

Дивизор функции $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ определяется формулой

$$n_\varphi(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \varphi(\lambda) \neq 0, \\ m, & \text{если} \quad \lambda \text{ – нуль } \varphi \quad \text{кратности} \quad m, \end{cases}$$

а *дивизор подмодуля* $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(a;b)$ – формулой $n_{\mathcal{J}}(\lambda) = \min\limits_{\varphi\in\mathcal{J}} n_\varphi(\lambda)$.

Подмодуль $\mathcal{J}$ *слабо локализуем*, если он содержит *все* функции $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$, удовлетворяющие условиям: 1) $n_\varphi(z) \geq n_{\mathcal{J}}(z)$, $z \in \mathbb{C}$; 2) индикаторная диаграмма функции φ содержится в множестве $\mathrm{i}[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$. В случае, если $c_{\mathcal{J}} = a$ и $d_{\mathcal{J}} = b$, слабая локализуемость $\mathcal{J}$ означает, что этот подмодуль *обильный*.

Подмодуль $\mathcal{J}$ называется *устойчивым в точке* $\lambda \in \mathbb{C}$, если выполнение условий $\varphi \in \mathcal{J}$ и $n_\varphi(\lambda) > n_{\mathcal{J}}(\lambda)$ влечет включение $\varphi/(z-\lambda) \in \mathcal{J}$. Подмодуль $\mathcal{J}$ *устойчив*, если он устойчив в любой точке $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ясно, что *устойчивость подмодуля $\mathcal{J}$ является необходимым условием его слабой локализуемости.*

Из результатов работы [9, § 4] следует, что главный подмодуль в $\mathcal{P}(a;b)$ всегда устойчив. Это также нетрудно проверить непосредственно, используя определение устойчивости и описание топологии в $\mathcal{P}(a;b)$. В силу принципа двойственности [4, предложение 1] индикаторный отрезок главного подмодуля есть $[c_\varphi; d_\varphi]$.

Для функции $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$ обозначим через $\mathcal{J}(\varphi)$ слабо локализуемый подмодуль с дивизором, равным дивизору n_φ функции φ и индикаторным отрезком $[c_\varphi; d_\varphi]$. Иначе говоря, подмодуль $\mathcal{J}(\varphi)$ состоит из *всех* функций $\psi \in \mathcal{P}(a;b)$, делящихся на φ и имеющих индикатор $h_\psi = h_\varphi$.

Подмодули $\mathcal{J}_\varphi$ и $\mathcal{J}(\varphi)$ имеют один и тот же дивизор, равный n_φ, и один и тот же индикаторный отрезок $[c_\varphi; d_\varphi]$. Поэтому справедливо включение

$$\mathcal{J}_\varphi \subset \mathcal{J}(\varphi).$$

Равенство

$$\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}(\varphi) \tag{1.2}$$

эквивалентно слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$. Как показывает пример, построенный в работе [10], это равенство имеет место не всегда.

Для выполнения равенства (1.2) имеются две возможности.

(I) Подмодуль $\mathcal{J}(\varphi)$, а значит, и главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$, содержит только функции вида $p\varphi$, $p \in \mathbb{C}[z]$. Иными словами, образующая φ такова, что совокупность целых функций минимального типа при порядке 1, представимых в виде Φ/φ, $\Phi\in\mathcal{P}(a;b)$, совпадает с множеством многочленов $\mathbb{C}[z]$.

(II) Множество $\mathcal{J}(\varphi)\setminus\{p\varphi:\quad p\in\mathbb{C}[z]\}$ не пусто, и для каждой функции $\Phi\in\mathcal{J}(\varphi)$ существует обобщенная последовательность многочленов p_α такая, что $p_\alpha\varphi\to\Phi$ в топологии пространства $\mathcal{P}(a;b)$.

Достаточное условие для реализации первой из указанных возможностей состоит в требовании *обратимости* функции φ: функция $\varphi\in\mathcal{P}(-\infty;+\infty)$ называется *обратимой* (см. [11]), если для любой такой же функции Φ выполнена импликация: из условия «$\Phi\in\mathcal{P}(-\infty;+\infty)$, Φ/φ – целая функция» следует, что $\Phi/\varphi\in\mathcal{P}(-\infty;+\infty)$, т.е. главный идеал $\mathcal{I}_\varphi$, порожденный этой функцией в алгебре $\mathcal{P}(-\infty;\infty)$, замкнут.

Действительно, нетрудно видеть, что если $\varphi\in\mathcal{P}(a;b)$ обратима, то

$$\mathcal{J}(\varphi)=\mathcal{J}_\varphi=\{p\varphi:\quad p\in\mathbb{C}[z]\}. \tag{1.3}$$

Оказывается, что обратимость порождающей функции не является необходимым условием для справедливости (1.3). Ниже, во втором параграфе, мы строим пример необратимой функции $\varphi\in\mathcal{P}(a;b)$, для которой выполнены соотношения (1.3).

Переходя к рассмотрению случая (II), приведем упомянутый выше пример из работы [10]. Пусть $(a;b)=(-2\pi;2\pi)$, положим

$$\varphi_0(z)=\frac{\sin\pi z}{U(z)V(z)},\quad\text{где}\quad U(z)=\frac{\sin\pi\sqrt{z}}{\pi\sqrt{z}},\quad V(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2^{2n}+1}\right). \tag{1.4}$$

Теорема 1.2 работы [10] утверждает (хотя и в двойственных терминах допустимости спектрального синтеза в слабом смысле), что главный подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi_0}$ не является слабо локализуемым в $\mathcal{P}(-2\pi;2\pi)$.

В третьем параграфе настоящей работы выводятся некоторые необходимые условия слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ в $\mathcal{P}(a;b)$ в случае, когда множество

$$\mathcal{J}(\varphi)\setminus\{p\varphi,\ p\in\mathbb{C}[z]\}$$

не пусто. В том числе доказывается следующее утверждение, содержащее в себе, как частный случай, цитированный выше результат [10, теорема 1.2].

Теорема 3. *Пусть образующая подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ имеет вид*

$$\varphi=\frac{\Phi}{\omega},$$

где $\Phi=e^{i\gamma z}S\in\mathcal{P}(a;b)$, S – функция типа синуса, $\gamma\in\mathbb{R}$, ω – целая функция минимального типа при порядке 1.

Если для порядков функции ω на лучах $\arg z=0$ и $\arg z=\pi$, определяемых равенствами

$$\rho_0=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln|f(r)|}{\ln r},\quad \rho_\pi=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln|f(-r)|}{\ln r},\quad \textit{соответственно,}$$

выполнено одно из соотношений

$$\rho_0<1/4<1/2\le\rho_\pi\quad\textit{или}\quad\rho_\pi<1/4<1/2\le\rho_0, \tag{1.5}$$

то подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ не является слабо локализуемым.

2. Пример необратимой функции, для которой выполнены соотношения (1.3)

Пусть границы интервала a и b удовлетворяют условиям

$$a<-\pi,\quad \pi<b.$$

Положим
$$\varphi(z)=\frac{s(z)}{s_1(z)}+\frac{\pi z s(z)}{s_0(z)},$$
где
$$s(z)=\frac{\sin\pi z}{\pi z},\quad s_1(z)=s(\sqrt{z})=\frac{\sin\pi\sqrt{z}}{\pi\sqrt{z}},\quad s_0(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2^{2k}}\right).$$

Хорошо известно, что для функции s имеют место оценки
$$|s(z)|\le\frac{c_0e^{\pi|\operatorname{Im}z|}}{\pi(1+|z|)},\quad z\in\mathbb{C},\tag{2.1}$$
$$|s(z)|\ge\frac{m_de^{\pi|\operatorname{Im}z|}}{\pi|z|},\quad |z-k|\ge d,\quad k\in\mathbb{Z},\tag{2.2}$$
где c_0 – абсолютная постоянная, $d\in(0;1/2)$ – произвольное число, m_d – положительное число, зависящее от d. Из (2.1) следует, что целая функция s_1 допускает оценку сверху:
$$|s_1(z)|\le\frac{c_0e^{\pi\sqrt{|z|}|\sin(\theta/2)|}}{\pi(1+\sqrt{|z|})},\quad z=re^{i\theta},\quad -\pi<\theta\le\pi,\quad r>0.\tag{2.3}$$

Другие вспомогательные оценки оформим в виде лемм.

Лемма 1. *Пусть число $d_0\in(0;1/2)$ столь мало, что $\left|\frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}-1\right|\le1/2$ при $\pi|\xi|\le d_0$. Тогда существует постоянная $c_{d_0}>0$, такая, что*
$$|s_1(z)|\ge\frac{c_{d_0}e^{\pi\sqrt{|z|}|\sin(\theta/2)|}}{1+|z|},\quad z\in\mathbb{C}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left\{z:\,|z-k^2|<3d_0\right\}.\tag{2.4}$$

Доказательство.
Прежде всего заметим, что для всех z, удовлетворяющих неравенствам
$$\frac{d_0}{|k|}\le|z-k|\le d_0,\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\tag{2.5}$$
выполняется оценка
$$|s(z)|\ge\frac{d_0}{4|z|^2}.\tag{2.6}$$

Из неравенств (2.2) и (2.6) стандартными методами выводится оценка
$$|s(z)|\ge\frac{c_{d_0}e^{\pi|\operatorname{Im}z|}}{1+|z|^2}\quad z\in\mathbb{C}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left\{z:\,|z-k|<\frac{d_0}{|k|}\right\},\tag{2.7}$$
где c_{d_0} – положительная постоянная, зависящая от d_0. Утверждение леммы, в свою очередь, следует из (2.7).

Лемма 2. *При всех $\theta\in(-\pi;\pi)$ имеет место асимптотическое равенство*
$$\ln s_0(re^{i\theta})=\frac{(\ln r)^2}{\ln 8}+\frac{i\theta\ln r}{\ln 4}+o(\ln r),\quad r\to\infty.\tag{2.8}$$
Существуют число $\delta>0$ и множество $E_0\subset(-\infty;0)$ нулевой относительной меры, такие, что для всех $x\in(-\infty;0)\setminus E_0$ выполняется неравенство
$$\ln|s_0(x)|\ge\delta\left(\ln\left(|x|+1\right)\right)^2.\tag{2.9}$$

Доказательство. Считающая функция нулей $n(r)$ функции s_0 удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$n(r) = \frac{\ln r}{\ln 4} + o(\ln r), \quad r \to \infty. \tag{2.10}$$

Поэтому, согласно теореме 1 работы [12], функция s_0 имеет *сильный регулярный рост,* и для нее имеет место асимптотическое соотношение (2.8).

В силу (2.10) для функции s_0 выполнены условия теоремы 3.6.1 [13]. Эта теорема утверждает, что

$$\frac{\min\limits_{|z|=r} |s_0(z)|}{\max\limits_{|z|=r} |s_0(z)|} \to 1, \tag{2.11}$$

когда $r \to +\infty$, оставаясь вне некоторого множества нулевой относительной меры E_0.

Из (2.11) получаем, что для некоторого числа $\delta > 0$ неравенство (2.9) выполняется всюду на вещественной полуоси $(-\infty; 0)$, за исключением множества E_0.

Теорема 1. *Функция φ содержится в $\mathcal{P}(a;b)$ и не является обратимой. Подмодули $\mathcal{J}_\varphi$ и $\mathcal{J}(\varphi)$ удовлетворяют соотношениям (1.3).*

Доказательство.

Рассмотрим функцию $\varphi_1 = s/s_1$. Для этой функция на вещественой оси справделивы следующие оценки

$$|\varphi_1(x)| \le \frac{c_0}{\pi c_{d_0} e^{\pi\sqrt{|x|}}}, \quad x \le 0, \tag{2.12}$$

$$|\varphi_1(x)| \le \frac{c_0 e^{3d_0\pi}}{\pi c_{d_0}}, \quad x > 0. \tag{2.13}$$

Первая из этих оценок является прямым следствием оценок (2.1) и (2.4), а вторая, (2.13), выводится из них же стандартными приемами с использованием принципа максимума для аналитических функций. Из оценок (2.12) и (2.13), в свою очередь, следует, что функция φ_1 ограничена на вещественной оси. Учитывая, что она имеет тип π при порядке 1, заключаем, что

$$\varphi_1 \in \mathcal{P}(a;b). \tag{2.14}$$

Покажем, что функция $\varphi_2 = (\pi z s)/s_0$ тоже содержится в $\mathcal{P}(a;b)$. Эта функция, как и функция φ_1, имеет тип π при порядке 1.

Из рассуждений, приведенных в доказательстве леммы 2, следует, что для любого $\varepsilon \in (0;1/2)$ найдется $\delta > 0$, такое, что вне объединения колец

$$A_j = \{(1-\varepsilon)4^j \le |z| \le (1+\varepsilon)4^j\}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

выполняется неравенство

$$\ln|s_0(z)| \ge \delta\left(\ln(|z|+1)\right)^2. \tag{2.15}$$

Поэтому для всех вещественных

$$x \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} (-(1+\varepsilon)4^j; -(1-\varepsilon)4^j)$$

будет выполняться неравенство

$$\ln|s_0(x)| \ge \delta\left(\ln(|x|+1)\right)^2. \tag{2.16}$$

Для оценки функции φ_2 в интервалах

$$(-(1+\varepsilon)4^j; -(1-\varepsilon)4^j), \quad j \in \mathbb{N}, \tag{2.17}$$

заметим, что в силу (2.15) на границе кольца A_j имеет место неравенство

$$\ln|\varphi_2(z)| \le \ln\left|\frac{\sin \pi z}{1 - z^2/4^{2j}}\right| + 2\ln(2+\varepsilon) - \delta\left(\ln\left((1-\varepsilon)4^j + 1\right)\right)^2.$$

Так как правой частью последнего неравенства является функция, гармоническая в кольце A_j, это неравенство остается справедливым для всех $z \in A_j$. Следовательно, найдутся положительные числа $\tilde{\delta} > \delta$ и $\tilde{c} > 1$, зависящие от δ и ε и не зависящие от j, такие, что в интервалах (2.17) верна оценка

$$|\varphi_2(x)| \le \frac{\tilde{c}}{e^{\tilde{\delta}(\ln(|x|+1))^2}}, \quad x \in (-(1+\varepsilon)4^j; -(1-\varepsilon)4^j), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, с учетом (2.16), получаем, что на всей вещественной оси справедливо неравенство

$$|\varphi_2(x)| \le \frac{\tilde{c}}{e^{\tilde{\delta}(\ln(|x|+1))^2}}. \tag{2.18}$$

Применяя теорему Пэли-Винера-Шварца [5, теорема 7.3.1], заключаем, что

$$\varphi_2 \in \mathcal{F}(C_0^\infty(a;b)) \subset \mathcal{P}(a;b). \tag{2.19}$$

Из включений (2.14) и (2.19) следует, что функция φ принадлежит пространству $\mathcal{P}(a;b)$.

Для доказательства необратимости функции φ нам понадобится аналитический критерий Л.Эренпрайса [14, теорема I]:
функция $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$ обратима тогда и только тогда, когда существует положительное число a со свойством: для каждого $x \in \mathbb{R}$ найдется $y \in \mathbb{R}$ такое, что

$$|x-y| \le a\ln(1+|x|),$$
$$\varphi(y) \ge (a+|y|)^{-a}.$$

В силу (2.12) и (2.18) найдется положительное число c_1, такое, что функция φ на всем луче $(-\infty;0)$ удовлетворяет оценке

$$\ln|\varphi(x)| \le -\tilde{\delta}\left(\ln(|x|+1)\right)^2 + c_1.$$

Сопоставляя эту оценку и критерий обратимости Л. Эренпрайса, заключаем, что функция φ не обратима.

Докажем последнее из сформулированных для функции φ утверждений – равенство

$$\mathcal{J}(\varphi) = \{p\varphi : \quad p \in \mathbb{C}[z]\}. \tag{2.20}$$

Из оценок (2.2), (2.4) и соотношения (2.8) следует, что для любого положительного θ_0 найдется постоянная $a_0 = a_0(\theta_0)$, такая, что вне углов $\{z : \quad |\arg z| < \theta_0\}$, $\{z : |\pi - \arg z| < \theta_0\}$ функция φ допускает оценку снизу:

$$|\varphi(z)| \ge |s(z)|\left(\frac{\pi|z|}{|s_0(z)|} - \frac{1}{|s_1(z)|}\right) \ge \frac{a_0 e^{\pi|\operatorname{Im} z|}}{\exp\left(\left(\ln(|z|+1)\right)^2/\ln 8\right)}. \tag{2.21}$$

Пусть Φ – произвольная функция из подмодуля $\mathcal{J}(\varphi)$. При некоторых $C_0 > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$|\Phi(z)| \le C_0(1+|z|)^k e^{\pi|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.22}$$

Из этого соотношения и оценки (2.21), используя принцип Фрагмена-Линделефа, нетрудно вывести, что для функции $\omega = \Phi/\varphi$ во всей комплексной плоскости верна оценка

$$|\omega(z)| \le Ce^{k\ln(|z|+1) + (\ln(|z|+1))^2}, \tag{2.23}$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная. В частности, эта оценка означает, что ω – целая функция нулевого порядка.

Оценим функцию ω на луче $(3d_0;+\infty)$. Для этого заметим, что, в силу (2.2), (2.3), (2.8), всюду в полуполосе $\{z=x+iy:\ x>3d_0,\ |y|\le d_0\}$, но вне кружков $|z-k|<3d_0$, $k\in\mathbb{N}$, для некоторой постоянной $b_0>0$ будет выполняться оценка

$$|\varphi(z)|\ge|s(z)|\left(\frac{1}{|s_1(z)|}-\frac{\pi|z|}{|s_0(z)|}\right)\ge\frac{b_0}{1+|z|}. \tag{2.24}$$

Учитывая оценку (2.22) для функции Φ, из (2.24) получим, что при всех положительных x справедливо неравенство

$$|\omega(x)|\le(C_0/b_0)(1+x)^{k+1}. \tag{2.25}$$

Из оценок (2.23) и (2.25) и принципа Фрагмена-Линделефа следует, что ω – многочлен. Так как данный факт имеет место для любой целой функции ω вида Φ/φ, $\Phi\in\mathcal{J}(\varphi)$, заключаем, что выполняется требуемое соотношение для подмодулей (2.20).

3. Необходимые условия слабой локализуемости главного подмодуля

Обозначим через $\mathcal{P}_0(a;b)\subset\mathcal{P}(a;b)$ образ пространства финитных бесконечно дифференцируемых функций $C_0^\infty(a;b)\subset(C^\infty(a;b))'$ при преобразовании $\mathcal{F}$.

Рассмотрим функцию $\varphi\in\mathcal{P}(a;b)$, для которой подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ содержит элементы вида

$$\Phi=\omega\varphi,\quad \omega-\text{целая функция, отличная от многочлена.} \tag{3.1}$$

В этом параграфе выводятся некоторые условия, необходимые для слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$

Теорема 2. *Главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ содержит функции Φ вида (3.1) тогда и только тогда, когда $\varphi\in\mathcal{P}_0(a;b)$.*

Доказательство.

1) Необходимость. Докажем эквивалентную импликацию: условие

$$\varphi\notin\mathcal{P}_0(a;b) \tag{3.2}$$

влечет равенство

$$\mathcal{J}_\varphi=\{p\varphi:\ p\in\mathbb{C}[z]\}. \tag{3.3}$$

Согласно уже упоминавшейся теореме Пэли-Винера-Шварца [5, теорема 7.3.1] из (3.2) следует существование натурального числа k_0 и вещественной последовательности

$$x_n,\quad n=1,2,\ldots,\quad |x_n|\to\infty,$$

для которых

$$|\varphi(x_n)|\ge|x_n|^{-k_0},\quad n=1,2,\ldots \tag{3.4}$$

С другой стороны, включение $\varphi\in\mathcal{P}(a;b)$ означает, что для некоторых $C>0$ и $m_0\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ всюду в $\mathbb{C}$ имеет место оценка

$$|\varphi(z)|\le C(1+|z|)^{m_0}e^{b_{m_0}y^+-a_{m_0}y^-}, \tag{3.5}$$

где $y^\pm=\max\{0,\pm y\}$, $z=x+\mathrm{i}y$, $a<a_{m_0}<b_{m_0}<b$. Из оценок (3.4) и (3.5) следует, что для каждого натурального j замыкание множества (возможно, пустого)

$$P_j\bigcap\{p\varphi:\ p\in\mathbb{C}[z]\} \tag{3.6}$$

в банаховом пространстве P_j содержится в множестве (возможно, пустом)

$$P_j\bigcap\{p\varphi:\ p\in\mathbb{C}[z],\ \deg p\le j+k_0-m_0\},$$

которое есть, в свою очередь, подмножество множества (3.6). Следовательно, множество (3.6) замкнуто для каждого $j\in\mathbb{N}$. Согласно критерию замкнутости в пространстве типа (LN^*) [1, теорема 1] множество $\{p\varphi:\ p\in\mathbb{C}[z]\}$ замкнуто в $\mathcal{P}(a;b)$, и значит, выполняется (3.3).

2) Достаточность.

Пусть $\varphi = \mathcal{F}(s)$, $s \in C_0^\infty(a;b)$, $[a_0;b_0]$ – замыкание выпуклой оболочки носителя функции s, $[a_0;b_0] \Subset (a;b)$, и пусть $\varphi \in P_{k_1}$.

В силу теоремы Пэли-Винера-Шварца существуют положительные постоянные C_n, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что верны оценки

$$|\varphi(z)| \le \frac{C_n}{(1+|z|)^n} e^{b_0 y^+ - a_0 y^-}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Положим

$$f(r) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (n\ln(1+r) - \ln C_n),$$

и рассмотрим субгармоническую в $\mathbb{C}$ функцию $v(z) = f(|z|)$. Согласно теореме 5 из работы [15] существует целая функция ω, такая, что вне множества кружков с конечной суммой радиусов для некоторого натурального числа m_0 верно неравенство

$$|\ln|\omega(z)| - v(z)| \le m_0 \ln(1+|z|),$$

в частности, $\omega \notin \mathbb{C}[z]$. Следовательно, $\Phi = \omega\varphi$ – целая функция вида (3.1), принадлежащая подмодулю $\mathcal{J}(\varphi)$.

Покажем, что $\Phi \in \mathcal{J}_\varphi$, иными словами, что функцию Φ можно аппроксимировать в топологии пространства $\mathcal{P}(a;b)$ функциями вида $p\varphi$, где p – многочлен.

Возможность такой аппроксимации вытекает из следующего утверждения.

Лемма 3. *Существует последовательность многочленов p_j, сходящаяся к функции ω на вещественой оси в весовой норме $\| \cdot \|_V$, определяемой по формуле*

$$\|f\|_V = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{V(x)}, \tag{3.8}$$

где $V(x) = C_1(1+|x|)^{m_0+3} e^{v(x)}$, постоянная C_1 – из неравенств (3.7).

Доказательство леммы 3.

В монографии [16, гл. VI] в качестве веса V рассмотрена *четная* весовая функция W, заданная на вещественной оси и удовлетворяющая условиям

1) $W(x) \ge 1$, $x \in \mathbb{R}$,
для каждого натурального n отношение $x^n/W(x)$ стремится к нулю при $x \to \pm\infty$,
$\ln W(x)$ выпуклая функция аргумента $t = \ln|x|$;
2) для каждого $\delta > 1$ существует постоянная $C_\delta > 0$, такая, что

$$x^2 W(x) \le C_\delta(\delta x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Из теоремы де Бранжа [16, VI.H.1] и теорем, доказанных П. Кусисом в этой же работе [16, VI.H.2], следует, что для веса W, удовлетворяющего условиям 1) и 2), каждая целая функция ω минимального типа при порядке 1, растущая на вещественной оси медленнее, чем W:

$$\frac{|\omega(x)|}{W(x)} \to 0, \quad x \to \pm\infty -$$

аппроксимируется многочленами в норме $\|\omega\|_W = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\omega(x)|}{W(x)}$.

Функция $\tilde{V}(x) = C_1(1+|x|)^{m_0+1} e^{v(x)}$ удовлетворяет условиям 1) и, вообще говоря, не удовлетворяет условию 2). Однако, прослеживая доказательство П. Кусиса (стр. 226–229 в [16, VI.H.2]), видим, что аппроксимация функции ω многочленами на вещественной оси возможна в норме $\| \cdot \|_V$, $V = (1+|x|)^2 \tilde{V}$.

Лемма доказана.

Из определения функции V следует, что найдется постоянная $C_0 > 0$, такая, что на всей вещественной оси
$$|p_j(x)\varphi(x)| \le C_0(1+|x|)^{m_0+3}, \quad j = 1, 2, \ldots$$
Используя принцип Фрагмена-Линделефа, отсюда выводим, что во всей комплексной плоскости
$$|p_j(z)\varphi(z)| \le \tilde{C}_0(1+|z|)^{m_0+3}e^{b_0y^+ - a_0y^-}, \quad j = 1, 2, \ldots$$
Из этих оценок, учитывая, что пространство $\mathcal{P}(a;b)$ относится к классу локально-выпуклых пространств типа (LN^*), и используя свойства таких пространств, установленные в работе [1], выводим, что найдется подпоследовательность этой последовательности, сходящаяся в $\mathcal{P}(a;b)$ к функции Φ.

Замечание 1. Функция $\varphi_1 = (\sin\pi z)/(\sqrt{z}\sin\pi\sqrt{z})$, рассмотренная в §1, не принадлежит классу $\mathcal{P}_0(a;b)$, а множество
$$\mathcal{J}(\varphi_1) \setminus \{p\varphi : \ \mathbb{C}[z]\}$$
содержит функцию $\frac{\sin\pi\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ и, следовательно, не пусто. Так что, в отличие от главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$, подмодуль $\mathcal{J}(\varphi)$ может содержать функции $\omega\varphi$, $\omega \notin \mathbb{C}[z]$, и в том случае, когда порождающая функция φ не принадлежит классу $\mathcal{P}_0(a;b)$. Тем не менее, из доказанной теоремы следует, что главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ с образующей $\varphi \notin \mathcal{P}_0(a;b)$ может быть слабо локализуемым только в случае, если выполнены соотношения (1.3).

Доказательство теоремы 3.

Сначала докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 4. *В условиях сформулированной теоремы существует положительное число d, такое, что при каждом натуральном n функция φ может быть представлена в виде произведения двух целых функций $\varphi_{1,n}$ и $\varphi_{2,n}$, удовлетворяющих условию: при всех z, лежащих вне полосы $|\operatorname{Im} z| < 3d$, справедливы неравенства*
$$\big|\ln|\varphi_{1,n}(z)| - 2^{-n}\ln|\varphi(z)|\big| \le \ln(1+|z|) + A_0, \tag{3.9}$$
где A_0 – положительная постоянная, зависящая только от d, a, b.

Доказательство леммы 4.

Так как нулевое множество функции φ является частью нулевого множества функции типа синуса, оно содержится в некоторой горизонтальной полосе $|\operatorname{Im} z| < d/2$ (см., например, [2, гл. III, лек. 22]).

Воспользуемся следующей теоремой из работы [17, теорема 2]:
Пусть f – целая функция, все нули которой лежат в полосе $|\operatorname{Im} z| \le d/2$, и существует целая функция F, делящаяся на функцию f и удовлетворяющая условиям
$$\ln|F(z)| \le H(z), \quad F(0) = 1, \tag{3.10}$$
где функция H липшицева:
$$|H(z') - H(z'')| \le \sigma|z' - z''|, \quad z', z'' \in \mathbb{C}.$$
Тогда f представляется в виде произведения двух целых функций, f_1 и f_2, причем для z, $|\operatorname{Im} z| \ge 3d$, и любого $p \ge 1$ выполняется соотношение
$$|\ln|f_1(z)| - \ln|f_2(z)|| \le \frac{C_0}{p}(H(z) - \ln|F(z)|) + C_1 + \ln(1+|z|) + C_2 + C_3e^p, \tag{3.11}$$
где C_j – некоторые постоянные, зависящие от σ, d, $H(0)$.

Положим $f = \varphi$, $F = \Phi$, $H(re^{i\theta}) = h_\Phi(\theta)r$, h_Φ – индикатор функции Φ, $\sigma = \max\limits_{\theta\in[0;2\pi]}|h_\Phi(\theta)|$, $p = 1$. Учитывая, что в силу свойств функций типа синуса [2] при $|\operatorname{Im} z| \ge 3d$ будет
$$|H(z) - \ln|F(z)|| = |h_\Phi(\arg z)|z| - \ln|\Phi(z)|| \le C_4,$$

где постоянная C_4 зависит только от функции Φ, получаем представление функции φ в виде произведения двух целых функций, $\varphi_{1,1}$ и $\varphi_{2,1}$, причем

$$|\ln|\varphi_{1,1}(z)| - \ln|\varphi_{2,1}(z)|| \leq \ln(1+|z|) + A_0, \quad |\operatorname{Im} z| \geq 3d, \tag{3.12}$$

постоянная A_0 зависит только от функции Φ.

Из (3.12) и равенства

$$\ln|\varphi| = \ln|\varphi_{1,1}| + \ln|\varphi_{2,1}|,$$

выводим оценку

$$\left|\ln|\varphi_{1,1}(z)| - \frac{1}{2}\ln|\varphi(z)|\right| \leq \frac{1}{2}\ln(1+|z|) + \frac{A_0}{2}, \quad |\operatorname{Im} z| \geq 3d. \tag{3.13}$$

Применяя теперь цитированную выше теорему Р.С. Юлмухаметова к функции $f = \varphi_{1,1}$ с теми же F, H, σ и p, что и выше, получим представление

$$\varphi_{1,1} = \varphi_{1,2}\varphi_{2,2},$$

в котором целая функция $\varphi_{1,2}$ удовлетворяет оценке

$$\left|\ln|\varphi_{1,2}(z)| - \frac{1}{2}\ln|\varphi_{1,1}(z)|\right| \leq \frac{1}{2}\ln(1+|z|) + \frac{A_0}{2}, \quad |\operatorname{Im} z| \geq 3d.$$

Из этой оценки и (3.13) следует, что

$$\left|\ln|\varphi_{1,2}(z)| - \frac{1}{2^2}\ln|\varphi(z)|\right| \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)(\ln(1+|z|) + A_0), \quad |\operatorname{Im} z| \geq 3d.$$

Продолжая этот процесс, через n шагов получим представление функции φ в виде произведения двух целых функций $\varphi_{1,n}$ и $\varphi_{2,n}$, причем для всех z, лежащих вне полосы $|\operatorname{Im} z| < 3d$, будет выполняться требуемая оценка (3.9).

Докажем, что в условиях теоремы функция Φ не может принадлежать главному подмодулю $\mathcal{J}_\varphi$. Предположим противное: пусть существует обобщенная последовательность многочленов p_α, такая, что $p_\alpha\varphi$ сходится к Φ в пространстве $\mathcal{P}(a;b)$. Фиксируем натуральное число n_0, для которого функция $\varphi\varphi_{1,n_0}$ лежит в $\mathcal{P}(a;b)$. Используя свойства пространства $\mathcal{P}(a;b)$, нетрудно установить существование *счетной* подпоследовательности $p_{\alpha_k}\varphi\varphi_{1,n_0}$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящейся к функции $\Phi\varphi_{1,n_0}$ в одной из норм $\|\cdot\|_{m_0}$ (см. (1.1)). В частности, эта подпоследовательность ограничена по указанной норме: для некоторой постоянной $C > 0$ и всех натуральных k имеем

$$|p_{\alpha_k}(z)\varphi(z)\varphi_{1,n_0}(z)| \leq C(1+|z|)^{m_0}\exp(b_{m_0}y^+ - a_{m_0}y^-), \quad y = \operatorname{Im} z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Из этих неравенств, леммы 4 и свойств функций типа синуса, получим, что на прямой $\operatorname{Im} z = y_0$, $|y_0| \geq 3d$, справедливы оценки

$$|p_{\alpha_k}(z)| \leq \tilde{C}(1+|z|)^{m_0+1}|\omega(z)|^{1+2^{-n_0}}, \tag{3.14}$$

где $\tilde{C}$ – положительная постоянная, зависящая только от d.

Предположим, что выполнено первое из соотношений (1.5), и оценим $|p_{\alpha_k}(z)|$ на полупрямой $z = x + iy_0$, $x > 0$, $y_0 \geq 3d$.

Согласно замечанию после теоремы 3 в [2, §14.2] и с учетом того, что функция ω имеет минимальный тип при порядке 1, для всех $x \in \mathbb{R}$, $y_0 > 0$ можем написать

$$\ln|\omega(x+iy_0)| = \frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|\omega(t)|}{(t-x)^2 + y_0^2}\,\mathrm{d}\,t + \sum_{j=1}^{\infty} \ln\left|\frac{x+iy_0-\lambda_j}{x+iy_0-\bar{\lambda}_j}\right|,$$

где $\{\lambda_j\}$ – множество нулей функции ω, принадлежащих верхней полуплоскости.

Оценим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|\omega(t)|}{(t-x)^2+y_0^2} \mathrm{d}\, t$ при положительных x и y_0. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|\omega(t)|}{(t-x)^2+y_0^2} \mathrm{d}\, t = \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln|\omega(t)|}{(t-x)^2+y_0^2} \mathrm{d}\, t + \\ + \int_{0}^{2x} \frac{\ln|\omega(t)|}{(t-x)^2+y_0^2} \mathrm{d}\, t + \int_{2x}^{+\infty} \frac{\ln|\omega(t)|}{(t-x)^2+y_0^2} \mathrm{d}\, t = I_1 + I_2 + I_3. \quad (3.15)$$

Для первого слагаемого, I_1 справедлива оценка

$$|I_1| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln|\omega(t)||}{t^2+y_0^2} \mathrm{d}\, t < +\infty, \quad (3.16)$$

конечность интеграла следует из замечания в [2, §14.2]. Далее, для любого положительного числа $\varepsilon < 1/8 - \rho_0/2$ найдутся положительные постоянные b_ε, c_ε такие, что при всех $x > 0$ будет

$$\ln|\omega(x)| \leq b_\varepsilon x^{\rho_0+\varepsilon} + c_\varepsilon.$$

Поэтому слагаемые I_2 и I_3 можно оценить следующим образом:

$$I_2 \leq (2^{\rho_0+\varepsilon} b_\varepsilon x^{\rho_0+\varepsilon} + c_\varepsilon) \int_0^{2x} \frac{\mathrm{d}\, t}{(t-x)^2+y_0^2} \leq \frac{\pi}{y_0} \left(2^{\rho_0+\varepsilon} b_\varepsilon x^{\rho_0+\varepsilon} + c_\varepsilon\right), \quad (3.17)$$

$$I_3 \leq (b_\varepsilon + c_\varepsilon) \left(\int_1^{+\infty} \frac{t^{\rho_0+\varepsilon}}{t^2/4+y_0^2} \mathrm{d}\, t + y_0^{-2} \right) \leq (b_\varepsilon + c_\varepsilon) \left(4 \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\, t}{t^{2-\rho_0-\varepsilon}} + y_0^{-2} \right). \quad (3.18)$$

Из соотношений (3.14)–(3.18) следует, что на полупрямой $z = x + iy_0$, $x > 0$, $y_0 \geq 3d$ верны оценки

$$|p_{\alpha_k}(z)| \leq C'(1+|z|)^{m_0+1} \exp(C''|z|^{\rho_0+\varepsilon}), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где C', C'' – положительные постоянные, зависящие от ε и y_0 и не зависящие от x и k.

Из этих оценок, используя принцип Фрагмена-Линделефа, нетрудно вывести, что во всей комплексной плоскости имеют место неравенства

$$|p_{\alpha_k}(z)| \leq C \exp(|z|^{\rho_0+2\varepsilon}), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

причем постоянная $C > 0$ зависит от ε и не зависит от k и z. Отсюда, в свою очередь, следует, что функция ω (равная пределу последовательность p_{α_k}) должна иметь во всей плоскости порядок, меньший, чем $1/4$, чего не может быть в силу условий (1.5).

Замечание 2. Требование $\max(\rho_0, \rho_\pi) \geq 1/2$ является необходимым для того, чтобы могло иметь место строгое неравенство $\min(\rho_0, \rho_\pi) < \max(\rho_0, \rho_\pi)$, в силу теоремы Вимана (см., например, [18, гл. 1, §18, теорема 30]).

Замечание 3. Для функции $V(-z)$, где $V(z)$ – функция из определения φ_0 в (1.4), справедливы оба соотношения, (2.8) и (2.9), леммы 2. Используя этот факт и лемму 1, нетрудно убедиться в том, что для функции φ_0 из работы [10], цитированной во введении, выполнены условия доказанной теоремы. А именно, $\varphi_0 = \frac{\sin \pi z}{\omega}$, где $\omega = UV$, при этом порядки ρ_0 и ρ_π функции ω равны, соответственно, 0 и 1/2. Применение теоремы 3 дает отличное от приведенного в [10] доказательство отсутствия свойства слабой локализуемости у главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ в любом модуле $\mathcal{P}(a;b)$, $a < -\pi$, $\pi < b$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Себастьян-и-Сильва Ж. *О некоторых классах ЛВП, важных в приложениях* // Математика. Сб. переводов инстранных статей. 1957. 1:1. С. 60–77.
2. B.Y. Levin (in collaboration with Yu. Lyubarskii, M. Sodin, V. Tkachenko). *Lectures on entire functions* (Rev. Edition). AMS. Providence. Rhode Island, 1996. 254 p.
3. Абузярова Н.Ф. *Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций* // Доклады РАН. 2014. Т. 457. № 5. С. 510–513.
4. Абузярова Н.Ф. *Замкнутые подмодули в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси* // Уфимский матем. журнал. 2014. Т. 6, № 4. С. 3–18.
5. Хермандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений и анализ Фурье.* М.: Мир, 1986. 462 с.
6. A. Aleman, B. Korenblum *Derivation-Invariant Subspaces of* C^∞ // Computation Methods and Function Theory. 2008. V. 8. № 2. P. 493–512.
7. Красичков-Терновский И.Ф. *Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. I*// Известия АН СССР, серия матем. 1979. Т. 43. № 1. С. 44–66.
8. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Матем. сборник. 1972. Т. 87 (129). № 4. С. 459–489.
9. Красичков-Терновский И.Ф. *Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. II*// Известия АН СССР, серия матем. 1979. Т. 43. № 2. С. 309–341.
10. A. Aleman, A. Baranov, Yu. Belov *Subspaces of* C^∞ *invariant under the differentiation* // Journal of Functional Analysis. 2015. V. 268. P. 2421–2439.
11. C.A. Berenstein, B.A. Taylor *A new look at interpolation theory for entire functions of one variable* // Advances in Mathematics. 1980. V. 33. P. 109–143.
12. Заболоцкий Н.В. *Сильно регулярный рост целых функций нулевого порядка* // Матем. заметки. 1998. Т. 63. Вып. 2. С. 196–208.
13. R.P. Boas, Jr. *Entire functions.* Acad. Press. Publ. Inc. New-York. 1954. 276 pp.
14. L. Ehrenpreis *Solution of some problems of division, IV* // Amer. Journal of Math. 1960. V. 57. P. 522–588.
15. Юлмухаметов Р.С. *Аппроксимация субгармонических функций* // Anal. Math. 1985. V. 11. P. 257–282.
16. P. Koosis *The logarithmic integral I.* Cambridge Univ. Press. 1998. 606 pp.
17. Юлмухаметов Р.С. *Разложение целых функций на произведение двух «почти равных» функций* // Сиб. матем. журнал. 1997. Т.38. № 2. С. 463–473.
18. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: ГИТТЛ. 1956. 632 с.

Наталья Фаирбаховна Абузярова,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `abnatf@gmail.com`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 1 (2016). С. 15-21.

УДК 517.957

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИСКРЕТНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАММЕРШТЕЙНА-ВОЛЬТЕРРА

Э.О. АЗИЗЯН, Х.А. ХАЧАТРЯН

Аннотация. В настоящей работе исследуется класс дискретных нелинейных уравнений Гаммерштейна-Вольтерра в закритическом случае. Доказывается существование однопараметрического семейства положительных решений в пространстве l_1. Описывается множество параметров. Устанавливается монотонная зависимость каждого решения как по параметру, так и по соответствующему индексу.

Ключевые слова: условие закритичности, итерации, монотонность, однопараметрическое семейство решений.

Mathematics Subject Classification: 45GXX, 45G05

1. Введение

Работа посвящена исследованию следующего класса нелинейных дискретных уравнений Гаммерштейна-Вольтерра:

$$x_n = \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n} h_j(x_j), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

относительно искомого бесконечного вектора

$$x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)^T, \tag{1.2}$$

где $T-$ знак транспонирования.

В системе (1.1) последовательность элементов $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет следующим условиям:

- $$a_k \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad a_0 = 0, \tag{1.3}$$
- $$\mu \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty, \tag{1.4}$$
- $$\text{(условие закритичности)} \qquad \mu > 1. \tag{1.5}$$

Относительно последовательности измеримых и вещественнозначных функций $\{h_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$ будем предполагать выполнение условия «критичности»:

$$h_j(0) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.6}$$

Система (1.1), кроме самостоятельного математического интереса, возникает в дискретных задачах нелинейной теории переноса излучения в спектральных линиях (см. [1]).

E.O. Azizyan, Kh.A. Khachatryan, One-parametric family of positive solutions for a class of nonlinear discrete Hammerstein-Volterra equations.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-1A033.

Поступила 31 августа 2015 г.

Кроме того, система (1.1) является дискретным аналогом нелинейного интегрального уравнения в свертках Гаммерштейна-Вольтерра:

$$f(x)=\int\limits_x^\infty v(t-x)H(t,f(t))dt,\quad x\geq 0, \tag{1.7}$$

которое возникает в самых различных областях естествознания, в частности, в физической кинетике (кинетическая теория газов), в эконометрике (теория распределения дохода в однопродуктовой экономике), в биологии (в детерменистических моделях пространственного распространения эпидемии или благоприятного гена среди популяции вдоль линии с различными нелинейностями в генетических моделях) (см. [2]–[5]). Исследованию нелинейных дискретных уравнений Гаммерштейна-Вольтерра различных типов посвящено немало интересных работ (см. [6]-[9] и ссылки в них). Например, в работах [6]-[7] исследована следующая нелинейная дискретная система Гаммерштейна:

$$y_n=\sum_{j=1}^\infty a_{nj}f_j(y_j)+g_n,\quad n\in\mathbb{N}, \tag{1.8}$$

где

$$f_j(0)=0,\quad j\in\mathbb{N},$$

причем

$$(f_j(u)-f_j(v))(u-v)\leqslant c_f(u-v)^2,\quad j\in\mathbb{N},$$

при некотором $c_f>0$, в предположении

$$c_f\cdot\mu_0<1$$

и μ_0- наименьшее положительное число, удовлетворяющее следующему неравенству:

$$\|Ay\|_{l_{2,\tau}}\leqslant\mu_0(Ay,y),\quad y\in l_{2,\tau}.$$

Здесь $l_{2,\tau}-$некоторое весовое пространство бесконечных векторов, а $A=(a_{nj})_{n,j=1}^\infty$.

В работе [8] исследована следующая дискретная система Гаммерштейна-Вольтерра:

$$x_n=\sum_{j=n-N_0}^n a_{nj}h_j(x_j),\quad n\in\mathbb{N}, \tag{1.9}$$

относительно бесконечного вектора $x=(x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots)^T$. При определенных ограничениях на $\{a_{nj}\}_{n,j=1}^\infty$ и $\{h_j(u)\}_{j=1}^\infty$ в этой работе доказано существование периодических решений.

Вопросы линеаризации для общих нелинейных дискретных уравнений Вольтерра обсуждались в работе [9].

Следует отметить, что условие (1.6) в определенном смысле затрудняет ситуацию, ибо из (1.6) сразу следует, что тождественно нулевой вектор удовлетворяет системе (1.1).

Здесь возникают следующие вопросы:

1) При каких ограничениях на $\{h_j(u)\}_{j=0}^\infty$ система (1.1), кроме тривиального решения, имеет покомпонентно положительное решение?

2) Из какого пространства решение?

3) Обладает ли свойством единственности построенное решение в определенном классе бесконечных векторов с положительными координатами?

4) Или существует однопараметрическое семейство положительных решений?

5) Если существует однопараметрическое семейство решений, то какую структуру имеет соответствующее множество параметров?

В настоящей заметке при определенных ограничениях относительно последовательности функций $\{h_j(u)\}_{j=0}^\infty$ доказывается существование однопараметрического семейства покомпонентно положительных решений. Устанавливается, что каждое решение из этого семейства принадлежит пространству l_1. Описывается множество параметров. Устанавливается также монотонная зависимость каждого решения как по параметру, так и по соответствующему индексу. В конце работы приведены частные примеры последовательности функций $\{h_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$, удовлетворяющие условиям сформулированной теоремы. Следует отметить, что сформулированная теорема носит конструктивный характер, ибо в доказательстве этой теоремы, кроме соответствующих априорных оценок, применяется метод последовательных приближений.

Также отметим, что методы, разработанные в работе, позволяют успешно продолжить исследования для построения однопараметрического семейства положительных решений в $L_1(0,\infty)$ соответствующего нелинейного интегрального уравнения (1.7).

2. Формулировка теоремы

Прежде чем сформулируем основной результат настоящей работы, введем некоторые обозначения.

Рассмотрим следующую функцию, определенную на отрезке $[0,1]$:

$$\chi(p)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kp^k,\quad p\in[0,1], \tag{2.1}$$

где $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$– удовлетворяет условиям (1.3)–(1.5). Из (1.3)–(1.5) следует

- $\chi(0)=a_0=0,\quad \chi(1)=\mu>1,\quad \chi\in C[0,1],$ (2.2)
- $\chi(p)\quad\uparrow\quad$ по p на $[0,1]$. (2.3)

Следовательно, существует единственное число $p_0>0$ такое, что $\chi(p_0)=1$. Зафиксируем это число и сделаем следующие предположения относительно

$$\omega_j(u)\equiv h_j(u)-u,\quad j=0,1,2,\dots: \tag{2.4}$$

I) пусть существует число $\alpha>0$ такое, что при каждом фиксированном $j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ функции $\omega_j(u)\quad\uparrow\quad$ по u на $[\alpha p_0^j,+\infty)$,

II) $\omega_j\in C(\Omega_j)$, где $\Omega_j\equiv[\alpha p_0^j,+\infty),\quad j=0,1,2,\dots,$

III) существует $\sup\limits_{u\geq\alpha}\omega_j(u)\equiv\tau_j,\quad j=0,1,2,\dots,$ где $\{\tau_j\}_{j=0}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию:

$$\sum_{j=0}^{\infty}j\tau_jp_0^{-j}<+\infty, \tag{2.5}$$

IV) $\omega_j(u)\geq0,\quad u\in\Omega_j,\quad j=0,1,2,\dots.$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (1.3)–(1.5), *а* $\{\omega_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$ *обладает свойствами* (2.4) *и* *I*) – *IV*). *Тогда система* (1.1) *имеет однопараметрическое семейство покомпонентно положительных решений* $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Pi}$, $x_\gamma=(x_{0,\gamma},x_{1,\gamma},\dots,x_{n,\gamma},\dots)^T$, *причем*
1) $x_\gamma\in l_1,\quad\forall\gamma\in\Pi\equiv[\alpha,+\infty),$
2) *если* $\gamma_1,\gamma_2\in\Pi$ *и* $\gamma_1>\gamma_2$, *то справедливы оценки снизу:*

$$x_{n,\gamma_1}-x_{n,\gamma_2}\geq(\gamma_1-\gamma_2)p_0^n,\quad\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{2.6}$$

3) *если существует натуральное число* N_0 *такое, что при всяком фиксированном* $u\geq0$

$$\omega_{j+1}(u)\leqslant\omega_j(u),\quad j=N_0,N_0+1,N_0+2,\dots, \tag{2.7}$$

то

$$x_{n+1,\gamma}\leqslant x_{n,\gamma},\quad n=N_0,N_0+1,N_0+2,\dots, \tag{2.8}$$

$\forall\gamma\in\Pi.$

3. Доказательство теоремы

Сначала рассмотрим следующую вспомогательную дискретную систему типа Вольтерра:

$$y_n = z_n + \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n} y_j, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.1}$$

относительно искомого бесконечного вектора

$$y = (y_0, y_1, \ldots, y_n \ldots)^T, \tag{3.2}$$

где

$$z_n \equiv \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n} \tau_j, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.3}$$

Умножим обе части системы (3.1) на p_0^{-n} $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, и после обозначений

$$y_n^* \equiv p_0^{-n} y_n, \quad z_n^* \equiv p_0^{-n} z_n, \quad b_n \equiv p_0^n a_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.4}$$

относительно $y^* = (y_0^*, y_1^*, \ldots, y_n^* \ldots)^T$ приходим к следующей системе:

$$y_n^* = z_n^* + \sum_{j=n}^{\infty} b_{j-n} y_j^*, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.5}$$

Так как $\chi(p_0) = 1$, то из (3.4) сразу следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = 1. \tag{3.6}$$

Ниже убедимся, что

- $$z^* \in l_1, \quad z^* = (z_0^*, z_1^*, \ldots, z_n^* \ldots)^T, \tag{3.7}$$
- $$\sum_{n=0}^{\infty} n z_n^* < +\infty. \tag{3.8}$$

Заметим, что (3.7) очевидным образом следует из (3.8). Поэтому достаточно доказать (3.8). При любом $N \in \mathbb{N}$, учитывая (3.4) и (2.5), оценим частичную сумму ряда (3.8):

$$\sum_{j=0}^{N} j z_j^* = \sum_{j=0}^{N} j p_0^{-j} \sum_{i=j}^{\infty} a_{i-j} \tau_i \leqslant \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=j}^{\infty} a_{i-j} i p_0^{-i} \tau_i = \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=j}^{N} a_{i-j} i p_0^{-i} \tau_i +$$

$$+ \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=N+1}^{\infty} a_{i-j} i p_0^{-i} \tau_i = \sum_{i=0}^{N} i p_0^{-i} \tau_i \sum_{j=0}^{i} a_{i-j} + \sum_{i=N+1}^{\infty} i p_0^{-i} \tau_i \sum_{j=0}^{N} a_{i-j} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{N} i p_0^{-i} \tau_i \sum_{j=0}^{i} a_{i-j} + \sum_{i=N+1}^{\infty} i p_0^{-i} \tau_i \sum_{j=0}^{i} a_{i-j} = \sum_{i=0}^{N} i p_0^{-i} \tau_i \sum_{m=0}^{i} a_m + \sum_{i=N+1}^{\infty} i p_0^{-i} \tau_i \sum_{m=0}^{i} a_m \leqslant$$

$$\leqslant \mu \left(\sum_{i=0}^{N} i p_0^{-i} \tau_i + \sum_{i=N+1}^{\infty} i p_0^{-i} \tau_i \right) = \mu \sum_{i=0}^{\infty} i p_0^{-i} \tau_i < +\infty.$$

Поскольку $N \in \mathbb{N}-$ произвольное, а $z_n^* \geq 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то из полученной оценки следует (3.8).

Таким образом, мы получили, что свободный член z^* системы (3.5) и последовательность $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют соответственно условиям (3.8),(3.7) и (3.6). Следовательно, из результатов работы [10] (см. стр. 81, лемма 4.8) следует, что система (3.5) имеет покомпонентно положительное решение в пространстве l_1.

Из (3.4) следует

$$y_n = p_0^n \cdot y_n^*, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.9}$$

является решением системы (3.1). Так как $y^* \in l_1$ и $p_0 \in (0,1)$, то из (3.9) получаем

$$y = (y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots)^T \in l_1. \tag{3.10}$$

Теперь для основной системы (1.1) введем в рассмотрение следующие итерации:

$$x_{n,\gamma}^{(m+1)} = \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n} h_j(x_{j,\gamma}^{(m)}), \quad x_{n,\gamma}^{(0)} = \gamma p_0^n, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad m = 0,1,2,\ldots, \quad \gamma \in \Pi. \tag{3.11}$$

Индукцией по m докажем, что

$$A) \ \ x_{n,\gamma}^{(m)} \ \ \uparrow \ \ \text{по} \ \ m, \ \ \forall \gamma \in \Pi, \ \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$B) \ \ x_{n,\gamma}^{(m)} \leqslant \gamma p_0^n + y_n, \ \ \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ \ \forall \gamma \in \Pi, \ \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Сначала докажем монотонность последовательности $\{x_{n,\gamma}^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ по m. Действительно, в силу монотонности $\{\omega_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$ по u на $[\alpha p_0^j, +\infty)$, $\ j = 0,1,2,\ldots$, с учетом условия $IV)$ теоремы, из (3.11) имеем

$$x_{n,\gamma}^{(1)} = \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n}(x_{j,\gamma}^{(0)} + \omega_j(x_{j,\gamma}^{(0)})) \geq \gamma \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n} p_0^j =$$

$$= \gamma \sum_{i=0}^{\infty} a_i p_0^{n+i} = \gamma p_0^n \chi(p_0) = \gamma p_0^n = x_{n,\gamma}^{(0)}.$$

Предполагая

$$x_{n,\gamma}^{(m)} \geq x_{n,\gamma}^{(m-1)}$$

при некотором $m \in \mathbb{N}$, $\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\ \gamma \in \Pi$ и учитывая монотонность $\omega_j(u)$ по u, из (3.11) получим

$$x_{n,\gamma}^{(m+1)} \geq \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n}(x_{j,\gamma}^{(m-1)} + \omega_j(x_{j,\gamma}^{(m-1)})) = x_{n,\gamma}^{(m)}.$$

Теперь докажем неравенства $B)$. При $m = 0$ оно очевидно, ибо $y_n \geq 0$, $\ n = 0,1,2,\ldots$. Предположим, что $B)$ выполняется при некотором $m \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая $I)$, $\ III)$ и $IV)$, из (3.11) будем иметь

$$x_{n,\gamma}^{(m+1)} \leqslant \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n}(\gamma p_0^j + y_j + \omega_j(\gamma p_0^j + y_j)) \leqslant \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n}(\gamma p_0^j + y_j + \omega_j(\gamma + y_j)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n}(\gamma p_0^j + y_j + \tau_j) = \gamma \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n} p_0^j + \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n} y_j + z_n = \gamma p_0^n + y_n.$$

Из $A)$ и $B)$ следует, что при каждом фиксированном $\gamma \in \Pi$ последовательность бесконечных векторов $\{x_\gamma^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$, $\quad x_\gamma^{(m)} = (x_{0,\gamma}^{(m)}, x_{1,\gamma}^{(m)}, \ldots, x_{n,\gamma}^{(m)}, \ldots)^T$ имеет предел, когда $m \to \infty : \lim\limits_{m\to\infty} x_\gamma^{(m)} = x_\gamma$, причем предельный вектор в силу условия $II)$ и из того факта, что

$$\sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n}(x_{j,\gamma} + \omega_j(x_{j,\gamma})) \leqslant \gamma + \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} y_n < +\infty$$

удовлетворяет системе (1.1). Из $A)$ и $B)$, следует также

$$\gamma p_0^n \leqslant x_{n,\gamma} \leqslant \gamma p_0^n + y_n, \quad \gamma \in \Pi, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Теперь докажем неравенство (2.6). С этой целью сначала индукцией по m убедимся, что если $\gamma_1, \gamma_2 \in \Pi$, $\ \gamma_1 > \gamma_2$, то

$$x_{n,\gamma_1}^{(m)} - x_{n,\gamma_2}^{(m)} \geq (\gamma_1 - \gamma_2) p_0^n, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad m = 0,1,2,\ldots. \tag{3.12}$$

В случае $m = 0-$ (3.12) выполняется очевидным образом, ибо оно превращается в равенство. Пусть (3.12) выполняется при некотором $m \in \mathbb{N}$. Тогда из монотонности $\omega_j(u)$ по u на $[\alpha p_0^j, +\infty)$, $\ j = 0, 1, 2, \dots$ и с учетом $\gamma_i \geq \alpha$, $\ i = 1, 2$, будем иметь

$$x_{n,\gamma_1}^{(m+1)} - x_{n,\gamma_2}^{(m+1)} = \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n}(x_{j,\gamma_1}^{(m)} - x_{j,\gamma_2}^{(m)} + \omega_j(x_{j,\gamma_1}^{(m)}) - \omega_j(x_{j,\gamma_2}^{(m)})) \geq \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n}(x_{j,\gamma_1}^{(m)} - x_{j,\gamma_2}^{(m)}) \geq$$

$$\geq (\gamma_1 - \gamma_2)\sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n}p_0^j = (\gamma_1 - \gamma_2)p_0^n \cdot \chi(p_0) = (\gamma_1 - \gamma_2)p_0^n.$$

Устремляя в (3.12) $m \to \infty$, приходим к (2.6).

Для завершения доказательства теоремы нам осталось убедиться, что при выполнении условия (2.7) следует неравенство (2.8).

Сначала докажем, что при выполнении условия (2.7) имеет место

$$x_{n+1,\gamma}^{(m)} \leqslant x_{n,\gamma}^{(m)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad \gamma \in \Pi. \tag{3.13}$$

При $m = 0$ это следует из следующего простого неравенства:

$$x_{n+1,\gamma}^{(0)} = \gamma p_0^{n+1} \leqslant \gamma p_0^n = x_{n,\gamma}^{(0)}.$$

Пусть (3.13) выполняется для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая (2.7), монотонность $\omega_j(u)$ по u на $[\alpha p_0^j, +\infty)$, $\ j = 0, 1, 2, \dots$, из (3.11) получим

$$x_{n+1,\gamma}^{(m+1)} - x_{n,\gamma}^{(m+1)} = \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{j-(n+1)}(x_{j,\gamma}^{(m)} + \omega_j(x_{j,\gamma}^{(m)})) - \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n}(x_{j,\gamma}^{(m)} + \omega_j(x_{j,\gamma}^{(m)})) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_{k+n+1,\gamma}^{(m)} + \omega_{k+n+1}(x_{k+n+1,\gamma}^{(m)})) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_{k+n,\gamma}^{(m)} + \omega_{k+n}(x_{k+n,\gamma}^{(m)})) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_{k+n+1,\gamma}^{(m)} - x_{k+n,\gamma}^{(m)} + \omega_{k+n+1}(x_{k+n+1,\gamma}^{(m)}) - \omega_{k+n}(x_{k+n,\gamma}^{(m)})) = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_{k+n+1,\gamma}^{(m)} - x_{k+n,\gamma}^{(m)}) \leqslant 0$$

в силу индукционного предположения,

$$I_2 \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\omega_{k+n+1}(x_{k+n+1,\gamma}^{(m)}) - \omega_{k+n+1}(x_{k+n,\gamma}^{(m)})) \leqslant 0,$$

в силу того, что $\omega_j(u) \uparrow$ по u на $[\alpha p_0^j, +\infty)$, $\ j = 0, 1, 2, \dots$, и индукционного предположения, а

$$I_3 \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\omega_{k+n+1}(x_{k+n,\gamma}^{(m)}) - \omega_{k+n}(x_{k+n,\gamma}^{(m)})) \leqslant 0$$

в силу выполнения условия (2.7).

Следовательно,

$$x_{n+1,\gamma}^{(m+1)} \leqslant x_{n,\gamma}^{(m+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \gamma \in \Pi.$$

В обеих частях (3.13) m устремляя к бесконечности, приходим к (2.8). Таким образом, **теорема полностью доказана.**

В конце работы приведем несколько примеров последовательности $\{\omega_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$, для которых выполняются все условия сформулированной теоремы:

$$a) \ \ \omega_j(u) = p_0^{2j}(1 - e^{-u}), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad u \geq 0,$$

$$b)\ \ \omega_j(u) = p_0^{2j}\frac{u}{u+c}, \quad \forall c>0, \quad j=0,1,2,\dots, \quad u\geq 0,$$

$$c)\ \ \omega_j(u) = p_0^{2j}\frac{u^q}{u^q+c}, \quad \forall c>0, \quad \forall q>2, \quad j=0,1,2,\dots, \quad u\geq 0,$$

$$d)\ \ \omega_j(u) = p_0^{2j}\frac{u+sin^2u}{u+sin^2u+1}, \quad j=0,1,2,\dots, \quad u\geq 0.$$

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Енгибарян Н.Б. *Об одной задаче нелинейного переноса излучения* // Астрофизика. 1966. Т. 2, № 4. С. 31–36.
2. Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А. *Качественное различие решений для стационарных уравнений Больцмана в линейном и нелинейном случаях* // Теоретическая и Математическая Физика. 2014. Т. 180, № 2. С. 497–504.
3. J.D. Sargan. *The distribution of wealth* // Econometrics. 1957. Vol. 25, № 4. P. 568–590.
4. A.Kh.Khachatryan, Kh.A. Khachatryan *On the Solvability of a Nonlinear Integro-Differential Equations Arising in the Income Distribution Problem* // Comp. Mathematics and Math. Physics. 2010. V.50 , № 10. P. 1702–1711.
5. O. Diekman *Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection* // J. Math. Biol. 1978. V. 6, № 2. P. 109–130.
6. F. Dedagić, S. Halilović, E. Baraković *On the solvability of discrete Nonolinear Hammerstein Systems in $l_{p,\sigma}$ Spaces* // Mathematica Balkanica, New Series. 2012. Vol. 26, Fasc. 3-4. P. 325–333.
7. F. Dedagić *On the discrete Nonlinear Hammerstein systems with non-symmetric kernels* // Sarajevo Journal of Mathematics. 2009. Vol. 5 (18). P. 279–289.
8. Christopher T.H. Baker, Yihong Song *Concerning periodic Solutions to non-linear discrete Volterra equations with finite memory.* Applied Math. Group Research. 2007. report, University of Chester, -24 pp.
9. Yihong Song, Christopher T.H. Baker *Linearized stability analysis of discrete Volterra equations* // Journal Math. Anal. and Appl. 2004. Vol. 294. P. 310–333.
10. Арабаджян Л.Г. *Уравнения Винера-Хопфа в консервативном случае и нелинейные уравнения факторизации.* Диссертация на соиск. уч. степ. кандидата физ.мат. наук, Ереван, 86- стр., 1981.

Эрмине Оганесовна Азизян,
Армянский национальный аграрный университет,
ул. Теряна, 74,
0009, г.Ереван, Армения
E-mail: Hermineazizyan@mail.ru

Хачатур Агавардович Хачатрян,
Институт математики НАН РА,
проспект Маршала Баграмяна, 24/5,
0019, г. Ереван, Армения
E-mail: Khach82@rambler.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 1 (2016). С. 22-37.

УДК 517.968

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ С МОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

С.Н. АСХАБОВ

Аннотация. Методом монотонных операторов устанавливаются глобальные теоремы о существовании, единственности, оценках и способах нахождения решений для различных классов нелинейных интегральных уравнений типа свертки в вещественных пространствах 2π-периодических функций $L_p(-\pi,\pi)$.

Ключевые слова: нелинейное уравнение типа свертки, монотонный оператор, потенциальный оператор.

Mathematics Subject Classification: 45G10, 47H05

1. Введение

Многие задачи современной математики, физики, механики и биологии приводят к нелинейным интегральным уравнениям типа свертки. Например, общий класс нелинейных сервомеханизмов (следящих систем) описывается [1] нелинейным интегральным уравнением типа свертки вида

$$u(x)+\int_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\cdot F[t,u(t)]\,dt = f(x)\,, \tag{1}$$

где $f(x)$ есть входной сигнал, а $h(x)$ — ответный импульс системы. Уравнение (1) возникает также [2] в теории электрических сетей (сигнальной трансмиссии через общую электрическую сеть), содержащих нелинейные элементы (нелинейный резистр). При $f(x)=0$ уравнение вида (1) описывает [3], [4] детерменистические модели пространственного распространения эпидемии или благоприятного гена среди популяции вдоль линии с различными нелинейностями в эпидемической и генетической моделях, а также используется как математическая модель некоторых инфекционных заболеваний или как уравнение роста некоторых видов популяции.

Интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью возникают [5], [6] в теории инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду, при описании процесса распространения ударных волн в трубах, наполненных газом [7], а также при описании динамики открытой p-адической струны для скалярного поля тахионов [8]–[10].

Информацию о других приложениях нелинейных интегральных уравнений типа свертки можно найти в монографии [11].

В данной работе, используя новый подход, методом монотонных операторов [12]–[14] устанавливаются глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решений для различных классов нелинейных уравнений типа свертки в вещественных пространствах 2π-периодических функций $L_p(-\pi,\pi)$ при любых значениях $p\in(1,\infty)$ (см.

S.N. Askhabov, Periodic solutions of convolution type equations with monotone nonlinearity.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00422-а).

Поступила 5 июля 2015 г.

[16]). Ранее подобные результаты в случае пространств $L_p(-\infty,\infty)$ были доказаны в [11], в зависимости от рассматриваемого класса уравнений, либо только при $p \in (1,2]$, либо только при $p \in [2,\infty)$ (по сути дела, это было связано с тем, что согласно неравенству Юнга [11, с. 30], оператор свертки действует из пространства $L_p(-\infty,\infty)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(-\infty,\infty)$, $p' = p/(p-1)$, лишь при $p \in (1,2]$). В рассматриваемом здесь случае пространств $L_p(-\pi,\pi)$, используя неравенство Юнга при $p \in (1,2]$ и вложения $L_p(-\pi,\pi) \subset L_2(-\pi,\pi) \subset L_{p'}(-\pi,\pi)$ при $p \in [2,\infty)$, показано, что оператор свертки действует непрерывно из пространства $L_p(-\pi,\pi)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(-\pi,\pi)$ при любых значениях $p \in (1,\infty)$ и положителен, что позволило доказать теоремы существования и единственности решения для всех рассматриваемых уравнений без дополнительных ограничений на p. Кроме того, в случае монотонных (не степенных) нелинейностей общего вида, комбинированием принципов Банаха-Каччиополи и Браудера-Минти, показано, что решения этих уравнений в рамках пространства $L_2(-\pi,\pi)$ могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа (ср. [17]), а в случае степенных нелинейностей вида u^{p-1}, используя теорию потенциальных монотонных операторов, доказано, что решения могут быть найдены методом наискорейшего спуска (градиентным методом) в пространствах $L_p(-\pi,\pi)$ при любом четном $p > 2$ (ср. [18]).

Для удобства ссылок, приведем основные определения и вспомогательные утверждения, используемые в данной работе, придерживаясь терминологии и обозначений, принятых в монографии [14].

Пусть X — вещественное банахово пространство и X^* сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle y,x\rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$, а через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ нормы в X и X^*, соответственно.

Определение 1. *Пусть $u,v \in X$ — произвольные элементы. Оператор $A : X \to X^*$ (т.е. действующий из X в X^*) называется:*

монотонным, если $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0$;

строго монотонным, если $\langle Au - Av, u - v\rangle > 0$ при $u \neq v$;

сильно монотонным, если $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq m \cdot \|u-v\|^2$, $m > 0$;

равномерно монотонным, если $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq \beta(\|u-v\|)$, где β — возрастающая на $[0,\infty)$ функция такая, что $\beta(0) = 0$;

коэрцитивным, если $\langle Au, u\rangle \geq \gamma(\|u\|)\cdot\|u\|$, где $\gamma(s)$ — вещественная функция неотрицательного аргумента такая, что $\gamma(s) \to \infty$ при $s \to \infty$;

липшиц-непрерывным, если $\|Au - Av\|_* \leqslant M \cdot \|u-v\|$, $M > 0$;

ограниченно липшиц-непрерывным, если $\|Au - Av\|_* \leqslant \mu(r)\cdot\|u-v\|$, где μ — возрастающая на $[0,\infty)$ функция, а $r = \max(\|u\|,\|v\|)$;

хеминепрерывным, если функция $s \to \langle A(u + s\cdot v), w\rangle$ непрерывна на $[0,1]$ при любых фиксированных $u,v,w \in X$.

Основная теорема теории монотонных операторов (см, например, [14]) – теорема (принцип) Браудера-Минти – сохраняется, если вместо условия коэрцитивности предположить, что оператор $A : X \to X^*$ удовлетворяет условию: $\displaystyle \ell im_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|} = \infty$.

Если A — *линейный* оператор, то определение монотонного, строго монотонного и сильно монотонного оператора совпадает, соответственно, с определением *положительного, строго положительного* и *сильно положительного* (*положительно определенного*) оператора [14].

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$, — произвольный (не обязательно линейный) функционал.

Определение 2. *Функционал $f : X \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемым по Гато, если существует оператор $A : X \to X^*$ такой, что для всех $u, v \in X$ выполняется равенство* $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(u+t\cdot v)-f(u)}{t} = \langle Au, v\rangle$. *При этом оператор A называют градиентом функционала f* и *пишут $A = grad\, f$.*

Определение 3. *Оператор $A : X \to X^*$ называется потенциальным, если существует функционал $f : X \to \mathbb{R}$ такой, что оператор A является его градиентом. При этом функционал f называют потенциалом оператора A.*

Пример 1 [14]. Пусть X — вещественное рефлексивное банахово пространство и $A : X \to X^*$ — линейный ограниченный симметрический оператор, т. е. $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$, $\forall u, v \in X$. Тогда A является потенциальным оператором, и его потенциал $f(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle$.

2. О положительности и потенциальности оператора свертки

Рассмотрим в пространстве Лебега $L_p(-\pi,\pi)$, $1 < p < \infty$, состоящем из вещественных 2π-периодических функций, интегральный оператор свертки

$$(Hu)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\, u(t)\, dt,$$

где ядро $h(x) \in L_1(-\pi,\pi)$ есть $2\,\pi$-периодически продолженная на отрезок $[-2\,\pi, 2\,\pi]$ функция.

Для выяснения вопроса о том, при каких условиях на ядро $h(x)$ оператор свертки H является положительным в пространстве $L_p(-\pi,\pi)$, введем дискретное преобразование Фурье (изображение) последовательности комплексных чисел $a = \{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$:

$$a(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{i\,k\,x}, \qquad \text{где } \ a_k = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a(x)\, e^{-i\,k\,x} dx\,.$$

Нам понадобятся следующие два равенства

формула свертки изображений [21, с. 233]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} a(x-t)\, b(t)\, dt = 2\,\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, b_k\, e^{i\,k\,x},$$

обобщенное равенство Парсеваля [22, с. 158]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} a(x)\, \overline{b(x)}\, dx = 2\,\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, \overline{b_k}\,,$$

где $b(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} b_k\, e^{i\,k\,x}$, $b_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} b(x)\, e^{-i\,k\,x} dx$.

Лемма 1. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и выполнены условия:*

$$\left\{ \begin{array}{r} h(x) \in L_{p/[2\,(p-1)]}(-\pi,\pi), \text{ если } 1 < p \leqslant 2, \\ h(x) \in L_1(-\pi,\pi), \quad \text{ если } 2 < p < \infty. \end{array} \right. \tag{2}$$

$$h_c(k) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)\, cos(k\cdot t)\, dt \geq 0 \quad \text{при } k = 0,1,2,3,\dots\, . \tag{3}$$

Тогда оператор свертки H *действует непрерывно из пространства* $L_p(-\pi,\pi)$ *в сопряженное с ним пространство* $L_{p'}(-\pi,\pi)$*,* $p' = p/(p-1)$*, и положителен, причем* $\forall u(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ *выполняются неравенства:*

$$\|Hu\|_{p'} \leqslant c_{p,h}\cdot\|u\|_p\,, \tag{4}$$

$$\langle Hu, u\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\, u(t)\, dt\right) u(x)\, dx \geq 0,$$

где

$$c_{p,h} = \left\{ \begin{array}{r} 2\pi\cdot\|h\|_{p'/2}, \text{ если } 1 < p \leqslant 2, \\ (2\pi)^{2/p'}\|h\|_1, \quad \text{ если } 2 < p < \infty. \end{array} \right. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $1 < p \leqslant 2$ и $u(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ – произвольная функция. Так как $h(x) \in L_{p/[2\,(p-1)]}(-\pi,\pi)$, то из неравенства Юнга [23, с. 67] непосредственно вытекает, что

$$\|Hu\|_{p'} \leqslant 2\,\pi\,\|h\|_{p'/2}\|u\|_p\,, \quad \forall u(x) \in L_p(-\pi,\pi),\ 1 < p \leqslant 2\,. \tag{6}$$

Пусть теперь $2 < p < \infty$. Тогда имеют место непрерывные вложения $L_p(-\pi,\pi) \subset L_2(-\pi,\pi) \subset L_{p'}(-\pi,\pi)$, причем, в силу неравенства Гельдера, выполняются неравенства

$$\|u\|_{p'} \leqslant (2\pi)^{(p-2)/(2p)}\|u\|_2\,, \quad \forall u(x) \in L_2(-\pi,\pi)\,,$$

$$\|u\|_2 \leqslant (2\pi)^{(p-2)/(2p)}\|u\|_p\,, \quad \forall u(x) \in L_p(-\pi,\pi).$$

Используя последние два неравенства, а также неравенство (6) при $p = p' = 2$, имеем

$$\|Hu\|_{p'} \leqslant (2\pi)^{(p-2)/(2p)}\|Hu\|_2 \leqslant (2\pi)^{(p-2)/(2p)}2\pi\cdot\|h\|_1\cdot\|u\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{(p-2)/(2p)}2\pi\cdot(2\pi)^{(p-2)/(2p)}\|h\|_1\cdot\|u\|_p = (2\pi)^{2(p-1)/p}\|h\|_1\cdot\|u\|_p\,,$$

т.е.

$$\|Hu\|_{p'} \leqslant (2\pi)^{2/p'}\|h\|_1\cdot\|u\|_p\,, \quad \forall u(x) \in L_p(-\pi,\pi),\ 2 < p < \infty\,. \tag{7}$$

Из неравенств (6) и (7) непосредственно вытекает, что оператор H действует непрерывно из $L_p(-\pi,\pi)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$ при любом $p \in (1,\infty)$, причем справедливо неравенство (4).

Докажем положительность оператора H. В силу формулы свертки изображений, имеем $(Hu)(x) = 2\,\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} h_k\cdot u_k\cdot e^{i\,k\,x}$, где

$$h_k = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(x)\cdot e^{-i\,k\,x}dx\,, \qquad u_k = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(x)\cdot e^{-i\,k\,x}dx\,.$$

Значит,

$$2\,\pi\cdot h_k\cdot u_k = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(Hu)(x)\cdot e^{-i\,k\,x}dx\,.$$

Поэтому, используя обобщенное равенство Парсеваля, с учетом, что рассматриваются вещественные функции $u(x)$, имеем

$$\langle Hu,u\rangle=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(Hu)(x)\cdot\overline{u(x)}\,dx=2\,\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\,\pi\cdot h_k\cdot u_k\cdot\overline{u_k}=$$

$$=(2\,\pi)^2\cdot\left(h_0\cdot|u_0|^2+\sum_{k=-\infty}^{-1}h_k\cdot|u_k|^2+\sum_{k=1}^{\infty}h_k\cdot|u_k|^2\right)=$$

$$=(2\,\pi)^2\cdot\left(h_0\cdot|u_0|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[h_{-k}\cdot|u_{-k}|^2+h_k\cdot|u_k|^2\Big]\right)\,. \tag{8}$$

Замечая теперь, что

$$|u_{-k}|^2=u_{-k}\cdot\overline{u_{-k}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u(t)\cdot e^{ikt}dt\right)\cdot\left(\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u(t)\cdot e^{-ikt}dt\right)=\overline{u_k}\cdot u_k=|u_k|^2\,,$$

$$h_k+h_{-k}=\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}h(t)\left[e^{ikt}+e^{-ikt}\right]\,dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}h(t)\cos(kt)dt=\frac{1}{\pi}h_c(k),$$

из равенства (8) получаем

$$\langle Hu,u\rangle=(2\,\pi)^2\left(\frac{1}{2\,\pi}\cdot h_c(0)\cdot|u_0|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\,h_c(k)\cdot|u_k|^2\right)=$$

$$=2\,\pi\cdot h_c(0)\cdot|u_0|^2+4\,\pi\sum_{k=1}^{\infty}h_c(k)\cdot|u_k|^2\,. \tag{9}$$

Из формулы (9) видно, что оператор свертки H является положительным, если $h_c(k)\geq 0$, т.е. если выполнено условие (3). $\square$

Аналогично доказывается следующая лемма, двойственная лемме 1.

Лемма 2. *Пусть* $1<p<\infty$,

$$\begin{cases} h(x)\in L_1(-\pi,\pi), & \text{если } 1<p\leqslant 2,\\ h(x)\in L_{p/2}(-\pi,\pi), & \text{если } 2<p<\infty \end{cases} \tag{10}$$

и выполнено условие (3). *Тогда оператор свертки* H *действует непрерывно из* $L_{p'}(-\pi,\pi)$ *в* $L_p(-\pi,\pi)$, $p'=p/(p-1)$, *и положителен, причем*

$$\|Hu\|_p\leqslant c^*_{p,h}\cdot\|u\|_{p'}\,,\quad \forall u(x)\in L_{p'}(-\pi,\pi)\,,$$

где

$$c^*_{p,h}=\begin{cases} (2\pi)^{2/p}\cdot\|h\|_1, & \text{если } 1<p\leqslant 2,\\ 2\pi\|h\|_{p/2}, & \text{если } 2<p<\infty. \end{cases}$$

Замечание 1. Если в леммах 1 и 2 дополнительно предположить, что ядро $h(x)$ есть четная функция, то оператор свертки H будет потенциальным. В самом деле, в случае четного ядра $h(x)$ оператор H является симметрическим и, следовательно, на основании примера 1, потенциален.

3. Теоремы существования и единственности

Всюду далее предполагается, что заданная функция $F(x,u)$, порождающая нелинейность рассматриваемых уравнений, определена при $x \in [-\pi,\pi]$, $u \in \mathbb{R}$, имеет период 2π по x и удовлетворяет условиям Каратеодори [15, с. 15]: она измерима по x при каждом фиксированном u и непрерывна по u почти для всех x. Обозначим через $L_p^+(-\pi,\pi)$ множество всех неотрицательных функций из $L_p(-\pi,\pi)$, а через F оператор суперпозиции (оператор Немыцкого), порождаемый функцией $F(x,u)$.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, *ядро* $h(x)$ *удовлетворяет условиям* (2) *и* (3), *а нелинейность* $F(x,u)$ *для почти всех* $x \in [-\pi,\pi]$ *и всех* $u \in \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям:*

3.1) $|F(x,u)| \leqslant c(x) + d_1 \cdot |u|^{p-1}$, *где* $c(x) \in L_{p'}^+(-\pi,\pi)$, $d_1 > 0$;

3.2) $F(x,u)$ *не убывает по* u *почти при каждом* x;

3.3) $F(x,u)\cdot u \geq d_2 \cdot |u|^p - D(x)$, *где* $D(x) \in L_1^+(-\pi,\pi)$, $d_2 > 0$.

Тогда при любых $\lambda > 0$ *и* $f(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$ *уравнение*

$$\lambda \cdot F[x,u(x)] + \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\,u(t)\,dt = f(x) \tag{11}$$

имеет решение $u^*(x) \in L_p(-\pi,\pi)$. *Это решение единственно, если в условии 3.2) функция* $F(x,u)$ *строго возрастает по* u. *Кроме того, если условие 3.3) выполнено при* $D(x)=0$, *то* $\|u^*\|_p \leqslant \left(\lambda^{-1}\cdot d_2^{-1}\,\|f\|_{p'}\right)^{1/(p-1)}$.

Доказательство. Запишем данное уравнение (11) в операторном виде: $Au = f$, где $Au = \lambda\cdot Fu + Hu$. В силу леммы 1 и условий 3.1)–3.3) получаем, что оператор A действует непрерывно из $L_p(-\pi,\pi)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$ и является монотонным и коэрцитивным. При этом оператор A является строго монотонным, если функция $F(x,u)$ строго возрастает по u. Поэтому утверждения о существовании и единственности решения вытекают из теоремы (принципа) Браудера-Минти (см., например, [14]) – основной теоремы теории монотонных операторов. Наконец, используя условие 3.3) при $D(x)=0$, положительность оператора H и равенство $Au^* = f$, имеем

$$\lambda\cdot d_2\cdot\|u^*\|_p^p \leqslant \lambda\cdot\langle Fu^*,u^*\rangle \leqslant \lambda\cdot\langle Fu^*,u^*\rangle + \langle Hu^*,u^*\rangle =$$
$$= \langle Au^*,u^*\rangle = \langle f,u^*\rangle \leqslant \|f\|_{p'}\|u\|_p,$$

откуда непосредственно вытекает доказываемая оценка для нормы решения. □

Следствие 1. *Пусть* $p \geq 2$ *– любое четное число, ядро* $h(x) \in L_1(-\pi,\pi)$ *и удовлетворяет условию* (3). *Тогда уравнение*

$$u^{p-1}(x) + \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\,u(t)\,dt = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ *при любом* $f(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$, *причем* $\|u^*\|_p \leqslant \|f\|_{p'}^{1/(p-1)}$.

В следующей теореме существование и единственность решения рассматриваемого уравнения типа Гаммерштейна устанавливаются без требования коэрцитивности нелинейности.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $h(x) \in L_1(-\pi,\pi)$ *при* $1 < p \leqslant 2$ *и* $h(x) \in L_{p/2}(-\pi,\pi)$ *при* $2 < p < \infty$. *Если ядро* $h(x)$ *удовлетворяет условию* (3), *а нелинейность* $F(x,u)$ *удовлетворяет условиям 3.1) и 3.2) теоремы 1, то уравнение*

$$u(x) + \lambda\int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\,F[t,u(t)]\,dt = f(x) \tag{12}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ *при любом* $\lambda \geq 0$ *и любом* $f(x) \in L_p(-\pi,\pi)$. *Кроме того, если выполнены условия 3.1) и 3.3) при* $c(x) = D(x) = 0$, *то* $\|u^*\|_p \leqslant d_1 \cdot d_2^{-1} \cdot \|f\|_p$.

Доказательство. При $\lambda = 0$ утверждения теоремы очевидны, поэтому считаем далее, что $\lambda > 0$. Запишем уравнение (12) в операторном виде: $u + \lambda \cdot HFu = f$. Из условий 3.1) и 3.2) вытекает, что оператор F действует непрерывно из $L_p(-\pi,\pi)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$ и является монотонным, а из леммы 2 вытекает, что оператор H действует непрерывно из $L_{p'}(-\pi,\pi)$ обратно в $L_p(-\pi,\pi)$ и положителен. Но тогда, по теореме 3 из [19] (см. ниже замечание 2), данное уравнение имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(-\pi,\pi)$.

Осталось доказать оценку нормы решения $u^*(x)$. Используя условия 3.1) и 3.3) при $c(x) = D(x) = 0$, положительность оператора свертки H и равенство $u^* + \lambda \cdot HFu^* = f$, имеем

$$d_2\|u^*\|_p^p \leqslant \langle u^*, Fu^*\rangle + \lambda\langle HFu^*, Fu^*\rangle =$$
$$= \langle f, Fu^*\rangle \leqslant \|f\|_p\|Fu^*\|_{p'} \leqslant d_1\|f\|_p\|u^*\|_p^{p-1},$$

откуда непосредственно вытекает доказываемая оценка. □

Следствие 2. *Пусть* $p \geq 2$ *– любое четное число, ядро* $h(x) \in L_1(-\pi,\pi)$ *и удовлетворяет условию* (3). *Тогда уравнение*

$$u(x) + \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\, u^{p-1}(t)\, dt = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ *при любом* $f(x) \in L_p(-\pi,\pi)$, *причем* $\|u^*\|_p \leqslant \|f\|_p$.

Замечание 2. Доказательство теоремы 2 в части существования и единственности решения основано на теореме 3 из [19]. Важно отметить, что в этой теореме 3, относящейся к уравнениям Гаммерштейна вида

$$u(x) + \int\limits_a^b K(x,s)\, F[s,u(s)]\, ds = f(x),$$

нелинейность $F(x,u)$ должна *не убывать* по u (в [19] предполагается, что нелинейность $F(x,u)$ *не возрастает* по u). Это следует из работы [20] этих же авторов, в которой приведено доказательство теоремы 3 из [19]. Более того, пример уравнения

$$u(x) - w(x)\int\limits_a^b w(s)\, u^{1/3}(s)\, ds = 0$$

с убывающей нелинейностью $F(s,u) = -u^{1/3}$ и вырожденным ядром $K(x,s) = w(x) \cdot w(s)$ с $w(x) \in L_{4/3}(a,b)$, имеющего два различных решения $u_1(x) = 0$ и $u_2(x) = w(x)\left(\int\limits_a^b w^{4/3}(s)\, ds\right)^{3/2}$ в пространстве $L_{4/3}(a,b)$, показывает, что утверждение о единственности решения в теореме 3 из [19] не выполняется.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение, в которое оператор свертки H входит нелинейно. В этом случае, в отличие от теорем 1 и 2, на нелинейность $F(x,u)$ накладываются условия, обеспечивающие действие оператора Немыцкого F из сопряженного пространства $L_{p'}(-\pi,\pi)$ в исходное пространство $L_p(-\pi,\pi)$, в котором ищутся решения, а также его непрерывность, строгую монотонность и коэрцитивность. Важную роль при исследовании такого уравнения играют существование, строгая монотонность и коэрцитивность обратного оператора F^{-1}.

Теорема 3. *Пусть $1 < p < \infty$, ядро $h(x)$ удовлетворяет условиям (2) и (3), а нелинейность $F(x,u)$ для почти всех $x \in [-\pi,\pi]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:*

3.4) $|F(x,u)| \leqslant g(x) + d_3|u|^{1/(p-1)}$, *где* $g(x) \in L_p^+(-\pi,\pi)$, $d_3 > 0$;

3.5) $F(x,u)$ *строго возрастает по u почти при каждом x;*

3.6) $F(x,u)\cdot u \geq d_4|u|^{p/(p-1)} - D(x)$, *где* $D(x) \in L_1^+(-\pi,\pi)$, $d_4 > 0$.

Тогда при любых $\lambda \geq 0$ и $f(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ уравнение

$$u(x) + \lambda \cdot F\left[x, \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\,u(t)\,dt\right] = f(x) \tag{13}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(-\pi,\pi)$. Кроме того, если в условиях 3.4) и 3.6) $g(x) = D(x) = 0$, то справедлива оценка

$$\|u^* - f\|_p \leqslant \lambda \cdot \left[d_3^p \cdot d_4^{-1} \cdot c_{p,h} \cdot \|f\|_p\right]^{1/(p-1)},$$

где константа $c_{p,h}$ определена в (5).

Доказательство. При $\lambda = 0$ утверждения теоремы очевидны, поэтому считаем далее, что $\lambda > 0$. В силу леммы 1, оператор H действует из $L_p(-\pi,\pi)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$, непрерывен и положителен. Из условий 3.4)-3.6) вытекает, что оператор F действует обратно из $L_{p'}(-\pi,\pi)$ в $L_p(-\pi,\pi)$, непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Следовательно, по лемме 2.1 из [11], оператор F имеет обратный F^{-1}, который действует из $L_p(-\pi,\pi)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$, хеминепрерывен и строго монотонен, причем $\lim\limits_{\|v\|_p\to\infty} \langle F^{-1}v, v\rangle \cdot \|v\|_p^{-1} = \infty$. Запишем уравнение (13) в операторном виде: $u + \lambda \cdot FHu = f$. Полагая в нем $f - u = \lambda \cdot v$ и применяя затем к обеим частям получившегося уравнения обратный оператор F^{-1}, приходим к уравнению

$$\Phi v = Hf, \quad \text{где} \quad \Phi v = F^{-1}v + \lambda \cdot Hv. \tag{14}$$

В силу указанных свойств операторов F^{-1} и H, оператор Φ действует из $L_p(-\pi,\pi)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$, хеминепрерывен и строго монотонен, причем

$$\frac{\langle \Phi v, v\rangle}{\|v\|_p} \geq \frac{\langle F^{-1}v, v\rangle}{\|v\|_p} \to \infty \quad \text{при} \quad \|v\|_p \to \infty.$$

Значит, по теореме Браудера-Минти, уравнение (14) имеет единственное решение $v^*(x) \in L_p(-\pi,\pi)$. Но тогда уравнение (13) имеет решение $u^* = f - \lambda \cdot v^* \in L_p(-\pi,\pi)$. Покажем, что это решение u^* единственно. Предположим противное, т.е. что уравнение (13) имеет два различных решения $u_1, u_2 \in L_p(-\pi,\pi)$. Тогда справедливы равенства:

$$u_1 + \lambda \cdot FHu_1 = f \quad \text{и} \quad u_2 + \lambda \cdot FHu_2 = f\,. \tag{15}$$

Из (15), путем вычитания первого равенства из второго, имеем:

$$u_2 - u_1 + \lambda \cdot FHu_2 - \lambda \cdot FHu_1 = 0$$

и, значит,

$$\langle u_2 - u_1 + \lambda \cdot FHu_2 - \lambda \cdot FHu_1, Hu_2 - Hu_1\rangle = 0$$

или

$$\langle u_2 - u_1, Hu_2 - Hu_1\rangle + \lambda \cdot \langle FHu_2 - FHu_1, Hu_2 - Hu_1\rangle = 0.$$

Но последнее равенство невозможно, так как первое слагаемое в левой части неотрицательно, в силу положительности оператора H, а второе слагаемое строго положительно, в силу строгой монотонности оператора F и того, что $Hu_1 \neq Hu_2$. Покажем, что $Hu_1 \neq Hu_2$.

В самом деле, если предположить противное, что $Hu_1 = Hu_2$, то из (15) следует, что $u_1 + \lambda \cdot FHu_2 = f$ и $u_2 + \lambda \cdot FHu_2 = f$, откуда, путем вычитания левых и правых частей, получаем $u_1 - u_2 = 0$ — что противоречит тому, что u_1 и u_2 различны.

Осталось доказать оценку нормы решения. Положим $\psi = F^{-1}v^*$. Тогда $F\psi = v^*$. Так как $F^{-1}v^* + \lambda \cdot Hv^* = Hf$, то в силу леммы 1 и равенств $g(x) = D(x) = 0$, имеем

$$d_4\|\psi\|_{p'}^{p'} \leqslant \langle F\psi, \psi\rangle = \langle v^*, F^{-1}v^*\rangle \leqslant \langle v^*, F^{-1}v^*\rangle + \lambda\langle v^*, Hv^*\rangle =$$

$$= \langle F\psi, Hf\rangle \leqslant \|F\psi\|_p\|Hf\|_{p'} \leqslant c_{p,h}\|F\psi\|_p\|f\|_p \leqslant c_{p,h}d_3\|\psi\|_{p'}^{p'-1}\|f\|_p.$$

Следовательно,

$$\|\psi\|_{p'} \leqslant d_3 d_4^{-1} c_{p,h}\|f\|_p. \tag{16}$$

Поскольку $\|v^*\|_p = \|F\psi\|_p \leqslant d_3 \cdot \|\psi\|_{p'}^{p'-1}$ и $v^* = \lambda^{-1} \cdot (f - u^*)$, то

$$\|f - u^*\|_p \leqslant \lambda d_3\|\psi\|_{p'}^{1/(p-1)},$$

откуда с учетом неравенства (16) получаем доказываемую оценку нормы решения. □

Следствие 3. *Пусть ядро $h(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ и удовлетворяет условию (3). Тогда уравнение*

$$u(x) + \left(\int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\, u(t)\, dt\right)^3 = f(x)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_{4/3}(-\pi, \pi)$ при любом $f(x) \in L_{4/3}(-\pi, \pi)$, причем $\|u^*\|_p \leqslant (\|h\|_2\|f\|_p)^3$.

Заметим, что из оценок для норм решений, доказанных в теоремах 1–3, непосредственно вытекает, что при условиях этих теорем однородные (т.е. при $f(x) = 0$) уравнения, соответствующие уравнениям (11)–(13), имеют лишь нулевое решение $u^*(x) = 0$.

4. Приближенное решение. Метод последовательных приближений

Теоремы 1–3 не содержат информации о том, как можно найти решения уравнений (11)–(13). В этом пункте при $p = 2$ и более жестких, чем п. 3, ограничениях на нелинейность доказывается не только существование и единственность решений рассматриваемых нелинейных интегральных уравнений типа свертки, но и обосновывается возможность нахождения этих решений методом последовательных приближений пикаровского типа без ограничений на величину числового параметра λ. Всюду ниже, как обычно, предполагается, что нелинейность $F(x, u)$ удовлетворяет *условиям Каратеодори* (см. п. 3).

Далее нам понадобится следующая теорема, являющаяся следствием известных результатов, доказанных в монографии [14].

Теорема 4. *Пусть H — вещественное гильбертово пространство, и оператор A действует из H в H. Если существуют постоянные $m > 0$ и $M > 0$ ($M > m$) такие, что для любых $u, v \in H$ выполняются неравенства:*

$$\|Au - Av\|_H \leqslant M \cdot \|u - v\|_H, \quad (Au - Av, u - v) \geq m \cdot \|u - v\|_H^2, \tag{17}$$

то операторное уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in H$ при любом $f \in H$. Это решение можно найти методом последовательных приближений, которые определяются по формуле:

$$u_n = u_{n-1} - \frac{m}{M^2} \cdot (Au_{n-1} - f), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

и для которых имеет место следующая оценка погрешности:

$$\|u_n - u^*\|_H \leqslant \frac{m}{M^2} \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|Au_0 - f\|_H, \tag{19}$$

где $\alpha = \sqrt{1 - m^2 \cdot M^{-2}}$, $u_0 \in H$ *— произвольный элемент.*

Если, дополнительно, A является потенциальным оператором, то это решение можно найти методом последовательных приближений, которые определяются по формуле:

$$u_n = u_{n-1} - \frac{2}{M+m} \cdot (Au_{n-1} - f), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{20}$$

и для которых имеет место следующая оценка погрешности:

$$\|u_n - u^*\|_H \leqslant \frac{2}{M+m} \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|Au_0 - f\|_H\,, \tag{21}$$

где $\alpha = (M-m)/(M+m)$.

Доказательство. Так как оператор A удовлетворяет двусторонним оценкам (17), то из теоремы 1.4 [11] вытекает, что уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in H$ и его можно найти по итерационной формуле (18) с оценкой погрешности (19). Если оператор A является еще и потенциальным, то по теореме 1.7 [11] это решение можно найти по итерационной формуле (20) с оценкой погрешности (21). □

Замечание 3. В силу неравенства Коши-Буняковского, одновременное выполнение неравенств из (17) возможно лишь при условии, что $m \leqslant M$. Поэтому, так как при $m < M$

$$\frac{M-m}{M+m} < \sqrt{\frac{M-m}{M+m}} < \frac{M+m}{M} \cdot \sqrt{\frac{M-m}{M+m}} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}\,,$$

последовательные приближения (20) сходятся к решению u^* значительно быстрее, чем (18), т.е. при $n \to \infty$ правая часть в (21) стремится к нулю быстрее, чем в (19).

Теорема 4 непосредственно применима к уравнениям вида (11). Справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть ядро $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ и удовлетворяет условию (3). Если для почти всех $x \in [-\pi, \pi]$ и всех $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ нелинейность $F(x, u)$ удовлетворяет условиям:*

4.1) *существует постоянная $M > 0$ такая, что выполняется неравенство:*

$$|F(x, u_1) - F(x, u_2)| \leqslant M \cdot |u_1 - u_2|\,;$$

4.2) *существует постоянная $m > 0$ такая, что выполняется неравенство:*

$$[F(x, u_1) - F(x, u_2)] \cdot [u_1 - u_2] \geq m \cdot |u_1 - u_2|^2\,,$$

то при любом $\lambda > 0$ и любом $f(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ уравнение (11) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(-\pi, \pi)$. Это решение можно найти методом последовательных приближений, которые определяются по формуле:

$$u_n = u_{n-1} - \mu \cdot (\lambda \cdot Fu_{n-1} + Hu_{n-1} - f), \qquad n \in \mathbb{N}\ , \tag{22}$$

где $\mu = \lambda \cdot m \cdot \Big(\lambda \cdot M + \|h\|_1\Big)^{-2}$, *с оценкой погрешности:*

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \mu \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|\lambda \cdot Fu_0 + Hu_0 - f\|_2\ , \tag{23}$$

где $\alpha = \sqrt{1 - \lambda^2 m^2 (\lambda \cdot M + \|h\|_1)^{-2}}$, $u_0(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ *— начальное приближение (произвольная функция). Если, дополнительно, ядро $h(x)$ является четной функцией, то решение $u^*(x)$ можно найти по формуле (22), где $\mu = 2/[\lambda \cdot (M+m) + \|h\|_1]$, с оценкой погрешности (23), где $\alpha = [\lambda \cdot (M-m) + \|h\|_1]/[\lambda \cdot (M+m) + \|h\|_1]$.*

Доказательство. Запишем уравнение (11) в операторном виде: $Au = f$, где $Au = \lambda \cdot Fu + Hu$. Из условий 4.1) и 4.2) вытекает, соответственно, что $\forall u(x), v(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ выполняются неравенства:

$$\|Fu - Fv\|_2 \leqslant M \cdot \|u - v\|_2 \,, \quad (Fu - Fv, u - v) \geq m \cdot \|u - v\|_2^2 \,, \tag{24}$$

т.е. оператор $F : L_2(-\pi, \pi) \to L_2(-\pi, \pi)$ является липшиц-непрерывным и сильно монотонным.

Используя оценки (24), условие (3) и неравенство (4), имеем:

$$\|Au - Av\|_2 \leqslant \lambda \cdot \|Fu - Fv\|_2 + \|H(u - v)\|_2 \leqslant \Big(\lambda \cdot M + \|h\|_1\Big) \cdot \|u - v\|_2 \,,$$

$$(Au - Av, u - v) = \lambda \cdot (Fu - Fv, u - v) + (H(u - v), u - v) \geq \lambda \cdot m \cdot \|u - v\|_2^2 \,.$$

Так как оператор A удовлетворяет всем требованиям теоремы 4, то уравнение $Au = f$, а значит, и данное уравнение (11) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(-\pi, \pi)$, и это решение можно найти по итерационной формуле (22) с оценкой погрешности (23).

Если, дополнительно, предположить, что ядро $h(x)$ является четной функцией, то оператор свертки H является потенциальным оператором. Из условия 4.1) вытекает [15, с. 89 и 214], что оператор суперпозиции F также является потенциальным оператором. Значит, оператор $A = \lambda \cdot F + H$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 4, из которой, согласно формуле (20) и оценке (21), вытекает, что в (22) и (23) можно взять $\mu = 2/[\lambda \cdot (M + m) + \|h\|_1]$, $\alpha = [\lambda \cdot (M - m) + \|h\|_1]/[\lambda \cdot (M + m) + \|h\|_1]$. □

Важно отметить (см. замечание 3), что последовательные приближения (22), соответствующие четному ядру $h(x)$, сходятся значительно быстрее к решению $u^*(x)$.

Рассмотрим теперь нелинейные интегральные уравнения типа свертки (12) и (13). К уравнениям такого вида применить непосредственно теорему 4 нельзя, так как произведение монотонных операторов не является, вообще говоря, монотонным оператором. Поэтому в случае уравнений (12) и (13) удается построить последовательные приближения и получить оценки скорости их сходимости к точному решению лишь в терминах обратного оператора F^{-1} к оператору суперпозиции F.

Теорема 6. *Пусть ядро $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ и удовлетворяет условию (3), а нелинейность $F(x, u)$ — условиям 4.1) и 4.2) теоремы 5. Тогда при любом $\lambda > 0$ и любом $f(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ уравнение (12) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(-\pi, \pi)$. Это решение можно найти по формуле: $u_n = F^{-1} v_n$, $n \in \mathbb{N}$, где F^{-1} — оператор, обратный F,*

$$v_n = v_{n-1} - \mu \cdot (F^{-1} v_{n-1} + \lambda \cdot H v_{n-1} - f) \,, \tag{25}$$

с оценкой погрешности:

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \mu \cdot \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \cdot \|F^{-1} v_0 + \lambda \cdot H v_0 - f\|_2 \,, \tag{26}$$

где $\mu = m/[M^2(m^{-1} + \lambda \|h\|_1)^2]$, $\alpha = \sqrt{1 - m^4 M^{-4} (1 + \lambda m \|h\|_1)^{-2}}$, $v_0(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ — начальное приближение (произвольная функция). Если, дополнительно, ядро $h(x)$ является четной функцией, то решение $u^*(x)$ можно найти по итерационной формуле (25), где $\mu = 2/[m^{-1} + \lambda \cdot \|h\|_1 + m \cdot M^{-2}]$ с оценкой погрешности (26), где $\alpha = [1 + \lambda \cdot \|h\|_1 - m^2 \cdot M^{-2}]/[1 + \lambda \cdot \|h\|_1 + m^2 \cdot M^{-2}]$.

Доказательство. Из условий 4.1) и 4.2) следует, что оператор Немыцкого F действует непрерывно из $L_2(-\pi, \pi)$ в $L_2(-\pi, \pi)$ и сильно монотонен, причем выполняются неравенства (24). Поэтому, в силу теорем 1.3 и 1.5 [11], существует обратный оператор F^{-1}, который так же, как и F, является потенциальным, причем $\forall u(x), v(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ выполняются неравенства:

$$\|F^{-1} u - F^{-1} v\|_2 \leqslant m^{-1} \cdot \|u - v\|_2 \,, \tag{27}$$

$$(F^{-1}u - F^{-1}v, u - v) \geq m \cdot M^{-2} \cdot \|u - v\|_2^2 \,. \tag{28}$$

Рассмотрим теперь уравнение (12). Запишем его в операторном виде:

$$u + \lambda \cdot H\,Fu = f \,. \tag{29}$$

Легко видеть, что если $v^* \in L_2(-\pi, \pi)$ является решением уравнения

$$Av = f, \qquad \text{где} \quad Av = F^{-1}v + \lambda \cdot Hv \,, \tag{30}$$

то $u^* = F^{-1}v^* \in L_2(-\pi, \pi)$ является решением уравнения (29), причем эти решения являются единственными в $L_2(-\pi, \pi)$, так как F и F^{-1} являются строго монотонными операторами. Далее, так как в силу неравенств (27), (28), условия (3) и оценки (4), $\forall u(x), v(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ выполняются неравенства:

$$\|Au - Av\|_2 \leqslant \|F^{-1}u - F^{-1}v\|_2 + \lambda \cdot \|H(u - v)\|_2 \leqslant \\ \leqslant \Big(m^{-1} + \lambda \cdot \|h\|_1\Big) \cdot \|u - v\|_2 \,, \tag{31}$$

$$(Au - Av, u - v) = (F^{-1}u - F^{-1}v, u - v) + \lambda \cdot (H(u - v), u - v) \geq \\ \geq m \cdot M^{-2} \cdot \|u - v\|_2^2 \,, \tag{32}$$

то оператор A удовлетворяет всем требованиям теоремы 4. Следовательно, уравнение (30) имеет единственное решение $v^*(x) \in L_2(-\pi, \pi)$, и это решение можно найти по итерационной формуле (25) с оценкой погрешности

$$\|v_n - v^*\|_2 \leqslant \frac{m \cdot M^{-2}}{(m^{-1} + \lambda \cdot \|h\|_1)^2} \cdot \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \cdot \|F^{-1}v_0 + \lambda \cdot Hv_0 - f\|_2 \,, \tag{33}$$

где $\alpha = \sqrt{1 - m^4 \cdot M^{-4} \cdot (1 + \lambda \cdot m \cdot \|h\|_1)^{-2}}$. Поскольку, в силу неравенства (27),

$$\|u_n - u^*\|_2 = \|F^{-1}v_n - F^{-1}v^*\|_2 \leqslant m^{-1} \cdot \|v_n - v^*\|_2 \,,$$

то из (33) легко получаем оценку (26) — что и требовалось.

Если, дополнительно, ядро $h(x)$ является четной функцией, то оператор свертки H является потенциальным. Значит, оператор A удовлетворяет всем требованиям теоремы 4, из которой согласно формуле (20) и оценке (21) вытекает, что в (25) и (26) можно взять $\mu = 2/[m^{-1} + \lambda \cdot \|h\|_1 + m \cdot M^{-2}]$ и $\alpha = [1 + \lambda \cdot \|h\|_1 - m^2 \cdot M^{-2}]/[1 + \lambda \cdot \|h\|_1 + m^2 \cdot M^{-2}]$. $\square$

Докажем, наконец, следующую теорему.

Теорема 7. *Пусть ядро $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ и удовлетворяет условию (3), а нелинейность $F(x, u)$ — условиям 4.1) и 4.2) теоремы 5. Тогда при любом $\lambda > 0$ и любом $f(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ уравнение (13) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(-\pi, \pi)$. Это решение можно найти по итерационной формуле:*

$$u_n = u_{n-1} + \lambda \cdot \mu \cdot \left(F^{-1}(\lambda^{-1}(f - u_{n-1})) - Hu_{n-1}\right) \,, \tag{34}$$

где $\mu = m \cdot M^{-2}/(m^{-1} + \lambda \cdot \|h\|_1)^2$, с оценкой погрешности:

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \lambda \cdot \mu \cdot \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \cdot \|F^{-1}(\lambda^{-1}(f - u_0)) - Hu_0\|_2 \,, \tag{35}$$

где $\alpha = \sqrt{1 - m^4 \cdot M^{-4} \cdot (1 + \lambda \cdot m \cdot \|h\|_1)^{-2}}$, $u_0(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ — начальное приближение (произвольная функция). Если, дополнительно, ядро $h(x)$ является четной функцией, то решение $u^*(x)$ можно найти по итерационной формуле (34), где $\mu = 2/[m^{-1} + \lambda \cdot \|h\|_1 + m \cdot M^{-2}]$ с оценкой погрешности (35), где $\alpha = [1 + \lambda \cdot \|h\|_1 - m^2 \cdot M^{-2}]/[1 + \lambda \cdot \|h\|_1 + m^2 \cdot M^{-2}]$.

Доказательство. Из условий 4.1) и 4.2) следует (см. доказательство теоремы 6), что оператор суперпозиции F имеет обратный оператор F^{-1}, причем оба оператора являются потенциальными и выполняются неравенства (24), (27) и (28). Рассмотрим уравнение (13). Запишем его в операторном виде:

$$u + \lambda \cdot F\,Hu = f \ . \tag{36}$$

Легко видеть, что если $v^* \in L_2(-\pi,\pi)$ является решением уравнения

$$F^{-1}v + \lambda \cdot Hv = Hf \ , \tag{37}$$

то $u^* = f - \lambda \cdot v^* \in L_2(-\pi,\pi)$ является решением уравнения (36), т.е. данного уравнения (13).

Замечая, что уравнение (37) имеет такой же вид, что и уравнение (30) (с Hf вместо f), получаем (см. доказательство теоремы 6), что уравнение (37) имеет единственное решение $v^* \in L_2(-\pi,\pi)$, и это решение можно найти по итерационной формуле вида (25):

$$v_n = v_{n-1} - \frac{m \cdot M^{-2}}{(m^{-1} + \lambda \cdot \|h\|_1)^2} \cdot (F^{-1}v_{n-1} + \lambda \cdot Hv_{n-1} - Hf) \ , \tag{38}$$

с оценкой погрешности вида (33):

$$\|v_n - v^*\|_2 \leqslant \frac{m \cdot M^{-2}}{(m^{-1} + \lambda \cdot \|h\|_1)^2} \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|F^{-1}v_0 + \lambda \cdot Hv_0 - Hf\|_2 \ , \tag{39}$$

где $\alpha = \sqrt{1 - m^4 \cdot M^{-4} \cdot (1 + \lambda \cdot m \cdot \|h\|_1)^{-2}}$.

Из (38) и (39), умножая на λ и учитывая затем, что $\lambda \cdot v^* = f - u^*$ и $\lambda \cdot v_{n-1} = f - u_{n-1}$, легко получаем формулу (34) и оценку (35).

Далее, если ядро $h(x)$ является четной функцией, то, в силу указанной связи между уравнениями (37) и (30), из доказательства теоремы 6 очевидным образом вытекает, что в (34) и (35) можно взять

$$\mu = \frac{2}{m^{-1} + \lambda \cdot \|h\|_1 + m \cdot M^{-2}} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{1 + \lambda \cdot \|h\|_1 - m^2 \cdot M^{-2}}{1 + \lambda \cdot \|h\|_1 + m^2 \cdot M^{-2}} \ .$$

□

5. Приближенное решение. Градиентный метод

В п. 4 были рассмотрены вопросы, касающиеся приближенного решения уравнений типа свертки (11)–(13) с *нелинейностями общего вида* в пространствах Лебега при $p = 2$. Методы, использованные при этом, оказываются не пригодными при $p \neq 2$, так как в этом случае не удается комбинировать *принцип сжимающих отображений*, в котором требуется, чтобы оператор отображал данное пространство в себя, с *принципом Браудера-Минти*, в котором требуется, чтобы оператор отображал данное пространство в сопряженное с ним пространство. В этом пункте будет показано, что если ограничиться рассмотрением уравнений типа свертки с *нечетностепенной нелинейностью* вида u^{p-1}, то такие уравнения можно приближенно решать в пространствах Лебега $L_p(-\pi,\pi)$ при четных $p > 2$. При этом, в отличие от п. 4, используется один из методов теории *потенциальных* монотонных операторов, известный как *метод наискорейшего спуска* или *градиентный метод*.

Определение 4. *Банахово пространство X называется строго выпуклым, если $\forall u, v \in X$ из того, что $u \neq v$, $\|u\| \leqslant 1$, $\|v\| \leqslant 1$ следует, что $\|u + v\| < 2$.*

Определение 5. *Оператор $J : X \to X^*$, где X^* строго выпуклое пространство, называется дуализующим отображением, если для любого $u \in X$ выполняются равенства $\langle Ju, u\rangle = \|u\|^2 = \|Ju\|_*^2$.*

Заметим, что условие строгой выпуклости сопряженного пространства X^* в определении 5 обеспечивает [13, с. 312–313] единственность дуализующего отображения $J : X \to X^*$, причем J является [14, с. 115] потенциальным оператором с потенциалом $f(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$.

Далее нам понадобится следующая теорема, являющаяся следствием известных результатов, доказанных в монографии [14].

Теорема 8. *Пусть X — вещественное рефлексивное банахово пространство и $A : X \to X^*$ — хеминепрерывный равномерно монотонный коэрцитивный оператор. Тогда уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in X$ при любом $f \in X^*$. Кроме того, если X и X^* строго выпуклые пространства, а оператор A является потенциальным ограниченно липшиц-непрерывным, то последовательность $u_{n+1} = u_n - \delta_n \cdot J^*(Au_n - f)$, где $\delta_n = \min\{1, 2/[\varepsilon + \mu(\|u_n\| + \|Au_n - f\|_*)]\}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $J^* : X^* \to X$ — дуализующее отображение для X^*, $\varepsilon > 0$ — произвольное число, сходится к u^* по норме пространства X.*

Доказательство. Существование и единственность решения u^* вытекает из теоремы Браудера-Минти, а сильная сходимость последовательности $\{u_n\}$ к u^* по указанной схеме — из теоремы 4.2 [14, с. 122] и замечания 4.13 [14, с. 125], поскольку всякий равномерно монотонный оператор является строго монотонным оператором и обладает (S)-свойством [14, с. 80–81]. □

Указанный в теореме 8 способ приближенного нахождения решения u^* известен [14] как метод *наискорейшего* спуска (или *градиентный* метод, так как $J^*v = \|v\|_* \cdot \mathrm{grad}\,\|v\|_*$, $\forall v \in X^*$).

Теорема 8, в отличие от теоремы 4, применима к интегральным уравнениям типа свертки со степенными нелинейностями. А именно, справедлива следующая теорема, согласующаяся со следствием 1.

Теорема 9. *Пусть $\alpha = r/s \in [1, \infty)$, где $r, s = 1, 3, 5, \ldots$ — нечетные числа, $f(x) \in L_{1+1/\alpha}(-\pi, \pi)$, $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ и выполнено условие (3). Тогда уравнение*

$$u^\alpha(x) + \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\,u(t)\,dt = f(x) \tag{40}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_{1+\alpha}(-\pi, \pi)$. Если, дополнительно, ядро $h(x)$ является четной функцией и $\alpha > 1$ — нечетное число, то это решение может быть найдено методом последовательных приближений по формуле:

$$u_{n+1} = u_n - \delta_n \cdot \|Au_n - f\|_{1+1/\alpha}^{1-1/\alpha} \cdot |Au_n - f|^{-1+1/\alpha} \cdot [Au_n - f], \tag{41}$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $u_0(x) \in L_{1+\alpha}(-\pi, \pi)$ — произвольная функция (начальное приближение), $Au = u^\alpha + Hu$,

$$\delta_n = \min\left(1, \frac{2}{\varepsilon + \alpha \cdot \left(\|u_n\|_{1+\alpha} + \|Au_n - f\|_{1+1/\alpha}\right)^{\alpha-1} + \gamma \cdot \|h\|_1}\right), \tag{42}$$

$\varepsilon > 0$ — любое число, $\gamma = (2\pi)^{2\alpha/(\alpha+1)}$.

Доказательство. Запишем уравнение (40) в операторном виде:

$$Au = f, \quad \text{где } Au = u^\alpha + Hu. \tag{43}$$

Существование и единственность решения $u^*(x) \in L_{1+\alpha}(-\pi, \pi)$ уравнения (43) вытекает из теоремы 1, в которой следует взять $p = 1 + \alpha$, $\lambda = 1$, $F(x, u) = u^\alpha$ и $\alpha = r/s$.

Осталось доказать основное утверждение теоремы о том, что последовательность (41) сходится к $u^*(x)$ по норме пространства $L_{1+\alpha}(-\pi,\pi)$. Для этого воспользуемся теоремой 8.

По лемме 1 при $p=\alpha+1\geq 2$ получаем, что оператор свертки H действует непрерывно из $L_{1+\alpha}(-\pi,\pi)$ в $L_{1+1/\alpha}(-\pi,\pi)$, причем

$$\|Hu\|_{1+1/\alpha}\leqslant \gamma\cdot\|h\|_1\cdot\|u\|_{1+\alpha}\,,\quad \text{где } \gamma=(2\pi)^{2\alpha/(\alpha+1)}. \tag{44}$$

Поскольку $u^\alpha(x)\in L_{1+1/\alpha}(-\pi,\pi)$, то оператор A также действует из $L_{1+\alpha}(-\pi,\pi)$ в $L_{1+1/\alpha}(-\pi,\pi)$. Покажем, что оператор A является ограниченно липшиц-непрерывным. Для любых $u,v\in L_{1+\alpha}(-\pi,\pi)$ имеем

$$\|Au-Av\|_{1+1/\alpha}\leqslant\|u^\alpha-v^\alpha\|_{1+1/\alpha}+\|H(u-v)\|_{1+1/\alpha}=I_1+I_2\ .$$

Так как $|t^\alpha-s^\alpha|\leqslant(\alpha/2)\cdot|t-s|\cdot(t^{\alpha-1}+s^{\alpha-1})$, $\forall t,s\in\mathbb{R}$ и нечетном $\alpha\geq 3$, то

$$I_1\leqslant\frac{\alpha}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|u(x)-v(x)|^{1+1/\alpha}|u^{\alpha-1}(x)+v^{\alpha-1}(x)|^{1+1/\alpha}dx\right)^{\alpha/(\alpha+1)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha}{2}\,\|u-v\|_{1+\alpha}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|u^{\alpha-1}(x)+v^{\alpha-1}(x)|^{(\alpha+1)/(\alpha-1)}dx\right)^{(\alpha-1)/(\alpha+1)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha}{2}\,\|u-v\|_{1+\alpha}\left(\|u\|_{1+\alpha}^{\alpha-1}+\|v\|_{1+\alpha}^{\alpha-1}\right)\leqslant\alpha\cdot r^{\alpha-1}\cdot\|u-v\|_{1+\alpha}\ ,$$

где $r=\max\left(\|u\|_{1+\alpha},\|v\|_{1+\alpha}\right)$. Таким образом, оценив I_2 с помощью неравенства (44), имеем

$$\|Au-Av\|_{1+1/\alpha}\leqslant\mu(r)\cdot\|u-v\|_{1+\alpha}\ ,$$

где $\mu(r)=\alpha\cdot r^{\alpha-1}+\gamma\cdot\|h\|_1$ — возрастающая на $[0,\infty)$ функция. Значит, A — ограниченно липшиц-непрерывный оператор.

Покажем теперь, что A — равномерно монотонный оператор. Используя лемму 1 и неравенство $(t^\alpha-s^\alpha)\cdot(t-s)\geq 2^{1-\alpha}|t-s|^{\alpha+1}$, справедливое для всех $t,s\in\mathbb{R}$ и нечетных $\alpha\geq 3$, имеем

$$\langle Au-Av,u-v\rangle\geq\int_{-\pi}^{\pi}[u^\alpha(x)-v^\alpha(x)]\cdot[u(x)-v(x)]\,dx\geq$$

$$\geq 2^{1-\alpha}\cdot\|u-v\|_{1+\alpha}^{1+\alpha}=\beta(\|u-v\|_{1+\alpha})\,,\quad\forall u,v\in L_{1+\alpha}(-\pi,\pi)\ ,$$

где $\beta(s)=2^{1-\alpha}\cdot s^{\alpha+1}$ — строго возрастающая на $[0,\infty)$ функция такая, что $\beta(0)=0$, т.е. A — равномерно монотонный оператор.

Далее, поскольку $Fu=u^\alpha$ и H — потенциальные операторы (см. [13, с. 62] и замечание 1), то оператор A также является потенциальным. Заметим, наконец, что пространства $L_{1+\alpha}(-\pi,\pi)$ и $L_{1+1/\alpha}(-\pi,\pi)$ являются строго выпуклыми, и дуализующее отображение J^* для пространства $L_{1+1/\alpha}(-\pi,\pi)$ имеет вид [15]:

$$J^*w(\cdot)=\|w\|_{1+1/\alpha}^{1-1/\alpha}\cdot|w(\cdot)|^{1/\alpha-1}\cdot w(\cdot).$$

Следовательно, на основании теоремы 8, последовательность (41) сходится к $u^*(x)$ по норме пространства $L_{1+\alpha}(-\pi,\pi)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V.E. Beneš *A nonlinear integral equation from the theory of servo-mechanisms* // Bell. System. Techn. J. 1961. V. 40, №5. P. 1309–1321.
2. V.E. Beneš *A nonlinear integral equation in the Marcinkiewicz space M_2* // J. Math. Phys. 1965. V. 44, №1. P. 24–35.
3. O. Diekman *Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection* // J. Math. Biol. 1978. V. 6, № 2. P. 109–130.
4. O.Diekman, H.G. Kaper *On the bounded solutions of nonlinear convolutions equation* // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. 1978. V. 2, № 6. P. 721–737.
5. J. Goncerzevicz, H. Marcinkowska, W. Okrasiński, K. Tabisz *On the percolation of water from a cylindrical reservoir into the surrounding soi*l // Zast. Mat. 1978. V. 16, № 2. P. 249–261.
6. W. Okrasiński *Nonlinear Volterra equations and physical applications* // Extracta Math. 1989. V. 4, №2. P. 51–74.
7. J.J. Keller *Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction* // Z. Angew. Math. Phys. 1981. V. 32, № 2. P. 170–181.
8. Владимиров В.С., Волович Я.И. *О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны* // Теорет. и матем. физика. 2004. Т. 138, №3. С. 355–368.
9. Владимиров В.С. *Об уравнении p-адической открытой струны для скалярного поля тахионов* // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, №. С. 55–80.
10. Владимиров В.С. *Об уравнении p-адической открытой струны для скалярного поля тахионов* // Успехи матем. наук. 2005. Т. 60, вып. 6. С. 73–88.
11. Асхабов С.Н. *Нелинейные уравнения типа свертки.* М.: Физматлит, 2009. 304 с.
12. Качуровский Р.И. *Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах* // Успехи матем. наук. 1968. Т. 23, №2. С. 121–168.
13. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1972. 416 с.
14. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1978. 336 с.
15. Вайнберг М.М. *Вариационные методы исследования нелинейных операторов.* – М.: Гостехиздат, 1956. 344 с.
16. Асхабов С.Н. *Нелинейные уравнения типа свертки в пространствах Лебега* // Матем. заметки. 2015. Т. 97, №5. С. 643–654.
17. Асхабов С. Н. *Приближенное решение нелинейных уравнений типа свертки на отрезке* // Уфимский математический журнал. 2013. Т. 5, №2. С. 3–11.
18. Асхабов С.Н., Джабраилов А.Л. *Приближенное решение нелинейных уравнений с весовыми операторами типа потенциала* // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, №4. С. 8–13.
19. H. Brezis, F.E. Browder *Some new results about Hammerstein equations* // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. V. 80(3). P. 567–572.
20. H. Brezis, F.E. Browder *Nonlinear integral equations and systems of Hammerstein type* // Advances in Math. 1975. V. 18. P. 115–147.
21. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки.* М.: Наука, 1978. 296 с.
22. Эдвардс Р. *Ряды Фурье в современном изложении. Том 1.* М.: Мир, 1985. 264 с.
23. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды. Том 1.* М.: Мир, 1965. 616 с.

Султан Нажмудинович Асхабов,
Чеченский государственный университет,
ул. Шерипова, 32,
364907, г. Грозный, Россия
E-mail: `askhabov@yandex.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 1 (2016). С. 38-53.

УДК 517.946

ОБ УБЫВАНИИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВОЙНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

В.Ф. ВИЛЬДАНОВА

Аннотация. Для линейного параболического уравнения второго порядка с двойным вырождением $\mu(x)u_t = (\rho(x)a_{ij}(t,x)u_{x_i})_{x_j}$ в неограниченной области получена оценка сверху скорости убывания решения первой начально-краевой задачи. В широком классе областей вращения доказана оценка снизу. Приведены примеры, показывающие, что оценки сверху и снизу, в определенном смысле, точны.

Доказывается существование и единственность решения задачи в неограниченной области методом галеркинских приближений.

Ключевые слова: параболическое уравнение с двойным вырождением, скорость убывания решения, оценки сверху, существование решения.

Mathematics Subject Classification: 35B30, 35B45, 35K10, 35K20, 35K65

1. Введение

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Рассмотрим в цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ линейное уравнение второго порядка:

$$\mu(x)u_t = \sum_{i,j=1}^{n} (\rho(x)a_{ij}(t,x)u_{x_i})_{x_j}, \tag{1}$$

где веса $\mu(x) > 0$ и $\rho(x) > 0$ – измеримые функции, суммируемые на любом ограниченном подмножестве Ω: $\mu, \rho \in L^1_{\text{loc}}(\overline{\Omega})$. На симметричные коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$ накладывается условие равномерной эллиптичности: существуют положительные постоянные γ, γ_1 такие, что для любого вектора $y \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $(t,x) \in D$ справедливы неравенства:

$$\gamma|y|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)y_iy_j \leqslant \gamma_1|y|^2. \tag{2}$$

На боковой границе цилиндра D задано краевое условие Дирихле:

$$u(t,x)\Big|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = (0,\infty) \times \partial\Omega. \tag{3}$$

Мы будем иметь дело с обобщенным решением задачи (1), (3) с начальным условием

$$u(0,x) = \varphi(x) \in L_2(\Omega, \mu dx). \tag{4}$$

Настоящая работа посвящена исследованию зависимости скорости убывания при $t \to \infty$ решения задачи (1), (3), (4) от геометрии неограниченной области Ω и поведения весов μ, ρ при $x \to \infty$.

Первые исследования зависимости скорости убывания решения смешанной задачи для равномерно параболического уравнения ($\mu = \rho \equiv 1$) второго порядка от геометрии неограниченной

V.F. Vil'danova, On decay of solution to linear parabolic equation with double degeneracy.

Работа выполнена при поддержке гранта ученого совета БГПУ им. М.Акмуллы для молодых учёных.

Поступила 25 октября 2015 г.

области были выполнены А.К. Гущиным в работах [1, 2]. Для широкого класса областей в них для решения второй смешанной задачи установлена оценка

$$|u(t,x)| \leqslant \frac{\|\varphi\|_{L_1(\Omega)}}{v(\sqrt{t})}, \qquad x \in \Omega,$$

где $v(r) = \operatorname{mes}\{x \in \Omega : |x| < r\}$. Доказана также точность этой оценки. В частности, для решения задачи Коши эта оценка принимает вид

$$|u(t,x)| \leqslant C\frac{\|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}}{(\sqrt{t})^n}.$$

Более полные исследования зависимости поведения при большом значении времени решения второй смешанной задачи от геометрии области и от начальной функции выполнены А.В. Лежневым в [3]. В.И. Ушаков [4] получил результаты, близкие к результатам А.К. Гущина, для третьей смешанной задачи в нецилиндрической области. Ранее в работе [5] Ф.Х. Мукминовым была доказана оценка скорости убывания решения первой смешанной задачи в случае равномерно параболического уравнения второго порядка и доказана ее точность в классе неограниченных монотонно расширяющихся областей вращения. В работе [6] получены точные оценки решения параболического уравнения четвертого и шестого порядка с краевыми условиями Риккье на боковой границе неограниченной цилиндрической области.

Упомянем ещё работу [7], в которой для квазилинейных параболических уравнений в неограниченной области изучалась зависимость поведения решения от структуры нелинейности уравнений.

Более полный обзор результатов, примыкающих к теме нашей работы, можно найти в [6]–[14].

Приступим к формулировке нашего результата.

Определим функции

$$\lambda(r) = \inf_{g \in C_0^\infty(\Omega)} F_r(g), \quad F_r(g) = \frac{\int\limits_{\Omega[r]} \rho(x)|\nabla g|^2 dx}{\int\limits_{\Omega[r]} \mu g^2 dx}, \tag{5}$$

где $\Omega[r] = \{x \in \Omega \mid |x| < r\}$;

$$\widetilde{\lambda}(r) = \inf_{g \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\int\limits_{S_r} \rho(x)|\nabla g|^2 dS}{\int\limits_{S_r} \rho g^2 dS}, \tag{6}$$

где $S_r = \{x \in \Omega| \ |x| = r\}$. Очевидно, что функция $\lambda(r)$ ограничена на интервале $r > r_0$, если множество $\Omega[r_0]$ не пусто.

В следующем утверждении речь идет об обобщенном решении задачи (см. §2).

Теорема 1. *Пусть $u(t,x)$ – решение задачи* (1), (3), (4) *с начальной функцией φ, равной нулю при $|x| > R_0$. Тогда найдется число $\nu_1 > 0$, зависящее только от n, γ_1, R_0, и T, зависящее еще и от функций $\lambda, \widetilde{\lambda}$, такие, что для всех $t > T$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \mu(x)u^2(t,x)dx \leqslant C\exp\left(-\nu_1 \int\limits_{R_0+1}^{r(t)} \sqrt{\widetilde{\lambda}(s)}ds\right) \int\limits_{\Omega} \mu(x)\varphi^2(x)dx, \tag{7}$$

где $r = r(t)$ — произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству $t\lambda(r) \geq \int\limits_{R_0+1}^{r} \sqrt{\widetilde{\lambda}(s)}\ ds$. Постоянная C зависит от γ, γ_1 и от функции $\widetilde{\lambda}$.

Известно, что в случае плоского угла $\Omega = \{(r,\psi)| \ r > 0, 0 < \psi < \alpha\}$ при $\mu = \rho \equiv 1$ убывание решения задачи (1), (3), (4) будет степенным: $u(t,x) = O(t^{-(\pi/\alpha+1)})$ (см.[5]). Для таких ситуаций (то есть когда решение убывает степенным образом) оценка (7) дает неадекватный результат, поскольку точное значение постоянной ν_1 не определено (т.е. не определяется точно показатель степени t).

Если выполнено неравенство $\rho(x) \leq \mu(x)$ для почти всех $x \in \Omega$, то можно получить оценку, несколько слабее, чем (7), не используя функцию $\widetilde{\lambda}$ (см. теорему 2, §3).

Отметим, что утверждение теоремы останется верным, если области $\Omega[r], S_r$ заменить на $\Omega(r) = \{x \in \Omega \mid x_1 < r\}$ и $S_r = \{(x_1, x') \in \Omega \mid x_1 = r\}$. При этом предполагается, что области $\Omega(r)$ ограничены при всех $r > 0$.

Формально функция $r(t) = R_0 + 1$ удовлетворяет неравенству из теоремы. Но ясно, что неравенство (7) будет более сильным, если выбрать функцию $r(t) \geq R_0 + 1$ наибольшей среди допустимых. В случае, когда функция $\lambda(r)$ непрерывна и положительна хотя бы в одной точке $r \geq R_0 + 1$, выбираем функцию $r(t)$, как наибольший среди корней уравнения $t\lambda(r) = \int\limits_{R_0+1}^{r} \sqrt{\widetilde{\lambda}(s)}ds$. (При достаточно больших t существует хотя бы один корень.) В конце §3 приведено условие, при котором функция $\lambda(r)$ будет непрерывной. Такой же подход применим при наличии оценки $\lambda(r) \geq h(r)$ с заменой $\lambda(r)$ на непрерывную функцию $h(r)$. В простейшем случае $\rho = \mu = 1$ выбор функции $h(r)$ можно сделать, используя неравенство (5.4) ([21], гл.II, §5), которое в случае $\operatorname{mes}\Omega[r] \leqslant (1-\varepsilon)\operatorname{mes}B(r)$, где $\operatorname{mes}B(r)$ — шар радиуса r запишется в виде

$$\int\limits_{\Omega[r]} u^2(t,x)dx \leqslant \beta\varepsilon^{-2}r^2 \int\limits_{\Omega[r]} |\nabla u|^2(t,x)dx, \qquad \beta > 0. \tag{8}$$

Отсюда следует неравенство $\lambda(r) \geq \dfrac{\varepsilon^2}{\beta r^2}$. Отметим еще, что неравенство (8), примененное вместо $\Omega[r]$ к конусу с вершиной в точке O и сферическим основанием S_r, дает оценку $\widetilde{\lambda}(r) \geq \delta^2(r)/(\beta r^2)$, где $1 - \delta(r) = \operatorname{mes}_{n-1} S_r r^{1-n}/\omega_n$, ω_n – мера единичной сферы. В частности, когда функция $\delta(r)$ достаточно быстро убывает, возможно неравенство $\int\limits_{R_0+1}^{r} \sqrt{\widetilde{\lambda}(s)}ds < \infty$, и тогда оценка (7) становится несодержательной.

В §4 также приведены примеры выбора функций $r(t)$ для функций μ, ρ, отличных от 1. В §5 приведена теорема 2 об оценке неотрицательного решения снизу в случае, когда область Ω является областью вращения. На примерах показано, что неравенство (7) теоремы 1 является, в определенном смысле, точным.

2. Существование и единственность решения

Введем следующие обозначения: $D_a^b = (a,b) \times \Omega$, $D^T = D_0^T$, $D = D_0^\infty$,

$$\|u\|^2_{D^T,\mu} = \int\limits_{D^T} \mu u^2 dxdt, \quad \|\nabla u\|_{D^T,\rho} = \int\limits_{D^T} \rho|\nabla u|^2 dxdt.$$

На множестве сужений на D^T функций из $C_0^\infty(D_{-1}^T)$ определим нормы

$$\|u\|^2_{H^{0,1}(D^T)} = \|u\|^2_{D^T,\mu} + \|\nabla u\|^2_{D^T,\rho}; \quad \|u\|^2_{H^{1,1}(D^T)} = \|u\|^2_{H^{0,1}(D^T)} + \|u_t\|^2_{D^T,\mu}.$$

Соответствующие пополнения этих линейных нормированных пространств обозначим $\overset{\circ}{H}{}^{0,1}(D^T)$ и $\overset{\circ}{H}{}^{1,1}(D^T)$. Для единственности градиента функций из введенных весовых пространств потребуем выполнения условия из работы [20]:

$$\rho^{-1} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Пространство $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega (\mu u^2 + \rho|\nabla u|^2)dx$.

Обобщенным решением задачи (1), (3), (4) в D^T будем называть функцию $u(t,x) \in \overset{\circ}{H}{}^{0,1}(D^T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству:

$$\int\limits_{D^T}\left(-\mu u v_t+\sum_{i,j=1}^{n}\rho a_{ij}(t,x)u_{x_i}v_{x_j}\right)dxdt=\int\limits_{\Omega}\mu\varphi(x)v(0,x)dx, \tag{9}$$

для любой функции $v(t,x)\in \mathring{H}^{1,1}(D^T)$.

Функция $u(t,x)$ – решение задачи (1), (3), (4) в D, если при всех $T>0$ она является решением задачи (1), (3), (4) в D^T.

Обобщенное решение задачи (1), (3), (4) в D^T существует и единственно. Существование доказывается методом Галеркина (см., например, [21, с.181–186]).

Выберем набор линейно независимых функций $w_i(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ так, чтобы их линейная оболочка была плотна в $\mathring{H}^1(\Omega)$. Не ограничивая общность, можно считать, что эти функции ортонормированы в $L_2(\Omega,\mu dx)$.

Галеркинские приближения будем искать в виде

$$u^l(t,x)=\sum_{i=1}^{n}C_i^l(t)w_i(x). \tag{10}$$

Уравнения на искомые коэффициенты получим из требования

$$\int\limits_{\Omega}(\mu(x)u_t^l w_s+\sum_{i,j=1}^{n}\rho(x)a_{ij}(t,x)u^l_{x_i}(w_s)_{x_j}dx=0,\quad s=\overline{1,l}. \tag{11}$$

Условия (11), благодаря ортонормированности функций w_i, приводят к системе обыкновенных уравнений

$$(C_i^l)'+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(t)C_j^l=0,\qquad i=\overline{1,n}. \tag{12}$$

Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (12) выберем следующими

$$C_i^l(0)=(\varphi,w_i). \tag{13}$$

Условия (12), (13) определяют единственный набор функций $C_i^l(t)$.

Докажем ограниченность множества u^l галеркинских приближений в пространстве $\mathring{H}^{0,1}(D^T)$. Умножим равенство (11) на C_s^l и сложим. Получим

$$\int\limits_{\Omega}(\mu u_t^l u^l+\sum_{i,j=1}^{n}\rho a_{ij}(t,x)u^l_{x_i}u^l_{x_j})dxdt=0. \tag{14}$$

Проинтегрировав (14) по $t\in(0,T)$ и воспользовавшись условием (2), будем иметь

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\mu(x)\left[(u^l(t,x))^2-(u^l(0,x))^2\right]dx+\gamma\int\limits_{D^T}\rho(x)|\nabla u^l|^2dxdt\leqslant 0. \tag{15}$$

Очевидно, что

$$\|u^l(0,x)\|^2_{L_2(\Omega,\mu dx)}=\sum_{i=1}^{l}(\varphi,w_i)^2.$$

Тогда (15) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\Omega}\mu(x)u^l(t,x))^2dx+2\gamma\int\limits_{D^T}\rho(x)|\nabla u^l|^2dxdt\leqslant\|\varphi\|^2_{D^T,\mu}. \tag{16}$$

Отсюда следует ограниченность множества u^l в пространстве $\mathring{H}^{0,1}(D^T)$. Поэтому можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в этом пространстве к некоторой функции $u\in\mathring{H}^{0,1}(D^T)$. Чтобы не нагромождать индексы, будем считать, что сама последовательность слабо сходится.

Умножим (11) на функцию $d_s(t) \in C_0^\infty(-1,T)$ и проинтегрируем по $t \in (0,T)$. После обозначения $v = d_s w_s$, интегрирования по частям и предельного перехода при $l \to \infty$ получим

$$\int\limits_{D^T} \left(-\mu u(v)_t + \sum_{i,j=1}^{n} \rho a_{ij}(t,x) u_{x_i}(v)_{x_j} dxdt \right) = \int\limits_{\Omega} \mu\varphi(x) v(0,x) dx. \tag{17}$$

Отметим, что (17) справедливо не только для функций $v = d_s w_s$, но и для сумм таких функций. Остается еще добавить, что функциями вида $v^m = \sum\limits_{s=1}^{m} d_s w_s$ можно приблизить любую функцию w из $C_0^\infty(D_{-1}^T)$ по норме пространства $\mathring{H}^{1,1}(D^T)$.

Теперь покажем единственность решения задачи (1), (3), (4).

Через $v_h(t,x)$ будем обозначать осреднение Стеклова функции $v(t,x)$:

$$v_h(t,x) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(\tau,x) d\tau,$$

которое обладает следующими свойствами:

1)$(v, u_{-h}) = (v_h, u)_{L_2(\mathbb{R}^{n+1}, \mu dxdt)}$, где $(v,u)_{L_2(\mathbb{R}^{n+1},\mu dxdt)} = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \mu v u \, dxdt$,

2)если $v \in \mathring{H}^{0,1}(D_0^T)$, то $(v_h)_{x_i} = (v_{x_i})_h$,

3)если $v, v_t \in L_2(\mathbb{R}^{n+1}, \mu dxdt)$, то $(v_t)_h = (v_h)_t$,

4) если $v \in L_2(D^T, \mu dxdt)$, то для любого $\delta > 0$ имеет место сходимость $v_h \to v$ в $L_2(D^{T-\delta}, \mu dxdt)$ при $h \to 0$ $(h < \delta)$.

Подставим в интегральное тождество (9) пробную функцию v_{-h}, где v – из пространства $C_0^\infty(D_0^{T-\delta})$. Это допустимо, так как $v_{-h} \in C_0^\infty(D_0^T)$ при $0 < h < \delta$. Воспользовавшись свойствами осреднения Стеклова, будем иметь

$$\int\limits_{D^T} \left[\mu(u_h)_t v + \rho \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i})_h v_{x_j} \right] dxdt = 0. \tag{18}$$

Предельным переходом доказывается, что последнее соотношение справедливо не только для функций $v \in C_0^\infty(D_0^{T-\delta})$, но и для функций $v \in \mathring{H}^{0,1}(D_0^{T-\delta})$.

Заметим, что равенства (18) имеют вид

$$\int\limits_{D^T} \mu(u_h)_t v dxdt = l_h(v), \tag{19}$$

где $l_h(v)$ линейный функционал в пространстве $\mathring{H}^{0,1}(D_0^{T-\delta})$.

Докажем равномерную ограниченность линейного функционала $l_h(v)$ при $|h| < \delta_0$ в единичном шаре пространства $\mathring{H}^{0,1}(D_0^{T-\delta})$.

Рассмотрим $l_h(v)$, с учетом равномерной эллиптичности будем иметь:

$$\begin{aligned} |l_h(v)| &= |\int\limits_{D^{T-\delta}} \rho \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i})_h v_{x_j} dxdt| \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{D^{T-\delta}} \left(\frac{\gamma_1}{h} \int\limits_t^{t+h} \rho |\nabla u(\tau,x)| d\tau \right) |\nabla v(t,x)| dxdt \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{D^{T-\delta}} \gamma_1 \rho \left(\frac{1}{h^2} \left(\int\limits_t^{t+h} |\nabla u(\tau,x)| d\tau \right)^2 + |\nabla v(t,x)|^2 \right) dxdt. \end{aligned}$$

Таким образом получаем, что $|l_h(v)| \leqslant C$.

Итак, ограниченность линейного функционала $l_h(v)$ доказана.

Подставим в равенство $(19)_{h_1}$–$(19)_{h_2}$ функцию $v = (u_{h_1} - u_{h_2})\chi(t_1, t_2) \in \mathring{H}^{0,1}(D_0^{T-\delta})$, где $\chi(t_1, t_2)$ характеристическая функция интервала (t_1, t_2). Получим

$$\left| \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} \mu((u_{h_1})_t - (u_{h_2})_t)(u_{h_1} - u_{h_2}) dxdt \right| =$$
$$= |(l_{h_1} - l_{h_2})(\chi(u_{h_1} - u_{h_2}))| \leqslant C\|(u_{h_1} - u_{h_2})\|_{H^{0,1}} \leqslant \varepsilon.$$

Последнее неравенство вытекает при достаточно малых h_1, h_2 из сходимости $u_h \to u$ в пространстве $\mathring{H}^{0,1}(D_0^{T-\delta})$. После интегрирования по t будем иметь

$$\int\limits_{\Omega} \mu(u_{h_1} - u_{h_2})^2(t_1, x)dx \leqslant \int\limits_{\Omega} \mu(u_{h_1} - u_{h_2})^2(t_2, x)dx + 2\varepsilon.$$

Последнее неравенство проинтегрируем по $t_2 \in [t_1, T - \delta]$:

$$(T - \delta - t_1) \int\limits_{\Omega} \mu(u_{h_1} - u_{h_2})^2(t_1, x)dx \leqslant \mu\|(u_{h_1} - u_{h_2})\|^2_{L_2(D^{T-\delta}, \mu dx)} + 2\varepsilon(T - \delta - t_1).$$

Поскольку $u_h \to u$ в $L_2(D^{T-\delta}, \mu dx)$, то при $t_1 < T - 2\delta$ будем иметь неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \mu(u_{h_1} - u_{h_2})^2(t_1, x)dx \leqslant \frac{\varepsilon_1}{\delta} + 2\varepsilon.$$

Отсюда следует равномерная фундаментальность в $L_2(\Omega, \mu dx)$ по t_1 семейства функций $u_h(t_1, x)$. Поэтому $u_h(t, x) \rightrightarrows u(t, x)$ в $L_2(\Omega, \mu dx)$ при $h \to 0$ равномерно по $t \in [0, T - 2\delta]$, и предельная функция непрерывна по t в норме $L_2(\Omega, \mu dx)$. Подставим теперь в (18) функцию $v = u_h\chi(0, t)$:

$$\int\limits_{D_0^t} (\mu(u_h)_t u_h + \rho \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i})_h (u_h)_{x_j}) \, dxdt = 0.$$

После интегрирования первого слагаемого по t и предельного перехода $h \to 0$ будем иметь

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \mu u^2(t, x)dx + \int\limits_{D_0^t} \rho \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dxdt = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \mu u^2(0, x)dx. \tag{20}$$

Если доказать, что $u(0, x) = \varphi(x)$, то последнее соотношение совпадет с (9). С этой целью подставим в тождество (9) непрерывную пробную функцию $v(t, x) = \eta(\frac{t}{\varepsilon})\psi(x)$, где $\eta(t) = 1 - t$ при $t \in [0, 1]$ и $\eta(t)$ постоянна в оставшихся интервалах $(-\infty, 0]$, $[1, \infty)$. Поскольку $v_t = -\frac{1}{\varepsilon}\psi(x)$, то тождество (9) принимает вид

$$\int\limits_0^{\varepsilon} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \mu(x)\psi(x)u(t, x)dtdx + l^{\varepsilon}(\psi) = \int\limits_{\Omega} \mu(x)\varphi(x)\psi(x)dx,$$

где линейный функционал $l^{\varepsilon}(\psi)$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. После предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ будем иметь

$$\int\limits_{\Omega} \mu(x)\psi(x)u(0, x)dx = \int\limits_{\Omega} \mu(x)\varphi(x)\psi(x)dx$$

при любом $\psi \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Это доказывает выполнение начального условия $u(0, x) = \varphi(x)$.

3. Оценка решения сверху

Сначала установим две оценки, характеризующие убывание решения задачи (1), (3), (4) при $|x| \to \infty$.

Предложение 1. *Пусть $u(t,x)$ – решение задачи (1), (3), (4) с начальной функцией φ, равной нулю вне шара радиуса R_0. Пусть выполнено неравенство*

$$\rho(x) \leqslant C\mu(x), \qquad C > 0, \qquad x \in \Omega. \tag{21}$$

Тогда для всех $t > 0$, $r \geq R_0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega[r]} \mu u^2(t,x)dx \leqslant e\exp\left(-\widetilde{C}t^{-1}(r-R_0)^2\right)\int\limits_{\Omega}\mu(x)\varphi^2(x)dx, \tag{22}$$

где $\widetilde{C}$ — постоянная зависящая от γ и γ_1.

Доказательство.

Пусть $\xi(\tau,r,\varrho)$ – непрерывная неотрицательная функция, равная нулю при $\tau \leqslant r$ и единице при $\tau \geq r+\varrho$. В оставшемся интервале она линейна $\dfrac{\partial\xi}{\partial\tau} = \dfrac{1}{\varrho}$. Подставив в тождество (18) пробную функцию $v = \eta(x;r,\varrho)u_h$, $\eta(x) = \xi^2(|x|,r,\varrho)$, получим

$$\int\limits_{D^T}\left[\frac{1}{2}\mu(u_h^2\eta)_t + \sum_{i,j=1}^{n}\rho(a_{ij}u_{x_i})_h(\eta u_h)_{x_j}\right]dxdt = 0. \tag{23}$$

После предельного перехода в равенстве (23) при $h \to 0$ имеем:

$$\int\limits_{\Omega}\mu(u^2(T,x)-\varphi^2(x))\eta dx + 2\int\limits_{D^T}\sum_{i,j=1}^{n}\rho a_{ij}u_{x_i}(\eta u)_{x_j}dxdt = 0.$$

Отсюда, в силу условия $\mathrm{supp}\varphi \subset \Omega[R_0]$, для любых $r \geq R_0$ и $\varrho > 0$ нетрудно получить неравенство

$$\int\limits_{\Omega}\mu\eta u^2(T,x)dx + 2\int\limits_{D^T}\rho\sum_{i,j=1}^{n}\eta a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}dxdt \leqslant$$

$$\leqslant -2\int\limits_{D^T}\rho\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_i}u\frac{\partial\eta}{\partial x_j}dxdt \leqslant 2\int\limits_{D^T}\rho\gamma_1|u\nabla u\nabla\eta|dxdt. \tag{24}$$

Преобразуя последнее, будем иметь

$$\int\limits_{\Omega}\mu\eta u^2(T,x)dx + \int\limits_{D^T}\gamma\rho\eta|\nabla u|^2dxdt \leqslant 2\int\limits_{D^T}\rho\gamma_1|u\nabla u\nabla\eta|dxdt.$$

Используя вид функции η, нетрудно получить неравенство

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega[r+\varrho]}\mu u^2(t,x)dx + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega\setminus\Omega[r+\varrho]}\rho\gamma|\nabla u|^2dxdt \leqslant \frac{C}{\varrho^2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega[r+\varrho]\setminus\Omega[r]}\rho u^2dxdt.$$

Вводя обозначение

$$H_r(t) = \int\limits_{\Omega\setminus\Omega[r]}\mu u^2(x,t)dx + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega\setminus\Omega[r]}\rho\gamma|\nabla u|^2dxdt,$$

пользуясь условием (21), устанавливаем, что

$$H_{r+\varrho}(t) \leqslant \frac{C}{\varrho^2}\int\limits_0^t H_r(\tau)d\tau. \tag{25}$$

Неравенство (25) будем применять индуктивно для последовательности r_i, $i = 0,1,2,...k$, $r_{i+1} = r_i + \varrho$, $r_0 = R_0$. Учитывая, что из (20) следует неравенство $H_r(t) \leqslant A = \int\limits_\Omega \mu(x)\varphi^2(x)dx$, $r > 0$, $t > 0$ будем иметь

$$H_{R_0+\varrho}(t) = \frac{ACt}{\varrho^2}. \tag{26}$$

Далее индукцией по k установим неравенство

$$H_{r_k}(t) \leqslant \frac{AC^k t^k}{\varrho^{2k}k!}. \tag{27}$$

Действительно,

$$H_{r_k+\varrho}(t) \leqslant \frac{C}{\varrho^2}\int\limits_0^t H_{r_k}(\tau)d\tau \leqslant \frac{C}{\varrho^2}\int\limits_0^t \frac{AC^k\tau^k}{\varrho^{2k}k!}d\tau = \frac{AC^{k+1}t^{k+1}}{\varrho^{2(k+1)}(k+1)!},$$

что завершает индукцию. Пользуясь неравенством Стирлинга, из (27) нетрудно получить

$$H_{r_k}(t) \leqslant \frac{AC^k e^k t^k}{\sqrt{2\pi k}\varrho^{2k}k^k} \leqslant A\exp\left(-k\ln\frac{\varrho^2 k}{Cet}\right). \tag{28}$$

Выберем k равным целой части числа $\dfrac{(r-R_0)^2}{Ce^2t}$. Если $k = 0$, то $\dfrac{(r-R_0)^2}{Ce^2t} < 1$ и $H_r(t) \leqslant A = eAe^{-1}$, откуда следует неравенство (22). Если $k \geq 1$, то $k \geq \dfrac{(r-R_0)^2}{2Ce^2t}$. Теперь выбираем $\varrho = (r-R_0)/k$. Тогда $r_k = r$ и $\varrho^2 k = \dfrac{(r-R_0)^2}{k} \geq Ce^2t$. Следовательно, $\dfrac{\varrho^2 k}{Cet} \geq 1$. Поэтому из (28) следует, что $H_r(t) = H_{r_k}(t) \leqslant Ae^{-k}$. Тем самым, неравенство (22) установлено.

Предложение 2. *Пусть $u(t,x)$ – решение задачи* (1), (3), (4) *с начальной функцией φ, равной нулю вне шара радиуса R_0. Тогда для всех $t > 0$, $r \geq R_0 + 1$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega[r]} \mu u^2(t,x)dx \leqslant C\exp\left(-2\nu\int\limits_{R_0+1}^r \sqrt{\widetilde{\lambda}(s)}ds\right)\int\limits_\Omega \mu(x)\varphi^2(x)dx, \tag{29}$$

где C, ν — постоянные зависящие от γ и γ_1, а C – еще и от функции $\widetilde{\lambda}$.

Доказательство.

Пусть $\xi(\tau,r)$ – непрерывная неотрицательная функция, равная нулю при $\tau \leqslant R_0$, линейная при $R_0 < \tau < R_0+1$ и равная единице при $\tau \geq r$. В оставшемся интервале она удовлетворяет условию $\dfrac{\partial\xi}{\partial\tau} = \nu\sqrt{\widetilde{\lambda}}\xi$, число ν выберем ниже.

Легко видеть, что $\xi_\tau = \xi(R_0+1,r)$ при $\tau \in (R_0, R_0+1)$, где

$$\xi(R_0+1,r) = \exp\left(-\nu\int\limits_{R_0+1}^r \sqrt{\widetilde{\lambda}(s)}ds\right).$$

Подставив в тождество (18) пробную функцию $v = \eta(x;r)u_h$, $\eta(x;r) = \xi^2(|x|,r)$, получим

$$\int\limits_{D^T}\left[\frac{1}{2}\mu(u_h^2\eta)_t + \sum_{i,j=1}^n \rho(a_{ij}u_{x_i})_h(\eta u_h)_{x_j}\right]dxdt = 0. \tag{30}$$

После предельного перехода в равенстве (30) при $h \to 0$ имеем:

$$\int\limits_{\Omega} \mu(u^2(T,x) - \varphi^2(x))\eta dx + 2\int\limits_{D^T} \sum_{i,j=1}^{n} \rho a_{ij} u_{x_i} (\eta u)_{x_j} dxdt = 0.$$

Отсюда нетрудно получить неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \mu\eta u^2(T,x)dx + 2\int\limits_{D^T} \rho \sum_{i,j=1}^{n} \eta a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dxdt \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_{D^T} \rho\gamma_1 |u\nabla u \nabla \eta| dxdt. \tag{31}$$

Преобразуя последнее, будем иметь

$$\int\limits_{\Omega} \xi^2 \mu u^2 dx + \int\limits_{D^T} \gamma\rho\xi^2 |\nabla u|^2 dxdt \leqslant \int\limits_{D^T} \rho\gamma_1 \left(\varepsilon\xi^2|\nabla u|^2 + \frac{u^2\xi'^2}{\varepsilon} dx\right) dt.$$

Взяв $\varepsilon = \frac{\gamma}{2\gamma_1}$, получаем неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \xi^2\mu u^2 dx + \frac{\gamma}{2}\int\limits_{D^T} \rho\xi^2|\nabla u|^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\gamma_1^2}{\gamma}\left(\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega[r]\setminus\Omega[R_0+1]} \nu^2\rho u^2\xi^2\widetilde{\lambda} dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega[R_0+1]\setminus\Omega[R_0]} \rho u^2\xi^2(R_0+1) dxdt\right). \tag{32}$$

Используя вид функции ξ, преобразуем последние слагаемые

$$\int\limits_{\Omega[r]\setminus\Omega[R_0+1]} \nu^2\rho u^2\xi^2\widetilde{\lambda} dx = \int\limits_{R_0+1}^{r} \nu^2\xi^2(\tau)\widetilde{\lambda}(\tau)d\tau \int\limits_{S_\tau} \rho u^2 dS \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{R_0+1}^{r} \nu^2\xi^2(\tau)d\tau \int\limits_{S_\tau} \rho|\nabla u|^2 dS = \nu^2 \int\limits_{\Omega[r]\setminus\Omega[R_0+1]} \rho\xi^2|\nabla u|^2 dx. \tag{33}$$

Аналогично,

$$\int\limits_{\Omega[R_0+1]\setminus\Omega[R_0]} \rho u^2 dx \leqslant \frac{1}{\inf\limits_{[R_0,R_0+1]} \widetilde{\lambda}(\tau)} \int\limits_{\Omega[R_0+1]\setminus\Omega[R_0]} \rho|\nabla u|^2 dx. \tag{34}$$

Возьмем $\nu = \dfrac{\gamma}{2\gamma_1}$. Подставляя (33) и (34) в (32) и оценивая правую часть (34) с помощью (20), устанавливаем неравенство (29), $C = 2\gamma_1^2/(\gamma \inf\limits_{[R_0,R_0+1]} \widetilde{\lambda}(\tau))$.

Теорема 2. *Пусть $u(t,x)$ – решение задачи (1), (3), (4) с начальной функцией φ, равной нулю при $|x| > R_0$, и выполнено неравенство (21). Тогда найдется число $\nu_2 > 0$, зависящее только от n, γ_1, R_0 такое, что для всех $t > 0$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \mu(x)u^2(t,x)dx \leqslant C\exp\left(-\nu_2 t\lambda(r(t))\right) \int\limits_{\Omega} \mu(x)\varphi^2(x)dx, \tag{35}$$

где $r = r(t)$ произвольная функция, удовлетворяющая неравенству $t\lambda(r) \leqslant t^{-1}(r-R_0)^2$. Постоянная C зависит от γ, γ_1 и n.

Доказательство теорем 1,2.

Пусть $T > 0$ – произвольное число. Введем обозначение

$$\varepsilon = \sup_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega\setminus\Omega[r]} \mu u^2(t,x)dx.$$

Справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \mu u^2(t,x)dx \leqslant \varepsilon + \int\limits_{\Omega[r]} \mu u^2(t,x)dx. \tag{36}$$

Так как функция $u(t,x)$ для почти всех $t \in (0,T)$ является элементом пространства $\mathring{H}^1(\Omega)$, то из (5) получаем

$$\int\limits_{\Omega} \mu u^2(t,x)dx \leqslant \varepsilon + \lambda^{-1}(r) \int\limits_{\Omega} \rho|\nabla u|^2 dx. \tag{37}$$

Для функции $E(t) = \int\limits_{\Omega} \mu u^2(t,x)dx$ с помощью соотношения, вытекающего из (20)

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \mu u^2(t,x)dx \leqslant -\gamma \int\limits_{\Omega} \rho|\nabla u|^2 dx,$$

выводим неравенство

$$\gamma(E(t) - \varepsilon)\lambda(r) \leqslant -\frac{d}{dt}E(t).$$

Решая его, находим

$$E(T) - \varepsilon \leqslant e^{-T\lambda(r)\gamma}E(0). \tag{38}$$

Для доказательства теоремы 2 воспользуемся оценкой (22):

$$\varepsilon \leqslant e \exp\left(-\widetilde{C}T^{-1}(r-R_0)^2\right) \int\limits_{\Omega} \mu(x)\varphi^2(x)dx.$$

Тогда

$$E(T) \leqslant E(0)\left(e\exp\left(-\widetilde{C}T^{-1}(r-R_0)^2\right) + e^{-T\lambda(r)\gamma}\right). \tag{39}$$

Последнее неравенство справедливо при всех $r \geq R_0$. Естественно взять инфимум правой части по r. Но, поскольку точка инфимума не находится конструктивным способом, можно взять такое значение $r(T) > R_0$ (по возможности меньшее), чтобы выполнялось неравенство

$$T^{-1}(r-R_0)^2 \geq T\lambda(r).$$

Возможность выбора такого $r(T)$ следует из ограниченности функции $\lambda(r)$. Подставляя $r = r(T)$ в (39), получаем оценку теоремы 2.

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся оценкой (29):

$$\varepsilon \leq C\exp\left(-2\nu \int\limits_{R_0+1}^{r} \sqrt{\widetilde{\lambda}(s)}ds\right) \int\limits_{\Omega} \mu\varphi^2(x)dx.$$

Выберем число $r = r(T)$ (по возможности большее) так, чтобы

$$T\lambda(r) \geq \int\limits_{R_0+1}^{r} \sqrt{\widetilde{\lambda}(s)}ds.$$

Тогда из (38) вытекает неравенство (7) теоремы 1.

Покажем теперь, что функция $\lambda(r)$ непрерывна в достаточно широкой ситуации. Назовем область Ω регулярной, если существует семейство диффеоморфизмов $\varphi_{r_1,r_2} : \Omega[r_1] \to \Omega[r_2]$, $0 < r_1 < r_2$ таких, что $\varphi_{r_1,r_2}(x) \to id$ в $C^1(\Omega[r_1])$ как при $r_1 \to r_2$, так и при $r_2 \to r_1$.

Покажем, что для регулярной области функция $\lambda(r)$ будет непрерывной. Для любого $\varepsilon > 0$, $r > 0$ существует функция $g_r \in C_0^1(\Omega)$ (зависящая от ε) такая, что $F_r(g_r) < \lambda(r) + \varepsilon$. Очевидно, что $\lambda(r_1) \le F_{r_1}(g_{r_2})$. Поэтому

$$\lim_{r_1 \to r_2} \sup \lambda(r_1) \le \lambda(r_2) + \varepsilon.$$

Далее, $F_{r_2}(g_{r_1}(\varphi_{r_1,r_2}(x))) \ge \lambda(r_2)$. Следовательно,

$$\lambda(r_2) \le \lim_{r_1 \to r_2} \inf F_{r_2}(g_{r_1}(\varphi_{r_1,r_2}(x))) =$$

$$= \lim_{r_1 \to r_2} \inf F_{r_1}(g_{r_1}(\varphi_{r_1,r_2}(x))) = \lim_{r_1 \to r_2} \inf F_{r_1}(g_{r_1}(x)) \le \varepsilon + \lim_{r_1 \to r_2} \inf \lambda(r_1).$$

Из полученных соотношений, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, следует непрерывность функции $\lambda(r)$ слева. Непрерывность справа доказывается аналогично.

4. Примеры

Ограничимся построением примеров в случае $n = 2$, хотя аналогичные примеры несложно адаптировать к многомерной ситуации для области вращения

$$\Omega_f = \{(x_1, x')|\ x_1 > 0; |x'| < f(x_1)\},$$

определяемой непрерывной положительной функцией $f(x_1)$, $f(x_1) \ge 1$, $x_1 > 0$. Получим некоторые оценки функций $\lambda, \widetilde{\lambda}$ в случае плоской области Ω_f. Для простоты будем ссылаться на вариант теоремы 1, когда области $\Omega[r], S_r$ заменены на $\Omega(r) = \{x \in \Omega \mid x_1 < r\}$ и $S_r = \{(x_1, x') \in \Omega|\ x_1 = r\}$.

Выведем аналог неравенства Стеклова-Фридрихса с весами. Пусть $g(s) \in C^1[0,r]$ и $g(0) = 0$. Возведя в квадрат равенство

$$g(s) = g(s) - g(0) = \int_0^s g'(t)dt,$$

нетрудно получить

$$g^2(s) \leqslant \int_0^r \rho^{-1}(t)dt \int_0^r \rho(t)(g'(t))^2 dt.$$

Домножим это на $\mu(s)$ и проинтегрируем по $s:$

$$\int_0^r \mu(s)g^2(s)ds \leqslant \int_0^r \mu(s)ds \int_0^r \rho^{-1}(t)dt \int_0^r \rho(t)(g'(t))^2 dt.$$

Пусть теперь $g(x_1, x_2) \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда имеем

$$\int_0^{f(x_1)} \mu(x)g^2(x)dx_2 \leqslant \int_0^{f(x_1)} \mu(x)dx_2 \int_0^{f(x_1)} \rho^{-1}(x)dx_2 \int_0^{f(x_1)} \rho(x)(g'_{x_2}(x))^2 dx_2. \tag{40}$$

Введем обозначение $\Lambda(r) = \sup\limits_{0 \leqslant x_1 \leqslant r} M(x_1)$, где

$$M(x_1) = \int_0^{f(x_1)} \mu(x)dx_2 \int_0^{f(x_1)} \rho^{-1}(x)dx_2.$$

Тогда

$$\int_0^{f(x_1)} \mu(x)g^2(x)dx_2 \leqslant \Lambda(r) \int_0^{f(x_1)} \rho(x)(g'_{x_2}(x))^2 dx_2. \tag{41}$$

Или, интегрируя по x_1, получим

$$\int\limits_{\Omega[r]} \mu(x)g^2(x)dx \leqslant \Lambda(r) \int\limits_{\Omega[r]} \rho(x)(g'_{x_2}(x))^2dx. \tag{42}$$

В качестве $\mu(x)$ и $\rho(x)$ рассмотрим функции

$$\rho(x_1,x_2) = \begin{cases} \widetilde{\rho}(x_1)(f(x_1)-|x_2|)^\alpha, & |x_2| \in [f(x_1)-1, f(x_1)]|, \\ \widetilde{\rho}(x_1), & |x_2| < f(x_1)-1, \end{cases}$$

$$\mu(x_1,x_2) = \begin{cases} \widetilde{\mu}(x_1)(f(x_1)-|x_2|)^\beta, & |x_2| \in [f(x_1)-1, f(x_1)]|, \\ \widetilde{\mu}(x_1), & |x_2| < f(x_1)-1, \end{cases}$$

где $|\alpha| < 1$, $\beta > -1$. Функции $\widetilde{\mu}(x_1), \widetilde{\rho}(x_1)$ определим ниже. Потребуем для простоты, чтобы $f(r) \geq \dfrac{|\alpha|}{1-|\alpha|}$ и $f(r) \geq \dfrac{-\beta}{1+\beta}$ при $r \geq R_0$.

Вычисляя $M(x_1)$ при $\mu=\rho$, из (41) находим, что

$$\widetilde{\lambda}(r) \geq \left[\left(f(r)-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\left(f(r)+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right]^{-1} \geq \frac{1}{2f^2(r)}, \tag{43}$$

при $r \geq R_0$. Подставляя эту оценку в (29), получаем

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(r)} \mu u^2(t,x)dx \leqslant C\exp\left(-2\nu \int\limits_{R_0+1}^{r} \frac{ds}{f(s)}\right) \int\limits_{\Omega} \mu(x)\varphi^2(x)dx.$$

Легко видеть также, что

$$\Lambda(r) = \sup_{0\leqslant x_1 \leqslant r} \frac{\widetilde{\mu}(x_1)}{\widetilde{\rho}(x_1)} \left(f(x_1)-\frac{\beta}{1+\beta}\right)\left(f(x_1)+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \leqslant$$

$$\max\left(\sup_{0\leqslant x_1\leqslant r} 4\frac{\widetilde{\mu}(x_1)}{\widetilde{\rho}(x_1)} f^2(x_1), \sup_{0\leqslant x_1\leqslant R_0} 4\frac{\widetilde{\mu}(x_1)}{\widetilde{\rho}(x_1)} \frac{|\beta|}{1+\beta}\frac{|\alpha|}{1-\alpha}\right).$$

Для простоты будем предполагать, что функция $\dfrac{\widetilde{\mu}(x_1)}{\widetilde{\rho}(x_1)} f^2(x_1)$ возрастает и $\dfrac{\widetilde{\mu}(R_0)}{\widetilde{\rho}(R_0)} f^2(R_0) \geq \sup\limits_{0\leqslant x_1\leqslant R_0} \dfrac{\widetilde{\mu}(x_1)}{\widetilde{\rho}(x_1)} \dfrac{|\beta|}{1+\beta}\dfrac{|\alpha|}{1-\alpha}$. Ввиду (42) имеем $\lambda(r) \geq \Lambda^{-1}(r)$, поэтому

$$\lambda(r) \geq \frac{\widetilde{\rho}(r)}{4\widetilde{\mu}(r)f^2(r)}. \tag{44}$$

Несколько загрубляя оценку Теоремы 1 (см. ее доказательство), можно функцию $r(t)$ выбрать удовлетворяющей неравенству $\dfrac{t\widetilde{\rho}(r)}{\widetilde{\mu}(r)f^2(r)} \geq \displaystyle\int\limits_{R_0+1}^{r} \frac{ds}{f(s)}$. Тогда оценка (7) примет вид

$$\int\limits_{\Omega} \mu(x)u^2(t,x)dx \leqslant C\exp\left(-\nu_2 \int\limits_{R_0+1}^{r(t)} \frac{ds}{f(s)}\right) \int\limits_{\Omega} \mu(x)\varphi^2(x)dx. \tag{45}$$

В частности, если $f(s)=s^p, p\in(0,1)$: $\displaystyle\int\limits_{R_0+1}^{r(t)} \frac{ds}{f(s)} \leqslant \frac{r^{1-p}}{1-p}$. Пусть для простоты $\dfrac{\widetilde{\rho}}{\widetilde{\mu}} = \dfrac{r^q}{1-p}$, $q<1-p$, тогда неравенство для выбора $r(t)$ обретает вид $t \geq r^{1-p-q}$, допустим выбор $r(t) = t^{(1-p-q)^{-1}}$. В таком случае оценка (45) обретает вид

$$\int\limits_{\Omega} \mu(x)u^2(t,x)dx \leqslant C_1\exp\left(-C_2 t^{\frac{1-p}{1-p-q}}\right) \int\limits_{\Omega} \mu(x)\varphi^2(x)dx.$$

Отметим, что в многомерном случае функция $f(s) = s^p$ порождает параболоид вращения и все предыдущие выкладки сохраняются с соответствующими изменениями констант.

В случае $f(s) = s$ имеем внутренность угла на плоскости (или конуса в многомерном случае). Тогда $\int\limits_{R_0+1}^{r(t)} \frac{ds}{f(s)} \leqslant \ln r$. В качестве примера подберем функции $\widetilde{\rho}$, $\widetilde{\mu}$ так, чтобы $\frac{\widetilde{\rho}}{\widetilde{\mu}} = \frac{\ln r}{r^q}$, $q > 0$. Тогда неравенство для выбора $r(t)$ обретает вид $t \geq r^q$. Выберем $r(t) = t^{1/q}$. Теперь оценка (45) примет вид

$$\int\limits_{\Omega} \mu(x) u^2(t,x) dx \leqslant C_3 \exp\left(-C_4 \ln t\right) \int\limits_{\Omega} \mu(x) \varphi^2(x) dx.$$

5. Оценка снизу

Напомним неравенство Гарнака, установленное Ю. Мозером в [23] для равномерно параболического уравнения

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(t,x) u_{x_i})_{x_j}. \tag{46}$$

Сформулируем его в удобном для нас виде: для неотрицательного в цилиндре $Q = (0, 9C_1\rho^2] \times B(2\rho, \mathbf{w}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $C_1 > 1$, решения уравнения (46) справедливо неравенство

$$\max_{Q^-} u(\tau, x) \leqslant H \min_{Q^+} u(\tau, x),$$

где $Q^- = [\rho^2, 2\rho^2] \times B(\rho, \mathbf{w})$, $Q^+ = [8C_1\rho^2, 9C_1\rho^2] \times B(\rho, \mathbf{w})$, $B(\rho, \mathbf{w})$ – шар радиуса ρ с центром в точке $\mathbf{w} \in \Omega$, а постоянная $H \geq 1$ зависит только от n, C_1 и констант параболичности уравнения.

Напомним понятие A_2-веса, введенное Макенхауптом. Это измеримая функция $\vartheta(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая неравенству

$$\int\limits_{K} \vartheta(x) dx \times \int\limits_{K} \frac{1}{\vartheta(x)} dx < C_0 |K|^2$$

для любого куба $K \subset \mathbb{R}^n$. В работе [24] доказано, что если в Q выполнено равенство $\rho = \mu = \vartheta$, где ϑ — некоторый A_2-вес, то для любого неотрицательного решения в Q уравнения (1) выполнено неравенство Гарнака. При этом постоянная H зависит только от C_0, C_1, n, γ и γ_1. Покажем, что можно отказаться от требования $\rho = \mu$, если $\mu = \vartheta$ и выполнены неравенства

$$C_1^{-1} \leqslant \frac{\rho(x)\mu(\mathbf{w})}{\mu(x)\rho(\mathbf{w})} \leqslant C_1, \;\; x \in B(2\rho, \mathbf{w}). \tag{47}$$

После замены $\tau = \frac{\rho(\mathbf{w})}{\mu(\mathbf{w})} t$ получаем уравнение

$$div(\rho(x) a(t,x) \nabla u) = \mu(x) u_t = \frac{\mu(x)\rho(\mathbf{w})}{\mu(\mathbf{w})} u_\tau$$

или при $x \in B(2\rho, \mathbf{w})$:

$$div(\vartheta(x) \frac{\rho(x)\mu(\mathbf{w})}{\mu(x)\rho(\mathbf{w})} a(\tau, x) \nabla u) = \vartheta(x) u_\tau.$$

Последнее уравнение в Q имеет вид (1) с $\rho = \mu = \vartheta$ и $\widetilde{a} = \frac{\rho(x)\mu(\mathbf{w})}{\mu(x)\rho(\mathbf{w})} a$. Если переменные $(\tau, x) \in Q$, то $(t, x) \in \widetilde{Q} = (0, 9C_1\rho^2 \frac{\mu(\mathbf{w})}{\rho(\mathbf{w})}] \times B(2\rho, \mathbf{w})$. Очевидным образом изменяются $Q^- \to \widetilde{Q}^-$ и $Q^+ \to \widetilde{Q}^+$. Для этих новых цилиндров остается справедливым неравенство Гарнака.

Таким образом, если в окрестности каждой точки $\mathbf{w} \in \Omega$ выполнено неравенство (47) и функция $\mu(x)$ в этой окрестности совпадает с некоторым весом ϑ (зависящим от выбора точки $\mathbf{w}$), то неотрицательное решение уравнения (1) либо всюду положительно в Ω, либо тождественно равно нулю. Это доказывается стандартной техникой, если радиус окрестности непрерывно зависит от точки. Далее будет рассматриваться положительное решение уравнения (1).

Теорема 3. *Пусть $s > pf(s), p \in (0,1)$ при $s \geq z_0$, Ω_f – область вращения и вес $\mu(x)$ совпадает в $\Omega_{pf} \cap \{x_1 > z_0\}$ с некоторым A_2 — весом ϑ. Пусть выполнены неравенства*

$$\frac{f(x_1')}{f(x_1'')} \leqslant 2, \qquad \frac{\rho(x')\mu(x'')}{\mu(x')\rho(x'')} \leqslant C_1 \tag{48}$$

при всех $x', x'' \in \Omega_{pf}$ таких, что x_1', $x_1'' \in [s - pf(s), s + pf(s)]$ и всех $s \geq z_0$. Тогда для положительного решения уравнения (1) выполнено неравенство

$$\min_{x \in B(r', \mathbf{w})} u(t,x) \geq u(t_1, (z_0, 0)) \exp\left(-C_2 \int\limits_{z_0}^{\widetilde{r}(t)} \frac{ds}{f(s)}\right),$$

где $B(2r', \mathbf{w})$ – некоторый шар, вписанный в $\Omega_{pf} \cap \{z_0 < x_1 < \widetilde{r}(t)\}$; $t_1 > 0$ – некоторое фиксированное число, $\widetilde{r}(t), t \geq t_1$, определяется как наименьшее r, удовлетворяющее неравенству

$$\int\limits_{z_0}^{r} \frac{ds}{f(s)} \geq tL(r), \quad L(r) = \inf_{[z_0, r]} \frac{4\rho(z,0)}{\mu(z,0)pf^2(z)},$$

а постоянная C_2 зависит только от p, C_0, C_1 n, γ, γ_1.

Доказательство. Пусть $y_0 = z_0$ и $r \geq z_0$ – произвольное число. Строим последовательность касающихся шаров с радиусами r_i, $i = 1, 2, ..$ и точками касания $\mathbf{v}_i = (y_{i-1} + 2r_i, 0)$, такими, что удвоенный шар $B(2r_i, \mathbf{w}_i)$, где $\mathbf{w}_i = (z_i, 0)$, $z_i = y_{i-1} + r_i$, касается множества $\partial\Omega_{pf}$ изнутри. Отметим, что $r_{i+1} \leq 3r_i$, так как в противном случае $B(2r_i, \mathbf{w}_i) \subset B(2r_{i+1}, \mathbf{w}_{i+1})$, то есть шар $B(2r_i, \mathbf{w}_i)$ не касается границы Ω_{pf}.

Обозначим $\mu_i = \mu(\mathbf{w}_i)$, $\rho_i = \rho(\mathbf{w}_i)$, $t_1 = r_1^2 \dfrac{\mu_1}{\rho_1}$; $t_{i+1} = t_i + (9C_1 - 1)\dfrac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2$.

Если при некотором i выполнено неравенство $r_i \leqslant r_{i+1}$, то при $s = z_{i+1}$, имеем $s - z_i \leqslant 2r_{i+1} \leqslant pf(s)$, поэтому из (48) получаем неравенство

$$\frac{\mu_{i+1}\rho_i}{\rho_{i+1}\mu_i} \leqslant C_1. \tag{49}$$

Если же $r_i > r_{i+1}$, то полагаем $s = z_i$, $z_{i+1} - s < 2r_i < pf(s)$, и из (48) снова получаем (49). Кроме того, при $s = z_i$ из (48) вытекают также аналог неравенства (47)

$$C_1^{-1} \leqslant \frac{\rho(x)\mu(w_i)}{\mu(x)\rho(w_i)} \leqslant C_1, \ x \in B(2\rho_i, w_i)$$

и неравенство

$$\frac{f(x_1')}{f(x_1'')} \leqslant 2, \ \forall x', x'' \in [s - 2r_i, s + 2r_i]. \tag{50}$$

Рассмотрим цилиндры

$$\widetilde{Q}_i = \left[t_i - \frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2, t_i + (9C_1 - 1)\frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2\right] \times B(2r_i, \mathbf{w}_i),$$

$$\widetilde{Q}_i^- = \left[t_i, t_i + \frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2\right] \times B(r_i, \mathbf{w}_i),$$

$$\widetilde{Q}_i^+ = \left[t_i + (8C_1 - 1)\frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2, t_i + (9C_1 - 1)\frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2\right] \times B(r_i, \mathbf{w}_i).$$

Покажем, что если $t_{i+1} \leq T$, то $\widetilde{Q}_i \subset (0, T] \times \Omega_{pf}$. Для этого достаточно установить, что $t_i \geq \frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2$. Первый шаг индукции выполнен. Далее, ввиду (49),

$$t_{i+1} = t_i + (9C_1 - 1)\frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2 \geq 9C_1 \frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2 \geq \frac{\mu_{i+1}}{\rho_{i+1}} r_{i+1}^2,$$

что завершает индукцию.

Пусть k – первый номер, такой что $y_{k+1} \geq r$ или $t_{k+1} \geq T$. Тогда по неравенству Гарнака

$$u(t_1, (y_0, 0)) \leqslant Hu(t_2, \mathbf{v}_1) \leqslant ... \leqslant H^k u(t_{k+1}, \mathbf{v}_k).$$

Отсюда $u(t_{k+1}, \mathbf{v}_k) \geq H^{-k}C_3$. Оценим сверху число k. Пусть s_i – абсцисса одной из точек касания шара $B(2r_i, \mathbf{w}_i)$ границы области Ω_{pf}. Ясно, что $|z_i - s_i| \leq 2r_i$, $pf(s_i) \leq 2r_i$, поэтому, ввиду (50), $f(s)/2 \leq f(s_i)$ при $s \in [y_{i-1}, y_i]$, и $r_i \geq pf(z_i)/4$. Тогда

$$k = \sum_{i=1}^{k} \frac{y_i - y_{i-1}}{2r_i} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{y_i - y_{i-1}}{pf(s_i)} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{2ds}{pf(s)} \leqslant \int\limits_{y_0}^{r} \frac{2ds}{pf(s)}.$$

Пусть $\frac{\mu_m}{\rho_m} r_m^2 = \max\limits_{j \leqslant k} \frac{\mu_j}{\rho_j} r_j^2 \geq \max\limits_{z \in [z_0, r]} \frac{\mu(z,0)}{64C_1\rho(z,0)}(pf(z))^2$. Последнее неравенство следует из (48). Для номеров $i = m+1, m+2, ...$ заменим шары $B(2r_i, \mathbf{w}_i)$ на шары $B(2r_m, \mathbf{w}_m)$. Цилиндры $\widetilde{Q}_i, i = m+1, m+2, ...$ изменятся соответствующим образом. Поскольку каждый цилиндр увеличивает t_i на величину $(9C_i - 1)\frac{\mu_m}{\rho_m} r_m^2$, то до значения t может понадобиться не более $N = \left[\frac{t\rho_m}{(9C_1 - 1)\mu_m r_m^2}\right] \leqslant 2tL(r)/p$ цилиндров. Таким образом, получаем оценку

$$\min_{x \in B(r_m, \mathbf{w}_m)} u(t,x) \geq H^{-(k+N)} C_3 \geq \exp\left(-\left(\int\limits_{z_0}^{r} \frac{2ds}{pf(s)} + 2tL(r)/p\right) \ln H\right), \qquad (51)$$

из которой следует утверждение теоремы.

Применим неравенство (51) к примеру из §4, имеем

$$L(r) = \inf_{[z_0, r]} \frac{4\widetilde{\rho}(z)}{\widetilde{\mu}(z) p f^2(z)} = \frac{4\widetilde{\rho}(r)}{\widetilde{\mu}(r) p f^2(r)} \leqslant 16\lambda(r)/p.$$

Воспользовавшись еще неравенством (43), получим

$$\int\limits_{\Omega(r)} \mu(x) u^2(t,x) dx \geq \pi r_m^2 \min_{x \in B(r_m, v_m)} \mu(x) C_3 \exp\left(-\frac{8}{p^2} \ln H \left(\int\limits_{z_0}^{r} p\sqrt{\widetilde{\lambda}}(s) ds\right) + 8t\lambda(r)\right).$$

Теперь выбор $r = r(t)$ как во введении (в предположении непрерывности функции $\lambda(r)$) :

$$t\lambda(r) = \int\limits_{R_0+1}^{r} \sqrt{\widetilde{\lambda}(s)} ds,$$

в определенном смысле, подтверждает точность оценки сверху (7), если множитель перед экспонентой в последнем неравенстве не слишком мал.

Автор выражает искреннюю благодарность Ф. Х. Мукминову за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гущин А.К. *Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка* // Труды матем. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. Т. 126. 1973. С. 5–45.
2. Гущин А.К. *Стабилизация решений второй краевой задачи для параболического уравнения второго порядка* // Матем. сб. Т. 101(143). № 4(12). 1976. С. 459–499.
3. Лежнев А.В. *О поведении при больших значениях времени неотрицательных решений второй смешанной задачи для параболического уравнения* // Матем. сб. Т. 129. № 2. 1986. С. 186–200.
4. Ушаков В.И. *Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения в нецилиндрической области* // Матем. сб. Т. 111(153). 1980. № 1. С. 95–115.
5. Мукминов Ф.Х. *Стабилизация решений первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка* // Матем. сб. Т. 111(153). № 4. 1980. С. 503–521.
6. Биккулов И.М., Мукминов Ф.Х. *О стабилизации нормы решения одной смешанной задачи для параболических уравнений 4-го и 6-го порядков в неограниченной области* // Матем. сб. Т. 195. № 3. 2004. С. 115–142.

7. Акулов В.Ф., Шишков А.Е. *Об асимптотических свойствах решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях* // Матем. сб. Т. 182. № 8. 1991. С. 1200–1210.
8. Гущин А.К. *О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения* // Матем. сб. Т. 119(161). № 4(12). 1982. С. 451–508.
9. Гущин А.К. *Некоторые свойства обобщенного решения второй краевой задачи для параболического уравнения* // Матем. сб. Т. 97(139). №2(6). 1975. С. 242–261.
10. Денисов В.Н. *О стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности* //Дифференц. уравнения. Т. 24. 1988. С. 288–299.
11. Жиков В.В. *О стабилизации решений параболических уравнений* // Матем. сб. Т. 104(146). 1977. С. 597–616.
12. Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х. *Оценки скорости стабилизации при* $t \to \infty$ *решения первой смешанной задачи для квазилинейной системы параболических уравнений второго порядка* // Матем. сб. Т. 191. № 2. 2000. С. 91–131.
13. Кожевникова Л.М. *О классах единственности решения первой смешанной задачи для квазилинейной параболической системы второго порядка в неограниченной области* // Известия РАН. Т. 65. № 3. 2001. С. 51–66.
14. Кожевникова Л.М. *Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения* // Матем. сб. Т. 196. № 7. 2005. С. 67-100.
15. Мукминов Ф.Х. *Стабилизация решений первой смешанной задачи для системы уравнений Навье-Стокса:* Дис. докт. физ.-матем. наук. М.: МИРАН. 1994. 225 с.
16. Мукминов Ф.Х. *Об убывании нормы решения смешанной задачи для параболического уравнения высокого порядка* // Дифференц. уравнения. Т. 23. № 10. 1987. С. 1172–1180.
17. Тедеев А.Ф. *Стабилизация решений первой смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения высокого порядка* // Дифференц. уравения. Т. 25. № 3. 1989. С. 491–498.
18. Тедеев А.Ф. *Оценки скорости стабилизации при* $t \to \infty$ *решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка* // Дифференц. уравнения. Т. 27. № 10. 1991. С. 1795–1806.
19. Ушаков В.И. *О поведении решений третьей смешанной задачи для параболических уравнений второго порядка при* $t \to \infty$ // Дифференц. уравнения. Т. 15. 1979. С. 310–320.
20. Жиков В.В. *О весовых соболевских пространствах* // Матем. сб. Т. 189(8). 1998. С. 27–58
21. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука, 1967. 736 с.
22. Крылов Н.В., Сафонов М.В. *Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами* // Изв. АН СССР. Сер. матем. Т. 44. № 1. 1980. С. 161 -175.
23. J.A. Moser *Harnack inequality for parabolic differential equations* // Comm. Pure Appl. Math. V. 17. № 1. 1964. P. 101–134.
24. F. Chiarenza, R. Serapioni *A remark on a Harnack inequality for degenerate parabolic equations* // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. № 73. 1985. P. 179–190.

Венера Фидарисовна Вильданова
Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: `gilvenera@mail.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 1 (2016). С. 54-71.

НЕРАВЕНСТВО ГОРДИНГА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С НЕСТЕПЕННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

С.А. ИСХОКОВ, М.Г. ГАДОЕВ, И.А. ЯКУШЕВ

Аннотация. Для эллиптических операторов высшего порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области n-мерного евклидового пространства R_n с нестепенным вырождением доказывается весовой аналог неравенства Гординга, и с помощью этого неравенства изучается однозначная разрешимость вариационной задачи Дирихле, решение которой ищется в замыкание класса бесконечнодифференцируемых финитных функций. Вырождение коэффициентов оператора по разной независимой переменной характеризуется с помощью разных функций. Предполагается, что младшие коэффициенты оператора принадлежат некоторым весовым L_p-пространствам. Для одного класса эллиптических операторов со степенным вырождением в полупространстве изучается разрешимость вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями.

Ключевые слова: эллиптический оператор, нестепенное вырождение, неравенство Гординга, вариационная задача Дирихле.

Mathematics Subject Classification: 35J35, 35D05, 35J70, 46E35, 35J40

1. Введение

Из общей теории дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, [1, 2]) известно, что неравенство Гординга [3] играет важную роль в исследовании разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических уравнений методами функционального анализа. Однако исследование краевых задач для эллиптических уравнений с вырождением методами функционального анализа, в основном, проводилось без использования неравенства Гординга (см., например, [4]–[10]). В случае дифференциальных операторов с вырождением, неравенство Гординга было доказано в работах [11, 12]. Эллиптические операторы, рассмотренные в [11], имеют специальный вид, заданы в ограниченной области Ω^+, расположенной в полупространстве $E^+_{n+1} = \{(x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y) : y > 0\}$ и прилегающей к гиперплоскости $y = 0$. В их определении вместо обычных операторов дифференцирования использовались операторы вида

$$\widetilde{D}^{m+r} = D^m_x \widetilde{D}^r_y, \quad D^m_x = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}}, \quad \widetilde{D}^r_y = y^r \frac{\partial^r}{(y\partial y)^r},$$

и вследствие этого вырождение имело место только на части Γ^0 границы области Ω^+, лежащей на гиперплоскости $y = 0$. Эллиптические операторы, рассмотренные в [12], заданы в произвольной (ограниченной или неограниченной) области и имеют одинаковое вырождение по всем независимым переменным.

S.A. Iskhokov, M.G. Gadoev, I.A. Yakushev, Garding inequality for higher order elliptic operators with a non-power degeneration and its applications.

Поступила 12 мая 2015 г.

В отличие от работ [11, 12], здесь рассматриваются общие эллиптические операторы высшего порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области с разными характерами вырождения по разным независимым переменным.

Часть результатов статьи в кратком виде без доказательства анонсирована в [13].

2. Функциональные пространства. Вспомогательные интегральные неравенства

Пусть R_n – n-мерное евклидово пространство и пусть $\Pi(0) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R_n : |x_i| < 1/2, i = \overline{1,n}\}$ — единичный куб с центром в начале координат. Для любой точки $\xi \in R_n$ и любого вектора $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ с положительными компонентами определим параллелепипед $\Pi_{\vec{t}}(\xi)$ равенством

$$\Pi_{\vec{t}}(\xi) = \{x \in R_n : ((x_1 - \xi_1)/t_1, \ldots, (x_n - \xi_n)/t_n) \in \Pi(0)\}.$$

Пусть Ω — произвольное открытое множество в R_n и пусть $g_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ — определенные в Ω положительные функции. Положим $\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi) = \Pi_{\varepsilon\cdot\vec{g}(\xi)}(\xi)$, где $\vec{g}(\xi) = (g_1(\xi), \ldots, g_n(\xi))$.

Далее в работе предполагается, что множество Ω и функции $g_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ связаны условием: существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $\xi \in \Omega$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon_0,\vec{g}}(\xi)$ содержится в Ω. Это условие является аналогом условия погружения, рассмотренного в работе П.И. Лизоркина [14]. В [14] также рассмотрены примеры областей Ω и положительных функций $g_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$, удовлетворяющих условию погружения.

Пусть $\sigma(x)$ – определенная в Ω положительная функция. Предположим, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существуют положительные числа $\lambda(\varepsilon), \nu(\varepsilon)$ такие, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \lambda(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \nu(\varepsilon) = 1$$

и

$$\frac{1}{\nu(\varepsilon)} \leqslant \frac{\sigma(x)}{\sigma(\xi)} \leqslant \nu(\varepsilon),\ \frac{1}{\lambda(\varepsilon)} \leqslant \frac{g_i(x)}{g_i(\xi)} \leqslant \lambda(\varepsilon),\ i = \overline{1,n}, \tag{2.1}$$

для всех $x \in \Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$ и всех $\xi \in \Omega$.

Класс положительных функций $\sigma(x),\ x \in \Omega$, удовлетворяющих условию (2.1), обозначим через $\Phi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$.

Пусть $1 \leqslant p < +\infty$ и r — натуральное число. Символом $L^s_{p,r}(\Omega; \sigma, \vec{g})$, где целое число s такое, что $0 \leqslant s \leqslant r$, обозначим класс функций $u(x)$, $x \in \Omega$, имеющих обобщенные по Соболеву производные $u^{(k)}(x)$, $k = (k_1, k_2 \ldots, k_n)$ — мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 \cdots + k_n \leqslant r$, с конечной полунормой

$$\|u; L^s_{p,r}(\Omega; \sigma, \vec{g})\| = \left\{ \sum_{|k|=s} \int_\Omega (\sigma(x) g_1^{k_1 - r}(x) g_2^{k_2 - r}(x) \ldots g_n^{k_n - r}(x) |u^{(k)}(x)|)^p dx \right\}^{1/p},$$

а символом $W^r_p(\Omega; \sigma, \vec{g})$ — пространство функций $u \in L^r_{p,r}(\Omega; \sigma, \vec{g})$ с конечной нормой

$$\|u; W^r_p(\Omega; \sigma, \vec{g})\| = \left\{ \|u; L^r_{p,r}(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^p + \|u; L^0_{p,r}(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^p \right\}^{1/p}. \tag{2.2}$$

Пространство $W^r_p(\Omega; \sigma, \vec{g})$ банахово с нормой (2.2), и в сделанных выше предположениях при всех $p \in [1, \infty)$ и всех натуральных r множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в нем [10].

Символом $L_p(\Omega;\ \sigma)$ обозначим весовое лебегово пространство с нормой

$$\|u;\ L_p(\Omega; \sigma)\| = \left\{ \int_\Omega \sigma^p(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Для любого натурального числа m и любого $\varepsilon > 0$ обозначим через $\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon_m,\vec{g}}(\xi)$ при $\varepsilon_m = m\cdot\varepsilon/(m+1)$. Заметим, что $\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi) \subset \Pi_{\varepsilon_0,\vec{g}}(\xi)$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, для любого натурального числа m.

Следующая лемма (см. лемму 2 работы [10]) является обобщением известной леммы Труази [15] на рассматриваемый случай и используется при выводе весовых интегральных неравенств из безвесовых.

Лемма 2.1. [10]. *В сделанных выше предположениях относительно области Ω и положительных функций $\sigma(x)$, $g_i(x)$, $x \in \Omega$, $i = \overline{1,n}$, справедливо соотношение эквивалентности*

$$\int\limits_{\Omega} \left(\sigma(\xi)\|u; L_p(\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi))\|\right)^p d\xi \asymp \int\limits_{\Omega} \left(\sigma(x)(g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x))^{1/p}|u(x)|\right)^p dx,$$

где символ $\asymp$ означает наличие двусторонней оценки с некоторыми положительными константами.

Лемма 2.2. *Пусть $\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(x;\xi)$ — характеристическая функция параллелепипеда $\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$. Тогда для любого натурального числа m и достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство*

$$\left(\frac{\varepsilon}{2\lambda(\varepsilon)}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{m}\right)^n g_1^{-1}(x)g_2^{-1}(x)\dots g_n^{-1}(x)\int \chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(x;\xi)d\xi \leqslant \left(\frac{\lambda(\varepsilon)\varepsilon}{2}\right)^n, \tag{2.3}$$

где $\lambda(\varepsilon)$ — такое же число как в условии (2.1).

Доказательство. Для произвольной фиксированной точки $x \in \Omega$ вводим следующие обозначения

$$T_{\varepsilon,\vec{g}}(x) = \left\{\xi \in R_n : |\xi_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{2}\, g_i(\xi),\ i = \overline{1,n}\right\},$$

$$D_{\varepsilon,\vec{g}}(x) = \left\{\xi \in R_n : |\xi_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{2}\, g_i(x),\ i = \overline{1,n}\right\}.$$

Пусть $\xi \in D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon)^{-1},\vec{g}}(x)$. Тогда из условия (2.1) следует, что $|\xi_i - x_i| < \varepsilon\cdot g_i(x)/2\lambda(\varepsilon) <$ $< \varepsilon g_i(\xi)/2$, $i = \overline{1,n}$. Следовательно, $\xi \in T_{\varepsilon,\vec{g}}(x)$ и поэтому $D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon)^{-1},\vec{g}}(x) \subset T_{\varepsilon,\vec{g}}(x)$ для всех $x \in \Omega$. Аналогично в силу условия (2.1) доказывается, что $T_{\varepsilon,\vec{g}}(x) \subset D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon),\vec{g}}(x)$ для всех $x \in \Omega$.

Пусть $\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(x,\xi)$ – характеристическая функция параллелепипеда $\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$. Так как $\int \chi_{\varepsilon,\vec{g}}(x,\xi)d\xi = |T_{\varepsilon,\vec{g}}(x)|$, где правая часть обозначает объем параллелепипеда $T_{\varepsilon,\vec{g}}(x)$, то из доказанных выше включений следует, что

$$\left|D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon)^{-1},\vec{g}}(x)\right| \leqslant \int \chi_{\varepsilon,\vec{g}}(x,\xi)d\xi \leqslant \left|D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon),\vec{g}}(x)\right|.$$

Поэтому

$$\left(\frac{\varepsilon}{2\lambda(\varepsilon)}\right)^n \leqslant g_1^{-1}(x)\cdot g_2^{-1}(x)\dots g_n^{-1}(x)\int \chi_{\varepsilon,\vec{g}}(x,\xi)d\xi \leqslant \left(\frac{\lambda(\varepsilon)\varepsilon}{2}\right)^n.$$

Заменяя в этом неравенстве ε через $\varepsilon_m = \varepsilon m/(m+1)$, получим (2.3). □

Лемма 2.3. *Пусть целое число s такое, что $0 \leqslant s < r$. Пусть $p \geq 1$, $1 \leqslant q_1 \leqslant q_0$ и удовлетворяют условиям:*

$$\frac{1}{p} - \frac{r-s}{n} < \frac{1}{q_0} \quad \textit{при} \quad n-(r-s)p > 0;$$

$$q_0 - \textit{любое конечное число при } n-(r-s)p \leqslant 0.$$

Тогда для любого $\tau > 0$ и всех $v \in W_p^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$ справедливо неравенство

$$\left\|v; L^s_{q_0,r}\left(\Omega;\sigma(g_1g_2\dots g_n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}},\vec{g}\right)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \tau\left\|v; W_p^r(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\| + c_1\tau^{-\mu}\left\|v; L_{q_1}(\Omega;\sigma(g_1g_2\dots g_n)^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}},\vec{g})\right\|, \tag{2.4}$$

где

$$\mu = \frac{q_1^{-1} - q_0^{-1} + sn^{-1}}{q_0^{-1} - p^{-1} + (r-s)n^{-1}}. \tag{2.5}$$

Доказательство. В условиях этой леммы из интерполяционных неравенств для классических пространств Соболева (см. например, [16, §4.7]) следует, что

$$\left\|u^{(k)}; L_{q_0}(\Pi(0))\right\| \leqslant \tau\sum_{|l|=r}\left\|u^{(l)}; L_p(\Pi(0))\right\| +$$

$$+\tau\left\|u; L_p(\Pi(0))\right\| + c_1\tau^{-\mu}\left\|u; L_{q_1}(\Pi(0))\right\|, \tag{2.6}$$

где k — любой мультииндекс длины s, и число μ определяется равенством (2.5).

Неравенство (2.4) выводится из (2.6) применением леммы 2.1 и техникой, использованной при доказательстве леммы 2.2 работы [12]. □

Аналогично лемме 2.3 доказывается, что если число s такое, что $0 \leqslant s \leqslant r$, и выполняются условия

$$1 \leqslant p \leqslant q_0 < +\infty,\ r - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q_0} > 0,$$

то для всех $v \in W_p^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$ имеет место неравенство

$$\left\|v; L^s_{q_0,r}\left(\Omega;\sigma(g_1g_2\dots g_n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}},\vec{g}\right)\right\| \leqslant M\left\|v; W_p^r(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|, \tag{2.7}$$

где число $M > 0$ не зависит от функции $v(x)$.

Лемма 2.4. *Пусть положительные функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ принадлежат классу $\Phi_{\varepsilon,\vec{g}}(\Omega)$, $p \geq 1$, $q \geq 1$ и r, t — натуральные числа. Для мультииндексов k, l таких, что $|k| < r$, $|l| \leqslant t$, определим числа q_l, λ_{kl}, s_k посредством следующих соотношений*

$$\frac{1}{q_l} = \begin{cases} \dfrac{1}{q} - \dfrac{t-|l|}{n}, & n > q(t-|l|), \\ \varepsilon_1,\ 0 < \varepsilon_1 \leqslant 1/q, & n \leqslant q(t-|l|), \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} > \frac{1}{q_l} + \frac{1}{p} - \frac{r-|k|}{n},\ \text{при } n - p(r-|k|) > 0, \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{q_l} + \varepsilon_2,\ \text{где } 0 < \varepsilon_2 < 1/p,\ \text{при } n - p(r-|k|) \leqslant 0, \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{s_k} \geq \frac{1}{\lambda_{kl}} - \frac{1}{q_l}. \tag{2.11}$$

Пусть положительная функция $\sigma_{kl}(x)$ принадлежит классу $\Phi_{\varepsilon,\vec{g}}(\Omega)$ и удовлетворяет неравенству

$$\sigma_{kl}(x)\alpha^{-1}(x)\beta^{-1}(x) \leqslant$$

$$\leqslant cg_1^{k_1+l_1}(x)g_2^{k_2+l_2}(x)\dots g_n^{k_n+l_n}(x)(g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x))^{-t+\frac{1}{q}-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{\lambda_{kl}}} \tag{2.12}$$

для всех $x \in \Omega$; положительное число c не зависит от x.

Тогда для любого $\tau > 0$ справедливо неравенство

$$\left\|u^{(k)}v^{(l)}; L_{\lambda_{kl}}(\Omega;\sigma_{kl})\right\| \leqslant \left\|v; W_q^t(\Omega;\beta,\vec{g})\right\| \cdot \left\{\left\|u; W_p^r(\Omega;\alpha,\vec{g})\right\| +\right.$$

$$\left. +c_0\tau^{-\mu_k}\left\|u; L_{s_k}(\Omega;\alpha,(g_1g_2\dots g_n)^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{s_k}})\right\|\right\}, \tag{2.13}$$

где

$$\mu_k = \frac{s_k^{-1} - \lambda_{kl}^{-1} + q_l^{-1} + |k|n^{-1}}{\lambda_{kl}^{-1} - q_l^{-1} - p^{-1} + (r - |k|)n^{-1}} \tag{2.14}$$

и положительная постоянная c_0 зависит только от $n, p, r, |k|$.

Доказательство. Пусть $|k| < r,\ |l| \leqslant t$. Так как число q_l, определенное равенством (2.8), удовлетворяет условиям

$$1 \leqslant q \leqslant q_l < \infty,\ t - |l| - \frac{n}{q} + \frac{n}{q_l} > 0,$$

то, применяя неравенство (2.7), имеем

$$\left\| v^{(l)}; L_{q_l}\left(\Omega; \beta(x) g_1^{l_1}(x) g_2^{l_2}(x) \dots g_n^{l_n}(x) (g_1(x) g_2(x) \dots g_n(x))^{-t+\frac{1}{q}-\frac{1}{q_l}}\right) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant M \left\| v; W_q^t(\Omega; \beta, \vec{g}) \right\|, \tag{2.15}$$

где M – положительная константа не зависящая от $v(x)$.

Далее заметим, что при $q_0 = p_k,\ s = |k|,\ q_1 = s_k$, где $p_k = \left(\lambda_{kl}^{-1} - q_l^{-1}\right)^{-1}$, и числа $q_l,\ \lambda_{kl},\ s_k$ определены соотношениями (2.8) – (2.11), выполняются условия леммы 2.3. Поэтому, применяя лемму 2.3, в этом случае получим

$$\left\| u^{(k)}; L_{p_k}\left(\Omega; \alpha g_1^{k_1} g_2^{k_2} \dots g_n^{k_n} (g_1 g_2 \dots g_n)^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_k}}\right) \right\| \leqslant \tau \| u; W_p^r(\Omega; \alpha, \vec{g}) \| +$$
$$+ c_0 \tau^{-\mu_k} \left\| u; L_{s_k}(\Omega; \alpha (g_1 g_2 \dots g_n)^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{s_k}}) \right\|, \tag{2.16}$$

где

$$\mu_k = \frac{s_k - p_k^{-1} + |k|n^{-1}}{p_k^{-1} - p^{-1} + (r - |k|)n^{-1}}. \tag{2.17}$$

В силу равенства

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_l} \tag{2.18}$$

и условия (2.12) с помощью неравенства Гельдера доказывается, что

$$\left\| u^{(k)} v^{(l)}; L_{\lambda_{kl}}(\Omega; \sigma_{kl}) \right\| \leqslant \left\| v^{(l)}; L_{q_l}\left(\Omega; \beta g_1^{l_1} g_2^{l_2} \dots g_n^{l_n} (g_1 g_2 \dots g_n)^{-t+\frac{1}{q}-\frac{1}{q_l}}\right) \right\| \times$$
$$\times \left\| u^{(k)}; L_{q_k}\left(\Omega; \alpha g_1^{k_1} g_2^{k_2} \dots g_n^{k_n} (g_1 g_2 \dots g_n)^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_k}}\right) \right\|. \tag{2.19}$$

Теперь легко можно заметить, что из (2.15), (2.16), (2.19) следует неравенство (2.13). Равенство (2.14) следует из (2.17) в силу равенства (2.18). □

3. Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$(Au)(x) = \sum_{|k|,|l| \leqslant r} (-1)^{|l|} \left(p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \right)^{(l)},\ x \in \Omega, \tag{3.1}$$

где

$$p_k(x) = \sigma(x) g_1^{-r+k_1}(x) g_2^{-r+k_2}(x) \dots g_n^{-r+k_n}(x) \tag{3.2}$$

и $a_{kl}(x)$ — комплекснозначные функции.

Изучение краевых задач для дифференциальных уравнений с оператором (3.1) методами функционального анализа связано со следующей полуторалинейной формой, порожденной этим оператором

$$B[u, v] = \sum_{|k|,|l| \leqslant r} \int\limits_{\Omega} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx. \tag{3.3}$$

Вариационная задача Дирихле, связанная с формой (3.3), ранее изучалась в работе С.А. Исхокова [10] в предположении, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|,|l|\leqslant r} a_{kl}(x)\zeta_k\overline{\zeta_l} \geq c \sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \tag{3.4}$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\leqslant r}$. Число $c > 0$ не зависит от x, ζ. Здесь в этом разделе вместо условия (3.4) мы предполагаем выполнение более слабого условия

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|,|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l \geq c|\xi|^{2r} \tag{3.5}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R_n$; $\xi^k = \xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\cdots\xi_n^{k_n}$, c — положительное число, не зависящее от x, ξ.

Теорема 3.1. *Пусть коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k| = |l| = r$ ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности (3.5) и для любого достаточно малого числа $\nu > 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$|a_{kl}(y) - a_{kl}(z)| < \nu \tag{3.6}$$

для любого $y \in \Omega$ и любого

$$z \in \Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y) = \left\{ z \in R_n : |z_i - y_i| < \frac{1}{2}\varepsilon g_i(y),\ i = \overline{1,n} \right\}.$$

Пусть также коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|, |l| \leqslant r$ и $|k| + |l| \leqslant 2r - 1$ принадлежат пространству $L_{p_{kl}}\left(\Omega; (g_1 \cdot g_2 \ldots g_n)^{-1/p_{kl}}\right)$, где

$$p_{kl} = \begin{cases} q_{kl} & \textit{при } |k| \leqslant r-1,\ |l| \leqslant r \\ q_{lk} & \textit{при } |k| = r,\ |l| \leqslant r-1, \end{cases}$$

а числа q_{kl} определяются соотношениями:

$$q_{kl} = \begin{cases} \dfrac{n}{2r-|k|-|l|} < q_{kl} \leqslant \dfrac{n}{r-|l|}, \textit{ если } n > 2(r-|k|),\ n > 2(r-|l|); \\ \dfrac{n}{r-|k|-\varepsilon_1 n} < q_{kl},\ 0 < \varepsilon_1 < \dfrac{1}{2},\ \textit{ если } n > 2(r-|k|),\ n \leqslant 2(r-|l|); \\ \dfrac{n}{r-|l|+\varepsilon_2 n},\ 0 < \varepsilon_2 < \dfrac{1}{2},\ \textit{ если } n \leqslant 2(r-|k|),\ n > 2(r-|l|), \\ \textit{любое конечное число } >1, \textit{ если } n \leqslant 2(r-|k|),\ n \leqslant 2(r-|l|). \end{cases}$$

Тогда существуют такие постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 \geq 0$, что

$$Re\, B[u,u] \geq c_1\|u; W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^2 - c_2\|u; L_{2,r}^0(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^2 \tag{3.7}$$

для всех $u \in W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$.

Доказательство. В начале рассмотрим случай, когда полуторалинейная форма (3.3) не содержит младшие коэффициенты, то есть когда $a_{kl}(x) \equiv 0$ $(x \in \Omega)$ для всех мультииндексов k, l таких, что $|k|, |l| \leqslant r$ и $|k| + |l| \leqslant 2r - 1$.

Фиксируя произвольную точку $y \in \Omega$, рассмотрим полуторалинейную форму

$$B_y[u,v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{R_n} a_{kl}(y)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx,\ u, v \in C_0^\infty(R_n).$$

Применяя неравенство Гординга для сильно эллиптических операторов с постоянными коэффициентами, имеем

$$\sum_{|k|=r}\int\limits_{R_n}|u^{(k)}(x)|^2dx\leqslant$$

$$\leqslant M\left\{\mathrm{Re}\sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_{R_n}a_{kl}(y)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx+\int\limits_{R_n}|u(x)|^2dx\right\} \tag{3.8}$$

для всех $u\in C_0^\infty(R_n)$.

Вводим обозначение

$$\Pi_m(0)=\left\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R_n:|x_i|<\frac{m}{2(m+1)},\ i=\overline{1,n}\right\},$$

где m — натуральное число.

Берем функцию $\varphi_m(x)\in C_0^\infty(\Pi_{2m}(0))$ со следующими свойствами:

1) $0\leqslant\varphi_m(x)\leqslant 1$ для всех $x\in\Pi(0)$;

2) $\varphi_m(x)=1$ для всех $x\in\Pi_m(0)$;

3) существует число $c>0$ такое, что $|\varphi_m^{(k)}(x)|\leqslant c$ для всех $x\in\Pi(0)$ и всех мультииндексов $k:|k|\leqslant r$.

Пусть $u(x)$ — произвольная функция класса $C^\infty(\Pi(0))$. Продолжая функцию $v_m(x)=u(x)\varphi_m(x)$ вне множества $\Pi(0)$ нулем, получаем функцию $v_m\in C_0^\infty(R_n)$. Так как $v_m(x)=u(x)$ для всех $x\in\Pi_m(0)$, то из неравенства (3.8) для функции $v_m(x)$ следует, что

$$\sum_{|k|=r}\int\limits_{\Pi_m(0)}|u^{(k)}(x)|^2dx\leqslant M_0\left\{\mathrm{Re}\,B_y[v_m,v_m]+\int\limits_{\Pi(0)}|u(x)|^2dx\right\}. \tag{3.9}$$

Форму $B_y[v_m,v_m]$ представим в виде

$$B_y[v_m,v_m]=B_y^{(1)}[v_m,v_m]+B_y^{(2)}[v_m,v_m], \tag{3.10}$$

где

$$B_y^{(1)}[v_m,v_m]=\sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_{\Pi(0)}a_{kl}(y)\varphi_m^2(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx,$$

$$B_y^{(2)}[v_m,v_m]=B_y[v_m,v_m]-B_y^{(1)}[v_m,v_m].$$

Так как во всех интегралах, составляющих полуторалинейную форму $B_y^{(2)}[v_m,v_m]$, порядок хотя бы одной из производных $u^{(k)}(x)$, $u^{(l)}(x)$ не превосходит $r-1$, то, применяя соответствующие теоремы вложения для пространств Соболева без веса, а также неравенство Юнга с малым параметром, получаем: для любого достаточно малого числа $\tau>0$ существует конечное число $M(\tau)>0$ такое, что

$$|B_y^{(2)}[v_m,v_m]|\leqslant\tau\sum_{|k|=r}\int\limits_{\Pi(0)}|u^{(k)}(x)|^2dx+M(\tau)\int\limits_{\Pi(0)}|u(x)|^2dx. \tag{3.11}$$

Действительно, интегралы, составляющие форму $B_y^{(2)}[v_m,v_m]$, имеют следующий общий вид

$$I_{y,k,l,\mu,\nu}^{(m)}(u)=\int_{\Pi(0)}C_{k,\mu}C_{l,\nu}a_{kl}(y)\varphi_m^{(\mu)}(x)u^{(k-\mu)}(x)\varphi_m^{(\nu)}(x)\overline{u^{(l-\nu)}(x)}dx,$$

где $|\mu|+|\nu|\neq 0$, и в силу свойства 3) функций φ_m и ограниченности коэффициентов a_{kl}, $|k|=|l|=r$, для них имеет место неравенство

$$\left|I^{(m)}_{y,k,l,\mu,\nu}(u)\right| \leqslant M_0 \int_{\Pi(0)} \left|u^{(k-\mu)}(x)\right| \cdot \left|u^{(l-\nu)}(x)\right| dx \leqslant$$
$$\leqslant M_0 \left\|u^{(k-\mu)};\, L_2(\Pi(0))\right\| \cdot \left\|u^{(l-\nu)};\, L_2(\Pi(0))\right\|.$$

Далее, применяя неравенство Юнга

$$|ab| \leqslant \delta|a|^2 + \frac{1}{4\delta}|b|^2,$$

где δ – достаточно малое положительное число, а также интерполяционное неравенство (2.6), можно показать, что $\left|I^{(m)}_{y,k,l,\mu,\nu}(u)\right|$ не превосходит правую часть неравенства (3.11).

Учитывая свойство 2) функций $\varphi_m(x)$, представим форму $B^{(1)}_y[v_m,v_m]$ в виде

$$B^{(1)}_y[v_m,v_m] = B^{(11)}_{y,m}[u,u] + B^{(12)}_{y,m}[u,u], \tag{3.12}$$

где

$$B^{(11)}_{y,m}[u,u] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Pi_m(0)} a_{kl}(y) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx,$$

$$B^{(12)}_{y,m}[u,u] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Pi^{(m)}(0)} a_{kl}(y) \varphi_m^2(x) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx,$$

$$\Pi^{(m)}(0) = \Pi(0) \setminus \Pi_m(0) = \left\{ x \in R_n : \frac{m}{2(m+1)} < |x_i| < \frac{1}{2},\ i=\overline{1,n} \right\}.$$

Так как коэффициенты a_{kl} ($|k|=|l|=r$) ограничены, то, применяя неравенство Коши-Буняковского и принимая во внимание, что $|\Pi^{(m)}(0)| \to 0$ при $m\to\infty$, получаем

$$|B^{(12)}_{y,m}[u,u]| \leqslant \mu_m \|u; L^r_2(\Pi(0))\|^2, \tag{3.13}$$

где

$$\|u; L^r_2(\Pi(0))\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{\Pi(0)} \left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx \right\}^{1/2}$$

и положительные числа μ_m стремятся к нулю при $m\to\infty$.

Из представлений (3.10), (3.12) в силу неравенства (3.9) имеем

$$\|u; L^r_2(\Pi_m(0))\|^2 - M_0 |B^{(2)}_y[v_m,v_m]| - M_0 |B^{(12)}_{y,m}[u,u]| \leqslant M_0 \operatorname{Re} B^{(11)}_{y,m}[u,u].$$

Далее, подбирая натуральное число m достаточно большим и применяя неравенство (3.11) при $\tau = \dfrac{1}{m}$, а также неравенство (3.13), приходим к неравенству

$$\|u; L^r_2(\Pi_m(0))\|^2 -$$
$$- c_m \|u; L^r_2(\Pi(0))\|^2 - \mathbb{C}_m \|u; L_2(\Pi(0))\|^2 \leqslant M_0 \operatorname{Re} B^{(11)}_{y,m}[u,u] \tag{3.14}$$

для всех $u \in C^\infty(\Pi(0))$, где $c_m, \mathbb{C}_m$ — положительные числа, не зависящие от $u(x)$ и $c_m \to 0$ при $m\to\infty$.

Пусть v — произвольная функция из класса $C_0^\infty(\Omega)$ и y — произвольная фиксированная точка области Ω. Отображение $z \to x$, определенное равенствами $x_i = (z_i - y_i)/(\varepsilon g_i(y))$, $i=\overline{1,n}$, отображает параллелепипед $\Pi_{\varepsilon,\vec g}(y) = \{z \in R_n : |z_i - y_i| < \varepsilon g_i(y)/2\}$ в единичный куб $\Pi(0)$, а параллелепипед $\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec g}(y)$ — в $\Pi_m(0)$. При достаточно малых $\varepsilon > 0$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon,\vec g}(y)$ содержится в области Ω, и поэтому функция $\hat v_y(x) = v(x_i \varepsilon g_i(y) + y_i)$ определена для всех $x \in \Pi(0)$ и принадлежит классу $C^\infty(\Pi(0))$.

Неравенство (3.14) для функции $u(x)=\hat{v}_y(x)$ примет вид

$$\sum_{|k|=r}\left\{\int\limits_{\Pi_m(0)}|\hat{v}_y^{(k)}(x)|^2dx-c_m\int\limits_{\Pi(0)}|\hat{v}_y^{(k)}(x)|^2dx\right\}\varepsilon^{2r}g_1^{2k_1}(y)g_2^{2k_2}(y)\dots g_n^{2k_n}(y)-$$

$$-\mathbb{C}_m\int\limits_{\Pi(0)}|\hat{v}_y(x)|^2dx\leqslant M_0\operatorname{Re}\sum_{|k|=|l|=r}\varepsilon^{2r}g_1^{k_1+l_1}(y)g_2^{k_2+l_2}(y)\dots g_n^{k_n+l_n}(y)\times$$

$$\times\int\limits_{\Pi_m(0)}a_{kl}(y)\hat{v}_y^{(k)}(x)\overline{v_y^{(l)}(x)}dx.$$

В интегралах этого неравенства, переходя к новым переменным интегрирования $z_i=x_i\varepsilon g_i(y)+y_i$, получим

$$\sum_{|k|=r}\left\{\int\limits_{\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz-c_m\int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right\}\varepsilon^{2r-n}g_1^{2k_1-1}(y)\times$$

$$\times g_2^{2k_2-1}(y)\dots g_n^{2k_n-1}(y)-\mathbb{C}_m\int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v(z)|^2dz\varepsilon^{-n}g_1^{-1}(y)g_2^{-1}(y)\dots g_n^{-1}(y)dz\leqslant$$

$$\leqslant M_0\operatorname{Re}\left\{\varepsilon^{2r-n}\sum_{|k|=|l|=r}g_1^{k_1+l_1-1}(y)g_2^{k_2+l_2-1}(y)\dots g_n^{k_n+l_n-1}(y)\times\right.$$

$$\left.\int\limits_{\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}a_{kl}(y)v^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)dz}\right\}.$$

Обе части этого неравенства умножим на $\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r}$, и результат проинтегрируем по $y\in\Omega$. В итоге имеем

$$\sum_{|k|=r}\int_\Omega\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r}\varepsilon^{2r-n}\times$$

$$\times g_1^{2k_1-1}(y)g_2^{2k_2-1}(y)\dots g_n^{2k_n-1}(y)\left(\int_{\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy-$$

$$-c_m\sum_{|k|=r}\int_\Omega\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r}\varepsilon^{2r-n}\times$$

$$\times g_1^{2k_1-1}(y)g_2^{2k_2-1}(y)\dots g_n^{2k_n-1}(y)\left(\int_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy-$$

$$-\mathbb{C}_m\int_\Omega\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r-1}\varepsilon^{-n}\left(\int_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy\leqslant$$

$$\leqslant M_0\varepsilon^{2r-n}\operatorname{Re}B_{\varepsilon,m}[v,v],\qquad(3.15)$$

где

$$B_{\varepsilon,m}[v,v]=\sum_{|k|=|l|=r}\int_{\Omega}\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\ldots g_n(y))^{-2r-1}\times$$

$$\times g_1^{k_1+l_1}(y)g_2^{k_2+l_2}(y)\ldots g_n^{k_n+l_n}(y)\left(\int_{\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec g}(y)}a_{kl}(y)v^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)}dz\right)dy. \tag{3.16}$$

Далее, применяя лемму 2.1 и неравенства (2.1), оценим интегралы в левой части неравенства (3.15). Для первого интеграла с помощью неравенств (2.1) имеем

$$\varepsilon^{2r-n}\sum_{|k|=r}\int_{\Omega}\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\ldots g_n(y))^{-2r-1}\times$$

$$\times\, g_1^{2k_1}(y)g_2^{2k_2}(y)\ldots g_n^{2k_n}(y)\left(\int_{\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec g}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy\geq$$

$$\geq\varepsilon^{2r-n}\nu^{-2}(\varepsilon_m)\lambda^{-n}(\varepsilon_m)\sum_{|k|=r}\int_{\Omega}\sigma^2(z)(g_1(z)g_2(z)\ldots g_n(z))^{-2r-1}\times$$

$$\times\, g_1^{2k_1}(z)g_2^{2k_2}(z)\ldots g_n^{2k_n}(z)\left(\int_{\Omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec g}(z;y)dy\right)|v^{(k)}(z)|^2dz,$$

где $\varepsilon_m=m\varepsilon/(m+1)$.

Далее, применяя лемму 2.1, получим

$$\varepsilon^{2r-n}\sum_{|k|=r}\int_{\Omega}\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\ldots g_n(y))^{-2r-1}\times$$

$$\times g_1^{2k_1}(y)g_2^{2k_2}(y)\ldots g_n^{2k_n}(y)\left(\int_{\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec g}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy\geq$$

$$\geq\varepsilon^{2r}\nu^{-2}(\varepsilon_m)\lambda^{-2n}(\varepsilon_m)2^{-n}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-n}\left\|v;L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|^2. \tag{3.17}$$

Теперь оценим второй интеграл в левой части неравенства (3.15). Применяя неравенства (2.1), имеем

$$\sum_{|k|=r}\int_{\Omega}\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\ldots g_n(y))^{-2r}\varepsilon^{2r-n}g_1^{2k_1-1}(y)g_2^{2k_2-1}(y)\ldots g_n^{2k_n-1}(y)\times$$

$$\times\left(\int_{\Pi_{\varepsilon,\vec g}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon^{2r-n}\nu^2(\varepsilon)\lambda^{-n}(\varepsilon)\sum_{|k|=r}\int_{\Omega}\sigma^2(z)g_1^{2k_1-2r-1}(z)g_2^{2k_2-2r-1}(z)\ldots g_n^{2k_n-2r-1}(z)|v^{(k)}(z)|^2\times$$

$$\times\left(\int_{\Omega}\chi_{\varepsilon,\vec g}(z;y)dy\right)dz.$$

Далее, применяя лемму 2.1, получаем следующую окончательную оценку

$$\sum_{|k|=r}\int_{\Omega}\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\ldots g_n(y))^{-2r}\varepsilon^{2r-n}g_1^{2k_1-1}(y)g_2^{2k_2-1}(y)\ldots g_n^{2k_n-1}(y)\times$$

$$\times\left(\int_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy\leqslant\varepsilon^{2r}\nu^2(\varepsilon)2^{-n}\left\|v;L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2. \tag{3.18}$$

Переходим к оценке третьего интеграла в левой части неравенства (3.15). Применяя неравенства (2.1), имеем

$$\int_\Omega\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r-1}\varepsilon^{-n}\left(\int_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v(z)|^2dz\right)dy\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon^{-n}\nu^2(\varepsilon)\lambda^{-2rn-n}(\varepsilon)\times$$
$$\times\qquad\int_\Omega\sigma^2(z)(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-2r-1}|v(z)|^2\left(\int_\Omega\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y)dy\right)dz.$$

Теперь, для оценки внутреннего интеграла применяем лемму 2.1 и приходим к следующему неравенству

$$\int_\Omega\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r-1}\varepsilon^{-n}\left(\int_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v(z)|^2dz\right)dy\leqslant$$
$$\leqslant\nu^2(\varepsilon)\lambda^{-2rn}(\varepsilon)2^{-n}\left\|v;L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2. \tag{3.19}$$

В силу полученных неравенств (3.17) – (3.19) из (3.15) следует, что

$$(1-\widetilde{c}_m(\varepsilon))\left\|v;L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2-\widetilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)\varepsilon^{-2r}\left\|v;L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon^{-n}M_m(\varepsilon)\operatorname{Re}B_{\varepsilon,m}[v,v], \tag{3.20}$$

где полуторалинейная форма $B_{\varepsilon,m}[v,v]$ определена равенством (3.16) и

$$\begin{gathered}\widetilde{c}_m=c_m\nu^4(\varepsilon_m)\lambda^{2n}(\varepsilon_m)\left(1+\frac{1}{m}\right)^n,\ \varepsilon_m=\frac{\varepsilon m}{m+1},\\ \widetilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)=\mathbb{C}_m\nu^4(\varepsilon)\lambda^{-2rn}(\varepsilon)\lambda^{2n}(\varepsilon_m)\left(1+\frac{1}{m}\right)^n,\\ M_m(\varepsilon)=M_0\nu^2(\varepsilon_m)\lambda^{2n}(\varepsilon_m)2^n\left(1+\frac{1}{m}\right)^n.\end{gathered} \tag{3.21}$$

Вводим новую полуторалинейную форму

$$B^{(1)}_{\varepsilon,m}[u,v]=\sum_{|k|=|l|=r}\int_\Omega\left(\int_\Omega\chi^{(m)}_\varepsilon(z;y)a_{kl}(y)dy\right)\times$$
$$\times(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-1}p_k(z)p_l(z)u^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)}dz,$$

где функции $p_k(z)$ определены равенством (3.2).

Учитывая ограниченности коэффициентов $a_{kl}(x)$ при $|k|=|l|=r$, имеем

$$\left|B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v]-B_{\varepsilon,m}[v,v]\right|\leqslant$$
$$\leqslant M\sum_{|k|=|l|=r}\int_\Omega\left(\int_\Omega\chi^{(m)}_\varepsilon(z;y)\left|1-\frac{p_k(y)p_l(y)}{p_k(z)p_l(z)}\cdot\frac{g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z)}{g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y)}\right|\times\right.$$
$$\left.\times\,p_k(z)p_l(z)(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-1}|v^{(k)}(z)||v^l(z)|dz\right)dy. \tag{3.22}$$

В силу условии (2.1) для достаточно малых $\varepsilon>0$ существует положительное число $\mu_1(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|1-\frac{p_k(y)p_l(y)}{p_k(z)p_l(z)}\cdot\frac{g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z)}{g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y)}\right|\leqslant\mu_1(\varepsilon) \tag{3.23}$$

для всех $y,z\in\Omega$, удовлетворяющих условию $\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y)\neq0$; $\mu_1(\varepsilon)\to0$ при $\varepsilon\to0$.

Учитывая это обстоятельство и применяя лемму 2.1, а также неравенство Коши-Буняковского из (3.22), получим

$$\left|B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v]-B_{\varepsilon,m}[v,v]\right|\leqslant\varepsilon^n\mu_1(\varepsilon)\left\|v;L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 \tag{3.24}$$

для всех $v\in C_0^\infty(\Omega)$.

Рассмотрим новую полуторалинейную форму

$$B^{(2)}_{\varepsilon,m}[u,v]=\sum_{|k|=|l|=r}\int_\Omega\left(\int_\Omega\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y)dy\right)a_{kl}(z)p_k(z)p_l(z)\times$$
$$\times\,(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-1}u^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)}dz,\ \ (u,v\in C_0^\infty(\Omega)).$$

В силу условия (3.6), леммы 2.1, действуя стандартным образом с помощью неравенства Коши-Буняковского, доказывается, что для любого достаточно малого положительного ν существует число $\varepsilon_\nu>0$ такое, что

$$\left|B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v]-B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v]\right|\leqslant\varepsilon^n\nu\left\|v;L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 \tag{3.25}$$

для всех $v\in C_0^\infty(\Omega)$ и любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_\nu)$.

Лемма 3.1. *Для любой вещественнозначной функции $\Phi(z)\in L_1(\Omega)$ при достаточно малых $\varepsilon>0$ справедливо неравенство*

$$c_{n,m}\int_\Omega\left(\int_\Omega\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y)dy\right)(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-1}\Phi(z)dz\leqslant$$
$$\leqslant\lambda^n(\varepsilon_m)\varepsilon^n\int_\Omega\Phi(z)dz+\varepsilon^n\left[\lambda^n(\varepsilon_m)-\lambda^{-n}(\varepsilon_m)\right]\int_\Omega\Phi^-(z)dz, \tag{3.26}$$

где

$$\Phi^-(z)=(|\Phi(z)|-\Phi(z))/2,\ c_{n,m}=2^n\left(1+\frac{1}{m}\right)^n.$$

Доказательство. Определим также функцию $\Phi^+(z)=(|\Phi(z)|+\Phi(z))/2$. Заметим, что $\Phi(z)=\Phi^+(z)-\Phi^-(z)$ и функции $\Phi^+(z),\Phi^-(z)$ неотрицательны.

В силу леммы 2.1 имеем

$$\varepsilon^n2^{-n}\lambda^{-n}(\varepsilon_m)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-n}\leqslant(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-1}\int_\Omega\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y)dy,$$

$$(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-1}\int_\Omega\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y)dy\leqslant\varepsilon^n\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-n}2^{-n}\lambda^n(\varepsilon_m).$$

Обе части первого неравенства умножим на $\Phi^-(z)$, а второе неравенство – на $\Phi^+(z)$ и затем интегрируем по $z\in\Omega$. Из полученных неравенств на основе равенства $\Phi(z)=\Phi^+(z)-\Phi^-(z)$ получим (3.26). $\square$

Применяя неравенство (3.26) при

$$\Phi(z)=\operatorname{Re}\sum_{|k|=|l|=r}a_{kl}(z)p_k(z)p_l(z)v^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)},$$

имеем

$$c_{n,m}\operatorname{Re}B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v]\leqslant\lambda^n(\varepsilon_m)\varepsilon^n\operatorname{Re}B[v,v]+$$
$$+\varepsilon^n[\lambda^n(\varepsilon_m)-\lambda^{-n}(\varepsilon_m)]\int_\Omega\Phi^-(z)dz. \tag{3.27}$$

Так как коэффициенты $a_{kl}(z),|k|=|l|=r$, ограничены, то

$$\int_\Omega \Phi^-(z)dz \leqslant \int_\Omega |\Phi(z)|dz \leqslant M \sum_{|k|=|l|=r} \int_\Omega p_k(z)p_l(z)|v^{(k)}(z)||v^{(l)}(z)|dz \leqslant$$
$$\leqslant M\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^2.$$

Отсюда и из (3.27) следует, что

$$\operatorname{Re} B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v] \leqslant \varepsilon^n M \left\{\operatorname{Re} B[v,v] + \mu_2(\varepsilon)\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^2\right\}, \tag{3.28}$$

где M — положительное число, не зависящее от $\varepsilon > 0$ и $v(x)$, и

$$\mu_2(\varepsilon) = \lambda^n(\varepsilon_m) - \lambda^{-n}(\varepsilon_m),\ \varepsilon_m = \frac{\varepsilon\, m}{m+1}. \tag{3.29}$$

Используя неравенство (3.20), имеем

$$(1-\widetilde{c}_m(\varepsilon))\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 - \widetilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)\varepsilon^{-2r}\left\|v; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^{-n}M_m(\varepsilon)\operatorname{Re} B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v] + \varepsilon^{-n}M_m(\varepsilon)\left|B_{\varepsilon,m}[v,v] - B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v]\right| +$$
$$+ \varepsilon^{-n}M_m(\varepsilon)\left|B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v] - B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v]\right|.$$

Отсюда в силу неравенств (3.24), (3.25) следует, что

$$(1-\widetilde{c}_m(\varepsilon))\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 - \widetilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)\varepsilon^{-2r}\left\|v; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^{-n}M_m(\varepsilon)\operatorname{Re} B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v] + \mu_1(\varepsilon)M_m(\varepsilon)\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 +$$
$$+ M_m(\varepsilon)\nu\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2.$$

Далее, применяя неравенство (3.28), имеем

$$(1-\widetilde{c}_m(\varepsilon))\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 - \widetilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)\varepsilon^{-2r}\left\|v; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant M_m(\varepsilon)M\left\{\operatorname{Re} B[v,v] + \mu_2(\varepsilon)\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2\right\} +$$
$$+ \mu_1(\varepsilon)M_m(\varepsilon)\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 + M_m(\varepsilon)\nu\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$[1-\widetilde{c}_m(\varepsilon) - \mu_2(\varepsilon)M_m(\varepsilon)M - \mu_1(\varepsilon)M_m(\varepsilon) - M_m(\varepsilon)\nu]\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 -$$
$$-\widetilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)\varepsilon^{-2r}\left\|v; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 \leqslant M_m(\varepsilon)M\operatorname{Re}B[v,v], \tag{3.30}$$

где числа $\widetilde{c}_m(\varepsilon)$, $\widetilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)$, $M_m(\varepsilon)$ такие же, как в (3.21), $\mu_1(\varepsilon)$ — такое же, как в (3.23), а число $\mu_2(\varepsilon)$ определено равенством (3.29).

Подбирая число m достаточно большим, а числа ε, ν — достаточно малыми, из (3.30) получаем неравенство

$$\operatorname{Re} B[v,v] \geq c_3\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 - c_4\left\|v; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 \tag{3.31}$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$; c_3, c_4 — положительные постоянные, не зависящие от $v(x)$.

Таким образом, неравенство Гординга для вырождающегося эллиптического оператора, ассоциированного с полуторалинейной формой $B[u,v]$, определенной равенством (3.3) в случае $a_{kl} \equiv 0$ при $|k|+|l| \leqslant 2r-1$, доказано.

Теперь перейдем к доказательству неравенства Гординга (3.7) в общем случае.

Положим

$$B_0[u,v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx, \quad B_1[u,v] = B[u,v] - B_0[u,v].$$

Согласно вышедоказанному результату для полуторалинейной формы $B_0[u,v]$ имеет место неравенство вида (3.31), то есть существуют числа $c_5>0,\ c_6\ge 0$ такие, что

$$\mathrm{Re}B_0[u,u]\ge c_5\left\|u;L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|^2-c_6\left\|u;L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|^2 \tag{3.32}$$

для всех $u\in C_0^\infty(\Omega)$.

Полуторалинейную форму $B_1[u,v]$ представим в виде

$$B_1[u,v]=B_{11}[u,v]+B_{12}[u,v], \tag{3.33}$$

где

$$\begin{aligned} B_{11}[u,v]&=\sum_{|k|<r,|l|\leqslant r}\int_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx,\\ B_{12}[u,v]&=\sum_{|k|=r,|l|<r}\int_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Используя неравенство Гельдера с показателями q_{kl}, λ_{kl}, в силу условия

$$\left\|a_{kl};L_{q_{kl}}(\Omega;(g_1g_2\ldots g_n)^{-1/q_{kl}})\right\|<+\infty,\ \ |k|+|l|\leqslant 2r-1,$$

имеем

$$\begin{aligned}|B_{11}[u,v]\leqslant \sum_{|k|<r,|l|\leqslant r}\int_\Omega(g_1(x)g_2(x)\ldots g_n(x))^{-1/q_{kl}}|a_{kl}(x)|\sigma_{kl}(x)|u^{(k)}(x)||v^{(l)}(x)|dx\leqslant\\ \leqslant M_0\sum_{|k|<r,|l|\leqslant r}\left\|u^{(k)}v^{(l)};L_{\lambda_{kl}}(\Omega;\sigma_{kl})\right\|.\end{aligned}$$

Далее, применяя лемму 2.4 при $p=q=2$, получим

$$|B_{11}[u,v]\leqslant M\left\|v;W_2^r(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|\left\{\tau\left\|u;W_2^r(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|+c_0\tau^{-\mu}\left\|u;L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|\right\}, \tag{3.35}$$

где $\mu=\max\limits_{|k|<r}\mu_k$ и числа μ_k определяются равенством (2.14); τ — достаточно малое положительное число.

Так как (см. (3.34)) полуторалинейная форма $B_{12}[u,v]$ содержит $u^{(k)}(x)v^{(l)}(x)$ при $|l|<r$, $|k|=r$, то, меняя ролями $u(x)$ и $v(x)$, и действуя так же, как в доказательстве неравенства (3.35), имеем

$$|B_{12}[u,v]\leqslant M\left\|u;W_2^r(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|\left\{\tau\left\|v;W_2^r(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|+c_0\tau^{-\mu}\left\|v;L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|\right\}. \tag{3.36}$$

Используя неравенства (3.35), (3.36) при $u(x)\equiv v(x)$ и равенство (3.33), получаем

$$|B_1[u,u]\leqslant M\left\|u;W_2^r(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|\left\{\tau\left\|u;W_2^r(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|+c_0\tau^{-\mu}\left\|u;L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|\right\}. \tag{3.37}$$

Так как $B[u,v]=B_0[u,v]+B_1[u,v]$, то, используя неравенства (3.32), (3.37), находим

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,B[u,u]\ge \mathrm{Re}\,B_0[u,u]-|B_1[u,u]|\ge\\ \ge(c_5-\tau)\left\|u;L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|^2-(\tau+c_0\tau^{-2\mu}+c_6)\left\|u;L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|^2.\end{aligned}$$

Далее, фиксируя достаточно малое число $\tau>0$, получим

$$\mathrm{Re}\,B[u,u]\ge c_7\left\|u;L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|^2-c_8\left\|u;L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|^2. \tag{3.38}$$

Так как

$$\left\|u;W_2^r(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|=\left\{\left\|u;L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|^2+\left\|u;L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|^2\right\}^{1/2},$$

то из полученного неравенства (3.38) следует неравенство (3.7). □

Теорема 3.1 доказана.

4. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов с нестепенным вырождением

В этом разделе сформулируем результат о разрешимости вариационной задачи Дирихле, который доказывается с помощью полученного выше неравенства Гординга и обобщенной теоремы Лакса-Мильграма (см., например, [8]).

Пусть $(W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))'$ – пространство ограниченных антилинейных непрерывных функционалов, определенных на $W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$, наделенное нормой сопряженного пространства.

Рассмотрим следующую вариационную задачу Дирихле, связанную с полуторалинейной формой (3.3).

Задача D_λ. Для заданного функционала $F \in (W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U,v] + \int_\Omega \sigma^2(x)\left(g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)\right)^{-2r} U(x)\overline{v(x)}dx = \langle F,\, v\rangle, v \in C_0^\infty(\Omega), \tag{4.1}$$

принадлежащее пространству $W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$.

Заметим, что в случае достаточной гладкости коэффициентов $a_{kl}(x)$ и правой части F уравнения (4.1), решение $U(x)$ задачи D_λ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(AU)(x) + \lambda\sigma^2(x)\left(g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)\right)^{-2r} U(x) = F(x),\ x \in \Omega,$$

где A такой же дифференциальный оператор как в (3.1).

Теорема 4.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 3.1. Тогда существует число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при $\lambda > \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in (W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))'$ задача D_λ имеет единственное решение $U(x)$, и при этом выполняется оценка*

$$\|U;\, W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})\| \leqslant M\left\|F;\, (W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))'\right\|,$$

где положительное число M не зависит от F.

5. О разрешимости вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями в полупространстве

В силу плотности класса $C_0^\infty(\Omega)$ в $W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$ теорема 2 позволяет установить разрешимость вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для конкретных видов областей $\Omega \subset R_n$ (например, ограниченные области, дополнения к ограниченным областям, полупространство и т.д.), а для изучения разрешимости таких задач с неоднородными граничными условиями требуется предварительно доказать теорему вложения разных метрик для соответствующих весовых пространств, элементы которых, в общем случае, не аппроксимируются с помощью функций из класса $C_0^\infty(\Omega)$. В этом разделе без доказательства сформулируем результат о разрешимости вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для одного класса эллиптических операторов в полупространстве со степенным вырождением.

Пусть $R_n^+ = \{x|x = (x', x_n) \in R_n, x_n > 0\}$ и пусть функция $\varphi(t) \in C^\infty(R_1^+)$ такая, что $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$ для любого $t \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ и $\varphi(t) \equiv 0$, когда $t \geq 1$; $\varphi(t) = 1$ для любого $t \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$. Для любых двух вещественных чисел α, β определим функцию

$$\sigma_{\alpha,\beta}(t) = \varphi(t)t^{-\alpha} + (1-\varphi(t))t^\beta\ (t > 0).$$

Обозначим через $W_{p;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)$ пространство функций $u(x)$ $(x \in R_n^+)$ с конечной нормой

$$\|u; W_{p;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)\| = \left\{\|u; L_{p;\alpha,\beta}^r(R_n^+)\|^p + \|u; L_{p;\alpha,\gamma}^0(R_n^+)\|^p\right\}^{1/p},$$

где

$$\|u; L^r_{p;\alpha,\beta}(R^+_n)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{R^+_n} (\sigma_{\alpha,\beta}(x_n)|u^{(k)}(x)|)^p dx \right\}^{1/p}.$$

Пусть $\widetilde{C}^\infty_0(R^+_n)$ множество бесконечно дифференцируемых функций в R^+_n финитных сверху, то есть обращающихся в нуль при больших значениях x_n. Символами $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)$, $\widetilde{W}{}^{\,r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)$ обозначим замыкания классов $C^\infty_0(R^+_n)$ и $\widetilde{C}^\infty_0(R^+_n)$ в пространстве $W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)$, соответственно.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathbb{B}[u,v] = \sum_{|k|,|l|\leqslant r} \int_{R^+_n} \sigma^2_{\alpha,\beta}(x_n) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx \tag{5.1}$$

и связанную с ней вариационную задачу Дирихле.

Задача D**.** Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)\right)'$ и заданного элемента $\Psi(x) \in \widetilde{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)$ требуется найти решение $U(x) \in \widetilde{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)$ уравнения

$$\mathbb{B}[U,v] =< F, v >, \ \forall v \in C^\infty_0(R^+_n),$$

удовлетворяющее условию

$$U(x) - \Psi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n). \tag{5.2}$$

Предположим, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ полуторалинейной формы (5.1) удовлетворяют условиям:

I) при $|k| = |l| = r$ коэффициенты $a_{kl}(x)$ ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности

$$\mathrm{Re} \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \geq c|\xi|^{2r}$$

для всех $x \in R^+_n$, $\xi \in R_n$ (c — положительное число, не зависящее от x, ξ), и для любого достаточно малого $\nu > 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|a_{kl}(x) - a_{kl}(y)| < \nu$$

для всех $x, y \in R^+_n$ таких, что

$$|x_i - y_i| < \frac{1}{2}\varepsilon y_n, \ i = \overline{1,n};$$

II) при $|k| + |l| \leqslant 2r - 1$ коэффициенты a_{kl} принадлежат пространству — $L_{p_{kl}}(R^+_n; \sigma_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n))$, где числа $\alpha_{kl}, \beta_{kl}, p_{kl}$ определяются соотношениями:

а) если $|k| < r, \ |l| < r$, то

$$\begin{aligned}
\alpha_{kl} &= -\frac{n}{2} + \frac{n}{p_{kl}} + n\delta_k - r + |l|, \\
\beta_{kl} &= 2r - |k| - |l| - (n-1)\delta_k + \frac{n}{2} - \frac{n}{p_{kl}}, \\
\frac{1}{p_{kl}} &= 1 - \delta_k - \varepsilon_l - \left(\frac{1}{2} - \frac{r-|l|}{n}\right)_+,
\end{aligned}$$

где числа δ_k, ε_l из интервала $(0, 1/2)$ удовлетворяют условиям

$$0 < \frac{1}{2} - \delta_k - \varepsilon_l < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{r-|k|}{n}\right\}$$

и $(\theta)_+ = \theta$, если $\theta > 0$, и $(\theta)_+ = 0$ в противном случае;

б) если $|k| = r,\ |l| \leqslant r-1$, то

$$\alpha_{kl} = \frac{n}{p_{kl}} - r + |l|,$$
$$\beta_{kl} = -\frac{n}{p_{kl}} + r - |l|,$$
$$\frac{1}{p_{kl}} = \frac{1}{2} - \varepsilon_0 - \left(\frac{1}{2} - \frac{r-|l|}{n}\right)_+,$$

а ε_0 — достаточно малое положительное число;

в) если $|k| \leqslant r-1,\ |l| = r$, то

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{2} - \delta_k,$$
$$\beta_{kl} = r - |k| - \frac{1}{2} + \delta_k,$$
$$\frac{1}{p_{kl}} = \frac{1}{2} - \delta_k.$$

В этих условиях число δ_k такое, что

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leqslant \delta_k < \frac{1}{2}.$$

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия I), II) и пусть существует такое положительное число c_0, что*

$$c_0 \int_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-r} |v(x)|\right)^2 dx \leqslant Re\, \mathbb{B}[v,v]$$

для всех $v \in C_0^\infty(R_n^+)$.

Пусть также

$$\alpha < -\frac{1}{2},\ -\alpha + \frac{1}{2} \notin \{1,2,\ldots,r\},\ \beta + \frac{1}{2} \notin \{1,2,\ldots,r\},\ \beta - r \geq \gamma.$$

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'$ и любого заданного элемента $\Psi \in \widetilde{W}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ задача D имеет единственное решение $U(x)$ и при этом выполняется оценка

$$\left\|U; W^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\| \leqslant M\left\{\left\|F; \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'\right\| + \left\|\Psi; W^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\|\right\},$$

где число M не зависит от F и Ψ.

Замечание 5.1. Условие (5.2) означает, что на гиперплоскости $x_n = 0$ решение $U(x)$ задачи D имеет такие же следы, как и заданная функция $\Psi(x)$. При дополнительных ограничениях на параметры α, β, γ, так же, как в работе [9], можно выписать граничные условия на гиперплоскости $x_n = 0$ в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосида К. *Функциональный анализ.* М.: Мир, 1967. 624 с.
2. Егоров Ю.В. *Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы.* М.: Изд-во МГУ, 1985. 166 с.
3. L. Garding *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations* // Math. Scand. 1953. Bd.1, No. 1. P. 55-72.
4. Кудрявцев Л.Д. *Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений* // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1959. Т. 55. С. 1-182.

5. Лизоркин П.И., Никольский С.М. *Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением. Вариационный метод* // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1981. Т.157. С.90-118.
6. Лизоркин П.И., Никольский С.М. *Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью* // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1983. Т. 161. С. 157-183.
7. Мирошин Н.В. *Вариационная задача Дирихле для вырождающегося на границе эллиптического оператора* // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 3. С. 455-464.
8. Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.В. *Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений* // Известия Вузов. Математика. 1988. № 8. С. 4-30.
9. Исхоков С.А. *О гладкости решения вырождающихся дифференциальных уравнений* // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 641-653.
10. Исхоков С.А. *О гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением* // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 11. С. 536-542.
11. Киприянов И.А. *О неравенстве Гординга для вырождающихся эллиптических операторов и его приложениях* // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1969. Т. 105. С. 77-88.
12. Исхоков С.А. *Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением* // Математические заметки. 2010. Т. 87. № 2. С. 201-216.
13. Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Якушев И.А. *Неравенство Гординга для эллиптических операторов высшего порядка с нестепенным вырождением* // Доклады РАН. 2012. Т. 443, № 3. С. 286-289.
14. Лизоркин П.И. *Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых L_p-нормах* // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1980. Т.156. С. 130-142.
15. M. Troizi *Theoremi di inclusione negli spazi di Sobolev con peso* // Ric. mat. 1969. No. 18. P. 49-74.
16. V.I. Burenkov *Sobolev Spaces on Domains.* Teubner-Texte Math. V. 137. B.G.Teubner, Stuttgart. 1998. 312 p.

Сулаймон Абунасрович Исхоков,
Институт математики им. А. Джураева АН РТ,
ул. Айни, 299/4,
734063, г. Душанбе, Таджикистан
Мирнинский политехнический институт
(филиал) СВФУ им. М.К. Аммосова,
678170, г. Мирный, Россия
E-mail: sulaimon@mail.ru

Махмадрахим Гафурович Гадоев,
Мирнинский политехнический институт
(филиал) СВФУ им. М.К. Аммосова,
ул. Тихонова, 5/1,
678170, г. Мирный, Россия
E-mail: gadoev@rambler.ru

Илья Анатольевич Якушев,
Мирнинский политехнический институт
(филиал) СВФУ им. М.К. Аммосова,
ул. Тихонова, 5/1,
678170, г. Мирный, Россия
E-mail: yakushevilya@mail.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 1 (2016). С. 72-83.

УДК 517.9

О СХОДИМОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А.А. КЛЯЧИН, И.В. ТРУХЛЯЕВА

Аннотация. В работе рассматриваются полиномиальные приближенные решения задачи Дирихле уравнения минимальной поверхности. Показывается, что при определенных условиях на геометрическое строение области, градиенты таких решений остаются по модулю ограниченными при увеличении степени рассматриваемых многочленов. Следствием полученных свойств является равномерная сходимость приближенных решений к точному решению уравнения минимальной поверхности.

Ключевые слова: уравнение минимальной поверхности, равномерная сходимость, приближенное решение.

Mathematics Subject Classification: 35J25, 35J93, 65N30

1. Введение

При численном решении краевых задач уравнений и систем уравнений с частными производными важнейшей проблемой является сходимость приближенных решений. Исследование данной задачи особенно важно для нелинейных уравнений, так как в этом случае имеется ряд трудностей, связанных в первую очередь с невозможностью использовать традиционные методы и подходы, используемые для линейных уравнений. В настоящий момент вполне актуальной является задача определения условий, при выполнении которых гарантируется равномерная сходимость приближенных решений, полученных теми или иными методами для нелинейных уравнений и систем уравнений вариационного типа. В этом случае естественно использовать вариационные методы решения краевых задач. В связи с этим возникает вопрос обоснования этих методов, который сводится к исследованию общих свойств приближенных решений (см., например, [1], [2]).

2. Постановка задачи

Мы рассматриваем вопрос о сходимости приближенных решений для уравнения минимальной поверхности

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) = 0 \tag{1}$$

в области Ω с краевым условием

$$f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}, \tag{2}$$

где функция $\varphi \in C(\overline{\Omega})$. Стоит заметить, что данная задача Дирихле для произвольной области (даже с гладкой границей) не всегда имеет решение. В случае плоских областей необходимым и достаточным условием разрешимости задачи Дирихле для произвольной

A.A. Klyachin, I.V.Truhlyaeva, On the convergence of almost polynomial solutions of the minimal surface.

Работа поддержана РФФИ (проект № 15-41-02517-р_поволжье_а.

Поступила 15 мая 2015 г.

непрерывной граничной функции $\varphi(x)$ является условие выпуклости этой области. В пространстве размерности больше двух таким условием является неотрицательность средней кривизны границы области относительно внешней нормали. С точными формулировками и доказательствами этих результатов можно ознакомиться в работая [3]–[10]. В нашей статье мы не накладываем никаких условий на область Ω, однако предполагаем, что для данной граничной функции $\varphi(x)$ решение задачи (1)-(2) существует. Понятно, что такие функции $\varphi(x)$ имеются для произвольной области Ω.

Мы исследуем вопрос о равномерной сходимости полиномиальных приближенных решений уравнения минимальной поверхности, построенных с помощью алгебраических многочленов. В работе [11] была решена подобная задача о сходимости для кусочно-линейных приближенных решений краевой задачи (1)-(2), а в работе [12] дано описание численной реализации метода конечных элементов, основанного на кусочно-линейных функциях. Далее мы приводим необходимые определения.

Предположим, что $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ – ограниченная область такая, что для некоторого многочлена $\psi(x,y)$, степени не более N_0 по каждой переменной, выполнено $\psi(x,y) = 0$ при $(x,y) \in \partial\Omega$ и $\psi(x,y) > 0$ для $(x,y) \in \Omega$. Для натурального N обозначим через L_N множество всех многочленов вида

$$v_N(x,y) = \psi(x,y) \sum_{n,m=1}^{N} c_{nm} x^n y^m.$$

Ясно, что $v_N(x,y) = 0$ для $(x,y) \in \partial\Omega$. Предположим, что $\varphi \in C^1(\Omega)$. Рассмотрим задачу нахождения такого многочлена v_N^*, на котором достигает своего минимума интеграл площади

$$\sigma(\varphi + v_N) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla\varphi + \nabla v_N|^2}\, dxdy \to \min, \quad v_N \in L_N. \tag{3}$$

Несложно показать, что решение v_N^* задачи (3) удовлетворяет равенству

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\langle \nabla\varphi + \nabla v_N^*, \nabla v_N \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi + \nabla v_N^*|^2}}\, dxdy = 0 \quad \forall\, v_N \in L_N. \tag{4}$$

Теорема 1. *Решение задачи* (3) *существует и единственно.*

Доказательство. Ясно, что значение площади $\sigma(\varphi + v_N)$ есть некоторая функция $\sigma(c_{11}, c_{12}, ..., c_{NN})$ от конечного числа переменных $c_{nm}, n, m = 1, \dots, N$. Данная функция, очевидно, непрерывная. При этом

$$\lim_{|c| \to \infty} \sigma(c_{nm}) = +\infty,$$

где $|c| = \max\limits_{1 \leqslant n,m \leqslant N} |c_{nm}|$. Следовательно, существует такой набор чисел c_{nm}^*, при которых функция $\sigma(c_{11}, c_{12}, ..., c_{NN})$ принимает минимальное значение. Обозначим через v_N^* многочлен, соответствующий этому набору коэффициентов. Тогда для него выполняется условие (4).

Покажем теперь единственность. Предположим, что существует ещё функция $v_N^1 \in L_N$, которая является решением задачи (3). Для неё также выполняется равенство (4). Вычитая одно равенство из другого для $v_N = v_N^* - v_N^1$, получаем

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\langle \nabla f^*, \nabla f^* - \nabla f^1 \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla f^*|^2}} - \frac{\langle \nabla f^1, \nabla f^* - \nabla f^1 \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla f^1|^2}} \right) dxdy = 0, \tag{5}$$

где $f^* = \varphi + v_N^*$, $f^1 = \varphi + v_N^1$.

Далее нам понадобится неравенство

$$\langle\frac{\xi}{\sqrt{1+|\xi|^2}}-\frac{\eta}{\sqrt{1+|\eta|^2}},\xi-\eta\rangle\geq\frac{|\xi-\eta|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}(\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2}+|\xi||\eta|+1)},\qquad(6)$$

которое выполняется для любых векторов $\xi,\eta\in\mathbf{R}^2$ и получается следующим образом. Для начала заметим, что

$$\sqrt{1+|\xi|^2}\geq\sqrt{1+|\eta|^2}+\frac{\langle\eta,\xi-\eta\rangle}{\sqrt{1+|\eta|^2}}.$$

Тогда

$$\langle\frac{\xi}{\sqrt{1+|\xi|^2}}-\frac{\eta}{\sqrt{1+|\eta|^2}},\xi-\eta\rangle=-\frac{\langle\xi,\eta-\xi\rangle}{\sqrt{1+|\xi|^2}}-\frac{\langle\eta,\xi-\eta\rangle}{\sqrt{1+|\eta|^2}}\geq$$

$$\geq\sqrt{1+|\eta|^2}-\sqrt{1+|\xi|^2}-\frac{\langle\xi,\eta-\xi\rangle}{\sqrt{1+|\xi|^2}}=\frac{\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2}-\langle\xi,\eta\rangle-1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\geq$$

$$\geq\frac{|\xi-\eta|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}(\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2}+|\xi||\eta|+1)}.$$

Таким образом, из неравенства (6) и равенства (5) следует, что

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{|\nabla f^*-\nabla f^1|^2}{\sqrt{1+|\nabla f^*|^2}(\sqrt{1+|\nabla f^*|^2}\sqrt{1+|\nabla f^1|^2}+|\nabla f^*||\nabla f^1|+1)}dxdy\leqslant 0.$$

Поэтому $\nabla f^*\equiv\nabla f^1$. Откуда получаем, что $\nabla v_N^*\equiv\nabla v_N^1$. Используя, что многочлены v_N^* и v_N^1 равны нулю на границе области $\partial\Omega$, имеем $v_N^*(x,y)=v_N^1(x,y)$ при всех $(x,y)\in\Omega$. Таким образом единственность доказана.

Определение. *Функцию $f^*=\varphi+v_N^*$, $v_N^*\in L_N$, будем называть полиномиальным решением краевой задачи* (1)–(2), *если для любого многочлена $v_N\in L_N$ выполнено равенство* (4).

Ниже нас будет интересовать вопрос о равномерной сходимости последовательности полиномиальных решений $\varphi+v_N^*$ при $N\to\infty$. В первую очередь мы покажем, что, при определенных условиях, градиенты этих функций остаются ограниченными постоянной, независящей от N. Это свойство позволит далее получить оценку равномерной сходимости к точному решению.

3. Оценка градиента полиномиального решения

Пусть $f\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ – решение задачи (1)-(2). Введем величину $\delta(\xi,\eta)$ для произвольных векторов $\xi,\eta\in\mathbf{R}^2$

$$\delta(\xi,\eta)=\sqrt{1+|\eta|^2}-\sqrt{1+|\xi|^2}-\frac{\langle\xi,\eta-\xi\rangle}{\sqrt{1+|\xi|^2}}.$$

Нетрудно заметить, что $\delta(\xi,\eta)>0$ при всех $\xi\neq\eta$. Также нам понадобится следующая полиномиальная характеристика области

$$\lambda_N=\inf_{v\in L_N}\frac{\left(\iint\limits_{\Omega}|\nabla v|^2\,dxdy\right)^{1/2}}{\sqrt{|\Omega|}\,\sup\limits_{\Omega}|\nabla v|}>0,$$

где $|\Omega|$ – площадь области Ω. Ясно, что $0<\lambda_N\leqslant 1$. Скорость стремления к нулю величины λ_N при $N\to\infty$ будет оценена в 5-м разделе настоящей статьи.

Далее, полагая $\xi = \nabla f$, $\eta = \nabla\varphi + \nabla v_N^*$ и используя уравнение (1), получаем

$$\iint\limits_{\Omega} \delta(\nabla f, \nabla\varphi + \nabla v_N^*)\,dxdy = \sigma(\varphi + v_N^*) - \sigma(f).$$

Пользуясь неравенством (см. доказательство (6))

$$\sqrt{1+|\eta|^2} - \sqrt{1+|\xi|^2} - \frac{\langle\xi, \eta-\xi\rangle}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \geq$$

$$\geq \frac{|\xi-\eta|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}(\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2}+|\xi||\eta|+1)},$$

заключаем, что

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f - \nabla\varphi - \nabla v_N^*|^2\,dxdy}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}(\sqrt{1+|\nabla f|^2}\sqrt{1+|\nabla\varphi+\nabla v_N^*|^2}+|\nabla f||\nabla\varphi+\nabla v_N^*|+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \sigma(\varphi + v_N^*) - \sigma(f).$$

Тогда из предыдущего неравенства

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f - \nabla\varphi - \nabla v_N^*|^2\,dxdy}{\sqrt{1+|\nabla\varphi+\nabla v_N^*|^2}} \leqslant 3(1+P_0^2)(\sigma(\varphi+v_N^*) - \sigma(f)).$$

Положим $K = \max\{\sup\limits_{\Omega}|\nabla\varphi|, 1\}$ и $A_N = \sup\limits_{\Omega}|\nabla v_N^*|$. Тогда

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla f - \nabla\varphi - \nabla v_N^*|^2\,dxdy \leqslant 3\sqrt{1+2K^2+2A_N^2}(1+P_0^2)(\sigma(\varphi+v_N^*) - \sigma(f)).$$

Введем обозначение $g = f - \varphi$. Ясно, что $g(x,y) = 0$ при $(x,y) \in \partial\Omega$. Далее для произвольной функции $h \in C(\overline{\Omega})$ через h_N будем обозначать некоторое приближение функции h функциями из пространства L_N. Способ такого приближения в дальнейших рассуждениях не важен и будет уточнен в следующем разделе статьи. Используя данное обозначение, имеем

$$\left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla f - \nabla\varphi - \nabla v_N^*|^2\,dxdy\right)^{1/2} \geq \left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla g_N - \nabla v_N^*|^2\,dxdy\right)^{1/2} -$$

$$-\left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2\,dxdy\right)^{1/2}.$$

Тогда, так как $g_N - v_N^* \in L_N$, то

$$\sup\limits_{\Omega}|\nabla g_N - \nabla v_N^*| \leqslant \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}\lambda_N}\left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2\,dxdy\right)^{1/2} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{|\Omega|}\lambda_N}\left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla v_N^*|^2\,dxdy\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}\,\lambda_N}\left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2\,dxdy\right)^{1/2} +$$

$$+\frac{\left(3(1+P_0^2)\sqrt{1+2K^2+2A_N^2}\right)^{1/2}}{\sqrt{|\Omega|}\,\lambda_N}\sqrt{\sigma(\varphi+v_N^*) - \sigma(f)}.$$

Воспользуемся следующим неравенством

$$\frac{x}{\sqrt[4]{a+x^2}} \geq \sqrt[4]{a+x^2} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a+x^2}},$$

которое выполняется для $x \geq 0$ и $a > 0$. Из этого неравенства, полагая $x = \sqrt{2}A_N$, $a = 1 + 2K^2$, получаем

$$A_N \leqslant \sup_{\Omega} |\nabla g_N| + \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}\,\lambda_N} \left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2 \, dxdy \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\frac{3(1+P_0^2)}{|\Omega|\,\lambda_N^2} (\sigma(\varphi + v_N^*) - \sigma(f)) \right)^{1/2} + 1. \qquad (7)$$

Так как функция v_N^* является решением задачи (3), то приходим к оценке

$$\sup_{\Omega} |\nabla v_N^*| \leqslant \sup_{\Omega} |\nabla g_N| + \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}\,\lambda_N} \left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2 \, dxdy \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\frac{3(1+P_0^2)}{|\Omega|\,\lambda_N^2} (\sigma(\varphi + g_N) - \sigma(f)) \right)^{1/2} + 1. \qquad (8)$$

Для получения окончательного неравенства заметим, что функция $\varphi + g = f$ является решением уравнения (1), и потому $a'(0) = 0$, где $a(t) = \sigma(f + t(\varphi + g_N - f))$. Тогда, полагая $f^t = f + t(\varphi + g^N - f)$,

$$\sigma(\varphi + g_N) - \sigma(f) = \int\limits_0^1 ds \int\limits_0^s a''(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^1 ds \int\limits_0^s dt \iint\limits_{\Omega} \frac{(1+|\nabla f^t|^2)|\nabla f - \nabla(\varphi + g_N)|^2 - \langle \nabla f^t, \nabla f - \nabla(\varphi + g_N)\rangle^2}{(1+|\nabla f^t|^2)^{3/2}} dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{\Omega} |\nabla f - \nabla(\varphi + g_N)|^2 dxdy = \iint\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2 dxdy.$$

Тогда из неравенства (8) приходим к оценке

$$\sup_{\Omega} |\nabla v_N^*| \leqslant 1 + \sup_{\Omega} |\nabla g_N| +$$

$$+ \frac{1 + \sqrt{3(1+P_0^2)}}{\sqrt{|\Omega|}\,\lambda_N} \left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2 \, dxdy \right)^{1/2}, \qquad (9)$$

итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть f – решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевому условию* (2). *Тогда, если $v_N^*(x,y) \in L_N$ – решение задачи* (3), *то выполнена оценка его градиента* (9).

Замечание. Из теоремы 2 следует, что при $N \to \infty$ градиенты приближенных решений $\varphi + v_N^*$ будут равномерно ограничены, если таковой будет величина

$$\frac{1}{\lambda_N}\left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2\,dxdy\right)^{1/2},$$

а также ограниченными будут градиенты функций $g_N(x,y)$. Для выяснения этих вопросов нам нужно оценить степень приближения функции g многочленами g_N, а также выяснить как себя ведет числовая последовательность λ_N при $N \to \infty$.

4. Аппроксимация гладких функций полиномами

Пусть Ω ограниченная область с границей Γ, k – натуральное число и функция $\psi(x,y)$ удовлетворяет условиям:

1) функция ψ дифференцируема k раз, и ее производные k-го порядка удовлетворяют условию Липшица;

2) $\psi(x,y) = 0$ при $(x,y) \in \Gamma$ и $\psi(x,y) \neq 0$ при $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$;

3) $|\nabla\psi(x,y)| > 0$ при $(x,y) \in \Gamma$.

Тогда, как доказано в статье [13], для функции $u(x,y)$, непрерывно дифференцируемой k раз в $\overline{\Omega}$ и обращающейся в нуль на Γ, можно указать последовательность многочленов $P_N(x,y)$ степени $\leqslant N$ по каждой переменной x, y таких, что

$$||u - \psi P_N||_{C^r(\Omega)} \leqslant \frac{\delta_N(u)}{N^{k-r}}, r = 0, 1, ..., k, \tag{10}$$

где величина $\delta_N(u) \to 0$ при $N \to \infty$.

Далее мы будем считать, что функция $g = f - \varphi \in C^k(\Omega)$. Теперь мы уточняем способ выбора функции g_N, полагая $g_N = \psi P_N$, где приближающий многочлен выбран для функции $g = f - \varphi$. Применяя (для $r = 1$) оценки (10) для $u = f - \varphi$ в неравенстве (9), получаем

$$\sup_{\Omega} |\nabla v_N^*| \leqslant 1 + K + P_0 + \frac{2 + \sqrt{3(1 + P_0^2)}}{\lambda_N}\frac{\delta_N(f - \varphi)}{N^{k-1}}. \tag{11}$$

Из этого неравенства видно, что градиенты приближенных решений будут оставаться ограниченными постоянной, независящей от N при $N \to \infty$, если величина λ_N будет стремиться к нулю не быстрее, чем $O(1/N^{k-1})$. В следующем разделе статьи мы исследуем этот вопрос.

5. Оценка величины λ_N

Приведем пример оценки снизу величины λ_N. Ясно, что

$$\lambda_N = \inf_{v \in L_N} \frac{\left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\,dxdy\right)^{1/2}}{\sqrt{|\Omega|}\,\sup\limits_{\Omega} |\nabla v|} \geq \inf_{P} \frac{\left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla P|^2\,dxdy\right)^{1/2}}{\sqrt{|\Omega|}\,\sup\limits_{\Omega} |\nabla P|},$$

где точная нижняя грань берется по всем многочленам степени не более чем $N' = N + N_0$ по каждой переменной.

Далее нам понадобится следующее неравенство А.А. Маркова (см., например, [14], §6) для многочлена $P(x)$ одной переменной степени N на отрезке $[a,b]$

$$|P'(x)| \leqslant \frac{2N^2}{b-a}\max_{[a,b]}|P(x)|.$$

Из него легко получить аналогичное неравенство для прямоугольника в случае многочлена двух переменных. Пусть $P(x,y)$ многочлен, степень которого по каждой переменной не выше чем N. Положим

$$M = \max_{[a,b]\times[c,d]}|P(x,y)|.$$

Тогда из неравенства А.А. Маркова по каждой переменной имеем

$$\left|\frac{\partial P}{\partial x}\right| \leqslant \frac{2N^2}{b-a}\max_{[a,b]}|P(x,y)| \leqslant M\frac{2N^2}{b-a}$$

$$\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right| \leqslant M\frac{2N^2}{d-c}.$$

Следовательно,

$$|\nabla P|^2 \leqslant 4N^4M^2\frac{(d-c)^2+(b-a)^2}{(b-a)^2(d-c)^2}$$

или

$$|\nabla P| \leqslant 2N^2M\frac{\sqrt{(d-c)^2+(b-a)^2}}{(b-a)(d-c)} = 2N^2M\frac{d}{S},$$

где d — диагональ прямоугольника, S — его площадь. Рассмотрим это неравенство для квадрата со стороной $a>0$. Тогда $d=a\sqrt{2}, S=a^2$. Поэтому

$$|\nabla P_N| \leqslant N^2M\frac{2\sqrt{2}}{a}.$$

Ясно, что это неравенство справедливо для любого квадрата, необязательно со сторонами, параллельными осям координат. Положим

$$\inf_P \frac{\left(\iint\limits_\Omega |P|^2\,dxdy\right)^{1/2}}{\sqrt{\Omega}\,\sup\limits_\Omega|P|} = \widetilde{\lambda}_N,$$

где точная нижняя грань берется по всем многочленам степени не более чем N по каждой переменной. Найдем сначала оценку $\widetilde{\lambda}_N$ для квадрата K со стороной $a>0$. Пусть $z=(x,y)\in K$ и $z_0\in K$ — такая,что $P(z_0)=\max\limits_K|P|=M$. Тогда

$$P(z_0)-P(z) \leqslant |z-z_0|\max_K|\nabla P| \leqslant N^2\frac{2\sqrt{2}}{a}M|z-z_0|.$$

Если $|z-z_0|<a/(4\sqrt{2}N^2)$, то $M-P(z)\leqslant\frac{M}{2}$. Таким образом, $P(x,y)\geq\frac{M}{2}$ для $(x,y)\in K\cap B_{\frac{a}{4\sqrt{2}N^2}}(z_0)$. Тогда

$$\iint\limits_K P^2(x,y)dxdy \geq \iint\limits_{K\cap B_{\frac{a}{4\sqrt{2}N^2}}(z_0)} P^2(z)dxdy \geq$$

$$\geq \frac{M^2}{4}\iint\limits_{K\cap B_{\frac{a}{4\sqrt{2}N^2}}(z_0)} dxdy \geq \frac{M^2}{16}\pi\frac{a^2}{32N^4}.$$

Поэтому

$$\left(\iint\limits_K P^2(x,y)dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{Ma}{16\sqrt{2}N^2}\sqrt{\pi}.$$

Так как P произвольный допустимый многочлен, то

$$\widetilde{\lambda}_N \geq \frac{1}{16}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{N^2}.$$

Теперь применим доказанное неравенство для частных производных многочлена P, которые являются также многочленами. Следовательно,

$$\left(\iint\limits_K P_x^2(x,y)dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \geq \widetilde{\lambda}_N \max_K |P_x|\sqrt{|K|}$$

$$\left(\iint\limits_K P_y^2(x,y)dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \geq \widetilde{\lambda}_N \max_K |P_y|\sqrt{|K|}.$$

Отсюда

$$|\nabla P|^2 \geq \widetilde{\lambda}_N^2|K|((\max_K|P_x|)^2 + (\max_K|P_y|)^2) \geq$$

$$\geq \widetilde{\lambda}_N^2|K|(\max_K|P_x|^2 + |P_y|^2) = |K|((\max_K|\nabla P|)^2.$$

Таким образом,

$$\frac{\left(\iint\limits_K |\nabla P|^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}}}{|K|\max\limits_K|\nabla P|} \geq \widetilde{\lambda}_N \geq \frac{1}{16N^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Следовательно,

$$\lambda_N \geq \frac{1}{16N^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{12}$$

Таким образом, мы получили нижнюю оценку величины λ_N для случая, когда областью Ω является квадрат со стороной $a > 0$. Отметим, что эта оценка от размеров квадрата не зависит. Используя неравенство (12), получим оценку для произвольной плоской области Ω.

Для любого $z_0 \in \Omega$ найдем максимальный квадрат $K \subset \overline{\Omega}$, необязательно со сторонами, параллельными осям координат, такой, что $z_0 \in K$. Пусть сторона квадрата $a(z_0) > 0$. Положим

$$\Delta(\Omega) = \inf_{z_0 \in \Omega} a(z_0).$$

Будем предполагать, что $\Delta(\Omega) > 0$. Например, если в качестве Ω взять круг радиуса $R > 0$, то нетрудно увидеть, что для любой точки z_0 из этого круга $a(z_0) = R\sqrt{2}$. Поэтому для круга $\Delta(\Omega) = R\sqrt{2}$. В качестве другого примера приведем область, ограниченную эллипсом

$$\Omega = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\},\ a > b.$$

В точке с координатами $(a, 0)$ эллипс имеет минимальный радиус кривизны, равный b^2/a. Отсюда легко получить, что любая точка $z_0 \in \Omega$ попадает в некоторый круг радиуса b^2/a, лежащий внутри эллипса. Поэтому для эллипса $\Delta(\Omega) \geq \sqrt{2}b^2/a$.

Через величину $\Delta(\Omega)$ легко оценить λ_N. Действительно, пусть $z_0 \in \Omega$ такая, что $\max\limits_{\Omega} |\nabla P| = |\nabla P(z_0)|$, и квадрат $K \subset \overline{\Omega}$ содержит эту точку. Тогда

$$\sqrt{\iint\limits_{\Omega} |\nabla P(x,y)|^2 dxdy} \geq \sqrt{\iint\limits_{K} |\nabla P(x,y)|^2 dxdy} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{16N^2} \sqrt{|K|} \max_K |\nabla P|.$$

Отсюда нетрудно получить неравенство

$$\lambda_N \geq \frac{\Delta(\Omega)}{16N^2\sqrt{|\Omega|}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{13}$$

Таким образом, если область Ω такова, что любая ее точка может быть помещена в квадрат $K \subset \overline{\Omega}$ со стороной $\Delta(\Omega) > 0$, то справедлива оценка (13). Ясно, что если область имеет гладкую границу, то $\Delta(\Omega) > 0$. Для более общих областей вначале получим оценку величины λ_N для ромба.

Итак, пусть на плоскости с декартовыми координатами (x, y) задан ромб R с вершинами в точках

$$(0,0), \quad (a,0), \quad (a\cos\alpha, a\sin\alpha), \quad (a(1+\cos\alpha), a\sin\alpha),$$

где $\alpha \in (0, \pi/2], a > 0$. С помощью линейного преобразования

$$u = x\sin\alpha - y\cos\alpha, \quad v = y$$

на плоскости с координатами (u, v) получим квадрат K с вершинами

$$(0,0), \quad (a\sin\alpha, 0), \quad (0, a\sin\alpha), \quad (a\sin\alpha, a\sin\alpha),$$

Пусть теперь $P = P(x, y)$ произвольный многочлен, степень которого по каждой переменной не превышает N. Нетрудно заметить, что

$$P_x^2 + P_y^2 = (P_u \sin\alpha)^2 + (-P_u\cos\alpha + P_v)^2 \geq (1-\cos\alpha)(P_u^2 + P_v^2).$$

Тогда из (12)

$$\frac{\left(\iint\limits_R (P_x^2+P_y^2)dxdy\right)^{1/2}}{\sqrt{|R|}\max\limits_R |\nabla P|} \geq \frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sin\alpha} \cdot \frac{\left(\iint\limits_K (P_u^2+P_v^2)dudv\right)^{1/2}}{\sqrt{|R|}\max\limits_K |\nabla P|} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sin\alpha} \cdot \frac{\left(\iint\limits_R (P_u^2+P_v^2)dudv\right)^{1/2}}{\sqrt{|K|}\max\limits_K |\nabla P|} \sqrt{\frac{|K|}{|R|}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}} \cdot \frac{\left(\iint\limits_R (P_u^2+P_v^2)dudv\right)^{1/2}}{\sqrt{|K|}\max\limits_K |\nabla P|} \geq \sqrt{\frac{\pi(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha}} \frac{1}{16N^2}.$$

Таким образом, для ромба со стороной $a > 0$ и острым углом $\alpha \in (0, \pi/2]$ выполнено неравенство

$$\lambda_N \geq \sqrt{\frac{\pi(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha}} \frac{1}{16N^2}. \tag{14}$$

Пусть теперь задана произвольная плоская область Ω. Обозначим через $\alpha(\Omega) \in (0, \pi/2]$ такой угол, что всякая точка области содержится в некотором ромбе $R \subset \Omega$ с острым углом $\alpha(\Omega)$. Для любого $z_0 \in \Omega$ найдем максимальный по стороне ромб $R \subset \overline{\Omega}$ такой, что $z_0 \in R$. Пусть сторона этого ромба $a(z_0) > 0$. Положим

$$\Delta_1(\Omega) = \inf_{z_0 \in \Omega} a(z_0) > 0.$$

Рассуждая так же, как и выше, получим неравенство

$$\lambda_N \geq \sqrt{\frac{\pi}{|\Omega|}} \cdot \frac{\Delta_1(\Omega)\sin(\alpha(\Omega)/2)}{16N^2}. \tag{15}$$

Теперь, учитывая, что в L_N многочлены имеют степень не выше чем $N_0 + N$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ такова, что $\Delta_1(\Omega) > 0$ и $\alpha(\Omega) > 0$. Тогда справедлива следующая оценка*

$$\lambda_N \geq \sqrt{\frac{\pi}{|\Omega|}} \cdot \frac{\Delta_1(\Omega)\sin(\alpha(\Omega)/2)}{16(N+N_0)^2}. \tag{16}$$

6. Оценка равномерной сходимости

Далее мы воспользуемся методом оценки решений из работы [15]. Пусть f – решение уравнения минимальной поверхности в области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, $f \in C^k(\overline{\Omega})$. Пусть v_N^* – решение задачи (3), для которого справедливо (4). Положим $f_N^* = \varphi + v_N^*$.

Мы будем предполагать, что

$$\sup_{\Omega} |\nabla f| = P_0 < +\infty.$$

Далее будем рассуждать так же, как и в работе [15]. Положим $f^t(x,y) = f_N^*(x,y) + t(f(x,y) - f_N^*(x,y))$ и $P_N^* = \sup\limits_{\Omega} |\nabla f_N^*|$, $P_N = \max\{1, P_0, P_N^*\}$. Понятно, что $f^*|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$. Отметим, что P_N, вообще говоря, зависит от N. Однако, если предположить, что $k > 2$ и для области постоянные $\Delta_1(\Omega)$ и $\alpha(\Omega)$ положительны, то из неравенств (15) и (9) следует, что при $N \to \infty$ величина P_N будет оставаться ограниченной некоторой постоянной P.

Далее, так как при $t = 0$ функция $\sigma(t) = \sigma(f^t)$ принимает минимальное значение, то $\sigma'(0) = 0$. Используя это равенство, получаем

$$\sigma(f_N^*) - \sigma(f) = \int_0^1 ds \int_0^s \sigma''(t)dt =$$

$$= \int_0^1 ds \int_0^s dt \iint_{\Omega} \frac{(1+|\nabla f^t|^2)|\nabla f_N^* - \nabla f|^2 - \langle \nabla f^t, \nabla f_N^* - \nabla f\rangle^2}{(1+|\nabla f^t|^2)^{3/2}} dxdy \geq$$

$$\geq \int_0^1 ds \int_0^s dt \iint_{\Omega} \frac{|\nabla f - \nabla f_N^*|^2}{(1+|\nabla f^t|^2)^{3/2}} dxdy \geq \frac{1}{\sqrt{(1+P^2)^3}} \iint_{\Omega} |\nabla f - \nabla f_N^*|^2 dxdy. \tag{17}$$

Воспользуемся неравенством Пуанкаре (см., например, [16], п. 7.8) для функции $h(x,y) = f(x,y) - f_N^*(x,y)$, $h|_{\partial\Omega} = 0$. Из (17) получаем

$$\sigma(f_N^*) - \sigma(f) \geq \frac{\lambda(\Omega)}{\sqrt{(1+P^2)^3}} \iint_{\Omega} |h(x,y)|^2 dxdy,$$

где постоянная $\lambda(\Omega) = \pi/|\Omega|$ и $|\Omega|$ – площадь области Ω. Далее, положим $M = \sup\limits_{\Omega} |h|$ и, не ограничивая общности, можем считать, что найдется точка $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, в которой

$h(x_0, y_0) = M$. Покажем, что круг $B_{M/2P}(z_0) \subset \Omega$. Действительно, пусть $z' \in \partial\Omega$ такая, что $|z_0 - z'| = \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Тогда

$$2P|z_0 - z'| \geq h(z_0) - h(z') = M - h(z') = M.$$

Таким образом, расстояние от точки z_0 до границы $\partial\Omega$ больше чем $M/2P$. Следовательно, $B_{M/4P}(z_0) \subset \Omega$. Предположим теперь, что $z = (x, y) \in B_{M/4P}(z_0)$. Тогда

$$h(z) \geq h(z_0) - 2P|z - z_0| > M - 2P\frac{M}{4P} = M/2.$$

Мы получаем, что круг $B_{M/4P}(z_0) \subset D_M$, где

$$D_M = \{(x, y) \in \Omega : |h(x, y)| > M/2\} \subset\subset \Omega.$$

Поэтому

$$\iint\limits_{\Omega} |h(x,y)|^2 dxdy \geq \iint\limits_{D_M} |h(x,y)|^2 dxdy \geq$$

$$\geq \iint\limits_{B_{M/4P}(z_0)} \left(\frac{M}{2}\right)^2 dxdy = \pi\frac{M^2}{4}\left(\frac{M}{4P}\right)^2 = \pi\,\frac{M^4}{64P^2}\,.$$

Таким образом,

$$\max_{\Omega} |f - f_N^*| \leqslant \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(P^5|\Omega|(\sigma(f_N^*) - \sigma(f))\right)^{1/4}.$$

Далее, заметим, что функция v_N^* является решением задачи (3). Поэтому $\sigma(f_N^*) - \sigma(f) \leqslant \sigma(f - \varphi - g_N) - \sigma(f)$. Используя доказанное ранее неравенство

$$\sigma(f - \varphi - g_N) - \sigma(f) \leqslant \iint\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2 dxdy$$

и оценку (10) для $u = f - \varphi$, приходим к неравенству

$$\max_{\Omega} |f - f_N^*| \leqslant \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(P^5|\Omega|\frac{\delta_N^2(f-\varphi)}{N^{2k-2}}\right)^{1/4}.$$

Итак, нами доказан основной результат работы.

Теорема 4. *Пусть $f \in C^k(\overline{\Omega}), k \geq 3$ – решение уравнения минимальной поверхности (1) в области Ω, для которой $\Delta_1(\Omega) > 0$ и $\alpha(\Omega) > 0$. Пусть это решение удовлетворяет краевому условию (2) с функцией $\varphi \in C^k(\overline{\Omega})$. Рассмотрим функции $v_N^* \in L_N$, которые являются решениями задачи (3). Предположим, что $P_0 = \sup\limits_{\Omega} |\nabla f| < +\infty$ и $K = \sup\limits_{\Omega} |\nabla \varphi| < \infty$. Тогда последовательность приближенных решений $f_N^* = \varphi + v_N^*$ равномерно сходится к f, при этом справедлива оценка*

$$\max_{\overline{\Omega}} |f - f_N^*| \leqslant \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(P^5|\Omega|\frac{\delta_N^2(f-\varphi)}{N^{2k-2}}\right)^{1/4},$$

где

$$P = 1 + 2K + P_0 + \frac{16\sqrt{|\Omega|}(2 + \sqrt{3(1+P_0^2)})}{\sqrt{\pi}\Delta_1(\Omega)\sin\left(\alpha(\Omega)/2\right)}\frac{\delta_N(f-\varphi)}{N^{k-1}}(N + N_0)^2$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике.* 2 изд., М. — Л., 1970.
2. Канторович Л.В., Крылов В.И. *Приближённые методы высшего анализа.* 5 изд., Л. — М., 1962.
3. R. Finn *Remarks relevant to minimal surfaces and to surfaces of constant mean curvature* // J. d'Analyse Math. 1965. № 14. P. 139–160.
4. T. Rado *The problem of the least area and the problem of Plateau* // J. d'Analyse Math. Z. 1930. № 32. P. 763–796.
5. Бернштейн С.Н. *Об уравнениях вариационного исчисления* // УМН. 1941. № 8. С. 8–31.
6. Бернштейн С.Н., Петровский И.Г. *О первой краевой задаче (задаче Дирихле) для уравнений эллиптического типа и о свойствах функций, удовлетворяющих этим уравнениям* // УМН. 1941. № 8. С. 32–74.
7. J. Serrin *The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables* // Phil. Trans. Royal Soc. London. 1964. A264. P. 313–496.
8. G. Stampacchia *On some multiple integral problems in the calculus of variations* // Comm. Pure Appl. Math. 1963. № 16. P. 382–422.
9. H. Jenkins, J. Serrin *The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimension* // J. ReineAngew. Math. 1968. № 229. P. 170–187.
10. R.C. Bassanezi, U. Massari *The Dirichlet problem for the minimal surface equation in non-regular domains* // Ann. Univ. Ferrara. 1978. № 24. P. 181–189.
11. Гацунаев М.А., Клячин А.А. *О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности*// Уфимский математический журнал. Том 6, № 3 (2014), С. 3–16.
12. Клячин А.А., Клячин В.А., Григорьева Е.Г. *Визуализация расчета формы поверхностей минимальной площади* // Научная визуализация. Электронный журнал. 2014. Т.6, №2. С. 34–42.
13. Харрик И.Ю. *О приближении функций, обращающихся в нуль на границе области, функциями особого вида* // Математический сборник, 1955, Т. 37 (79), № 2.
14. Натансон И.П. *Конструктивная теория функций.* Гостехиздат, 1949, 688 с.
15. Клячин А.А. *О скорости сходимости последовательности, доставляющей минимум в вариационной задаче* // Вестник ВолГУ. Серия 1. Математика. Физика, 2012. 9 с. ISSN 2222-8896.
16. Гилбарг Д., Трудингер М. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* М.: Наука, 1989, 464 с.

Алексей Александрович Клячин,
Волгоградский государственный университет,
пр. Университетский, 100,
400062, г. Волгоград, Россия
E-mail: `klyachin-aa@yandex.ru`

Трухляева Ирина Владимировна,
Волгоградский государственный университет,
пр. Университетский, 100,
400062, г. Волгоград, Россия
E-mail: `irishka2027@mail.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 1 (2016). С. 84-101.

УДК 519.626

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ПО ФРЕШЕ ФУНКЦИОНАЛА КАЧЕСТВА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.Р. МАНАПОВА*, Ф.В. ЛУБЫШЕВ

Аннотация. В работе рассматриваются нелинейные задачи оптимального управления коэффициентами полулинейных уравнений эллиптического типа с разрывными данными и решениями (состояниями), с управлениями в граничных условиях сопряжения разнородных сред и правых частях уравнений состояния. Доказаны дифференцируемость и Липшиц-непрерывность сеточного аналога функционала качества экстремальных задач.

Ключевые слова: задача оптимального управления, полулинейные эллиптические уравнения, функционал качества, дифференцируемость, Липшиц-непрерывность.

Mathematics Subject Classification: 49J20, 35J61, 65N06

1. Введение

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями эллиптического типа в неоднородных анизотропных средах с разрывными коэффициентами и решениями (состояниями), и граничными условиями сопряжения типа неидеального контакта. Задачи для уравнений математической физики (УМФ) с условиями неидеального контакта часто возникают при моделировании различных процессов в механике сплошных сред, теории упругости, теплопередачи, диффузии. Разрыв коэффициентов и решения имеет место в случае, когда область является неоднородной и состоит из нескольких частей с разными свойствами, либо область содержит тонкие прослойки S с физическими характеристиками, резко отличающимися от основной среды (см. [1]-[3]). Считая такие прослойки S очень тонкими и слабо проницаемыми, их влияние на исследуемый физический процесс, то есть условия контакта можно описать соотношениями (см., например, [1], стр. 167):

$$p(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial N_S}\right)^- = \left(\frac{\partial u}{\partial N_S}\right)^+ = \theta(x)[u],\ x \in S,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial N_S}\right)^\pm = \left(\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\cos(n, x_\alpha)\right)^\pm,$$

где $[u] = u^+(x) - u^-(x)$ — скачок функции $u(x)$ на S; $p(x)$ — заранее неизвестный поток вещества (теплоты) через элементарную площадку; $\theta(x) \geq \theta_0 > 0$ — заданная функция, $S = \overline{\Omega}^- \cap \overline{\Omega}^+$ — внутренняя граница раздела сред, $\Omega^- \cap \Omega^+ = \emptyset$, Ω^- и Ω^+ — некоторые области, так что $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+ \cup S$ — ограниченная область.

A.R. Manapova, F.V. Lubyshev, On Frechet differentiability of cost functional in optimal control of coefficients of elliptic equations.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (МК-4147.2015.1).

Поступила 16 мая 2015 г.

Математические оптимизации процессов в подавляющем большинстве не поддаются аналитическому исследованию и требуют применения численных методов и их реализации на ЭВМ. Численное решение задач оптимального управления (ЧРЗОУ) с использованием ЭВМ в широком смысле связано с решением следующих вопросов:

1. Постановка задач оптимизации, обеспечивающая существование решения на множестве допустимых управлений, являющемся подмножеством некоторого бесконечномерного векторного пространства;
2. Сведение задач оптимального управления к последовательности конечномерных задач, обеспечивающее сходимость в некотором смысле решений конечномерных задач к решениям исходных задач оптимального управления;
3. Численное решение конечномерных задач.

Задачи для УМФ с разрывными коэффициентами и решением не так широко исследованы (см. обзор работ в [4]). Значимые результаты для задач оптимального управления, описываемых нелинейными УМФ с разрывными коэффициентами и решениями получены в работах [4]-[6], где разработаны новые методы исследования задач оптимального управления, описываемых нелинейными УМФ с разрывными коэффициентами и решениями, основанные на построении и исследовании разностных аппроксимаций экстремальных задач, установлении оценок точности аппроксимаций по состоянию и функционалу, и регуляризации аппроксимаций.

Данная работа является естественным продолжением [4]-[6]. В ней исследуются нелинейные задачи оптимального управления, описываемые полулинейными эллиптическими уравнениями с разрывными коэффициентами и решениями (состояниями) с граничными условиями сопряжения типа неидеального контакта. В качестве управления выступают коэффициенты в граничном условии сопряжения разнородных сред и правой части уравнения состояния. Работа направлена на решение следующего третьего этапа ЧРЗОУ, а именно, на разработку эффективных численных методов решения построенных конечномерных сеточных задач оптимального управления. Заметим, что данные вопросы ранее не рассматривались. Для численной реализации конечномерных задач оптимального управления доказываются дифференцируемость и Липшиц-непрерывность сеточного функционала аппроксимирующих сеточных задач. Получены эффективные процедуры расчета градиентов минимизируемых сеточных функционалов, использующих решения прямых задач и соответствующих вспомогательных сопряженных задач.

В теплофизических терминах поставленные задачи можно трактовать как задачи оптимального управления коэффициентом граничного условия сопряжения разнородных теплопроводящих сред $\theta(x)$ и коэффициентами $f_1(x)$ и $f_2(x)$, характеризующими наличие в средах Ω_1 и Ω_2, соответственно, внутренних источников энергии, за счет которых внутри сред может возникать или поглощаться тепло. При этом коэффициент граничного условия сопряжения характеризует термическое сопротивление неидеального контакта разнородных сред [1], [3].

2. Постановка задач

Пусть $\Omega = \{r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant r_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1,2\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma$. Пусть область Ω разделена «внутренней контактной границей» $\overline{S} = \{r_1 = \xi,\ 0 \leqslant r_2 \leqslant l_2\}$, где $0 < \xi < l_1$, на подобласти $\Omega_1 \equiv \Omega^- = \{0 < r_1 < \xi,\quad 0 < r_2 < l_2\}$ и $\Omega_2 \equiv \Omega^+ = \{\xi < r_1 < l_1,\quad 0 < r_2 < l_2\}$ с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Так что область $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \overline{S}$, а $\partial\Omega$ – внешняя граница области Ω. Через $\overline{\Gamma}_k$ будем обозначать границы областей Ω_k без S, $k = 1,2$. Так что $\partial\Omega_k = \overline{\Gamma}_k \cup S$, где части Γ_k, $k = 1,2$ – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$; $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Через n_α, $\alpha = 1,2$ будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$

области Ω_α, $\alpha = 1,2$. Пусть, далее, $n = n(x)$ – единичная нормаль к S в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль n является внешней нормалью к S по отношению к области Ω_1, то есть нормаль n направлена внутрь области Ω_2. Ниже, при постановке краевых задач для состояний процессов управления, S – это прямая, вдоль которой разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях Ω_1 и Ω_2 обладают некоторой гладкостью.

Рассмотрим следующую задачу Дирихле для полулинейного эллиптического уравнения с разрывными коэффициентами и решениями: Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$ вида $u(x) = u_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1$, $u(x) = u_2(x)$, $x \in \overline{\Omega}_2$, где компоненты u_k, $k = 1,2$, удовлетворяют условиям:
1) функции $u_k(x)$, $k = 1,2$, определенные на $\overline{\Omega}_k = \Omega_k \cup \partial\Omega_k$, $k = 1,2$, удовлетворяют в Ω_k, $k = 1,2$, уравнениям

$$-\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + d(x)q(u) = f(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \tag{1a}$$

а на границах $\partial\Omega_k \setminus S = \overline{\Gamma}_k$ условиям

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2; \tag{1b}$$

2) Искомые функции $u_k(x)$, $k = 1,2$, удовлетворяют еще дополнительным условиям на границе разрыва S коэффициентов и решения, позволяющим «сшить» решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ вдоль контактной границы S областей Ω_1 и Ω_2 следующего вида:

$$k_1^{(1)}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = k_1^{(2)}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \theta(x_2)\left(u_2(x) - u_1(x)\right), \quad x \in S, \tag{1c}$$

где $u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1; \\ u_2(x), & x \in \Omega_2, \end{cases}$ $q(\xi) = \begin{cases} q_1(\xi_1), & \xi_1 \in \mathbb{R}; \\ q_2(\xi_2), & \xi_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$

$$k_\alpha(x), d(x), f(x) = \begin{cases} k_\alpha^{(1)}(x), d_1(x), f_1(x), & x \in \Omega_1; \\ k_\alpha^{(2)}(x), d_2(x), f_2(x), & x \in \Omega_2, \quad \alpha = 1,2. \end{cases}$$

Здесь $\left[u\right] = u_2(x) - u_1(x)$ – скачок функции $u(x)$ на S; $k_\alpha(x)$, $\alpha = 1,2$, $d(x)$ – известные функции, определяемые по-разному в Ω_1 и Ω_2, претерпевающие разрыв первого рода на S; $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\alpha = 1,2$, – заданные функции, определенные для $\xi_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1,2$; $g(x) = (f_1(x), f_2(x), \theta(x))$ – управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $k_\alpha(x) \in W_\infty^1(\Omega_1) \times W_\infty^1(\Omega_2)$, $\alpha = 1,2$, $d(x) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2)$; $0 < \nu \leqslant k_\alpha(x) \leqslant \overline{\nu}$, $\alpha = 1,2$, $0 \leqslant d_0 \leqslant d(x) \leqslant \overline{d}_0$, $x \in \Omega_1 \cup \Omega_2$; $\nu, \overline{\nu}, d_0, \overline{d}_0$ – заданные константы; функции $q_\alpha(\xi_\alpha)$, определенные на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$, удовлетворяют условиям: $q_\alpha(0) = 0$, $0 < q_0 \leqslant \big(q_\alpha(\xi_\alpha) - q_\alpha(\overline{\xi}_\alpha)\big)/\big(\xi_\alpha - \overline{\xi}_\alpha\big) \leqslant L_q < \infty$, для всех ξ_α, $\overline{\xi}_\alpha \in \mathbb{R}$, $\xi_\alpha \neq \overline{\xi}_\alpha$, $\alpha = 1,2$, $L_q = \text{Const}$.

Введем множество допустимых управлений

$$\begin{gathered} U = \prod_{\alpha=1}^{3} U_\alpha \subset H = L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2) \times L_2(S), \\ U_\alpha = \left\{g_\alpha(x) = f_\alpha(x) \in L_2(\Omega_\alpha) : \ \varrho_\alpha \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \overline{\varrho}_\alpha \text{ п.в. на } \Omega_\alpha\right\}, \\ \alpha = 1,2; \quad U_3 = \left\{g_3(x) = \theta(x) \in L_2(S) : \ 0 < \varrho_3 \leqslant \theta(x) \leqslant \overline{\varrho}_3 \text{ п.в. на } S\right\}, \end{gathered} \tag{2}$$

где ϱ_α, $\overline{\varrho}_\alpha$, $\alpha = \overline{1,3}$ – заданные числа.

Зададим функционал цели $J : \ U \to \mathbb{R}^1$ в виде

$$g \to J(g) = \int\limits_{\Omega_1} \left|u(r_1, r_2; g) - u_0^{(1)}(r)\right|^2 d\Omega_1 = I(u(r; g)), \tag{3}$$

где $u_0^{(1)} \in W_2^1(\Omega_1)$ – заданная функция.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $g_* \in U$, которое минимизирует на множестве $U \subset H$ функционал $g \to J(g)$, точнее, на решениях $u(r) = u(r; g)$ задачи (1), отвечающих всем допустимым управлениям $g = \big(f_1, f_2, \theta\big) \in U$, требуется минимизировать функционал (3).

В дальнейшем нам понадобятся некоторые пространства, которые введены в работе [6]. Приведем их для полноты изложения. В частности, рассмотрим пространство $V(\Omega^{(1,2)})$, $\Omega^{(1,2)} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ пар функций $u = (u_1, u_2)$: $V(\Omega^{(1,2)}) = \big\{u = (u_1, u_2) \in W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)\big\}$, где $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$ – Соболевские пространства функций, заданных в подобластях Ω_k, с границами $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ соответственно и нормами [7]-[9]:

$$\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 + u_k^2\right] d\Omega_k, \quad k = 1, 2.$$

Снабженное скалярным произведением и нормой $(u, \vartheta)_V = \sum\limits_{k=1}^{2} (u_k, \vartheta_k)_{W_2^1(\Omega_k)}$, $\|u\|_V^2 = \sum\limits_{k=1}^{2} \|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)}$, $V = V(\Omega^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

В гильбертовом пространстве $V(\Omega^{(1,2)})$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Gamma_k} u_k^2 \, d\Gamma_k + \int\limits_S [u]^2 \, dS,$$

где $\big[u\big] = u_2(x) - u_1(x) = u^+(x) - u^-(x)$ – скачок функции $u(x)$ на S. Здесь $u_2(x) = u^+(x)$, $x \in S$ и $u_1(x) = u^-(x)$, $x \in S$ – следы функции $u(x)$ на S со стороны $\Omega_2 = \Omega^+$ и $\Omega_1 = \Omega^-$ соответственно. Отметим, что из условия $u(x) \in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что $[u(x)] \in L_2(S)$, так как в данном случае теорема о следах [7]-[9] справедлива для каждой из сторон S^+, S^- границы контакта S (оператор сужения из $W_2^1(\Omega^\pm)$ в $L_2(S)$ непрерывен). Применение теоремы о следах к Ω_1 и Ω_2 позволяет определить для любой функции $u(x) \in V(\Omega^{(1,2)})$ два следа с помощью операторов сужения на $S^\pm$, то есть с разных сторон (со стороны Ω_1 и со стороны Ω_2), которые в общем случае различны.

Пусть $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ – часть $\partial\Omega_k$. Через $W_2^1\left(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W_2^1(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega}_k)$, равных нулю вблизи $\overset{\circ}{\Gamma}_k \subset \partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ – какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$.

Введем в рассмотрение пространство $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ $(\Omega^{(1,2)})$ пар функций $u = (u_1, u_2)$: $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ $(\Omega^{(1,2)}) = \big\{u = (u_1, u_2) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1) \times W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2)\big\}$ с нормой (см. [4]):

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \int\limits_S [u]^2 \, dS.$$

Под решением прямой задачи (1) при фиксированном управлении $g = \big(f_1, f_2, \theta\big) \in U$ понимается функция $u(g) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, удовлетворяющая тождеству

$$\begin{gathered} Q(u,\vartheta) = \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha} + d(x)\,q(u)\,\vartheta\right] d\Omega_0 + \\ + \int\limits_S \theta(x)[u][\vartheta]dS = \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} f(x)\,\vartheta d\Omega_0 = l(\vartheta), \quad \text{для всех } \vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}). \end{gathered} \tag{4}$$

Замечание 1. В дальнейшем относительно гладкости решения прямой задачи сделаем следующее предположение (аналогичное предположению, сделанному в [5], с. 1384 при исследовании разностных схем для задачи с такими же условиями сопряжения), а именно: решение краевой задачи (1) принадлежит $W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)$, точнее, принадлежит пространству $\overset{\circ}{\hat{V}}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) \cap \big\{u = (u_1,u_2) \in W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)\big\}$, и при каждом фиксированном управлении $g \in U$ справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{2} \|u_k(x,g)\|_{W_2^2(\Omega_k)} \leqslant M \sum_{k=1}^{2} \|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)}, \quad \forall g \in U, \quad \text{где } M = \mathrm{Const} > 0.$$

Замечание 2. Здесь и далее, через M, $\widetilde{M}$, M_0, C, C_0, $\widetilde{C}_0$, C_k, $k = \overline{1,3}$ обозначены различные положительные постоянные, независящие от решения $u(r;g)$ и управления $g \in U$ (сеточного решения $y(x;\Phi_h)$, сеточного управления $\Phi_h \in U_h$).

3. Разностная аппроксимация задач оптимизации

Для численного решения задач оптимального управления рассмотрим вопрос об аппроксимации бесконечномерных задач оптимизации (1)-(3) последовательностью конечномерных задач оптимального управления. Ниже построим аппроксимации задач на основе метода сеток (см. [1]). Для аппроксимации задачи (1)-(3) нам понадобятся некоторые сетки на $[0,l_\alpha]$, $\alpha = 1,2$, и в $\overline{\Omega}$. Отметим, что всегда можно построить сетку на $[0,l_1]$ так, чтобы точка $x_1 = \xi$ была ее узлом. При решении практических задач целесообразно выбирать в областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ равномерные шаги $h_1^{(1)}$ и $h_1^{(2)}$ соответственно, и исходя из положения точки $x_1 = \xi$ число узлов находить из предположения $h_1^{(1)} \approx h_1^{(2)}$. Положим $x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1-1)} = h_1$, $i_1 = \overline{1,N_1}$ и $x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)} = h_2$, $i_2 = \overline{1,N_2}$. Значение x_1 в точке $x_1 = \xi$ обозначим через x_ξ, а соответствующий номер узла обозначим через $N_{1\xi}$, $1 < N_{1\xi} < N_1 - 1$. Введем сетки узлов: $\overline{\omega}_1^{(1)} = \big\{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [0,\xi] :\ i_1 = \overline{0,N_{1\xi}},\ N_{1\xi}h_1 = \xi\big\}$, $\overline{\omega}_1^{(2)} = \big\{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [\xi,l_1] :\ i_1 = \overline{N_{1\xi},N_1},\ N_{1\xi}h_1 = l_1\big\}$, $\omega_1^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \setminus \{x_1 = 0, x_1 = \xi\}$, $\omega_1^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \setminus \{x_1 = \xi, x_1 = l_1\}$; $\overline{\omega}_2 = \{x_2^{(i_2)} = i_2 h_2 \in [0,l_2] :\ i_2 = \overline{0,N_2}, N_2 h_2 = l_2\}$, $\omega_2 = \overline{\omega}_2 \setminus \{x_2 = 0, x_2 = l_2\}$; $\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_1^{(1)} \cup \overline{\omega}_1^{(2)}$; $\omega_1 = \omega_1^{(1)} \cup \omega_1^{(2)}$; $\overline{\omega}^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \times \overline{\omega}_2$; $\overline{\omega}^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \times \overline{\omega}_2$; $\omega^{(1)} = \omega_1^{(1)} \times \omega_2$; $\omega^{(2)} = \omega_1^{(2)} \times \omega_2$; $\overline{\omega} \equiv \overline{\omega}^{(1,2)} = \overline{\omega}^{(1)} \cup \overline{\omega}^{(2)} = \big(\overline{\omega}_1^{(1)} \cup \overline{\omega}_1^{(2)}\big) \times \overline{\omega}_2 = \big\{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1,\ i_1 = \overline{0,N_1},\ N_{1\xi}h_1 = \xi, (N_1 - N_{1\xi})h_1 = l_1 - \xi, 1 < N_{1\xi} < N_1 - 1\big\} \times \overline{\omega}_2$, $\omega \equiv \omega^{(1,2)} = \omega^{(1)} \times \omega^{(2)}$; $\omega_1^{(1)+} = \overline{\omega}_1^{(1)} \cap (0,\xi]$, $\omega_1^{(1)-} = \overline{\omega}_1^{(1)} \cap [0,\xi)$, $\omega_1^{(2)-} = \overline{\omega}_1^{(2)} \cap [\xi,l_1)$, $\omega^{(1)(+1)} = \omega_1^{(1)+} \times \overline{\omega}_2$; $\gamma_S = \big\{x_1 = \xi,\ x_2 = h_2, 2h_2, \ldots, (N_2-1)h_2\big\} = \big\{x_1 = \xi,\ x_2^{(i_2)} = i_2 h_2,\ i_2 = \overline{1,N_2-1}\big\}$; $\gamma^{(k)} = \partial\omega^{(k)} \setminus \gamma_S$; $\omega_1^{(1)+} \times \omega_2 = \omega^{(1)} \cup \gamma_S = \overline{\omega}^{(1)} \setminus \gamma^{(1)}$; $\partial\omega^{(k)} = \overline{\omega}^{(k)} \setminus \omega^{(k)}$ – множество граничных узлов сетки $\overline{\omega}^{(k)}$, $k = 1,2$.

Приведем некоторые скалярные произведения, нормы и полунормы сеточных функций, заданных на различных сетках, которые будут использоваться в дальнейшем (более подробное их описание см. в работе [4]). Множество сеточных функций $y_1(x)$, заданных на сетке $\overline{\omega}^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega}_1 \equiv \overline{\Omega}^-$ обозначим через $H_h^{(1)}(\overline{\omega}^{(1)})$, а множество сеточных функций $y_2(x)$, заданных на сетке $\overline{\omega}^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega}_2 \equiv \overline{\Omega}^+$, обозначим через $H_h^{(2)}(\overline{\omega}^{(2)})$. Множество $H_h^{(k)}(\overline{\omega}^{(k)})$, $k=1,2$, снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y_k,\nu_k)_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})} = \sum_{\overline{\omega}^{(k)}} y_k(x)\,\nu_k(x)\,\hbar_1\hbar_2, \quad \|y_k\|_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})} = (y_k,y_k)^{1/2}_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})},$$

обозначим через $L_2(\overline{\omega}^{(k)})$, $k=1,2$. Здесь $\hbar_1 = \hbar_1(x_1)$ – средний шаг сеток $\overline{\omega}_1^{(1)}$ и $\overline{\omega}_1^{(2)}$, а $\hbar_2 = \hbar_2(x_2)$ – средний шаг сетки $\overline{\omega}_2$, [1]. Через $W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})$ и $W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})$ обозначены пространства сеточных функций, заданных на сетках $\overline{\omega}^{(1)}$ и $\overline{\omega}^{(2)}$ соответственно, со скалярными произведениями и нормами:

$$(y_k,\nu_k)_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})} = \sum_{\omega_1^{(k)+}\times\overline{\omega}_2} y_{k\bar{x}_1}\nu_{k\bar{x}_1}h_1\hbar_2 + \sum_{\overline{\omega}_1^{(k)}\times\omega_2^{+}} y_{k\bar{x}_2}\nu_{k\bar{x}_2}\hbar_1 h_2 + (y_k,\nu_k)_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})},$$
$$\|y_k\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})} = \|\nabla y_k\|^2 + \|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})}, \quad k=1,2,$$

где $\|\nabla y_k\|^2 = \sum\limits_{\omega_1^{(k)+}\times\overline{\omega}_2} y^2_{k\bar{x}_1}h_1\hbar_2 + \sum\limits_{\overline{\omega}_1^{(k)}\times\omega_2^{+}} y^2_{k\bar{x}_2}\hbar_1 h_2, \quad k=1,2.$ Введено в рассмотрение пространство $V(\overline{\omega}^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y=(y_1,y_2)$, определяемое соотношением $V(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \big\{y=(y_1,y_2)\in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})\times W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})\big\}$. Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y,\nu)_{V(\overline{\omega}^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2}(y_k,\nu_k)_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})}, \quad \|y\|^2_{V(\overline{\omega}^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2}\|y_k\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})},$$

$V(\overline{\omega}^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством. Пусть теперь $\gamma^{(k)} = \partial\omega^{(k)}\setminus\gamma_S$ – подмножество граничных узлов $\partial\omega^{(k)}$ сетки $\overline{\omega}^{(k)}\subset\overline{\Omega}_k$, $k=1,2$. Через $L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})$ обозначено нормированное подпространство пространства сеточных функций $L_2(\overline{\omega}^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k=1,2$ с нормами

$$\|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})} = \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k^2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\gamma_S} y_k^2(x)h_1h_2 =$$
$$= \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k^2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{x_2\in\omega_2} y_k^2(\xi,x_2)h_1h_2, \quad k=1,2,$$

индуцированными скалярными произведениями

$$(y_k,v_k)_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})} = \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k(x)v_k(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\gamma_S} y_k(x)v_k(x)h_1h_2, \quad k=1,2.$$

Через $W_2^1(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})$ обозначено подпространство пространства сеточных функций $W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k=1,2$. Введены пространства $\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ и $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y=(y_1,y_2)$:

$$\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \big\{y=(y_1,y_2)\in L_2(\overline{\omega}^{(1)};\gamma^{(1)})\times L_2(\overline{\omega}^{(2)};\gamma^{(2)})\big\},$$
$$\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \big\{y=(y_1,y_2)\in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)};\gamma^{(1)})\times W_2^1(\overline{\omega}^{(2)};\gamma^{(2)})\big\},$$

с нормами $\|y\|^2_{\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} = \sum\limits_{k=1}^{2}\|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})}$, $\|y\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} = \|\nabla y_k\|^2 + \|[y]\|^2_{L_2(\gamma_S)}$, где $\|y_k\|^2_{L_2(\gamma_S)} = \big(y_k,y_k\big)_{L_2(\gamma_S)}$, $\big(y_k,\nu_k\big)_{L_2(\gamma_S)} = \sum\limits_{x\in\gamma_S} h_2 y_k(x)\,\nu_k(x)$, $k=1,2$.

Через $H_h^{(1)}(\omega^{(1)} \cup \gamma_S) \equiv L_2(\omega^{(1)} \cup \gamma_S)$ обозначено пространство сеточных функций $v_{1h}(x)$, $x \in \omega^{(1)} \cup \gamma_S$, заданных на сетке $\omega^{(1)} \cup \gamma_S$, со скалярным произведением и нормой:

$$(v_{1h}, \tilde{v}_{1h})_{H_h^{(1)}(\omega^{(1)} \cup \gamma_S)} = \sum_{x \in \omega^{(k)}} v_{1h}(x) \tilde{v}_{1h}(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \gamma_S} v_{1h}(x) \tilde{v}_{1h}(x) h_1 h_2,$$
$$\|v_{1h}(x)\|^2_{H_h^{(1)}(\omega^{(1)} \cup \gamma_S)} = (v_{1h}, v_{1h})_{H_h^{(1)}(\omega^{(1)} \cup \gamma_S)}.$$

Аналогично вводится пространство сеточных функций $H_h^{(2)}(\omega^{(2)} \cup \gamma_S) \equiv L_2(\omega^{(2)} \cup \gamma_S)$ (см. [4]).

Задачам оптимального управления (1)-(3) поставим в соответствии следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$J_h(\Phi_h) = \sum_{x \in \overline{\omega}^{(1)}} \left| y(x, \Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x) \right|^2 \hbar_1 \hbar_2 = \|y(\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(1)})}, \tag{5}$$

при условиях, что сеточная функция $y(\Phi_h) = (y_1(\Phi_h), y_2(\Phi_h)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$, называемая решением разностной краевой задачи (разностной схемы) для задачи (1), удовлетворяет для любой сеточной функции $v(\Phi_h) = (v_1(\Phi_h), v_2(\Phi_h)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ сумматорному тождеству

$$\begin{gathered} Q_h(y,v) = \left\{ \sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)} y_{1\overline{x}_1} v_{1\overline{x}_1} h_1 h_2 + \left(\sum_{\omega_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)} y_{1\overline{x}_2} v_{1\overline{x}_2} h_1 h_2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) y_{1\overline{x}_2}(\xi, x_2) v_{1\overline{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\} + \\ + \left\{ \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)} y_{2\overline{x}_1} v_{2\overline{x}_1} h_1 h_2 + \left(\sum_{\omega_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)} y_{2\overline{x}_2} v_{2\overline{x}_2} h_1 h_2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) y_{2\overline{x}_2}(\xi, x_2) v_{2\overline{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\} + \sum_{\omega_2} \Phi_{3h}(x_2) \big[y(\xi, x_2) \big] \big[v(\xi, x_2) \big] h_2 + \\ + \left\{ \left(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x) q_1(y_1(x)) v_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2) q_1(y_1(\xi, x_2)) v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) + \right. \\ \left. + \left(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x) q_2(y_2(x)) v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2) q_2(y_2(\xi, x_2)) v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\} = \\ = \left\{ \left(\sum_{\omega^{(1)}} \Phi_{1h}(x) v_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} \Phi_{1h}(\xi, x_2) v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) + \right. \\ \left. + \left(\sum_{\omega^{(2)}} \Phi_{2h}(x) v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} \Phi_{2h}(\xi, x_2) v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\} = l_h(v), \end{gathered} \tag{6}$$

а сеточные управления $\Phi_h = \big(\Phi_{1h}, \Phi_{2h}, \Phi_{3h}\big)$ таковы, что

$$\begin{gathered} \Phi_h(x) \in U_h = \prod_{k=1}^{3} U_{kh} \subset H_h = L_2(\omega^{(1)} \cup \gamma_S) \times L_2(\omega^{(2)} \cup \gamma_S) \times L_2(\omega_2), \\ U_{\alpha h} = \big\{ \Phi_{\alpha h} \in L_2(\omega^{(\alpha)} \cup \gamma_S) : \ 0 < \varrho_\alpha \leqslant \Phi_{\alpha h}(x) \leqslant \overline{\varrho}_\alpha, \ \text{п.в. на } \omega^{(\alpha)} \cup \gamma_S \big\}, \\ \alpha = 1, 2; \quad U_3 = \big\{ \Phi_{3h}(x_2) \in L_2(\omega_2) : \ 0 < \varrho_3 \leqslant \Phi_{3h}(x) \leqslant \overline{\varrho}_3, \ \text{п.в. на } \omega_2 \big\}, \end{gathered} \tag{7}$$

где ϱ_k, $\overline{\varrho}_k$, $k=\overline{1,3}$ – заданные числа.

Здесь $a_{\alpha h}^{(1)}(x)$, $a_{\alpha h}^{(2)}(x)$, $d_{\alpha h}(x)$, $\alpha=1,2$, $u_{0h}^{(1)}(x)$ – сеточные аппроксимации функций $k_\alpha^{(1)}(r)$, $k_\alpha^{(2)}(r)$, $d_\alpha(r)$, $\alpha=1,2$, $u_0^{(1)}(r)$, определяемые через усреднения по Стеклову (см. [6]).

Замечание 2. Доказательство корректности постановок задач оптимального управления (1)-(3), корректности их разностных аппроксимаций сеточными задачами оптимального управления (5)-(7), сходимости аппроксимаций по состоянию, функционалу, управлению, соответствующих аппроксимационных оценок и регуляризации аппроксимаций проводится по методике из [4]–[6].

Выпишем явный вид разностной схемы (6) в узлах сетки $\overline{\omega}=\overline{\omega}_1\cup\overline{\omega}_2=\overline{\omega}^{(1,2)}$: Требуется найти функцию $y=(y_1,y_2)$, определенную на $\overline{\omega}=\overline{\omega}_1\cup\overline{\omega}_2=\overline{\omega}^{(1,2)}$, $y(x)=y_1(x)$ для $x\in\overline{\omega}^{(1)}$, $y(x)=y_2(x)$ для $x\in\overline{\omega}^{(2)}$, где компоненты $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) Сеточная функция y_1 удовлетворяет в $\omega^{(1)}$ уравнению

$$-\left(a_{1h}^{(1)}(x)y_{1\overline{x}_1}\right)_{x_1}-\left(a_{2h}^{(1)}(x)y_{1\overline{x}_2}\right)_{x_2}+d_{1h}(x)q_1(y_1)=\Phi_{1h}(x),\ x\in\omega^{(1)},$$

а на границе $\gamma^{(1)}=\partial\omega^{(1)}\setminus\gamma_S$ условию $y_1(x)=0$, $x\in\gamma^{(1)}$.

2) Сеточная функция y_2 удовлетворяет в $\omega^{(2)}$ уравнению

$$-\left(a_{1h}^{(2)}(x)y_{2\overline{x}_1}\right)_{x_1}-\left(a_{2h}^{(2)}(x)y_{2\overline{x}_2}\right)_{x_2}+d_{2h}(x)q_2(y_2)=\Phi_{2h}(x),\ x\in\omega^{(2)},$$

а на границе $\gamma^{(2)}=\partial\omega^{(2)}\setminus\gamma_S$ условию $y_2(x)=0$, $x\in\gamma^{(2)}$.

3) Искомые функции y_1 и y_2 связаны между собой дополнительными условиями на $\gamma_S=\{x_1=\xi,x_2\in\omega_2\}$:

$$\begin{gathered}\frac{2}{h_1}\left[a_{1h}^{(1)}(\xi,x_2)y_{1\overline{x}_1}(\xi,x_2)+\Phi_{3h}(x_2)y_1(\xi,x_2)\right]+d_{1h}(\xi,x_2)q_1(y_1(\xi,x_2))-\\-\left(a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)y_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)\right)_{x_2}=\Phi_{1h}(\xi,x_2)+\frac{2}{h_1}\Phi_{3h}(x_2)y_2(\xi,x_2),\ x\in\gamma_S,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}-\frac{2}{h_1}\left[a_{1h}^{(2)}(\xi+h_1,x_2)y_{2x_1}(\xi,x_2)-\Phi_{3h}(x_2)y_2(\xi,x_2)\right]+d_{2h}(\xi,x_2)q_2(y_2(\xi,x_2))-\\-\left(a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)y_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)\right)_{x_2}=\Phi_{2h}(\xi,x_2)+\frac{2}{h_1}\Phi_{3h}(x_2)y_1(\xi,x_2),\ x\in\gamma_S.\end{gathered}$$

4. Дифференцируемость сеточного функционала $J_h(\Phi_h)$

Для численной реализации [10] конечномерных задач оптимального управления необходимо прежде всего доказать дифференцируемость и Липшиц-непрерывность сеточного функционала аппроксимирующих сеточных задач (5)-(7).

Покажем, что функционал $J_h(\Phi_h)$ дифференцируем по $\Phi_h=\left(\Phi_{1h},\Phi_{2h},\Phi_{3h}\right)$ на $U_{\alpha h}$, $\alpha=1,2,3$, в пространстве $\widetilde{B}_h=L_2(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)\times L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S)\times L_\infty(\omega_2)$. Для этого возьмем произвольные управления Φ_h, $\Phi_h+\Delta\Phi_h\in U_h$. Пусть $y(\Phi_h)$ и $y(\Phi_h+\Delta\Phi_h)$ – соответствующие управлениям Φ_h и $\Phi_h+\Delta\Phi_h$ решения задачи (6), а $J_h(\Phi_h)$ и $J_h(\Phi_h+\Delta\Phi_h)$ — соответствующие значения функционала J_h. Обозначим $\Delta y(x)=y(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h)-y(x;\Phi_h)$, $\Delta J_h(\Phi_h)=J_h(\Phi_h+\Delta\Phi_h)-J_h(\Phi_h)$.

Получим задачу, которой удовлетворяет приращение $\Delta y=\Delta y(x)$. Для этого перепишем сумматорное тождество, которому удовлетворяет решение задачи (6) для управления

$\Phi_h + \Delta\Phi_h$:

$$\begin{gathered}\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)} y_{1\overline{x}_1}(\Phi_h+\Delta\Phi_h) v_{1\overline{x}_1} h_1 h_2 + \Biggl(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)} y_{1\overline{x}_2}(\Phi_h+\Delta\Phi_h) v_{1\overline{x}_2} h_1 h_2 + \\ +\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2) y_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h)\, v_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2) h_1 h_2\Biggr) + \\ +\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)} y_{2\overline{x}_1}(\Phi_h+\Delta\Phi_h) v_{2\overline{x}_1} h_1 h_2 + \Biggl(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)} y_{2\overline{x}_2}(\Phi_h+\Delta\Phi_h)\, v_{2\overline{x}_2} h_1 h_2 + \\ +\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2) y_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h)\, v_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2) h_1 h_2\Biggr) + \\ +\sum_{\omega_2}\bigl(\Phi_{3h}(x_2)+\Delta\Phi_{3h}(x_2)\bigr)\bigl[y(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h)\bigr]\bigl[v(\xi,x_2)\bigr] h_2 + \\ +\Biggl(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x) q_1(y_1(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h))\, v_1(x) h_1 h_2 + \\ +\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi,x_2) q_1(y_1(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h))\, v_1(\xi,x_2) h_1 h_2\Biggr) + \\ +\Biggl(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x) q_2(y_2(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h)) v_2(x) h_1 h_2 + \\ +\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi,x_2) q_2(y_2(\xi,x_2))\, v_2(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h) h_1 h_2\Biggr) = \\ =\Biggl(\sum_{\omega^{(1)}}(\Phi_{1h}(x)+\Delta\Phi_{1h})\, v_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}(\Phi_{1h}+\Delta\Phi_{1h})(\xi,x_2)\, v_1(\xi,x_2) h_1 h_2\Biggr) + \\ +\Biggl(\sum_{\omega^{(2)}}(\Phi_{2h}(x)+\Delta\Phi_{2h})\; v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}(\Phi_{2h}+\Delta\Phi_{2h})(\xi,x_2)\, v_2(\xi,x_2) h_1 h_2\Biggr).\end{gathered} \tag{8}$$

Вычитая из (8) тождество (6), получим

$$\begin{gathered}\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}\bigl(y_{1\overline{x}_1}(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h) - y_{1\overline{x}_1}(x;\Phi_h)\bigr) v_{1\overline{x}_1} h_1 h_2 + \\ +\Biggl(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}\bigl(y_{1\overline{x}_2}(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h) - y_{1\overline{x}_2}(x;\Phi_h)\bigr) v_{1\overline{x}_2} h_1 h_2 + \\ +\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)\bigl(y_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h) - y_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2;\Phi_h)\bigr) v_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2) h_1 h_2\Biggr) + \\ +\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}\bigl(y_{2\overline{x}_1}(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h) - y_{2\overline{x}_1}(x;\Phi_h)\bigr) v_{2\overline{x}_1} h_1 h_2 + \\ +\Biggl(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}\bigl(y_{2\overline{x}_2}(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h) - y_{2\overline{x}_2}(x;\Phi_h)\bigr) v_{2\overline{x}_2} h_1 h_2 + \\ +\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)\bigl(y_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h) - y_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2;\Phi_h)\bigr) v_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2) h_1 h_2\Biggr) + \\ +\sum_{\omega_2}\Bigl\{\bigl(\Phi_{3h}(x_2)+\Delta\Phi_{3h}(x_2)\bigr)\bigl[y(\Phi_h+\Delta\Phi_h)\bigr] - \Phi_{3h}(x_2)\bigl[y(\Phi_h)\bigr]\Bigr\}\bigl[v(\xi,x_2)\bigr] h_2 +\end{gathered}$$

$$+\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)\big(q_1(y_1(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h))-q_1(y_1(x;\Phi_h))\big)v_1(x)h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi,x_2)\big(q_1(y_1(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h))-q_1(y_1(\xi,x_2;\Phi_h))\big)v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)+$$
$$+\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x)\big(q_2(y_2(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h))-q_2(y_2(x;\Phi_h))\big)v_2(x)h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi,x_2)\big(q_2(y_2(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h))-q_2(y_2(\xi,x_2;\Phi_h))\big)v_2(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)=$$

$$=\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}}\Delta\Phi_{1h}(x)\,v_1(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\Delta\Phi_{1h}(\xi,x_2)\,v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)+$$
$$+\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}}\Delta\Phi_{2h}(x)\,v_2(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\Delta\Phi_{2h}(\xi,x_2)\,v_2(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg),$$
$$\forall v(x)\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}\,(\overline{\omega}^{(1,2)}).$$

Учитывая, что $y(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h)=y(x;\Phi_h)+\Delta y(x)$, получим следующую задачу для приращения Δy:

$$\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}(\Delta y_1)_{\overline{x}_1}\,v_{1\overline{x}_1}h_1h_2+\Bigg(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\Delta y_1)_{\overline{x}_2}\,v_{1\overline{x}_2}h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)(\Delta y_1)_{\overline{x}_2}(\xi,x_2)\,v_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)+$$
$$+\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}(\Delta y_2)_{\overline{x}_1}\,v_{2\overline{x}_1}h_1h_2+\Bigg(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\Delta y_2)_{\overline{x}_2}\,v_{2\overline{x}_2}h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)(\Delta y_2)_{\overline{x}_2}(\xi,x_2)\,v_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)+\sum_{\omega_2}\Big\{\Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[y(\xi,x_2,\Phi_h)\big]+$$

$$+\Phi_{3h}(x_2)\big[\Delta y(\xi,x_2,\Phi_h)\big]+\Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[\Delta y(\xi,x_2,\Phi_h)\big]\Big\}\big[v(\xi,x_2)\big]h_2+$$
$$+\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)\big(q_1(y_1(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h))-q_1(y_1(x;\Phi_h))\big)v_1(x)h_1h_2+ \tag{9}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi,x_2)\big(q_1(y_1(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h))-q_1(y_1(\xi,x_2;\Phi_h))\big)v_1(\xi,x_2)h_1h_2+$$
$$+\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x)\big(q_2(y_2(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h))-q_2(y_2(x;\Phi_h))\big)v_2(x)h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi,x_2)\big(q_2(y_2(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h))-q_2(y_2(\xi,x_2;\Phi_h))\big)v_2(\xi,x_2)h_1h_2=$$
$$=\sum_{\omega^{(1)}}\Delta\Phi_{1h}(x)\,v_1(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\Delta\Phi_{1h}(\xi,x_2)\,v_1(\xi,x_2)h_1h_2+$$
$$+\sum_{\omega^{(2)}}\Delta\Phi_{2h}(x)\,v_2(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\Delta\Phi_{2h}(\xi,x_2)\,v_2(\xi,x_2)h_1h_2,$$

для любой сеточной функции $v=(v_1(\Phi_h),v_2(\Phi_h))\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}\,(\overline{\omega}^{(1,2)})$.

Далее, приращение функционала $J_h(\Phi_h)$ можно представить в виде:

$$\begin{gathered}\Delta J_h(\Phi_h) = J_h(\Phi_h + \Delta\Phi_h) - J_h(\Phi_h) = \\ = \sum_{x\in\overline{\omega}^{(1)}} \left|y(x;\Phi_h) + \Delta y - u_{0h}^{(1)}(x)\right|^2 \hbar_1\hbar_2 - \sum_{x\in\overline{\omega}^{(1)}} \left|y(x;\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)\right|^2 \hbar_1\hbar_2 = \\ = 2\sum_{\overline{\omega}^{(1)}} \big(y(x;\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)\big)\,\Delta y\,\hbar_1\hbar_2 + \sum_{\overline{\omega}^{(1)}} \big(\Delta y\big)^2 \hbar_1\hbar_2.\end{gathered} \tag{10}$$

Для дальнейших преобразований формулы для приращения функционала (10) введем функцию $\psi \equiv \psi(x;\Phi_h)$ как решение вспомогательной краевой задачи (сопряженной задачи):

$$\begin{aligned}
&-\left(a_{1h}^{(1)}(x)\psi_{1\overline{x}_1}\right)_{x_1} - \left(a_{2h}^{(1)}(x)\psi_{1\overline{x}_2}\right)_{x_2} + d_{1h}(x)\,q_{1y_1}\psi_1(x) = -2\left(y(x) - u_{0h}^{(1)}(x)\right), \\
&\quad x \in \omega^{(1)}, \\
&\psi_1(x) = 0, \quad \gamma^{(1)} = \partial\omega^{(1)} \setminus \gamma_S; \\
&\quad -\left(a_{1h}^{(2)}(x)\psi_{2\overline{x}_1}\right)_{x_1} - \left(a_{2h}^{(2)}(x)\psi_{2\overline{x}_2}\right)_{x_2} + d_{2h}(x)\,q_{2y_2}\psi_2(x) = 0, \quad x \in \omega^{(2)}, \\
&\quad \psi_2(x) = 0, \quad x \in \gamma^{(2)} = \partial\omega^{(2)} \setminus \gamma_S; \\
&\frac{2}{h_1}\left[a_{1h}^{(1)}(\xi,x_2)\psi_{1\overline{x}_1}(\xi,x_2) + \Phi_{3h}(x_2)\psi_1(\xi,x_2)\right] + d_{1h}(\xi,x_2)\,q_{1y_1}\psi(\xi,x_2)) - \\
&-\left(a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)\psi_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)\right)_{x_2} = -2\left(y(\xi,x_2) - u_{0h}^{(1)}(\xi,x_2)\right) + \frac{2}{h_1}\Phi_{3h}(x_2)\psi_2(\xi,x_2), \\
&\quad x \in \gamma_S = \{x_1 = \xi, x_2 \in \omega_2\}, \\
&-\frac{2}{h_1}\left[a_{1h}^{(2)}(\xi+h_1,x_2)\psi_{2x_1}(\xi,x_2) - \Phi_{3h}(x_2)\psi_2(\xi,x_2)\right] + d_{2h}(\xi,x_2)\,q_{2y_2}(\xi,x_2)) - \\
&-\left(a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)\psi_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)\right)_{x_2} = \frac{2}{h_1}\Phi_{3h}(x_2)\psi_1(\xi,x_2), \quad x \in \gamma_S = \{x_1 = \xi, x_2 \in \omega_2\}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Под решением сопряженной задачи (11) будем понимать функцию $\psi(\Phi_h) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$, удовлетворяющую для $\forall v \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ сумматорному тождеству:

$$\begin{gathered}
\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}\psi_{1\overline{x}_1}v_{1\overline{x}_1}h_1h_2 + \Bigg(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}\psi_{1\overline{x}_2}v_{1\overline{x}_2}h_1h_2 + \\
+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)\psi_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)\,v_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg) + \sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}\psi_{2\overline{x}_1}v_{2\overline{x}_1}h_1h_2 + \\
+\Bigg(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}\psi_{2\overline{x}_2}v_{2\overline{x}_2}h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)\psi_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)\,v_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg) + \\
+\sum_{\omega_2}\Phi_{3h}(x_2)\big[\psi(\xi,x_2)\big]\big[v(\xi,x_2)\big]h_2 + \sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)q_{1y_1}\psi_1(x)\,v_1(x)h_1h_2 + \\
+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi,x_2)q_{1y_1}(\xi,x_2)\psi_1(\xi,x_2)\,v_1(\xi,x_2)h_1h_2 + \\
+\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x)q_{2y_2}\psi_2(x)\,v_2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi,x_2)q_{2y_2}\psi_2(\xi,x_2)\,v_2(\xi,x_2)h_1h_2 = \\
= -2\sum_{\omega^{(1)}}\left(y(x) - u_{0h}^{(1)}(x)\right)v_1(x)h_1h_2 - \sum_{\omega_2}\left(y(\xi,x_2) - u_{0h}^{(1)}(\xi,x_2)\right)v_1(\xi,x_2)h_1h_2,
\end{gathered} \tag{12}$$

Покажем, что для приращения функционала справедливо представление

$$\begin{gathered}\Delta J_h(\Phi_h) = J_h(\Phi_h + \Delta\Phi_h) - J_h(\Phi_h) = \\ = -\sum_{\omega^{(1)}\cup\gamma_S} \Delta\Phi_{1h}(x)\,\psi_1(x)\,\hbar_1 h_2 - \sum_{\omega^{(2)}\cup\gamma_S} \Delta\Phi_{2h}(x)\,\psi_2(x)\,\hbar_1 h_2 + \\ + \sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[y(\xi, x_2, \Phi_h)\big]\big[\psi(\xi, x_2)\big] h_2 + R_h,\end{gathered} \tag{13}$$

где $\quad R_h = \sum_{k=1}^{6} R_{hk}, \quad R_{h1} = \sum_{\omega_1^{(1)+}\times\omega_2} \big(\Delta y_1\big)^2 \hbar_1 h_2;$

$$\begin{gathered}R_{h2} = \sum_{\omega_1^{(1)}\times\omega_2} d_{1h}(x)\psi_1(x)\big(q_1(y_1 + \Delta y_1) - q_1(y_1) - q_{1y_1}\Delta y_1\big) h_1 h_2; \\ R_{h3} = \sum_{\omega_1^{(2)}\times\omega_2} d_{2h}(x)\psi_2(x)\big(q_2(y_2 + \Delta y_2) - q_2(y_2) - q_{2y_2}\Delta y_2\big) h_1 h_2;\end{gathered} \tag{14}$$

$$R_{h4} = \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2)\psi_1(\xi, x_2)\Big(q_1(y_1 + \Delta y_1) - q_1(y_1) - q_{1y_1}\Delta y_1(\xi, x_2)\Big) h_1 h_2;$$

$$R_{h5} = \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2)\psi_2(\xi, x_2)\Big(q_2(y_2 + \Delta y_2) - q_2(y_2) - q_{2y_2}\Delta y_2(\xi, x_2)\Big) h_1 h_2;$$

$$R_{h6} = \sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[\Delta y(\xi, x_2)\big]\big[\psi(\xi, x_2)\big] h_2.$$

Действительно, полагая в (9) $v = \psi$, получим

$$\begin{gathered}\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}(\Delta y_1)_{\overline{x}_1}\psi_{1\overline{x}_1} h_1 h_2 + \Bigg(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\Delta y_1)_{\overline{x}_2}\psi_{1\overline{x}_2} h_1 h_2 + \\ + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2)(\Delta y_1)_{\overline{x}_2}(\xi, x_2)\psi_{1\overline{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2\Bigg) + \\ + \sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}(\Delta y_2)_{\overline{x}_1}\psi_{2\overline{x}_1} h_1 h_2 + \Bigg(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\Delta y_2)_{\overline{x}_2}\psi_{2\overline{x}_2} h_1 h_2 + \\ + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2)(\Delta y_2)_{\overline{x}_2}(\xi, x_2)\psi_{2\overline{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2\Bigg) + \sum_{\omega_2}\Big\{\Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[y(\xi, x_2, \Phi_h)\big] + \\ + \Phi_{3h}(x_2)\big[\Delta y(\xi, x_2, \Phi_h)\big] + \Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[\Delta y(\xi, x_2, \Phi_h)\big]\Big\}\big[\psi(\xi, x_2)\big] h_2 + \\ + \Bigg(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)\big(q_1(y_1(x;\Phi_h + \Delta\Phi_h)) - q_1(y_1(x;\Phi_h))\big)\psi_1(x) h_1 h_2 + \\ + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2)\big(q_1(y_1(\xi, x_2;\Phi_h + \Delta\Phi_h)) - q_1(y_1(\xi, x_2;\Phi_h))\big)\psi_1(\xi, x_2) h_1 h_2\Bigg) + \\ + \Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x)\big(q_2(y_2(x;\Phi_h + \Delta\Phi_h)) - q_2(y_2(x;\Phi_h))\big)\psi_2(x) h_1 h_2 + \\ + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2)\big(q_2(y_2(\xi, x_2;\Phi_h + \Delta\Phi_h)) - q_2(y_2(\xi, x_2;\Phi_h))\big)\psi_2(\xi, x_2) h_1 h_2\Bigg) =\end{gathered} \tag{15}$$

$$= \sum_{\omega^{(1)}} \Delta\Phi_{1h}(x)\, \psi_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{1h}(\xi, x_2)\, \psi_1(\xi, x_2) h_1 h_2 + $$
$$+ \sum_{\omega^{(2)}} \Delta\Phi_{2h}(x)\, \psi_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{2h}(\xi, x_2)\, \psi_2(\xi, x_2) h_1 h_2.$$

Далее, полагая в (12) $v = \Delta y$, получим

$$\begin{gathered}
\sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)} \psi_{1\overline{x}_1} \Delta y_{1\overline{x}_1} h_1 h_2 + \sum_{\omega_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^{+}} a_{2h}^{(1)} \psi_{1\overline{x}_2} \Delta y_{1\overline{x}_2} h_1 h_2 + \\
+ \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^{+}} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) \psi_{1\overline{x}_2}(\xi, x_2) \Delta y_{1\overline{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 + \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)} \psi_{2\overline{x}_1} \Delta y_{2\overline{x}_1} h_1 h_2 + \\
+ \sum_{\omega_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^{+}} a_{2h}^{(2)} \psi_{2\overline{x}_2} \Delta y_{2\overline{x}_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^{+}} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) \psi_{2\overline{x}_2}(\xi, x_2) \Delta y_{2\overline{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 + \\
+ \sum_{\omega_2} \Phi_{3h}(x_2) \big[\psi(\xi, x_2)\big] \big[\Delta y(\xi, x_2)\big] h_2 + \sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x) q_{1y_1} \psi_1(x) \Delta y_1(x) h_1 h_2 + \\
+ \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2) q_{1y_1}(\xi, x_2) \psi_1(\xi, x_2) \Delta y_1(\xi, x_2) h_1 h_2 + \\
+ \sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x) q_{2y_2} \psi_2(x) \Delta y_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2) q_{2y_2} \psi_2(\xi, x_2) \Delta y_2(\xi, x_2) h_1 h_2 = \\
= -2\sum_{\omega^{(1)}} \Big(y(x) - u_{0h}^{(1)}(x)\Big) \Delta y_1(x) h_1 h_2 - \sum_{\omega_2} \Big(y(\xi, x_2) - u_{0h}^{(1)}(\xi, x_2)\Big) \Delta y_1(\xi, x_2) h_1 h_2.
\end{gathered} \tag{16}$$

Вычтем теперь из (15) равенство (16)

$$\begin{gathered}
2\Big\{\sum_{\omega^{(1)}} \big(y(x) - u_{0h}^{(1)}\big)\, \Delta y_1\, h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} \big(y(\xi, x_2) - u_{0h}^{(1)}(\xi, x_2)\big)\, \Delta y_1(\xi, x_2)\, h_1 h_2\Big\} = \\
= \sum_{\omega_2} \Big\{\Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[y(\xi, x_2, \Phi_h)\big] + \Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[\Delta y(\xi, x_2, \Phi_h)\big]\Big\} \big[\psi(\xi, x_2)\big] h_2 - \\
- \sum_{\omega^{(1)}} \Delta\Phi_{1h}(x) \psi_1(x) h_1 h_2 - \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{1h}(\xi, x_2)\, \psi_1(\xi, x_2) h_1 h_2 - \\
- \sum_{\omega^{(2)}} \Delta\Phi_{2h}(x) \psi_2(x) h_1 h_2 - \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{2h}(\xi, x_2)\, \psi_2(\xi, x_2) h_1 h_2 + \\
+ \sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x) \psi_1(x) \Big(q_1(y_1(x; \Phi_h + \Delta\Phi_h)) - q_1(y_1(x; \Phi_h)) - q_{1y_1} \Delta y_1\Big) h_1 h_2 + \\
+ \sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x) \psi_2(x) \Big(q_2(y_2(x; \Phi_h + \Delta\Phi_h)) - q_2(y_2(x; \Phi_h)) - q_{2y_2} \Delta y_2\Big) h_1 h_2 + \\
+ \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2)\, \psi_1(\xi, x_2) \Big(q_1(y_1(\Phi_h + \Delta\Phi_h)) - q_1(y_1(\Phi_h)) - q_{1y_1} \Delta y_1\Big) h_1 h_2 + \\
+ \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2)\, \psi_2(\xi, x_2) \Big(q_2(y_2(\Phi_h + \Delta\Phi_h)) - q_2(y_2(\Phi_h)) - q_{2y_2} \Delta y_2\Big) h_1 h_2.
\end{gathered} \tag{17}$$

Подставляя теперь (17) в (10), установим, что для приращения функционала $J_h(\Phi_h)$ справедливо представление (13) – (14).

Установим оценку для приращения Δy. Полагая в тождестве (9), которому удовлетворяет приращение, $v = \Delta y$ и принимая во внимание, что $\Phi_h = \big(\Phi_{1h}, \Phi_{2h}\Phi_{3h}\big) \in U_h$, $\Phi_h + \Delta\Phi_h \in U_h$, установим

$$C\big\|\Delta y\big\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\varpi}^{(1,2)})} \leqslant \Big|\sum_{\omega^{(1)}} \Delta\Phi_{1h}\,\Delta y_1\,h_1h_2\Big| + \frac{1}{2}\Big|\sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{1h}\,\Delta y_1\,h_1h_2\Big| + \\ +\Big|\sum_{\omega^{(2)}} \Delta\Phi_{2h}\,\Delta y_2\,h_1h_2\Big| + \frac{1}{2}\Big|\sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{2h}\,\Delta y_2\,h_1h_2\Big| + \\ +\Big|\sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[y(\xi,x_2,\Phi_h)\big]\big[\Delta y(\xi,x_2,\Phi_h)\big]h_2\Big|. \qquad (18)$$

Оценим правую часть (18). Имеем

$$\Big|\sum_{\omega_1^{(1)}\times\omega_2} \Delta\Phi_{1h}\,\Delta y_1\,h_1h_2\Big| \leqslant \big\|\Delta\Phi_{1h}\big\|_{L_2(\omega_1^{(1)}\times\omega_2)}\|\Delta y_1\|_{L_2(\omega_1^{(1)}\times\omega_2)} \leqslant$$

$$\leqslant C\big\|\Delta\Phi_{1h}\big\|_{L_2(\omega_1^{(1)}\times\omega_2)}\|\Delta y_1\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\varpi}^{(1,2)})};$$

$$\frac{1}{2}\Big|\sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{1h}(\xi,x_2)\,\Delta y_1(\xi,x_2)\,h_1h_2\Big| \leqslant C\,\frac{1}{2}\big\|\Delta\Phi_{1h}\big\|_{L_2(\gamma_S)}\|\Delta y_1\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\varpi}^{(1,2)})}.$$

Аналогично

$$\Big|\sum_{\omega_1^{(2)}\times\omega_2} \Delta\Phi_{2h}\,\Delta y_2\,h_1h_2\Big| \leqslant C\big\|\Delta\Phi_{2h}\big\|_{L_2(\omega_1^{(2)}\times\omega_2)}\|\Delta y_2\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\varpi}^{(1,2)})}; \qquad (19)$$

$$\frac{1}{2}\Big|\sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{2h}(\xi,x_2)\,\Delta y_2(\xi,x_2)\,h_1h_2\Big| \leqslant C\,\frac{1}{2}\big\|\Delta\Phi_{2h}\big\|_{L_2(\gamma_S)}\|\Delta y_2\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\varpi}^{(1,2)})}.$$

Далее, пользуясь ранее полученным неравенством (см. [4], стр. 1777), получаем

$$\Big|\sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[y(\xi,x_2,\Phi_h)\big]\big[\Delta y(\xi,x_2,\Phi_h)\big]h_2\Big| \leqslant \big\|\Delta\Phi_{3h}\big\|_{L_\infty(\omega_2)}\times \\ \times\big\|[y]\big\|_{L_2(\gamma_S)}\big\|[\Delta y]\big\|_{L_2(\gamma_S)} \leqslant C\big\|\Delta\Phi_{3h}\big\|_{L_\infty(\omega_2)}\|y\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\varpi}^{(1,2)})}\big\|\Delta y\big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\varpi}^{(1,2)})}. \qquad (20)$$

Принимая во внимание оценки (19), (20), из неравенства (18) находим желаемую оценку

$$\big\|\Delta y\big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\varpi}^{(1,2)})} \leqslant C_0\Big\{\sum_{\alpha=1}^{2}\big\|\Delta\Phi_{\alpha h}\big\|_{L_2(\omega^{(\alpha)}\cup\gamma_S)} + \big\|\Delta\Phi_{3h}\big\|_{L_\infty(\omega_2)}\Big\}. \qquad (21)$$

Перейдем теперь к оценке решения сопряженной задачи (12).

Полагая в тождестве (12) $v=\psi$ и оценивая левую часть (12), получим

$$C\big\|\psi\big\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\varpi}^{(1,2)})} \leqslant 2\Big|\sum_{\omega_1^{(1)+}\times\omega_2} \big(y(x;\Phi_h)-u_0^h(x)\big)\,\psi_1(x)\,h_1h_2\Big|. \qquad (22)$$

Для правой части (22) нетрудно установить оценку

$$2\Big|\sum_{\omega_1^{(1)+}\times\omega_2} \big(y(x;\Phi_h)-u_0^h(x)\big)\,\psi_1\,h_1h_2\Big| \leqslant M_0\|y-u_0^h\|_{L_2(\omega_1^{(1)+}\times\omega_2)}\|\psi\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\varpi}^{(1,2)})}.$$

Откуда имеем:

$$\big\|\psi\big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\varpi}^{(1,2)})} \leqslant \overline{M}_0\|y-u_0^h\|_{L_2(\omega_1^{(1)+}\times\omega_2)}. \qquad (23)$$

Для дальнейшей оценки правой части неравенства (23) следует воспользоваться ранее доказанным утверждением (см.[6], стр. 83):

$$\|y(\Phi_h)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \leqslant M\sum_{\alpha=1}^{2}\|\Phi_{\alpha h}\|_{L_2(\omega^{(\alpha)}\cup\gamma_S)},\ \forall\Phi_h\in U_h. \tag{24}$$

Тогда, в силу (24),

$$\sup_{\Phi_h\in U_h}\big\|y\big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \leqslant M=\mathrm{Const},$$

и из (23) получаем

$$\big\|\psi\big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \leqslant \widetilde{M}=\mathrm{Const},\qquad \forall\Phi_h\in U_h.$$

Перейдем теперь к оценке величины R_h в (13)-(14). Имеем

$$|R_{h2}|\leqslant\sum_{\omega_1^{(1)}\times\omega_2}\Big|d_{1h}(x)\psi_1(x)\big[q_1(y_1+\Delta y_1)-q_1(y_1)-q_{1y_1}\Delta y_1\Big|h_1h_2.$$

Пусть на функцию $q(y)$ наложено дополнительное ограничение

$$\big|q'_s(s_1)-q'_s(s_2)\big|\leqslant\overline{L}_q|s_1-s_2| \text{ для всех } s_1,s_2\in\mathbb{R},\quad \overline{L}_q=\mathrm{Const}>0.$$

Откуда легко получить следующее неравенство

$$\Big|q_i(y_i+\Delta y_i)-q_i(y_i)-q'_i(y_i)\Delta y_i\Big|\leqslant\frac{\overline{L}_q}{2}\big|\Delta y_i\big|^2,\quad i=1,2.$$

Тогда $\qquad |R_{h2}|\leqslant\dfrac{\overline{L}_q}{2}\,\overline{d}_0\displaystyle\sum_{\omega_1^{(1)}\times\omega_2}\big|\Delta y_1\big|^2\big|\psi_1\big|h_1h_2\leqslant C\big\|\Delta y_1\big\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})}\big\|\psi\big\|_{W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})};$

$$|R_{h3}|\leqslant C\big\|\Delta y_2\big\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})}\big\|\Delta\psi_2\big\|_{W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})};$$

$$\begin{aligned}\big|R_{h4}\big|=\Bigg|\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}d_{1h}(\xi,x_2)\,\psi_1(\xi,x_2)\Big(q_1(y_1+\Delta y_1)-q_1(y_1)-q_{1y_1}\Delta y_1\Big)h_1h_2\Bigg|\leqslant\\ \leqslant C\big\|\Delta\psi_1\big\|_{W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})}\Big\{\big\|\Delta y_1\big\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})}+\big\|\Delta y_1\big\|_{W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})}\Big\};\end{aligned}$$

$$\big|R_{h5}\big|\leqslant C\big\|\Delta\psi_2\big\|_{W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})}\Big\{\big\|\Delta y_2\big\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})}+\big\|\Delta y_2\big\|_{W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})}\Big\};$$

$$\big|R_{h1}\big|\leqslant\sum_{\omega_1^{+}\times\omega_2}\big|\Delta y_1\big|^2\hbar_1h_2\leqslant C\big\|\Delta y_1\big\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})};$$

$$\begin{aligned}\Big|R_{h6}\Big|&\leqslant\sum_{\omega_2}\Big|\Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[\Delta y(\xi,x_2)\big]\big[\psi(\xi,x_2)\big]\Big|h_2\leqslant\\ &\leqslant\big\|\Delta\Phi_{3h}\big\|_{L_\infty(\omega_2)}\sum_{\omega_2}\Big|\big[\Delta y(\xi,x_2)\big]\big[\psi(\xi,x_2)\big]\Big|h_2\leqslant\\ &\leqslant C\big\|\Delta\Phi_{3h}\big\|_{L_\infty(\omega_2)}\big\|\Delta y\big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}\big\|\psi\big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}.\end{aligned}$$

Таким образом, для приращения функционала $J_h(\Phi_h)$ получено представление

$$\begin{aligned}\Delta J_h(\Phi_h)=-\sum_{\omega^{(1)}\cup\gamma_S}\Delta\Phi_{1h}\,\psi_1\,\hbar_1h_2-\sum_{\omega^{(2)}\cup\gamma_S}\Delta\Phi_{2h}\,\psi_2\,\hbar_1h_2+\\ +\sum_{\omega_2}\Delta\Phi_{3h}\big[y(\xi,x_2)\big]\big[\psi(\xi,x_2)\big]h_2+o\big(\big\|\Delta\Phi_h\big\|_{\widetilde{B}_h}\big),\end{aligned}\tag{25}$$

где $\widetilde{B}_h=L_2(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)\times L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S)\times L_\infty(\omega_2)$.

Нетрудно видеть, что приращение функционала $J_h(\Phi_h)$ можно записать также в следующем виде

$$\Delta J_h(\Phi_h) = \left(\frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{1h}}, \Delta\Phi_{1h}\right)_{L_2(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)} + \left(\frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{2h}}, \Delta\Phi_{2h}\right)_{L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S)} + \\ + \left(\frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{3h}}, \Delta\Phi_{3h}\right)_{L_2(\omega_2)} + o\big(\|\Delta\Phi_h\|_{\widetilde{B}_h}\big), \tag{26}$$

где

$$\frac{\partial J_h}{\partial \Phi_h} = \left(\frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{1h}}, \frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{2h}}, \frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{3h}}\right), \\ \frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{1h}} = -\psi_1(x), \quad x \in \omega^{(1)} \cup \gamma_S, \quad \frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{2h}} = -\psi_2(x), \quad x \in \omega^{(2)} \cup \gamma_S; \\ \frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{3h}} = \big[y(\xi, x_2)\big]\big[\psi(\xi, x_2)\big], \quad x_2 \in \omega_2. \tag{27}$$

Формулу для приращения функционала $J_h(\Phi_h)$ можно теперь переписать в виде

$$\Delta J_h(\Phi_h) =< J_h'(\Phi_h), \Delta\Phi_h > +o\big(\|\Delta\Phi_h\|_{\widetilde{B}_h}\big), \tag{28}$$

где

$$< J_h'(\Phi_h), \Delta\Phi_h >= \left(\frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{1h}}, \Delta\Phi_{1h}\right)_{L_2(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)} + \\ + \left(\frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{2h}}, \Delta\Phi_{2h}\right)_{L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S)} + \left(\frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{3h}}, \Delta\Phi_{3h}\right)_{L_2(\omega_2)}. \tag{29}$$

Таким образом, в формуле (28) для приращения функционала первое слагаемое является линейным ограниченным функционалом на $\widetilde{B}_h = L_2(\omega^{(1)}\cup\gamma_S) \times L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S) \times L_\infty(\omega_2)$ относительно $\Phi_h = \big(\Phi_{1h}, \Phi_{2h}, \Phi_{3h}\big)$, а второе слагаемое имеет порядок $o\big(\|\Delta\Phi_h\|_{\widetilde{B}_h}\big)$. Это значит, что функционал $J_h(\Phi_h)$ дифференцируем по Фреше на множестве U_h, в пространстве $\widetilde{B}_h$. При этом градиент функционала $J_h(\Phi_h)$ в точке $\Phi_h \in U_h$ имеет вид (27), причем первая компонента в (27) является как бы аналогом частной производной функционала $J_h(\Phi_h) = J_h(\Phi_{1h}, \Phi_{2h}, \Phi_{3h})$ по переменной Φ_{1h}, вторая и третья компоненты — по переменным Φ_{2h} и Φ_{3h}, соответственно.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $q(s)$ определена на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям: $q(0) = 0$, $q(s)$ дифференцируема по s, первая производная $q_s'(s)$ удовлетворяет ограничениям*

$$0 < q_0 \leqslant q_s'(s) < L_q < \infty,$$

$$\big|q_s'(s_1) - q_s'(s_2)\big| \leqslant \overline{L}_q|s_1 - s_2| \text{ для всех } s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad L_q, \overline{L}_q = Const > 0.$$

Пусть $k_\alpha(x) \in W_\infty^1(\Omega_1) \times W_\infty^1(\Omega_2)$, $\alpha = 1, 2$, $d(x) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2)$. Тогда сеточный функционал $J_h(\Phi_h)$ дифференцируем по Φ_h на U_h, по Фреше в пространстве $\widetilde{B}_h = L_2(\omega^{(1)}\cup \gamma_S) \times L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S) \times L_\infty(\omega_2)$, причем градиент $J_h'(\Phi_h)$ в точке $(\Phi_h) = (\Phi_{1h}, \Phi_{2h}, \Phi_{3h})$ имеет вид (29), *(27).*

Можно показать, что сеточный функционал $J_h(\Phi_h)$ принадлежит классу $C^{1,1}(\widetilde{B}_h)$, где $\widetilde{B}_h = L_2(\omega^{(1)} \cup \gamma_S) \times L_2(\omega^{(2)} \cup \gamma_S) \times L_\infty(\omega_2)$, то есть

$$\big\|J_h'(\Phi_h + \Delta\Phi_h) - J_h'(\Phi_h)\big\| \leqslant C\big\|\Delta\Phi_h\big\|_{\widetilde{B}_h}. \tag{30}$$

Действительно, используя ранее доказанные утверждения (см. [4], леммы 2.1-2.3, стр. 1776), для любого $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \widetilde{B}_h$, имеем

$$\Big| < J_h'(\Phi_h + \Delta\Phi_h) - J_h'(\Phi_h), \eta > \Big| =$$
$$= \Big| \sum_{\omega^{(1)} \cup \gamma_S} \left(\frac{\partial J_h(\Phi_h + \Delta\Phi_h; x)}{\partial \Phi_{1h}} - \frac{\partial J_h(\Phi_h; x)}{\partial \Phi_{1h}} \right) \eta_1(x) \hbar_1 h_2 +$$
$$+ \sum_{\omega^{(2)} \cup \gamma_S} \left(\frac{\partial J_h(\Phi_h + \Delta\Phi_h; x)}{\partial \Phi_{2h}} - \frac{\partial J_h(\Phi_h; x)}{\partial \Phi_{2h}} \right) \eta_2(x) \hbar_1 h_2 \Big| +$$
$$+ \sum_{\omega_2} \left(\frac{\partial J_h(\Phi_h + \Delta\Phi_h; x)}{\partial \Phi_{3h}} - \frac{\partial J_h(\Phi_h; x)}{\partial \Phi_{3h}} \right) \eta_3(x) h_2 \Big| \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \big\| \Delta\psi_1(\Phi_h) \big\|_{W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})} \big\| \eta_1 \big\|_{L_2(\omega^{(1)} \cup \gamma_S)} + C_2 \big\| \Delta\psi_2(\Phi_h) \big\|_{W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})} \big\| \eta_2 \big\|_{L_2(\omega^{(2)} \cup \gamma_S)} +$$
$$+ C_3 \big\| \eta_3 \big\|_{L_\infty(\omega_2)} \Big\{ \big\| y \big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} \big\| \Delta\psi \big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} +$$
$$+ \big\| \Delta y \big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} \big\| \psi \big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} + \big\| \Delta y \big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} \big\| \Delta\psi \big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} \Big\}.$$

Установим оценку для приращения $\Delta\psi$. Для этого, используя ту же методику, что и при получении задачи (9), найдем задачу, которой удовлетворяет приращение $\Delta\psi = \psi(\Phi_h + \Delta\Phi_h) - \psi(\Phi_h)$:

$$\begin{gathered}
\sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)} (\Delta\psi_1)_{\overline{x}_1} v_{1\overline{x}_1} h_1 h_2 + \sum_{\omega_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)} (\Delta\psi_1)_{\overline{x}_2} v_{1\overline{x}_2} h_1 h_2 + \\
+ \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) (\Delta\psi_1)_{\overline{x}_2}(\xi, x_2)\, v_{1\overline{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 + \\
+ \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)} (\Delta\psi_2)_{\overline{x}_1} v_{2\overline{x}_1} h_1 h_2 + \sum_{\omega_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)} (\Delta\psi_2)_{\overline{x}_2} v_{2\overline{x}_2} h_1 h_2 + \\
+ \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) (\Delta\psi_2)_{\overline{x}_2}(\xi, x_2)\, v_{2\overline{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 + \\
+ \sum_{\omega_2} \Phi_{3h}(x_2) \big[\Delta\psi\big] \big[v\big] h_2 + \sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x) q_{1y_1} \Delta\psi_1(x)\, v_1(x) h_1 h_2 + \\
+ \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2) q_{1y_1} \Delta\psi_1(\xi, x_2)\, v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 + \\
+ \sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x) q_{1y_1} \Delta\psi_1(x)\, v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2) q_{2y_2} \Delta\psi_2(\xi, x_2)\, v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 = \\
= -2 \sum_{\omega_1^{(1)+} \times \omega_2} \Delta y_1(x)\, v_1(\xi, x_2) \hbar_1 h_2, \quad \forall v = (v_1, v_2) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}} (\overline{\omega}^{(1,2)}).
\end{gathered} \tag{31}$$

Полагая в тождестве (31) $v = \Delta\psi$, установим

$$C \big\| \Delta\psi \big\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \leqslant 2 \Big| \sum_{\omega_1^{(1)+} \times \omega_2} \Delta y_1(x)\, \Delta\psi_1(x) \hbar_1 h_2 \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{C}_0 \| \Delta y_1 \|_{W_2^1(\omega_1^{(1)+} \times \omega_2)} \big\| \Delta\psi \big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})},$$

то есть

$$\big\| \Delta\psi \big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \leqslant \widetilde{C}_0 \left(\sum_{\alpha=1}^{2} \| \Delta\Phi_{\alpha h} \|_{L_2(\omega^{(\alpha)} \cup \gamma_S)} + \| \Delta\Phi_{3h} \|_{L_\infty(\omega_2)} \right) = \widetilde{C}_0 \big\| \Delta\Phi_h \big\|_{\widetilde{B}_h}.$$

Откуда получаем

$$\big|< J_h'(\Phi_h + \Delta\Phi_h) - J_h'(\Phi_h), \eta >\big| \leqslant C\big\|\Delta\Phi_h\big\|_{\widetilde{B}_h} \times$$
$$\times\bigg(\big\|\eta_1\big\|_{L_2(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)} + \big\|\eta_2\big\|_{L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S)} + \big\|\eta_3\big\|_{L_\infty(\omega_2)}\bigg) = C\big\|\eta\big\|_{\widetilde{B}_h}\big\|\Delta\Phi_h\big\|_{\widetilde{B}_h}.$$

Таким образом,

$$\big\|J_h'(\Phi_h + \Delta\Phi_h) - J_h'(\Phi_h)\big\| =$$
$$= \sup_{\eta\neq 0} \frac{\big|< J_h'(\Phi_h + \Delta\Phi_h) - J_h'(\Phi_h), \eta >\big|}{\big\|\eta\big\|_{\widetilde{B}_h}} \leqslant C\big\|\Delta\Phi_h\big\|_{\widetilde{B}_h}.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда сеточный функионал* $J_h(\Phi_h)$ *принадлежит классу* $C^{1,1}(\widetilde{B}_h)$, *где* $\widetilde{B}_h = L_2(\omega^{(1)} \cup \gamma_S) \times L_2(\omega^{(2)} \cup \gamma_S) \times L_\infty(\omega_2)$, *то есть справедлива оценка (*30*).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Андреев В.Б. *Разностные методы для эллиптических уравнений.* М.: Наука, 1976.
2. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1989.
3. Карташов Э.М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел.* М.: Высшая школа, 1985.
4. Лубышев Ф.В., Манапова А.Р., Файрузов М.Э. *Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями, с управлением в граничных условиях сопряжения* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. Т. 54. № 11. 2014. С. 1767–1792.
5. Лубышев Ф.В. *О разностных аппроксимациях задач оптимального управления полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. Т. 52. № 8. 2012. С. 1378–1399.
6. Манапова А.Р., Лубышев Ф.В. *Оценка точности по состоянию конечномерных аппроксимаций задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями* // Уфимск. матем. журн. Т. 6. № 3. 2014. С. 72–87.
7. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Новосибирск: СО АН СССР, 1962.
8. Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973.
9. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1978.
10. Васильев Ф.П. *Методы оптимизации.* М.: Факториал Пресс, 2002.

Айгуль Рашитовна Манапова,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: aygulrm@mail.ru

Федор Владимирович Лубышев,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 1 (2016). С. 102-112.

УДК 517.955.8

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Д.А. ТУРСУНОВ, У.З. ЭРКЕБАЕВ

Аннотация. В работе предлагается аналог метода погранфункций Вишика-Люстерника-Васильевой-Иманалиева для построения равномерного асимптотического разложения решения бисингулярно возмущенных задач. С помощью данного метода построено равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными, в круге. Применяя принцип максимума, обосновано формальное асимптотическое разложение решения, т.е. получена оценка для остаточного члена.

Ключевые слова: асимптотическое разложение, задача Дирихле, функции Эйри, модифицированные функции Бесселя, погранфункция.

Mathematics Subject Classification: 35J15, 35J25, 35B25, 35B40, 35C20

1. Введение

Различные задачи для эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных исследовались многими авторами, и библиография по этому вопросу обширна и достаточно известна [1]. Однако задачи с двойной сингулярностью, т.е. бисингулярно возмущенные задачи, сравнительно сингулярно возмущенным задачам, мало изучены. В бисингулярно возмущенных задачах одна особенность связана с сингулярной зависимостью решения от малого параметра, а другая — с не гладкостью членов асимптотики. В основном для построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач применяют метод сращивания (согласования) или метод регуляризации Ломова, так как на прямую классический метод погранфункций применять невозможно. В работе предлагается аналог классического метода пограничных функций Вишика-Люстерника-Васильевой-Иманалиева для построения равномерного асимптотического разложения решения бисингулярно возмущенных задач. С помощью данного метода мы построим равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными, в круге. При обосновании формального асимптотического разложения решения (ФАРР) применяем принцип максимума. Аналогичные задачи с помощью данного метода были исследованы в работах [3]-[5].

D.A. Tursunov, U.Z. Erkebaev, Asymptotic expansions of solutions to Dirichlet problem for elliptic equation with singularities.

Работа поддержана МОиН КР.

Поступила 25 мая 2015 г.

2. Постановка задачи

Исследуем задачу Дирихле

$$\varepsilon\Delta u(\rho,\varphi,\varepsilon)-(1-\rho)(\rho-\alpha)^2u(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon),\quad (\rho,\varphi)\in D, \tag{1}$$

$$u(1,\varphi,\varepsilon)=\psi(\varphi,\varepsilon), \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$ — малый параметр, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{\partial}{\rho\partial\rho}+\frac{\partial^2}{\rho^2\partial\varphi^2}$ — оператор Лапласа,

$$D=\{(\rho,\varphi)|0<\rho<1,\ 0<\varphi\leqslant 2\pi\},\ f(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}f_k(\rho,\varphi)\varepsilon^k,\ f_k\in C^\infty(\overline{D}),$$

$$\psi(\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\psi_k(\varphi)\varepsilon^k,\ \psi_k\in C[0,2\pi],\ \alpha\in(0,1),\ f(\alpha,\varphi,0)\neq 0,\ f(1,\varphi,0)\neq 0,$$

$\psi(\varphi,\varepsilon),\ f(\rho,\varphi,\varepsilon)$ — заданные функции, $u(\rho,\varphi,\varepsilon)$ — искомая функция, $\sum_{k=0}^{+\infty}f_k(\rho,\varphi)\varepsilon^k,\quad \sum_{k=0}^{+\infty}\psi_k(\varphi)\varepsilon^k$ — асимптотические ряды в смысле Пуанкаре.

Решение задачи (1)-(2) существует и единственно [6]. Нас интересует асимптотическое поведение решения задачи (1)-(2) при $\varepsilon\to 0$.

Первая сингулярность очевидна, что решение предельного уравнения, $\varepsilon=0:$

$$-(1-\rho)(\rho-\alpha)^2u(\rho,\varphi,0)=f_0(\rho,\varphi)$$

не удовлетворяет краевому условию (2). Чтобы показать вторую сингулярность, рассмотрим структуру внешнего асимптотического разложения решения задачи (1), которое ищем в виде:

$$U(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k u_k(\rho,\varphi),\quad \varepsilon\to 0. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим простую рекуррентную систему уравнений:

$$-(1-\rho)(\alpha-\rho)^2u_0(\rho,\varphi)=f_0(\rho,\varphi),$$

$$(1-\rho)(\alpha-\rho)^2u_k(\rho,\varphi)=\Delta u_{k-1}(\rho,\varphi)-f_k(\rho,\varphi),\quad k\in N.$$

Поэтому, внешнее разложение решения задачи (1)-(2), имеет вид:

$$U(\rho,\varphi,\varepsilon)=\frac{1}{(1-\rho)(\alpha-\rho)^2}\left(F_0+\ldots+\frac{\varepsilon^k}{(1-\rho)^{3k}(\alpha-\rho)^{4k}}F_k+\ldots\right),\quad \varepsilon\to 0,$$

где $F_k(\rho,\varphi)=F_k\in C^\infty(\overline{D}),\quad k=0,1,\ldots.$

Заметим, что функции $u_k(\rho,\varphi)$ имеют нарастающие особенности вида:

$$u_k(\rho,\varphi)=O\left(\frac{1}{(1-\rho)^{1+3k}}\right),\quad \rho\to 1,\quad k=0,1,\ldots;$$

$$u_k(\rho,\varphi)=O\left(\frac{1}{(\rho-\alpha)^{2+4k}}\right),\quad \rho\to\alpha,\quad k=0,1,\ldots.$$

Следовательно, исследуемая задача является бисингулярно возмущенной по терминологии А.М. Ильина [1, 2].

3. Основной результат

Теорема 1. *Для решения задачи* (1)-(2), *при* $\varepsilon \to 0$, *справедливо асимптотическое разложение*

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\chi_1(\rho)\sum_{k=-1}^{+\infty}\varepsilon^{k/3}w_k\left(\frac{1-\rho}{\varepsilon^{1/3}},\varphi\right)+$$

$$+\chi_2(\rho)\sum_{k=-2}^{+\infty}\varepsilon^{k/4}q_k\left(\frac{\rho-\alpha}{\varepsilon^{1/4}},\varphi\right),\quad (4)$$

где функции $v_k(\rho,\varphi), w_k\left(\frac{1-\rho}{\varepsilon^{1/3}},\varphi\right), q_k\left(\frac{\rho-\alpha}{\varepsilon^{1/4}},\varphi\right)$ *определяются ниже*

$$\chi_1(\rho),\ \chi_2(\rho) \text{ — функции срезки,}\quad \chi_1(\rho),\ \chi_2(\rho)\in[0,1],\quad \chi_1,\ \chi_2\in C^\infty[0,1],$$
$$\chi_1(\rho)=1,\quad \text{при } 1-\delta\leqslant\rho\leqslant1,\quad \text{и}\quad \chi_1(\rho)=0,\ \text{при } 0\leqslant\rho\leqslant1-2\delta,$$
$$\chi_2(\rho)=1,\quad \text{при } |\rho-\alpha|\leqslant\delta,\quad \text{и}\quad \chi_2(\rho)=0,\ \text{при } 2\delta\leqslant|\rho-\alpha|,$$

$(0,\min\{\alpha/2,(1-\alpha)/2\})\ni\delta$ *— достаточно малое число, независящее от* ε.

Доказательство. Доказательство состоит из двух частей: построение ФАРР (4) и обоснование этого разложения.

3.1. Построение ФАРР.

ФАРР ищем в виде:

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\chi_1(\rho)\sum_{k=-1}^{+\infty}\mu^k w_k(\tau,\varphi)+\chi_2(\rho)\sum_{k=-2}^{+\infty}\lambda^k q_k(\eta,\varphi),\ \varepsilon\to0,\quad (5)$$

где $\tau=(1-\rho)/\mu,\ \mu=\varepsilon^{1/3},\ \eta=(\rho-\alpha)/\lambda,\ \lambda=\varepsilon^{1/4}$.

Подставляя (5) в (1), получим:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k(\varepsilon\Delta v_k(\rho,\varphi)+\varepsilon\widetilde{v}_k(\rho,\varphi)-(1-\rho)(\alpha-\rho)^2v_k(\rho,\varphi))=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k(f_k(\rho,\varphi)-h_k(\rho,\varphi)),\quad (6)$$

$$\sum_{k=-1}^{+\infty}\mu^{k+1}\left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial\tau^2}-\frac{\mu}{(1-\mu\tau)}\frac{\partial w_k}{\partial\tau}+\frac{\mu^2}{(1-\mu\tau)^2}\frac{\partial^2 w_k}{\partial\varphi^2}-\tau(1-\alpha-\mu\tau)^2w_k\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{+\infty}h_{1,k}(\tau\mu,\varphi)\mu^{3k},\quad (7)$$

$$\sum_{k=-2}^{+\infty}\lambda^{k+2}\left(\frac{\partial^2 q_k}{\partial\eta^2}+\frac{\lambda}{(\alpha+\lambda\eta)}\frac{\partial q_k}{\partial\eta}+\frac{\lambda^2}{(\alpha+\lambda\eta)^2}\frac{\partial^2 q_k}{\partial\varphi^2}-\eta^2(1-\alpha-\lambda\eta)q_k\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{+\infty}h_{2,k}(\eta\lambda,\varphi)\lambda^{4k}.\quad (8)$$

где по идее метода в равенствах (6), (7), (8) введен новый, пока неизвестный, асимптотический ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k h_k(\rho,\varphi)=\chi_1(\rho)\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k h_{1,k}(\rho,\varphi)+\chi_2(\rho)\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k h_{2,k}(\rho,\varphi),$$

который конкретизируется ниже, а функции $\widetilde{v}_k(\rho,\varphi)$ в равенстве (6) имеют вид:

$$\widetilde{v}_k(\rho,\varphi)=\widetilde{w}_k(\rho,\varphi)\widetilde{\chi}_1(\rho)+2\frac{\partial\widetilde{w}_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\chi_1'(\rho)+\widetilde{q}_k(\rho,\varphi)\widetilde{\chi}_2(\rho)+2\frac{\partial\widetilde{q}_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\chi_2'(\rho),$$

$$\widetilde{w}_k(\rho,\varphi)=\sum_{j=0}^{3k}\frac{w_{-1+j,3k+1-j}(\varphi)}{(1-\rho)^{3k+1-j}},\ \widetilde{q}_k(\rho,\varphi)=\sum_{j=0}^{4k}\frac{q_{-2+j,4k+2-j}(\varphi)}{(\rho-\alpha)^{4k+2-j}},\ \widetilde{\chi}_j(\rho)=\chi_j''(\rho)+\frac{\chi_j'(\rho)}{\rho},$$

функции $w_{j,k}(\varphi),\ q_{j,k}(\varphi)\in C^\infty[0,2\pi]$ определяются из асимптотических разложений:

$$w_{3k-m}(\tau,\varphi)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{w_{3k-m,3j+m}(\varphi)}{\tau^{3j+m}},\quad m=1,2,3;\ \tau\to+\infty,$$

$$q_{4k-m}(\eta,\varphi)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{q_{4k-m,4j+m}(\varphi)}{\eta^{4j+m}},\quad m=1,2,3,4;\ k=0,1,\ldots\eta\to\pm\infty.$$

Справедливость этих асимптотических разложений доказывается ниже.

Для определения функции $v_k(\rho,\varphi)$, из равенства (6) получим следующие уравнения:

$$-(1-\rho)(\rho-\alpha)^2v_0(\rho,\varphi)=f_0(\rho,\varphi)-h_0(\rho,\varphi),$$

$$\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)+\widetilde{v}_{k-1}(\rho,\varphi)-(1-\rho)(\rho-\alpha)^2v_k(\rho,\varphi)=f_k(\rho,\varphi)-h_k(\rho,\varphi),\quad k=1,2,\ldots.$$

Отсюда получаем

$$v_k(\rho,\varphi)=\frac{f_k(\rho,\varphi)-\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)-h_k(\rho,\varphi)}{(\rho-1)(\rho-\alpha)^2}+\frac{\widetilde{v}_{k-1}(\rho,\varphi)}{(1-\rho)(\rho-\alpha)^2},\quad k=0,1,\ldots.$$

$v_{-1}(\rho,\varphi)\equiv0,\quad \widetilde{v}_{-1}(\rho,\varphi)\equiv0.$

Определим теперь неизвестные функции, т.е. коэффициенты асимптотического ряда $h_k(\rho,\varphi)$ так, чтобы

$$v_k(\rho,\varphi)\in C^\infty(\overline{D}),\ w_k(\tau,\varphi)\to0,\ \text{при}\ \tau\to+\infty,\quad q_k(\eta,\varphi)\to0,\ \text{при}\ \eta\to\pm\infty.$$

Пусть $g_k(\rho,\varphi)=f_k(\rho,\varphi)-\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)$, тогда $v_k(\rho,\varphi)\in C^\infty(\overline{D})$, когда

$$h_k(\rho,\varphi)=\chi_1(\rho)h_{1,k}(\rho,\varphi)+\chi_2(\rho)h_{2,k}(\rho,\varphi),$$

где

$$h_{2,k}(\rho,\varphi)=g_{k,0}(\varphi)+g_{k,1}(\varphi)(\rho-\alpha)-\left(\frac{\rho-\alpha}{1-\alpha}\right)^2(g_{k,0}(\varphi)+g_{k,1}(\varphi)(1-\alpha)),$$

$$h_{1,k}(\rho,\varphi)=\left(\frac{\rho-\alpha}{1-\alpha}\right)^2g_k(1,\varphi),\ g_{k,0}(\varphi)=g_k(\alpha,\varphi),\ g_{k,1}(\varphi)=\frac{\partial g_k(\alpha,\varphi)}{\partial\rho}.$$

Таким образом, мы определили коэффициенты асимптотических рядов

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^kv_k(\rho,\varphi),\quad \sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^kh_k(\rho,\varphi).$$

Теперь перейдем к определению членов асимптотического ряда $\sum_{k=-1}^{+\infty}\mu^kw_k(\tau,\varphi)$. Равенство (7) запишем в виде:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mu^k\left(\frac{\partial^2w_{-1+k}}{\partial\tau^2}-\mu\frac{\partial w_{-1+k}}{\partial\tau}+\mu^2\frac{\partial^2w_{-1+k}}{\partial\varphi^2}-\tau(1-\alpha-\mu\tau)^2w_{-1+k}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\mu^{3k}\left(1-\frac{2\mu\tau}{1-\alpha}+\frac{(\mu\tau)^2}{(1-\alpha)^2}\right)g_k(1,\varphi).$$

Отсюда имеем:

$$Lw_{-1} \equiv \frac{\partial^2 w_{-1}}{\partial \tau^2} - \tau(1-\alpha)^2 w_{-1} = g_0(1,\varphi), \tag{9}$$

$$Lw_0 = -2(1-\alpha)\tau^2 w_{-1} - \frac{2\tau}{1-\alpha} g_0(1,\varphi) + \frac{\partial w_{-1}}{\partial \tau}, \tag{10}$$

$$Lw_1 = -2(1-\alpha)\tau^2 w_0 + \tau^3 w_{-1} + \frac{\tau^2}{(1-\alpha)^2} g_0(1,\varphi) + W_1, \tag{11}$$

$$Lw_{3k-1} = -2(1-\alpha)\tau^2 w_{3k-2} + \tau^3 w_{3k-3} + g_k(1,\varphi) + W_{3k-1} + B_{k,0}(\varphi), \tag{12}$$

$$Lw_{3k} = -2(1-\alpha)\tau^2 w_{3k-1} + \tau^3 w_{3k-2} - \frac{2\tau}{1-\alpha} g_k(1,\varphi) + W_{3k} + B_{k,1}(\varphi)\tau, \tag{13}$$

$$Lw_{3k+1} = -2(1-\alpha)\tau^2 w_{3k} + \tau^3 w_{3k-1} + \frac{\tau^2}{(1-\alpha)^2} g_k(1,\varphi) + W_{3k+1} + B_{k,2}(\varphi)\tau^2, \tag{14}$$

где $(\tau,\varphi) \in D_1 = \{(\tau,\varphi)|0 < \tau < +\infty, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$, $W_s = \frac{\partial w_{s-1}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w_{s-2}}{\partial \varphi^2}$, $B_{k,0}(\varphi)$, $B_{k,1}(\varphi)$, $B_{k,2}(\varphi)$ — пока неизвестные функции, $k = 1, 2, \dots$.

А граничные условия примут вид:

$$w_{3k}(0,\varphi) = \psi_k(\varphi) - v_k(1,\varphi), \quad k = 0, 1, \dots; \quad w_s(0,\varphi) = 0, s \neq 3k. \tag{15}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $\widetilde{f}(\tau)\delta(\varphi) \in C^\infty(D_1)$, $a_0 > 0$. *Тогда задача*

$$\frac{\partial^2 z(\tau,\varphi)}{\partial \tau^2} - \tau a_0 z(\tau,\varphi) = \widetilde{f}(\tau)\delta(\varphi), \quad (\tau,\varphi) \in D_1, \quad z(0,\varphi) = z^0(\varphi) \tag{16}$$

имеет единственное решение $z(\tau,\varphi) \in C^\infty(D_1)$.

Доказательство. Пусть $t = \sqrt[3]{a_0}\tau$, тогда задача (16) примет вид:

$$\frac{\partial^2 z(t,\varphi)}{\partial t^2} - tz(t,\varphi) = \frac{1}{\sqrt[3]{a_0^2}} \widetilde{f}(t)\delta(\varphi), \quad z(0,\varphi) = z^0(\varphi), \tag{17}$$

Решение этой задачи (17) ищем в виде

$$z(t,\varphi) = z_1(t) \frac{1}{\sqrt[3]{a_0^2}} \delta(\varphi),$$

тогда, относительно $z_1(t)$, получим задачу

$$z_1''(t) - tz_1(t) = \widetilde{f}(t), \quad z_1(0) = z^0(\varphi)\sqrt[3]{a_0^2}/\delta(\varphi) \equiv z_1^0. \tag{18}$$

Соответствующее однородное уравнение

$$z_1''(t) - tz_1(t) = 0$$

имеет два независимых решений $Ai(t)$, $Bi(t)$— функции Эйри [7]. С помощью функции Эйри запишем решение задачи (18):

$$z_1(t) = \frac{z_1^0}{Ai(0)} Ai(t) + \pi Bi(t) \int_t^{+\infty} Ai(s)\widetilde{f}(s)ds +$$

$$+\pi Ai(t) \left(\int_0^t Bi(s)\widetilde{f}(s)ds - \sqrt{3} \int_0^{+\infty} Ai(s)\widetilde{f}(s)ds \right).$$

Отсюда

$$z(t,\varphi) = \frac{z^0(\varphi)}{Ai(0)} Ai(t) + \frac{\pi}{\sqrt[3]{a_0^2}} \delta(\varphi) Bi(t) \int_t^{+\infty} Ai(s)\widetilde{f}(s)ds +$$

$$+\frac{\pi}{\sqrt[3]{a_0^2}}\delta(\varphi)Ai(t)\left(\int_0^t Bi(s)\widetilde{f}(s)ds-\sqrt{3}\int_0^{+\infty}Ai(s)\widetilde{f}(s)ds\right).$$

□

Следствие 1. *Если* $\widetilde{f}(\tau)=O(\tau^{N_1})$ *при* $\tau\to+\infty$, *то, учитывая асимптотическое поведение функции Эйри при* $\tau\to+\infty$, *получаем* $z(\tau,\varphi)=O(\tau^{N_1-1})$, $\quad N_1-const$.

С помощью этой леммы доказывается существование единственных решений уравнений (9)–(14), удовлетворяющих соответствующим условиям (15). Ниже докажем существование функций $B_{k,0}(\varphi)$, $B_{k,1}(\varphi)$, $B_{k,2}(\varphi)$, при которых решения этих задач принадлежат классу функций убывающих степенным ростом по τ, и решение каждого уравнения (9)–(14) удовлетворяет равенству:

$$\lim_{\tau\to+\infty}w_k(\tau,\varphi)=0,\quad k=-1,0,1,\ldots.$$

Переходим к определению членов асимптотического ряда $\sum_{k=-2}^{+\infty}\lambda^k q_k(\eta,\varphi)$. Равенство (8) запишем в виде:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k\left(\frac{\partial^2 q_{-2+k}}{\partial\eta^2}+\lambda\frac{\partial q_{-2+k}}{\partial\eta}+\lambda^2\frac{\partial^2 q_{-2+k}}{\partial\varphi^2}-\eta^2(1-\alpha-\lambda\eta)q_{-2+k}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^{4k}\left(g_{k,0}(\varphi)+g_{k,1}(\varphi)\lambda\eta-\left(\frac{\lambda\eta}{1-\alpha}\right)^2(g_{k,0}(\varphi)+g_{k,1}(\varphi)(1-\alpha))\right).$$

Отсюда, имеем:

$$lq_{-2}\equiv\frac{\partial^2 q_{-2}}{\partial\eta^2}-\eta^2(1-\alpha)q_{-2}=g_{0,0}(\varphi), \tag{19}$$

$$lq_{-1}=-\frac{\partial q_{-2}}{\partial\eta}-\eta^3 q_{-2}+\eta g_{0,1}(\varphi), \tag{20}$$

$$lq_0=Q_0-\eta^3 q_{-1}-\left(\frac{\eta}{1-\alpha}\right)^2(g_{0,0}(\varphi)+g_{0,1}(\varphi)(1-\alpha)), \tag{21}$$

$$lq_1=Q_1-\eta^3 q_0, \tag{22}$$

$$lq_{4k-2}=Q_{4k-2}-\eta^3 q_{4k-3}+g_{k,0}(\varphi)+A_{k,0}(\varphi), \tag{23}$$

$$lq_{4k-1}=Q_{4k-1}-\eta^3 q_{4k-2}+\eta g_{k,1}(\varphi)+A_{k,1}(\varphi)\eta, \tag{24}$$

$$lq_{4k}=Q_{4k}-\eta^3 q_{4k-1}-\left(\frac{\eta}{1-\alpha}\right)^2(g_{k,0}(\varphi)+g_{k,1}(\varphi)(1-\alpha))+A_{k,2}(\varphi)\eta^2, \tag{25}$$

$$lq_{4k+1}=Q_{4k+1}-\eta^3 q_{4k}, \tag{26}$$

где $(\eta,\varphi)\in D_2=\{(\eta,\varphi)|-\infty<\eta<+\infty,\ 0\leqslant\varphi<2\pi\}$, $Q_s=-\frac{\partial q_{s-1}}{\partial\eta}-\frac{\partial^2 q_{s-2}}{\partial\varphi^2}$, $A_{k,0}(\varphi)$, $A_{k,1}(\varphi)$, $A_{k,2}(\varphi)$ — пока неизвестные функции, $k=1,2,\ldots$.

Докажем следующую вспомогательную лемму, из которой следует существование решений уравнений (19)–(26).

Лемма 2. *Пусть* $\widetilde{f}(\eta)\delta(\varphi)\in C^\infty(D_2), b_0>0$. *Тогда задача*

$$\frac{\partial^2 z(\eta,\varphi)}{\partial\eta^2}-\eta^2 b_0 z(\eta,\varphi)=\widetilde{f}(\eta)\delta(\varphi),\quad(\eta,\varphi)\in D_2, \tag{27}$$

имеет единственное решение $z(\eta,\varphi)\in C^\infty(D_2)$.

Доказательство. С помощью замены $\eta = \sqrt[4]{4/b_0}t$ получим уравнение

$$\frac{\partial^2 z(t,\varphi)}{\partial t^2} - t^2 z(t,\varphi) = \frac{2}{\sqrt{b_0}}\widetilde{f}(t)\delta(\varphi).$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$z(t,\varphi) = z_2(t)\sqrt{\frac{4}{b_0}}\delta(\varphi).$$

Тогда для $z_2(t)$ получим уравнение:

$$z_2''(t) - t^2 z_2(t) = \widetilde{f}(t),$$

соответствующее однородное уравнение

$$z_2''(t) - t^2 z_2(t) = 0$$

имеет фундаментальную систему решений $\{U_4(t), U_4(-t)\}$, где $U_4(t) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}K_{1/4}(t^2)$, $t > 0$, $K_{1/4}(t^2)$ — функция Макдональда (модифицированная функция Бесселя)[7]. Приведем основные свойства этих функции $U_4(t),\ U_4(-t)$:

a) Вронскиан этих функции равен

$$W(U_4(t), U_4(-t)) = 4cosec(\pi/4) = 4\sqrt{2}.$$

b) При $t = 0 : U_4(0) = \pi^{-1/2}2^{-1/4}\Gamma(1/4)$.

c) При $t \to +\infty$ функция $U_4(t)$ экспоненциально убывает: $U_4(t) \sim t^{-1/2}e^{-t^2}$.

При $t \to -\infty$ функция $U_4(t) = \sqrt{\frac{2|t|}{\pi}}(\sqrt{2}\pi I_{1/4}(t^2) + K_{1/4}(t^2)),\ t < 0$, экспоненциально растет:

$$U_4(t) = (2/t)^{1/2}e^{t^2}(1 + O(t^{-2})),$$

где $I_{1/4}(t^2),\ K_{1/4}(t^2)$– модифицированные функции Бесселя. Следовательно, решение задачи (27) можно записать в виде:

$$z(t,\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{2b_0}}\delta(\varphi)\left(U_4(t)\int_{-\infty}^{t} U_4(-s)\widetilde{f}(s)ds + U_4(-t)\int_{t}^{+\infty} U_4(s)\widetilde{f}(s)ds\right),$$

где $t = \sqrt[4]{b_0/4}\eta$. □

Следствие 2. *Если* $\widetilde{f}(\eta) = O(\eta^{N_2})$, *при* $\eta \to \pm\infty$, *то* $z(\eta,\varphi) = O(\eta^{N_2-2})$, $N_2 - const$.

Используя эту лемму, мы можем записать явные решения задач (19)–(26).

Докажем существование таких функций $A_{k,0}(\varphi),\ A_{k,1}(\varphi),\ A_{k,2}(\varphi)$, при которых выполняются равенства:

$$\lim_{\eta\to\pm\infty} q_k(\eta,\varphi) = 0,\ k = -2, -1, 0, 1, \ldots.$$

Лемма 3. *Существуют такие функции* $A_{k,j}(\varphi), B_{k,j}(\varphi) \in C^\infty[0, 2\pi]$, $k \in N,\ j = 0, 1, 2;$ *удовлетворяющие равенствам* ($A_{k,j} = A_{k,j}(\varphi), B_{k,j} = B_{k,j}(\varphi)$):

$$A_{k,0} - \alpha A_{k,1} + \alpha^2 A_{k,2} + B_{k,0} + B_{k,1} + B_{k,2} = 0, \tag{28}$$

$$A_{k,1} - 2\alpha A_{k,2} - B_{k,1} - 2B_{k,2} = 0, \tag{29}$$

$$A_{k,2} + B_{k,2} = 0, \tag{30}$$

и при которых справедливы соотношения:

$$w_{3k-m}(\tau,\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{w_{3k-m,3j+m}(\varphi)}{\tau^{3j+m}},\ m = 1, 2, 3;\ w_{k,j} \in C^\infty[0, 2\pi], \tau \to +\infty, \tag{31}$$

$$q_{4k-m}(\eta,\varphi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{4k-m,4j+m}(\varphi)}{\eta^{4j+m}}, m=1,2,3,4;\ q_{k,j}\in C^{\infty}[0,2\pi], \eta\to\pm\infty. \qquad (32)$$

Доказательство. Смысл этих равенств (28)–(30) состоит в том, что при таком выборе неизвестных функций сохраняется гладкость решений $v_k(\rho,\varphi)$, т.е.

$$A_{k,0}+A_{k,1}(\rho-\alpha)+A_{k,2}(\rho-\alpha)^2+B_{k,0}+B_{k,1}(1-\rho)+B_{k,2}(1-\rho)^2\equiv 0.$$

Заметим, что при $\tau\to+\infty$ и $\eta\to\pm\infty$ справедливы соотношения:

$$w_{-1}(\tau,\varphi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w_{-1,3j+1}(\varphi)}{\tau^{3j+1}},\quad w_m(\tau,\varphi)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{w_{m,3j-m}(\varphi)}{\tau^{3j-m}},\ m=0,1;$$

$$q_{-m}(\eta,\varphi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{-m,4j+m}(\varphi)}{\eta^{4j+m}},\ m=2,1;\quad q_m(\eta,\varphi)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q_{m,4j-m}(\varphi)}{\eta^{4j-m}},\ m=0,1;$$

где $w_{k,j}(\varphi), q_{k,j}(\varphi)\in C^{\infty}[0,2\pi]$.

Допустим, что для любого $k=0,1,\ldots$, при $\tau\to+\infty$ и $\eta\to\pm\infty$ справедливы соотношения:

$$w_{3k-1}(\tau,\varphi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w_{3k-1,3j+1}(\varphi)}{\tau^{3j+1}},\quad w_{3k+m}(\tau,\varphi)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{w_{3k+m,3j-m}(\varphi)}{\tau^{3j-m}}, m=0,1;$$

$$q_{4k-m}(\eta,\varphi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{4k-m,4j+m}(\varphi)}{\eta^{4j+m}}, m=2,1;\ q_{4k+m}(\eta,\varphi)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q_{4k+m,4j-m}(\varphi)}{\eta^{4j-m}}, m=0,1;$$

где $w_{k,j}, q_{k,j}\in C^{\infty}[0,2\pi]$.
Тогда при $k+1$:

$$\begin{aligned}
&Lw_{3k+2}=-2(1-\alpha)\tau^2w_{3k+1}+\tau^3w_{3k}+g_{k+1}(1,\varphi)+\tfrac{\partial w_{3k+1}}{\partial\tau}-\tfrac{\partial^2w_{3k}}{\partial\varphi^2}+B_{k+1,0},\\
&Lw_{3k+3}=-2(1-\alpha)\tau^2w_{3k+2}+\tau^3w_{3k+1}-\tfrac{2\tau}{1-\alpha}g_{k+1}(1,\varphi)+\tfrac{\partial w_{3k+2}}{\partial\tau}-\tfrac{\partial^2w_{3k+1}}{\partial\varphi^2}+B_{k+1,1}\tau,\\
&Lw_{3k+4}=-2(1-\alpha)\tau^2w_{3k+3}+\tau^3w_{3k+2}+\tfrac{\tau^2}{(1-\alpha)^2}g_{k+1}(1,\varphi)+\tfrac{\partial w_{3k+3}}{\partial\tau}-\tfrac{\partial^2w_{3k+2}}{\partial\varphi^2}+B_{k+1,2}\tau^2,\\
&lq_{4k+2}=-\tfrac{\partial q_{4k+1}}{\partial\eta}-\tfrac{\partial^2q_{4k}}{\partial\varphi^2}-\eta^3q_{4k+1}+g_{k+1,0}(\varphi)+A_{k+1,0},\\
&lq_{4k+3}=-\tfrac{\partial q_{4k+2}}{\partial\eta}-\tfrac{\partial^2q_{4k+1}}{\partial\varphi^2}-\eta^3q_{4k+2}+\eta g_{k+1,1}(\varphi)+A_{k+1,1}\eta,\\
&lq_{4k+4}=-\tfrac{\partial q_{4k+3}}{\partial\eta}-\tfrac{\partial^2q_{4k+2}}{\partial\varphi^2}-\eta^3q_{4k+3}-(\tfrac{\eta}{1-\alpha})^2(g_{k+1,0}(\varphi)+g_{k+1,1}(\varphi)(1-\alpha))+A_{k+1,2}\eta^2,\\
&lq_{4k+5}=-\tfrac{\partial q_{4k+4}}{\partial\eta}-\tfrac{\partial^2q_{4k+3}}{\partial\varphi^2}-\eta^3q_{4k+4}.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$w_{3k+2}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w_{3k+2,3j+1}}{\tau^{3j+1}},$$

$$w_{3k+3}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w_{3k+3,3j+3}}{\tau^{3j+3}},\ \text{при } B_{k+1,1}=-\frac{2B_{k+1,0}}{1-\alpha}+3w_{3k+1,2}-\frac{2w_{3k,3}}{1-\alpha},$$

$$w_{3k+4}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w_{3k+4,3j+2}}{\tau^{3j+2}},\ \text{при } B_{k+1,2}=\frac{B_{k+1,0}}{(1-\alpha)^2}-\frac{2w_{3k+1,2}}{1-\alpha}+\frac{w_{3k,3}}{(1-\alpha)^2},$$

$$q_{4k+2}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{4k+2,4j+2}}{\eta^{4j+2}},\ q_{4k+3}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{4k+3,4j+1}}{\eta^{4j+1}},\ q_{4k+5}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{4k+5,4j+3}}{\eta^{4j+3}},$$

$$q_{4k+4}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{4k+4,4j+4}}{\eta^{4j+4}},\ \text{при } A_{k+1,2}=-\frac{A_{k+1,0}}{(1-\alpha)^2}-\frac{A_{k+1,1}}{1-\alpha}+\frac{q_{4k+1,3}}{(1-\alpha)^2},$$

где $w_{k,j} = w_{k,j}(\varphi),\ q_{k,j} = q_{k,j}(\varphi)$. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными $A_{k+1,0},\ A_{k+1,1},\ B_{k+1,0}$:

$$\begin{array}{l}\frac{1-2\alpha}{(1-\alpha)^2}A_{k+1,0} - \frac{\alpha}{1-\alpha}A_{k+1,1} + \alpha^2 c + c_1 + \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}B_{k+1,0} = 0,\\ \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2}A_{k+1,0} + \frac{1+\alpha}{1-\alpha}A_{k+1,1} - 2\alpha^2 c - c_1 - 2c_2 - \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2}B_{k+1,0} = 0,\\ \frac{1}{(1-\alpha)^2}A_{k+1,0} + \frac{1}{1-\alpha}A_{k+1,1} - c - c_2 - \frac{1}{(1-\alpha)^2}B_{k+1,0} = 0,\end{array}$$

где $c = \dfrac{q_{4k+1,3}}{(1-\alpha)^2},\ c_1 = 3w_{3k+1,2} - \dfrac{2w_{3k,3}}{1-\alpha},\ c_2 = \dfrac{w_{3k,3}}{(1-\alpha)^2} - \dfrac{2w_{3k+1,2}}{1-\alpha}$.

Система имеет единственное решение:

$$B_{k+1,0} = -q_{4k+1,3} + \frac{w_{3k,3}}{(1-\alpha)^2} - \frac{2w_{3k+1,2}}{1-\alpha},$$

$$A_{k+1,1} = w_{3k+1,2}, \quad A_{k+1,0} = w_{3k,3}\left(1 + \frac{1}{(1-\alpha)^2}\right) - w_{3k+1,2}\left(3(1-\alpha) + \frac{2}{1-\alpha}\right).$$

Следовательно, для любого $k = 0, 1, \ldots$ верны равенства (31) и (32), т.е.

$$\lim_{\eta\to\pm\infty} q_{k-2}(\eta,\varphi) = 0, \quad \lim_{\tau\to+\infty} w_{k-1}(\tau,\varphi) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Заметим, что

$$w_{3k-m}\left(\frac{1-\rho}{\mu},\varphi\right) = \mu^m \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \frac{w_{3k-m,3j+m}(\varphi)}{(1-\rho)^{3j+m}},\ m = 1,2,3, \quad \varepsilon \to 0,$$

$$q_{4k-m}\left(\frac{\rho-\alpha}{\lambda},\varphi\right) = \lambda^m \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \frac{q_{4k-m,4j+m}(\varphi)}{(\rho-\alpha)^{4j+m}},\ m = 1,2,3,4;\ k = 0,1,\ldots, \quad \varepsilon \to 0.$$

□

3.2. Обоснование ФАРР. Приступим теперь к обоснованию формального асимптотического разложения (5). Пусть

$$u_n(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k v_k(\rho,\varphi) + \chi_1(\rho)\sum_{k=-1}^{3n+1} \mu^k w_k(\tau,\varphi) + \chi_2(\rho)\sum_{k=-2}^{4n} \lambda^k q_k(\eta,\varphi),$$

$$R(\rho,\varphi,\varepsilon) = u(\rho,\varphi,\varepsilon) - u_n(\rho,\varphi,\varepsilon).$$

Заметим, что $u_n(\rho,\varphi,\varepsilon) \in C^\infty(D), \quad \varepsilon \to 0$.

Для остаточного члена $R(\rho,\varphi,\varepsilon)$ получим уравнение:

$$\varepsilon\Delta R(\rho,\varphi,\varepsilon) - (1-\rho)(\alpha-\rho)^2 R(\rho,\varphi,\varepsilon) = \varepsilon^{n+3/4}\Phi, \quad (\rho,\varphi) \in D,$$

где

$$\begin{gathered}\Phi = (\widetilde{f}(\rho,\varphi,\varepsilon) - \Delta v_n(\rho,\varphi) - \widetilde{v}_n(\rho,\varphi,\varepsilon) + (\tau^3 w_{3n}(\tau,\varphi) - 2(1-\alpha)\tau^2 w_{3n+1}(\tau,\varphi) +\\ + \frac{\partial w_{3n+1}(\tau,\varphi)}{\partial\tau} - \frac{\partial^2(w_{3n}(\tau,\varphi) + \mu w_{3n+1}(\tau,\varphi))}{\partial\varphi^2} + \mu\tau^3 w_{3n+1}(\tau,\varphi))\chi_1(\rho))\varepsilon^{1/4} -\\ - \left(\eta^3 q_{4n}(\eta,\varphi) + \frac{\partial q_{4n}(\eta,\varphi)}{\partial\eta} + \frac{\partial^2(q_{4n-1}(\eta,\varphi) + \lambda q_{4n}(\eta,\varphi))}{\partial\varphi^2}\right)\chi_2(\rho),\end{gathered}$$

$$\widetilde{f}(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_{n+1+k}(\rho,\varphi), \quad \widetilde{v}_n(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \widetilde{v}_{n+k}(\rho,\varphi).$$

Отметим, что Φ — гладкая функция. Поэтому при $\varepsilon \to 0$, $\exists M,\ 0 < M$ — const, $\|\Phi\|_C \leqslant M$, т.е. $\Phi = O(1)$. А граничное условие примет вид:

$$R(1,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon^k \psi_k(\varphi) \text{ или } R(1,\varphi,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, получаем следующую задачу:

$$\varepsilon \Delta R(\rho,\varphi,\varepsilon) - (1-\rho)(\alpha-\rho)^2 R(\rho,\varphi,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+3/4}),\ \varepsilon \to 0, \quad (\rho,\varphi) \in D,$$
$$R(1,\varphi,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \varepsilon \to 0.$$

Для этой задачи, применяя принцип максимума, получим

$$R(\rho,\varphi,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n-1/4}), \quad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда следует справедливость разложения (4). Теорема доказана. $\square$

Пример. Пусть $a(\rho,\varphi) \equiv 1$, $f(\rho,\varphi) = 1 + \rho\cos(\varphi) + \rho^2\sin(\varphi) + \rho^3$, $\psi(\varphi,\varepsilon) \equiv 0$, т.е. исследуем задачу

$$\varepsilon \Delta u(\rho,\varphi,\varepsilon) - (1-\rho)(\frac{1}{2}-\rho)^2 u(\rho,\varphi,\varepsilon) = 1 + \rho\cos(\varphi) + \rho^2\sin(\varphi) + \rho^3, \quad (\rho,\varphi) \in D, \tag{33}$$

$$u(1,\varphi,\varepsilon) = 0, \tag{34}$$

тогда

$$u_0(\rho,\varphi) = -\frac{1 + \rho\cos(\varphi) + \rho^2\sin(\varphi) + \rho^3}{(1-\rho)(\frac{1}{2}-\rho)^2}.$$

А если

$$h_{1,0}(\rho,\varphi) = (2\rho-1)^2(2 + \cos(\varphi) + \sin(\varphi)),$$

$$h_{2,0}(\rho,\varphi) = \frac{9}{8} + \frac{1}{2}\cos(\varphi) + \frac{1}{4}\sin(\varphi) + (\rho-\frac{1}{2})(\frac{3}{4} + \cos(\varphi) + \sin(\varphi)) - (\rho-\frac{1}{2})^2(6 + 4\cos(\varphi) + 3\sin(\varphi)),$$

то

$$v_0(\rho,\varphi) = -\frac{1 + \rho\cos(\varphi) + \rho^2\sin(\varphi) + \rho^3 - h_{1,0}(\rho,\varphi)\chi_1(\rho) - h_{2,0}(\rho,\varphi)\chi_2(\rho)}{(1-\rho)(\frac{1}{2}-\rho)^2},$$

$$\text{и} \quad v_1(\rho,\varphi) = \frac{\Delta v_0(\rho,\varphi) - h_{1,1}(\rho,\varphi)\chi_1(\rho) - h_{2,1}(\rho,\varphi)\chi_2(\rho)}{(1-\rho)(\frac{1}{2}-\rho)^2} + \frac{\widetilde{v}_0(\rho,\varphi)}{(1-\rho)(\frac{1}{2}-\rho)^2},$$

где

$$h_{2,1}(\rho,\varphi) = g_{1,0}(\varphi) + g_{1,1}(\varphi)(\rho - 1/2) - (2\rho-1)^2(g_{1,0}(\varphi) + g_{1,1}(\varphi)/2),$$

$$h_{1,1}(\rho,\varphi) = (2\rho-1)^2 \Delta v_0(1,\varphi),\ g_{1,0}(\varphi) = \Delta v_0(1/2,\varphi),\ g_{1,1}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial\rho}\Delta v_0(\rho,\varphi)|_{\rho=1/2}.$$

$$\widetilde{v}_0(\rho,\varphi) = \widetilde{w}_0(\rho,\varphi)\widetilde{\chi}_1(\rho) + 2\frac{\partial \widetilde{w}_0(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\chi_1'(\rho) + \widetilde{q}_0(\rho,\varphi)\widetilde{\chi}_2(\rho) + 2\frac{\partial \widetilde{q}_0(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\chi_2'(\rho),$$

$$\widetilde{w}_0(\rho,\varphi) = -\frac{4(2 + \cos(\varphi) + \sin(\varphi))}{1-\rho}, \quad \widetilde{q}_0(\rho,\varphi) = -\frac{9 + 4\cos(\varphi) + 2\sin(\varphi)}{(2\rho-1)^2}.$$

И для $w_k(\tau,\varphi)$ и $q_k(\eta,\varphi)$ получаем задачи аналогичные к задачам (9)–(14), (15), (19)–(26). Решения этих задач существуют, единственны, при $\tau \to +\infty$, $\eta \to \pm\infty$ справедливы оценки:

$$w_{-1}(\tau,\varphi) = w_2(\tau,\varphi) = O(\tau^{-1}), \quad w_0(\tau,\varphi) = w_3(\tau,\varphi) = O(\tau^{-3}),$$
$$w_1(\tau,\varphi) = w_4(\tau,\varphi) = O(\tau^{-2}), \quad q_{-2}(\eta,\varphi) = q_2(\eta,\varphi) = O(\eta^{-2}),$$
$$q_{-1}(\eta,\varphi) = q_3(\eta,\varphi) = O(\eta^{-1}),\ q_0(\eta,\varphi) = q_4(\eta,\varphi) = O(\eta^{-4}),\ q_1(\eta,\varphi) = O(\eta^{-3}).$$

Следовательно, для решения задачи (33)-(34) справедливо разложение

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon) = v_0(\rho,\varphi) + \varepsilon v_1(\rho,\varphi) + \chi_1(\rho)\sum_{k=-1}^{4} \varepsilon^{k/3} w_k\left(\frac{1-\rho}{\varepsilon^{1/3}},\varphi\right) +$$

$$+\chi_2(\rho)\sum_{k=-2}^{4}\varepsilon^{k/4}q_k\left(\frac{2\rho-1}{2\varepsilon^{1/4}},\varphi\right)+O(\varepsilon^{3/4}),\quad \varepsilon\to 0.$$

Заключение. Особенность исследованной задачи состоит в том, что задача имеет двойную сингулярность. Для этого случая мы доказали применимость метода пограничных функций. Построено равномерное асимптотическое разложение по малому параметру решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения эллиптического типа второго порядка с двумя независимыми переменными в круге. Причем, построенный асимптотический ряд представляет собой ряд Пюйзо.

Данный метод отличается от метода согласования тем, что нарастающие особенности внешнего разложения фактически из него убираются и с помощью ряда с коэффициентами h_k полностью вносятся во внутренние.

Следует отметить, что здесь для простоты исследован случай $a(\rho,\varphi)\equiv 1$, асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для уравнения

$$\varepsilon\Delta u(\rho,\varphi,\varepsilon)-(1-\rho)(\rho-\alpha)^2a(\rho,\varphi)u(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon),\quad (\rho,\varphi)\in D,$$

где $a(\rho,\varphi)>0$ в области $\overline{D}$, строится точно такжеб и асимптотическое разложение решения имеет такую же структуру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* М.: Наука, 1989.
2. Ильин А.М., Данилин А.Р. *Асимптотические методы в анализе.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 248 с.
3. Турсунов Д.А.*Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения* // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика Т. 6. № 26. 2013. С. 37–44.
4. Турсунов Д.А. *Асимптотика решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения. Случай особой точки на границе* // Известия Томского Политехнического Университета Т. 324. № 2. 2014. С. 31–35.
5. D.A. Tursunov, K.J. Belekov *Asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for bisingular perturbed elliptic equations in domains with smooth boundaries* // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014) / Edited by Academician Altay Borubaev. - Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, P. 143–147 (2014).
6. Гилбарг Д., Трудинге Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* М.: Наука, 1989.
7. Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1977. 352 с.

Дилмурат Абдиллажанович Турсунов,
Уральский государственный педагогический университет,
ул. Карла Либкнехта, 9,
620151, г. Екатеринбург, Россия
E-mail: `d_osh@rambler.ru`

Улукбек Заирбекович Эркебаев
Ошский государственный университет,
ул. Ленина, 331,
723500, г. Ош, Кыргызстан
E-mail: `uluk3188@mail.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 1 (2016). С. 113-126.

УДК 517.547.22

МИНИМАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ТИПА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ПОРЯДКА $\rho \in (0,1)$, ВСЕ НУЛИ КОТОРОЙ ЛЕЖАТ В УГЛЕ И ИМЕЮТ ЗАДАННЫЕ ПЛОТНОСТИ

В.Б. ШЕРСТЮКОВ

Аннотация. В работе найдено наименьшее значение, которое может принимать тип целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями заданных верхней и нижней плотностей, расположенными в угле фиксированного раствора $\leqslant \pi$. Основная теорема обобщает предыдущие результаты автора (нули лежат на одном луче) и А. Ю. Попова (учитывается только верхняя плотность нулей). Выделен и подробно разобран случай, когда целая функция имеет измеримую последовательность нулей. Даны применения полученных результатов к теоремам единственности для целых функций и вопросам полноты систем экспонент в пространстве аналитических в круге функций со стандартной топологией равномерной сходимости на компактах.

Ключевые слова: тип целой функции, верхняя и нижняя плотности нулей, теорема единственности, полнота системы экспонент.

Mathematics Subject Classification: 30D15

1. Введение

Пусть $\rho \in (0,1)$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0,\beta]$. Пусть далее $f(z)$ — целая функция, все нули которой расположены в некотором угле раствора $\leqslant \pi$ и образуют последовательность $\Lambda = \Lambda_f = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ с *верхней* и *нижней* ρ*-плотностями*

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \beta, \qquad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} \geq \alpha \tag{1}$$

соответственно. Как обычно, нули считаются с учетом кратности и упорядочены по возрастанию модулей.

Требуется найти наименьшее возможное при указанных условиях значение для величины *типа* функции $f(z)$ при порядке ρ, определяемого формулой

$$\sigma_\rho(f) \equiv \varlimsup_{r\to+\infty} r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f(z)| \,. \tag{2}$$

Без ограничения общности будем предполагать, что

$$\Lambda \subset \Gamma_\theta \equiv \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leqslant \theta\}\,, \tag{3}$$

где $\theta \in [0, \pi/2]$, сводя задачу к нахождению экстремальной величины

$$s_\theta(\alpha,\beta;\rho) \equiv \inf\left\{\sigma_\rho(f) :\, \Lambda = \Lambda_f \subset \Gamma_\theta,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta,\ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha\right\}. \tag{4}$$

Укажем, что при $\theta = 0$ получаем задачу для целых функций с нулями на луче, решенную ранее А. Ю. Поповым [1] (для $\alpha = 0$) и автором [2] (для любого $\alpha \in [0,\beta]$).

V.B. Sherstyukov, Minimal value for the type of an entire function of order $\rho \in (0, 1)$, whose zeros lie in an angle and have a prescribed density.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00281-а).

Поступила 6 июля 2015 г.

В настоящей статье величина $s_\theta(\alpha,\beta;\rho)$ вычисляется при всех $\theta\in[0,\pi/2]$. Работа, помимо введения, состоит из трех частей. В первой части получена оценка снизу для типа функции, определенного в (2). Вторая часть посвящена доказательству точности этой оценки. Результат формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть заданы числа* $\rho\in(0,1)$, $\beta>0$, $\alpha\in[0,\beta]$, $\theta\in[0,\pi/2]$. *Тогда справедлива формула*

$$s_\theta(\alpha,\beta;\rho)=\frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta+\max_{a>0}\int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a}\left(\beta\,a^{-\rho}-\alpha\,x^{-\rho}\right)\frac{x+\cos\theta}{x^2+2x\cos\theta+1}\,dx.$$

Точная нижняя грань (4) *достигается для некоторой функции с последовательностью нулей* Λ_0, *расположенной на двух лучах* $\arg z=\pm\,\theta$ *так, что* $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_0)=\beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda_0)=\alpha$.

В третьей части работы теорема 1 используется для конкретизации одной теоремы единственности Б. Н. Хабибуллина. Даны также приложения к целым функциям экспоненциального типа и вопросам полноты систем экспонент.

Экстремальную задачу о вычислении $s_\theta(\alpha,\beta;\rho)$ при $\alpha=0$ (т.е. без учета нижней ρ-плотности нулей) поставил и решил А. Ю. Попов [3], отыскав величину

$$s_\theta(0,\beta;\rho)=\frac{\beta}{2}\max_{a>0}a^{-\rho}\ln(1+2a\cos\theta+a^2).$$

Для функций, последовательности нулей $\Lambda=\Lambda_f=(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ которых *измеримы*, т.е. имеют *ρ-плотность*

$$\Delta_\rho(\Lambda)\equiv\lim_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|^\rho}=\beta,$$

из теоремы 1 получаем соотношение

$$s_\theta(\beta,\beta;\rho)=\frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta.$$

Отметим, что экстремальная величина $s_\theta(\beta,\beta;\rho)$ достигается, если все нули функции расположены на лучах $\arg z=\pm\,\theta$, и на каждом из них образуют измеримые последовательности с равными ρ-плотностями $(=\beta/2)$, и $s_\theta(\beta,\beta;\rho)$, заведомо не достигается, если эти ρ-плотности различны.

Современное состояние теории экстремальных задач для типа целых функций с нулями на луче или в угле изложено в обзорах [3], [4].

Приступим к доказательству теоремы 1.

2. Оценка типа целой функции

Итак, пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho\in(0,1)$. Предполагаем, что последовательность всех ее нулей $\Lambda=\Lambda_f=(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ лежит в угле Γ_θ с фиксированным $\theta\in[0,\pi/2]$ и имеет ρ-плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)=\beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)\geq\alpha$. Всюду далее $\alpha\in(0,\beta]$, поскольку случай $\alpha=0$ рассмотрен в [3]. Докажем оценку

$$\sigma_\rho(f)\geq\frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta+\max_{a>0}\int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a}\left(\beta\,a^{-\rho}-\alpha\,x^{-\rho}\right)\frac{x+\cos\theta}{x^2+2x\cos\theta+1}\,dx. \tag{5}$$

Можно считать, что $f(0)=1$. Тогда по теореме Адамара (см. [5, гл. I, § 10]) функция $f(z)$ представляется в виде канонического произведения

$$f(z)=\prod_{n=1}^\infty\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right). \tag{6}$$

Учитывая (3), запишем $\lambda_n = r_n e^{i\varphi_n}$, $|\varphi_n| \leqslant \theta$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (6) получим

$$M_f(r) \equiv \max_{|z|=r} |f(z)| \geq |f(-r)| = \prod_{n=1}^{\infty} \left| 1 + \frac{r}{\lambda_n} \right| = \prod_{n=1}^{\infty} \left| 1 + \frac{r}{r_n} e^{-i\varphi_n} \right| =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{2r}{r_n} \cos\varphi_n + \left(\frac{r}{r_n}\right)^2} \geq \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{2r}{r_n} \cos\theta + \left(\frac{r}{r_n}\right)^2}.$$

Обозначим через $n_\Lambda(\tau) = \sum\limits_{|\lambda_n| \leqslant \tau} 1$ считающую функцию последовательности Λ, или, что все равно, последовательности $|\Lambda| \equiv (|\lambda_n|)_{n=1}^{\infty} = (r_n)_{n=1}^{\infty}$. Попутно отметим, что формулы (1) можно записать в виде

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\rho} = \beta, \quad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\rho} \geq \alpha. \tag{7}$$

Стандартное привлечение интеграла Стильтьеса дает

$$\ln M_f(r) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \ln \sqrt{1 + \frac{2r}{r_n} \cos\theta + \left(\frac{r}{r_n}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{2r}{\tau} \cos\theta + \left(\frac{r}{\tau}\right)^2\right) d\, n_\Lambda(\tau).$$

Интегрирование по частям с учетом условий

$$f(0) = 1, \qquad n_\Lambda(\tau) = O(\tau^\rho), \quad \tau \to +\infty,$$

избавляющих от подстановки, приводит к соотношению

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2r}{\tau} \cos\theta + \left(\frac{r}{\tau}\right)^2\right) d\, n_\Lambda(\tau) = \int\limits_0^{+\infty} n_\Lambda(\tau) \frac{r\,(\tau\cos\theta + r)}{\tau\,(\tau^2 + 2r\tau\cos\theta + r^2)}\, d\tau.$$

После замены переменной $\tau = rt$ и обозначений

$$\varphi_r(t) \equiv \frac{n_\Lambda(rt)}{(rt)^\rho}, \qquad K(t) \equiv \frac{t^{\rho-1}(t\cos\theta + 1)}{t^2 + 2t\cos\theta + 1}, \qquad t > 0, \tag{8}$$

приходим к оценке

$$r^{-\rho} \ln M_f(r) \geq \int\limits_0^{+\infty} \varphi_r(t)\, K(t)\, dt, \qquad r > 0. \tag{9}$$

В интеграле из (9) функция $\varphi_r(t)$ при фиксированном r удовлетворяет условиям

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \varphi_r(t) = \beta, \qquad \varliminf_{t\to+\infty} \varphi_r(t) \geq \alpha,$$

а ядро $K(t)$ положительно при $t > 0$, каково бы ни было значение параметра $\theta \in [0, \pi/2]$ (см. (7), (8)). Поэтому в дальнейших оценках можно воспользоваться методом, разработанным в [2] для случая расположения нулей Λ на одном луче ($\theta = 0$). Зафиксируем произвольно число $a > 0$ и положим $\eta = \eta(r) \equiv \varphi_r(1/a)$. Имеем

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \eta(r) = \beta, \qquad \varliminf_{r\to+\infty} \eta(r) \geq \alpha.$$

Пусть $\alpha' \in (0, \alpha)$. Как показано в [2], найдется такое число $c > 0$, что при всех $r \geq ac$ и $t \geq c/r$ выполняется неравенство $\varphi_r(t) \geq \psi_r(t)$, где функция $\psi_r(t)$ определена для положительных t посредством формулы

$$\psi_r(t) \equiv \begin{cases} \alpha', & t \notin \left[\dfrac{1}{a}, \left(\dfrac{\eta}{\alpha'}\right)^{1/\rho} \dfrac{1}{a}\right], \\ \dfrac{\eta}{(at)^\rho}, & t \in \left[\dfrac{1}{a}, \left(\dfrac{\eta}{\alpha'}\right)^{1/\rho} \dfrac{1}{a}\right]. \end{cases} \tag{10}$$

Отсюда на основании (9) заключаем, что

$$r^{-\rho} \ln M_f(r) \geq \int_{c/r}^{+\infty} \psi_r(t)\, K(t)\, dt, \qquad r \geq ac. \tag{11}$$

Подставляя в (11) выражения $K(t)$ из (8) и $\psi_r(t)$ из (10) и выделяя известный интеграл (см., например, [6, задача 4. 174])

$$\int_0^{+\infty} K(t)\, dt = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \cos \rho\,\theta, \tag{12}$$

получаем оценку

$$r^{-\rho} \ln M_f(r) \geq$$

$$\geq \frac{\pi\alpha'}{\sin \pi\rho} \cos \rho\,\theta + \int_{1/a}^{(1/a)(\eta/\alpha')^{1/\rho}} \frac{(\eta a^{-\rho} - \alpha' t^\rho)\,(t\cos\theta + 1)}{t\,(t^2 + 2t\cos\theta + 1)}\, dt - \alpha' \int_0^{c/r} K(t)\, dt.$$

Перейдем здесь к верхнему пределу по последовательности значений r, на которой $\eta = \eta(r)$ стремится к β. С учетом (2) имеем

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\pi\alpha'}{\sin \pi\rho} \cos \rho\,\theta + \int_{1/a}^{(1/a)(\beta/\alpha')^{1/\rho}} \frac{(\beta a^{-\rho} - \alpha' t^\rho)\,(t\cos\theta + 1)}{t\,(t^2 + 2t\cos\theta + 1)}\, dt.$$

Для получения оценки (5) осталось сделать в интеграле замену переменной $t = 1/x$ и воспользоваться свободой выбора чисел $\alpha' \in (0, \alpha)$ и $a > 0$.

3. Доказательство точности оценки

Покажем, что оценка (5) достижима. Для этого расположим последовательность Λ_0 на лучах $\arg z = \pm\theta$ так, чтобы

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_0) = \beta, \qquad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda_0) = \alpha, \tag{13}$$

а каноническое произведение

$$f_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \qquad \lambda_n \in \Lambda_0, \tag{14}$$

имело тип

$$\sigma_\rho(f_0) = \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\rho} \cos \rho\,\theta + \max_{a>0} \int_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \left(\beta\, a^{-\rho} - \alpha\, x^{-\rho}\right) \frac{x + \cos\theta}{x^2 + 2x\cos\theta + 1}\, dx. \tag{15}$$

Относительно параметров задачи будем предполагать, что

$$\rho \in (0, 1), \quad \beta > 0, \quad \alpha \in (0, \beta], \quad \theta \in (0, \pi/2],$$

находясь в ситуации, не изученной ранее. Случаи $\alpha \in (0, \beta)$ и $\alpha = \beta$ разберем отдельно.

Пусть вначале $\alpha \in (0, \beta)$. Воспользуемся конструкцией экстремальной последовательности, предложенной автором в [2] для $\theta = 0$. Выбираем вспомогательную положительную последовательность $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ со свойством

$$m_1 > 1, \quad m_{k+1} = m_k^4, \qquad k \in \mathbb{N},$$

и строим последовательность $(r_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$, соблюдая следующее правило. На промежутках вида $[m_k,\, m_k^2 - 1]$ и $\Big[(\beta/\alpha)^{1/\rho}\, m_k^2,\, m_{k+1}\Big)$ точки r_j^ρ образуют арифметическую прогрессию с разностью $2/\alpha$; на промежутках $(m_k^2 - 1,\, m_k^2]$ точки r_j^ρ образуют арифметическую прогрессию с разностью $\dfrac{2\rho}{(\beta - \alpha) m_k^2}$; на промежутках вида $\Big(m_k^2,\, (\beta/\alpha)^{1/\rho}\, m_k^2\Big)$ точек r_j^ρ нет. Согласно [2] верхняя и нижняя ρ-плотности последовательности $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ равны $\beta/2$ и $\alpha/2$ соответственно. Полагая

$$\Lambda_0 \equiv \big(r_j\, e^{-i\theta}\big)_{j=1}^{\infty} \bigcup \big(r_j\, e^{i\theta}\big)_{j=1}^{\infty},$$

сразу получаем (13). Образуем по последовательности Λ_0 каноническое произведение (14). Заметим, что

$$f_0(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_j}\, e^{i\theta}\right) \left(1 - \frac{z}{r_j}\, e^{-i\theta}\right) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2z}{r_j} \cos\theta + \left(\frac{z}{r_j}\right)^2\right),$$

откуда

$$M_{f_0}(r) = \max_{|z|=r} |f_0(z)| = f_0(-r) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2r}{r_j} \cos\theta + \left(\frac{r}{r_j}\right)^2\right).$$

Поскольку считающая функция $n_{\Lambda_0}(\tau)$ последовательности Λ_0 есть удвоенная считающая функция последовательности $(r_j)_{j=1}^{\infty}$, то, повторяя соответствующие выкладки из пункта 2, приходим к представлению

$$r^{-\rho} \ln M_{f_0}(r) \;=\; \int\limits_0^{+\infty} \varphi_{0,r}(t)\, K(t)\, dt, \qquad r > 0, \tag{16}$$

где $\varphi_{0,r}(t) \equiv \dfrac{n_{\Lambda_0}(rt)}{(rt)^\rho}$ и $K(t)$ определены в (8). Таким образом, функция (14) доставляет равенство в (9).

С точностью до остаточных членов, не влияющих на величину типа (2), функция $\varphi_{0,r}(t)$ с параметром $r > 0$ совпадает с функцией $\Phi_r(t)$, которая определяется при $t > 0$ формулами

$$\Phi_r(t) \equiv \alpha, \qquad t \in \left(0,\, \frac{m_1}{r}\right],$$

$$\Phi_r(t)\,\big|_{\left[\frac{m_k}{r},\, \frac{m_{k+1}}{r}\right]} \equiv \begin{cases} \alpha, & t \notin \left[\dfrac{m_k^2}{r},\, \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\rho} \dfrac{m_k^2}{r}\right], \\[2ex] \beta \left(\dfrac{m_k^2}{rt}\right)^{\rho}, & t \in \left[\dfrac{m_k^2}{r},\, \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\rho} \dfrac{m_k^2}{r}\right], \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{N}$ (подробности см. в [2]). Тем самым, из (16) следует, что

$$\sigma_\rho(f_0) \;=\; \varlimsup_{r \to +\infty} \int\limits_0^{+\infty} \Phi_r(t)\, K(t)\, dt. \tag{17}$$

Введем для сокращения записи несколько обозначений. Пусть

$$g(a) \equiv \int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{(\beta\, a^{-\rho} - \alpha\, x^{-\rho})\ (x + \cos\theta)}{x^2 + 2x\cos\theta + 1}\, dx =$$

$$= \int\limits_{1/a}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}(1/a)} \left(\frac{\beta}{(at)^\rho} - \alpha \right) K(t)\, dt. \tag{18}$$

Поскольку функция $g(a)$ непрерывна и положительна при $a > 0$, причем

$$\lim_{a\to+0} g(a) = \lim_{a\to+\infty} g(a) = 0, \tag{19}$$

то найдется такая точка $a_0 > 0$, что $g(a_0) = \max\limits_{a>0} g(a)$. Для $t > 0$ положим

$$\psi_0(t) \equiv \begin{cases} \alpha, & t \notin \left[\dfrac{1}{a_0}, \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\rho} \dfrac{1}{a_0} \right], \\ \dfrac{\beta}{(a_0 t)^\rho}, & t \in \left[\dfrac{1}{a_0}, \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\rho} \dfrac{1}{a_0} \right]. \end{cases} \tag{20}$$

С учетом определений (18), (20) оценку (5) можно переписать в виде

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} \cos\rho\,\theta + g(a_0) = \int\limits_0^{+\infty} \psi_0(t)\, K(t)\, dt.$$

В частности,

$$\sigma_\rho(f_0) \geq \int\limits_0^{+\infty} \psi_0(t)\, K(t)\, dt. \tag{21}$$

Требующее обоснования соотношение (15) равносильно формуле

$$\sigma_\rho(f_0) = \int\limits_0^{+\infty} \psi_0(t)\, K(t)\, dt. \tag{22}$$

Докажем, что

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \left(\Phi_r(t) - \psi_0(t)\right)\, K(t)\, dt \leqslant 0, \tag{23}$$

и тогда равенство (22) будет установлено. Действительно, из (21), (17), (23) имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} \psi_0(t)\, K(t)\, dt \leqslant \sigma_\rho(f_0) = \varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \left(\Phi_r(t) - \psi_0(t)\right)\, K(t)\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \psi_0(t)\, K(t)\, dt \leqslant \int\limits_0^{+\infty} \psi_0(t)\, K(t)\, dt,$$

откуда и вытекает (22).

Итак, осталось проверить неравенство (23), выражающее «близость» весовой считающей функции $\varphi_{0,r}(t)$ последовательности Λ_0 к «экстремальной» функции $\psi_0(t)$ из (20). Вначале выведем представление

$$\int\limits_0^{+\infty} (\Phi_r(t) - \psi_0(t))\ K(t)\,dt\ =\ \sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) - g(a_0), \tag{24}$$

опираясь на (18), (20). Для этого запишем

$$\psi_0(t) - \alpha \equiv 0, \qquad t \notin \left[\frac{1}{a_0},\, \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\rho}\frac{1}{a_0}\right],$$

$$\int\limits_{1/a_0}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\,(1/a_0)} (\psi_0(t) - \alpha)\ K(t)\,dt\ =\ g(a_0).$$

Кроме того,

$$\Phi_r(t) - \alpha \equiv 0, \qquad t \notin \bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\frac{m_k^2}{r},\, \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\rho}\frac{m_k^2}{r}\right] \equiv T_r,$$

$$\int\limits_{T_r} (\Phi_r(t) - \alpha)\ K(t)\,dt\ =\ \sum_{k=1}^{\infty}\ \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \left(\beta\left(\frac{m_k^2}{rt}\right)^{\rho} - \alpha\right)\ K(t)\,dt\ =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right).$$

Поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty} (\Phi_r(t) - \psi_0(t))\ K(t)\,dt\ =\ \int\limits_0^{+\infty} (\Phi_r(t) - \alpha)\ K(t)\,dt\ -\ \int\limits_0^{+\infty} (\psi_0(t) - \alpha)\ K(t)\,dt\ =$$

$$=\int\limits_{T_r} (\Phi_r(t) - \alpha)\ K(t)\,dt\ -\ \int\limits_{1/a_0}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\,(1/a_0)} (\psi_0(t) - \alpha)\ K(t)\,dt\ =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) - g(a_0),$$

и мы получили (24).

Теперь оценим сумму в (24) для $r \in \left[m_s^2,\, m_{s+1}^2\right]$ при фиксированном $s \in \mathbb{N}$, разбивая ее на три части:

$$\sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) - g(a_0) = \sum_{k=1}^{s-1} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) + \sum_{k=s+2}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) +$$

$$+\left(g\left(\frac{r}{m_s^2}\right) + g\left(\frac{r}{m_{s+1}^2}\right) - g(a_0)\right).$$

Используя в оценке первой суммы неравенство $K(t) \leqslant t^{\rho-1}, \quad t > 0,$ и отбрасывая под знаком интеграла отрицательное слагаемое, имеем

$$0 < \sum_{k=1}^{s-1} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) = \sum_{k=1}^{s-1} \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \left(\beta\left(\frac{m_k^2}{rt}\right)^{\rho} - \alpha\right) K(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{s-1} \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \left(\beta\left(\frac{m_k^2}{rt}\right)^{\rho} - \alpha\right) t^{\rho-1}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \beta \sum_{k=1}^{s-1} \left(\frac{m_k^2}{r}\right)^{\rho} \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{\beta}{\rho} \ln\frac{\beta}{\alpha} \sum_{k=1}^{s-1} \left(\frac{m_k^2}{r}\right)^{\rho} \leqslant \frac{\beta}{\rho} \ln\frac{\beta}{\alpha} \sum_{k=1}^{s-1} \left(\frac{m_k}{m_s}\right)^{2\rho}.$$

В силу выбора последовательности $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ выполнено $\lim\limits_{s\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{s-1} \left(\dfrac{m_k}{m_s}\right)^{2\rho} = 0$, поскольку

$$\sum_{k=1}^{s-1} \left(\frac{m_k}{m_s}\right)^{2\rho} < s \left(\frac{m_{s-1}}{m_s}\right)^{2\rho} = \frac{s}{m_s^{3\rho/2}}.$$

Отсюда

$$\lim_{s\to\infty} \sup_{r\in\left[m_s^2,\, m_{s+1}^2\right]} \sum_{k=1}^{s-1} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) = 0. \tag{25}$$

Используя в оценке второй суммы другое неравенство $K(t) \leqslant t^{\rho-2}, \quad t > 0,$ и снова отбрасывая под знаком интеграла отрицательное слагаемое, имеем

$$0 < \sum_{k=s+2}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) = \sum_{k=s+2}^{\infty} \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \left(\beta\left(\frac{m_k^2}{rt}\right)^{\rho} - \alpha\right) K(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=s+2}^{\infty} \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \left(\beta\left(\frac{m_k^2}{rt}\right)^{\rho} - \alpha\right) t^{\rho-2}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \beta \sum_{k=s+2}^{\infty} \left(\frac{m_k^2}{r}\right)^{\rho} \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \frac{dt}{t^2} =$$

$$= \beta\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/\rho}\right) \sum_{k=s+2}^{\infty} \left(\frac{m_k^2}{r}\right)^{\rho-1} \leqslant \beta\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/\rho}\right) \sum_{k=s+2}^{\infty} \left(\frac{m_{s+1}}{m_k}\right)^{2(1-\rho)}.$$

Выбор последовательности $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ обеспечивает выполнение условия

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{k=s+2}^{\infty} \left(\frac{m_{s+1}}{m_k}\right)^{2(1-\rho)} = 0,$$

поскольку

$$\sum_{k=s+2}^{\infty}\left(\frac{m_{s+1}}{m_k}\right)^{2(1-\rho)} \leqslant \sum_{k=s+2}^{\infty}\left(\frac{m_{k-1}}{m_k}\right)^{2(1-\rho)} = \sum_{k=s+2}^{\infty}\frac{1}{m_k^{3(1-\rho)/2}}.$$

Отсюда

$$\lim_{s\to\infty}\sup_{r\in\left[m_s^2,\, m_{s+1}^2\right]}\sum_{k=s+2}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) = 0. \tag{26}$$

Оценим, наконец, выражение

$$g\left(\frac{r}{m_s^2}\right) + g\left(\frac{r}{m_{s+1}^2}\right) - g(a_0), \qquad r \in \left[m_s^2,\, m_{s+1}^2\right],$$

опирась на определение точки a_0 и свойство (19) функции $g(a)$. Рассмотрим два возможных случая: $r \in [m_s^2,\, m_s m_{s+1}]$ и $r \in \left[m_s m_{s+1},\, m_{s+1}^2\right]$. В первом случае имеем $\dfrac{r}{m_{s+1}^2} \leqslant \dfrac{m_s}{m_{s+1}}$ и

$$g\left(\frac{r}{m_s^2}\right) - g(a_0) + g\left(\frac{r}{m_{s+1}^2}\right) \leqslant g\left(\frac{r}{m_{s+1}^2}\right) \to 0, \qquad s\to\infty.$$

Во втором случае имеем $\dfrac{r}{m_s^2} \geq \dfrac{m_{s+1}}{m_s}$ и

$$g\left(\frac{r}{m_{s+1}^2}\right) - g(a_0) + g\left(\frac{r}{m_s^2}\right) \leqslant g\left(\frac{r}{m_s^2}\right) \to 0, \qquad s\to\infty.$$

Следовательно, можем утверждать, что

$$\varlimsup_{s\to\infty}\sup_{r\in\left[m_s^2,\, m_{s+1}^2\right]}\left(g\left(\frac{r}{m_s^2}\right) + g\left(\frac{r}{m_{s+1}^2}\right) - g(a_0)\right) \leqslant 0. \tag{27}$$

Сочетая (24)–(27), получаем (23).

Таким образом, в случае $\alpha \in (0,\beta)$ целая функция $f_0(z)$, построенная по правилу (14), удовлетворяет (15) и является экстремальной в задаче (4) при $\theta \in (0,\pi/2]$.

Случай $\alpha = \beta$ в техническом отношении гораздо проще предыдущего, но обладает своей спецификой. Согласно (5) тип целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ удовлетворяет неравенству

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta, \tag{28}$$

если последовательность всех ее нулей $\Lambda = \Lambda_f$ лежит в угле

$$\Gamma_\theta = \{z\in\mathbb{C} : |\arg z| \leqslant \theta\}$$

с $\theta \in (0,\pi/2]$ и имеет ρ-плотность

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \Delta_\rho(\Lambda) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \beta. \tag{29}$$

Исключенное здесь значение $\theta = 0$ в свете экстремальной задачи (4) при $\alpha = \beta$ не представляет интереса, поскольку, как известно, тип целой функции порядка $\rho \in (0,1)$, нули которой лежат на одном луче и измеримы с ρ-плотностью β, всегда вычисляется по точной формуле

$$\sigma_\rho(f) = \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}.$$

Однако, картина усложняется, когда в ограничении (3) на расположение нулей раствор угла положительный.

Покажем, что оценка (28) точна. Для этого выберем измеримую последовательность $(r_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ с ρ-плотностью $\beta/2$ и снова положим

$$\Lambda_0 = \left(r_j\, e^{-i\theta}\right)_{j=1}^{\infty} \bigcup \left(r_j\, e^{i\theta}\right)_{j=1}^{\infty},$$

$$f_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \qquad \lambda_n \in \Lambda_0.$$

Последовательность Λ_0 расположена симметрично на сторонах угла Γ_θ и имеет ρ-плотность $\Delta_\rho(\Lambda_0) = \beta$, подчиняясь (29), а для $f_0(z)$ справедливо представление (16). Рассуждая стандартным образом, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $t_0 = t_0(\varepsilon) > 0$ так, чтобы при $rt \geq t_0$ выполнялось соотношение

$$\varphi_{0,r}(t) = \frac{n_{\Lambda_0}(rt)}{(rt)^\rho} \leqslant \beta + \varepsilon.$$

Тогда

$$r^{-\rho} \ln M_{f_0}(r) \;=\; \int\limits_0^{+\infty} \varphi_{0,r}(t)\, K(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_{t_0/r}^{+\infty} \varphi_{0,r}(t)\, K(t)\, dt \;+\; \int\limits_0^{t_0/r} \varphi_{0,r}(t)\, K(t)\, dt \;\leqslant\; (\beta+\varepsilon) \int\limits_{t_0/r}^{+\infty} K(t)\, dt \;+\; o(1), \quad r \to +\infty.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то с учетом формул (2), (12) получаем

$$\sigma_\rho(f_0) \leqslant \frac{\pi\beta}{\sin \pi\rho}\, \cos \rho\, \theta.$$

Таким образом, построенная функция $f_0(z)$ доставляет равенство в (28). Теорема 1 полностью доказана.

Обсудим теперь некоторые нюансы, полезные для понимания сути дела. Вначале отметим, что функция $f_0(z)$, предъявленная в заключительной части доказательства теоремы 1, имеет вполне регулярный рост. Укажем естественное обобщение этого примера.

Возьмем на луче $\arg z = -\theta$ произвольную измеримую последовательность Λ_1 с ρ-плотностью $\beta/2$, а на луче $\arg z = \theta$ — произвольную измеримую последовательность Λ_2 с ρ-плотностью $\beta/2$. Тогда последовательность $\Lambda_0 \equiv \Lambda_1 \bigcup \Lambda_2$ будет обладать свойством (29). Проверим, что функция (14), построенная по такой последовательности Λ_0, имеет тип

$$\sigma_\rho(f_0) = \frac{\pi\beta}{\sin \pi\rho}\, \cos \rho\, \theta. \tag{30}$$

По-прежнему, $f_0(z)$ является функцией вполне регулярного роста, но теперь в расположении ее нулей симметрия относительно вещественной оси, вообще говоря, отсутствует. Согласно [5, гл. II, §2] *индикатор* $f_0(z)$ вычисляется по формуле

$$h_\rho(f_0, \varphi) \equiv \overline{\lim_{r \to +\infty}}\, r^{-\rho} \ln |f_0(re^{i\varphi})| =$$

$$= \frac{\pi\beta}{2 \sin \pi\rho}\, \left(h_\rho(\varphi+\theta) + h_\rho(\varphi-\theta)\right), \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

где через $h_\rho(\varphi)$ обозначено 2π-периодическое продолжение функии $\cos \rho(\varphi - \pi)$ с $[0, 2\pi]$ на $\mathbb{R}$. Прямой подсчет дает

$$h_\rho(f_0, \varphi) = \frac{\pi\beta}{\sin \pi\rho} \cdot \begin{cases} \cos \rho(\pi-\theta) \cdot \cos \rho\varphi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant \theta, \\ \cos \rho\theta \cdot \cos \rho(\varphi - \pi), & \theta \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \theta, \\ \cos \rho(\pi-\theta) \cdot \cos \rho(2\pi - \varphi), & 2\pi - \theta \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Но тогда с учетом неравенства $\cos\rho\,\theta \geq \cos\rho(\pi-\theta)$ получим

$$\sigma_\rho(f_0) \;=\; \max_{0\leqslant\varphi<2\pi} h_\rho(f_0,\varphi) \;=\; h_\rho(f_0,\pi) \;=\; \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta,$$

подтверждая (30).

С другой стороны, даже для функций вполне регулярного роста неравенство в (28) может оказаться строгим. Действительно, пусть Λ состоит из двух измеримых последовательностей, одна из которых имеет ρ-плотность $\beta_1 \geq 0$ и расположена на луче $\arg z = -\theta$, а другая имеет ρ-плотность $\beta_2 \geq 0$, $\beta_2 \neq \beta_1$, и расположена на луче $\arg z = \theta$, причем $\beta_1+\beta_2=\beta$. Снова выполнено (29). Образуем по такой последовательности Λ каноническое произведение (6). Исключив требованием $\beta_2\neq\beta_1$ случай «правильной» функции $f_0(z)$, мы все равно имеем дело с функцией $f(z)$ вполне регулярного роста. В обозначениях из формулы для $h_\rho(f_0,\varphi)$ индикатор $h_\rho(f,\varphi)$ имеет вид [5, гл. II, §2]

$$h_\rho(f,\varphi) = \frac{\pi}{\sin\pi\rho}\,\left(\beta_1\,h_\rho(\varphi+\theta)+\beta_2\,h_\rho(\varphi-\theta)\right), \qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

После несложных преобразований приходим к развернутой записи

$$h_\rho(f,\varphi) = \frac{\pi}{\sin\pi\rho}\cdot\begin{cases} A_{\pi-\theta}\,\cos\left(\rho\varphi-\varphi_{\pi-\theta}\right), & 0\leqslant\varphi\leqslant\theta,\\ A_{\theta}\,\cos\left(\rho(\varphi-\pi)-\varphi_{\theta}\right), & \theta\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\theta,\\ A_{\pi-\theta}\,\cos\left(\rho(2\pi-\varphi)-\varphi_{\pi-\theta}\right), & 2\pi-\theta\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\end{cases}$$

где для краткости обозначено

$$A_\theta \equiv \sqrt{\beta^2\cos^2\rho\,\theta\,+\,(\beta_2-\beta_1)^2\sin^2\rho\,\theta}, \qquad \varphi_\theta\equiv\operatorname{arctg}\left(\frac{\beta_2-\beta_1}{\beta}\operatorname{tg}\rho\,\theta\right).$$

Вследствие ограничений, наложенных на параметры, справедливы неравенства

$$A_\theta > \beta\cos\rho\,\theta, \qquad |\varphi_\theta|\leqslant\rho\,\theta.$$

Берем $\varphi^*\equiv\pi+\varphi_\theta/\rho$. Тогда $\theta\leqslant\pi-\theta\leqslant\varphi^*\leqslant\pi+\theta\leqslant 2\pi-\theta$. Подставляя значение φ^* в выражение для индикатора, получим

$$\sigma_\rho(f)\geq h_\rho(f,\varphi^*) = \frac{\pi}{\sin\pi\rho}\,A_\theta > \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta = \sigma_\rho(f_0).$$

Таким образом, функция $f(z)$, в отличие от $f_0(z)$, не является экстремальной.

4. Теоремы единственности и полнота систем экспонент

Основной результат статьи позволяет получать новые теоремы единственности для целых функций и теоремы о полноте систем экспонент. Подобные применения теоремы 1 в случае $\theta=0$ даны в работе [2]; подробный разбор общей ситуации $\theta\in[0,\pi/2]$ требует отдельной публикации. Остановимся коротко на некоторых приложениях. Так, естественным развитием результата Б. Н. Хабибуллина [7, теорема 4] является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\rho\in(0,1)$, и пусть $\Lambda=(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ — последовательность комплексных чисел конечной верхней ρ-плотности $\beta>0$ и нижней ρ-плотности $\geq\alpha\in[0,\beta]$, расположенная в некотором угле раствора $2\theta\leqslant\pi$. Если тип при порядке ρ целой функции f, обращающейся в нуль на Λ, меньше величины*

$$\frac{2^{\rho}\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\rho/2)}{\Gamma((1-\rho)/2)}\;s_\theta(\alpha,\,\beta;\,\rho) \;=\; \frac{\sin\pi\rho}{\pi}\,\Gamma(\rho)\,\Gamma^2(1-\rho/2)\;s_\theta(\alpha,\,\beta;\,\rho),$$

где $s_\theta(\alpha,\,\beta;\,\rho)$ выписана в теореме 1, то $f\equiv0$ на $\mathbb{C}$.

В формулировке теоремы 2 фигурирует Γ-функция Эйлера. Доказательство получается прямым соединением теоремы 4 из [7] и нашей теоремы 1.

Приведем теперь следствие теоремы 1, относящееся к четным целым функциям экспоненциального типа, которые играют важную роль в различных разделах комплексного анализа, например, в теории рядов Дирихле (см. [8]).

Теорема 3. *Пусть* $\beta > 0$, $\alpha \in [0, \beta]$, $\theta \in [0, \pi/4]$, *и пусть*

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right), \qquad |\arg \lambda_n| \leqslant \theta,$$

причем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} = \beta, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} \geq \alpha.$$

Тогда экспоненциальный тип

$$\sigma(F) \equiv \overline{\lim_{r\to+\infty}} r^{-1} \ln \max_{|z|=r} |F(z)|$$

функции $F(z)$ *удовлетворяет точному неравенству*

$$\sigma(F) \geq s_{2\theta}(\alpha, \beta; 1/2), \tag{31}$$

в правой части которого стоит величина

$$s_{2\theta}(\alpha, \beta; 1/2) = \pi\alpha \cos\theta + \max_{a>0} \int\limits_{a(\alpha/\beta)^2}^{a} \left(\frac{\beta}{\sqrt{a}} - \frac{\alpha}{\sqrt{x}}\right) \frac{x + \cos 2\theta}{x^2 + 2x\cos 2\theta + 1}\, dx \tag{32}$$

из теоремы 1.

Для доказательства достаточно рассмотреть целую функцию

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\mu_n}\right), \qquad \mu_n = \lambda_n^2,$$

порядка $\rho = 1/2$ с нулями

$$(\mu_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Gamma_{2\theta} = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leqslant 2\theta\}, \qquad 2\theta \in [0, \pi/2],$$

учесть, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\mu_n|^{1/2}} = \beta, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\mu_n|^{1/2}} \geq \alpha, \qquad \sigma_{1/2}(f) = \sigma(F),$$

и применить к ней теорему 1.

Без учета нижней плотности нулей ($\alpha = 0$) оценка (31) принимает вид

$$\sigma(F) \geq \frac{\beta}{2} \max_{a>0} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(a^2 + 2a\cos 2\theta + 1\right).$$

Если же последовательность нулей $F(z)$ имеет плотность ($\alpha = \beta$), то (31) превращается в оценку

$$\sigma(F) \geq \pi\beta \cos\theta.$$

Все оценки точны. Интеграл в (32) вычисляется через элементарные функции и в случае $\alpha \in (0, \beta)$, но итоговое выражение столь громоздко, что вряд ли целесообразно приводить его здесь.

Из теорем 2, 3 немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ — *последовательность комплексных чисел конечной верхней плотности* $\beta > 0$ *и нижней плотности* $\geq \alpha \in [0, \beta]$ *такая, что* $|\arg \lambda_n| \leqslant \theta$, *где* $\theta \in [0, \pi/4]$. *Пусть целая функция* F *обращается в нуль на множестве* $\pm\Lambda$, *и ее экспоненциальный тип меньше величины*

$$\frac{\Gamma^2(3/4)}{\sqrt{\pi}}\, s_{2\theta}(\alpha, \beta; 1/2),$$

где $s_{2\theta}(\alpha, \beta; 1/2)$ *задается формулой* (32), *а числовой коэффициент* $\Gamma^2(3/4)/\sqrt{\pi}$ *равен* $0.8472\ldots$. *Тогда* $F \equiv 0$ *на* $\mathbb{C}$.

Для того чтобы раскрыть возможности для применения теоремы 4 к экспоненциальной аппроксимации в комплексной области, напомним некоторые определения. Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек из $\mathbb{C}$, и $\Lambda(\lambda)$ обозначает число вхождений точки λ в последовательность Λ. Говорят, что система (кратных) экспонент

$$E_\Lambda \equiv \left\{ z^{n-1} e^{\lambda z} : \lambda \in \Lambda,\ n = 1, 2, \ldots, \Lambda(\lambda) \right\}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

полна в круге

$$K_R \equiv \{ z \in \mathbb{C} : |z| < R \}, \qquad R > 0,$$

если она полна в пространстве $A(K_R)$ функций, аналитических в этом круге, наделенном топологией равномерной сходимости на компактах из K_R. Символ $R(\Lambda)$ обозначает *радиус круга полноты* последовательности Λ, т. е. точную верхнюю грань радиусов кругов K_R, в которых полна система E_Λ. Обозначим через $\sigma_{inf}(\Lambda)$ точную нижнюю грань значений $\sigma > 0$, для которых найдется целая функция $F \not\equiv 0$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ такая, что F обращается в нуль на Λ (с учетом кратностей): $F(\Lambda) = 0$. Согласно известному критерию полноты системы E_Λ в пространстве $A(K_R)$ (см., например, [9, § 3.3.1]) справедливо равенство

$$\sigma_{inf}(\Lambda) \;=\; R(\Lambda).$$

При фиксированных $\beta > 0,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$ введем класс $P_\theta(\alpha,\, \beta)$, состоящий из всевозможных последовательностей $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ комплексных чисел конечной верхней плотности $\beta > 0$ и нижней плотности $\geq \alpha \in [0, \beta]$ таких, что $|\arg \lambda_n| \leqslant \theta$. Положим

$$R_\theta(\alpha,\, \beta) \equiv \inf_{\Lambda \in P_\theta(\alpha,\, \beta)} R(\pm\Lambda). \tag{33}$$

Наша цель — как можно точнее оценить характеристику $R_\theta(\alpha,\, \beta)$. Попросту говоря, требуется с хорошей точностью найти радиус наибольшего из кругов, в которых заведомо полна любая система экспонент, множество показателей которой $\pm\Lambda$ порождено какой-либо последовательностью Λ из класса $P_\theta(\alpha,\, \beta)$.

Наилучшие из известных к настоящему моменту оценок для $R_\theta(\alpha,\, \beta)$ удается получить, сочетая теорему 4 с классическим неравенством (см. [10, § 2.5])

$$\sigma(F) \geq \beta \exp\left\{ \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right\}.$$

Это неравенство справедливо для экспоненциального типа любой целой функции F, последовательность нулей которой имеет верхнюю плотность β и нижнюю плотность $\geq \alpha$.

Теорема 5. *Пусть зафиксированы числа* $\beta > 0,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$, *и величина* $s_{2\theta}(\alpha, \beta; 1/2)$ *вычислена по правилу* (32). *Тогда для экстремального радиуса полноты* $R_\theta(\alpha,\, \beta)$, *определенного формулой* (33), *справедлива двусторонняя оценка*

$$\max\left\{ \frac{\Gamma^2(3/4)}{\sqrt{\pi}}\, s_{2\theta}(\alpha, \beta; 1/2);\ \ 2\beta\, e^{\alpha/\beta - 1} \right\} \leqslant R_\theta(\alpha,\, \beta) \leqslant s_{2\theta}(\alpha, \beta; 1/2).$$

Например, для систем экспонент с измеримыми показателями имеем

$$\beta\,\max\left\{\Gamma^2(3/4)\sqrt{\pi}\cos\theta;\ 2\right\}\leqslant R_\theta(\beta,\,\beta)\leqslant\pi\beta\cos\theta,$$

где числовой коэффициент $\Gamma^2(3/4)\sqrt{\pi}=2.6614\ldots$. *В частности,*

$$2.6614\ldots\,\beta\leqslant R_0(\beta,\,\beta)\leqslant\pi\beta.$$

В заключение отметим, что теорема 3 допускает распространение на функции, инвариантные относительно поворота на угол $2\pi/s$, где $s=3,4,\ldots$, в духе работы [7]. Аналогичное замечание действует и в отношении остальных результатов раздела 4 настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов А. Ю. *Наименьший возможный тип при порядке $\rho<1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ - плотности* // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. № 1. 2005. С. 31–36.
2. Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. *О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho\in(0,1)$ с положительными нулями* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 75. № 1. 2011. С. 3–28.
3. Попов А. Ю. *Развитие теоремы Валирона-Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ - плотностью корней* // СМФН. Т. 49. 2013. С. 132–164.
4. Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. *О типе целой функций порядка $\rho\in(0,1)$ с нулями на луче* // Итоги науки. Юг России. Серия Математический форум. Т. 4. Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям. Владикавказ. Изд-во ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. 2010. С. 9–21.
5. Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат, 1956.
6. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. *Сборник задач по теории функций комплексного переменного.* М.: Физматлит, 2004.
7. Хабибуллин Б. Н. *Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции* // Матем. сборник. Т. 200. № 2. 2009. С. 129–158.
8. Леонтьев А. Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976.
9. Хабибуллин Б. Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности.* Уфа: РИЦ БашГУ, 2006.
10. Boas R. P. *Entire functions.* New-York: Acad. Press, 1954.

Владимир Борисович Шерстюков,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Каширское шоссе, 31,
115409, г. Москва, Россия
E-mail: shervb73@gmail.com

ABSTRACTS

N.F. Abuzyarova

Some properties of principal submodules in the module of entire functions of exponential type and polynomial growth on the real axis

Abstract. In the work we consider a topological module of entire functions $\mathcal{P}(a;b)$, which is the isomorphic image of Fourier-Laplace transform of Schwarz space formed by distributions with compact supports in a finite or infinite segment $(a;b) \subset \mathbb{R}$. We study the conditions ensuring that the principal submodule of module $\mathcal{P}(a;b)$ can be uniquely recovered by zeroes of a generating function.
Keywords: entire functions, subharmonic functions, Fourier-Laplace transform, principal submodules, local description of submodules, invariant subspaces, spectral synthesis.

E.O. Azizyan, Kh.A. Khachatryan

One-parametric family of positive solutions for a class of nonlinear discrete Hammerstein-Volterra equations

Abstract. In the present work we study a class of of nonlinear discrete Hammerstein-Volterra equations in a post-critical case. We prove the existence of a one-parametric family of positive solutions in space l_1. We describe the set of parameters and establish the monotonic dependence of each solution both in a parameter and a corresponding index.

Keywords: post-criticity condition, iterations, monotonocity, one-parametric family of solutions.

S.N. Askhabov

Periodic solutions of convolution type equations with monotone nonlinearity

Abstract. By the method of monotone operators we establish global existence and uniqueness theorems, as well as estimats and methods of finding the solutions for various classes of nonlinear integral equations of convolution type in the real space of 2π-periodic functions $L_p(-\pi, \pi)$.

Keywords: nonlinear convolution type equations, monotone operator, potential operator.

V.F. Vil'danova

On decay of solution to linear parabolic equation with double degeneracy

Abstract. For a linear parabolic second order equation with a double degeneracy $\mu(x)u_t = (\rho(x)a_{ij}(t,x)u_{x_i})_{x_j}$ in an unbounded domain we obtain the upper bound for the decay rate of the solution to the Dirichlet initial boundary value problem. For a wide class of revolution domains we prove a lower bound. We adduce the examples showing the upper and lower bounds are in some sense sharp.

We prove the unique solvability of the problem in an unbounded domain by Galerkin's approximations method.

Keywords: parabolic equation with a double degeneracy, decay rate of a solution, upper bound, existence of a solution.

S.A. Iskhokov, M.G. Gadoev, I.Ya. Yakushev

Garding inequality for higher order elliptic operators with a non-power degeneration and its applications

Abstract. For higher order elliptic operators in an arbitrary (bounded or unbouned) domain in n-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}_n$ with a non-power degeneration we prove a weighted analogue of Carding inequality. By means of this inequality we study the unique solvability of variational Dirichlet problem, whose solution is sought in the closure of the class of infinitely differentiable compactly supported functions. The degeneration of the coefficients in various variables is characterized via different functions. The lower coefficients of the operators are assumed to belong to some weighted L_p-spaces. For one class of elliptic operators with a power degeneration in a half-space we study the solvability of variational Dirichlet problem with inhomogeneous boundary conditions.

Keywords: elliptic operator, non-power degeneration, Garding inequality, variational Dirichlet problem.

A.A. Klyachin, I.V.Truhlyaeva

On the convergence of almost polynomial solutions of the minimal surface

Abstract. In this paper we consider the polynomial approximation of the Dirichlet problem for minimal surface equation. It is shown that under certain conditions on the geometric structure of the domain the absolute values of the gradients of the solutions are bounded as the degree of these polynomials increases. The obtained properties imply the uniform convergence of approximate solutions to the exact solution of the minimal surface equation.

Keywords:minimal surface equation, uniform convergence, approximate solution.

A.R. Manapova, F.V. Lubyshev

On Frechet differentiability of cost functional in optimal control of coefficients of elliptic equations

Abstract. In the work we consider non-linear optimal control problems for semi-linear elliptic equations with discontinuous data and solutions (states), with controls in the boundary conditions of conjugation of heterogeneous media and in the right hand side of the state equation. We prove the differentiability and Lipshitz continuity for the grid analogue of the cost functional for extremum problems.

Keywords: optimal control problem, semi-linear elliptic equations, cost functional, differentiability, Lipschitz continuity.

D.A. Tursunov, U.Z. Erkebaev

Asymptotic expansions of solutions to Dirichlet problem for elliptic equation with singularities

Abstract. The paper proposes an analogue of Vishik-Lyusternik-Vasileva-Imanalieva boundary functions method for constructing a uniform asymptotic expansion of solutions to bi-singular perturbed problems. By means of this method we construct the uniform asymptotic expansion for the solution to the Dirichlet problem for bi-singular perturbed second order elliptic equation with two independent variables in a circle. By the maximum principle we justify formal asymptotic expansion of the solution, that is, an estimate for the error term is established.

Keywords: asymptotic expansion, Dirichlet problem, Airy function, modified Bessel functions, boundary functions.

V.B. Sherstyukov

Minimal value for the type of an entire function of order $\rho \in (0,\,1)$, whose zeros lie in an angle and have a prescribed density

Abstract. In the work we find the minimal value that can be taken by the type of an entire function of order $\rho \in (0,1)$ with zeros of prescribed upper and lower densities and located in an angle of a fixed opening less than π. The main theorem generalizes the previous result by the author (zeros lie on one ray) and by A.Yu. Popov (only the upper density of zeros was taken into consideration). We distinguish and study in detail the case when the an entire function has a measurable sequence of zeroes. We provide applications of the obtained results to the uniqueness theorems for entire functions and to the completeness of exponential systems in the space of analytic in a circle functions with the standard topology of uniform convergence on compact sets.

Keywords: type of an entire function, upper and lower density of zeros, uniqueness theorem, completeness of exponential system.

CONTENTS

N.F. Abuzyarova
Some properties of principal submodules in the module of entire functions of exponential type and polynomial growth on the real axis
pp. 3–14

E.O. Azizyan, Kh.A. Khachatryan
One-parametric family of positive solutions for a class of nonlinear discrete Hammerstein-Volterra equations
pp. 15–21

S.N. Askhabov
Periodic solutions of convolution type equations with monotone nonlinearity
pp. 22–37

V.F. Vil'danova
On decay of solution to linear parabolic equation with double degeneracy
pp. 38–53

S.A. Iskhokov, M.G. Gadoev, I.Ya. Yakushev
Garding inequality for higher order elliptic operators with a non-power degeneration and its applications
pp. 54–71

A.A. Klyachin, I.V.Truhlyaeva
On the convergence of almost polynomial solutions of the minimal surface
pp. 72–83

A.R. Manapova, F.V. Lubyshev
On Frechèt differentiability of cost functional in optimal control of coefficients of elliptic equations
pp. 84–101

D.A. Tursunov, U.Z. Erkebaev
Asymptotic expansions of solutions to Dirichlet problem for elliptic equation with singularities
pp. 102–112

V.B. Sherstyukov
Minimal value for the type of an entire function of order $\rho \in (0, 1)$, whose zeros lie in an angle and have a prescribed density
pp. 113–126

Abstracts
pp. 127–129

Contents
pp. 130–130