УДК 517.957

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИСКРЕТНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАММЕРШТЕЙНА-ВОЛЬТЕРРА

Э.О. АЗИЗЯН, Х.А. ХАЧАТРЯН

Аннотация. В настоящей работе исследуется класс дискретных нелинейных уравнений Гаммерштейна-Вольтерра в закритическом случае. Доказывается существование однопараметрического семейства положительных решений в пространстве l_1. Описывается множество параметров. Устанавливается монотонная зависимость каждого решения как по параметру, так и по соответствующему индексу.

Ключевые слова: условие закритичности, итерации, монотонность, однопараметрическое семейство решений.

Mathematics Subject Classification: 45GXX, 45G05

1. Введение

Работа посвящена исследованию следующего класса нелинейных дискретных уравнений Гаммерштейна-Вольтерра:

$$x_n = \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n} h_j(x_j), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.1}$$

относительно искомого бесконечного вектора

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)^T, \tag{1.2}$$

где $T-$ знак транспонирования.

В системе (1.1) последовательность элементов $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет следующим условиям:

- $$a_k \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad a_0 = 0, \tag{1.3}$$
- $$\mu \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty, \tag{1.4}$$
- (условие закритичности) $\quad \mu > 1. \qquad (1.5)$

Относительно последовательности измеримых и вещественозначных функций $\{h_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$ будем предполагать выполнение условия «критичности»:

$$h_j(0) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots. \tag{1.6}$$

Система (1.1), кроме самостоятельного математического интереса, возникает в дискретных задачах нелинейной теории переноса излучения в спектральных линиях (см. [1]).

E.O. Azizyan, Kh.A. Khachatryan, One-parametric family of positive solutions for a class of nonlinear discrete Hammerstein-Volterra equations.

Работа выполнена при финансовой поддержки ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-1A033.

Поступила 31 августа 2015 г.

Кроме того, система (1.1) является дискретным аналогом нелинейного интегрального уравнения в свертках Гаммерштейна-Вольтерра:

$$f(x)=\int\limits_{x}^{\infty} v(t-x)H(t,f(t))dt, \quad x\geq 0, \tag{1.7}$$

которое возникает в самых различных областях естествознания, в частности, в физической кинетике (кинетическая теория газов), в эконометрике (теория распределения дохода в однопродуктовой экономике), в биологии (в детерменистических моделях пространственного распространения эпидемии или благоприятного гена среди популяции вдоль линии с различными нелинейностями в генетических моделях) (см. [2]–[5]). Исследованию нелинейных дискретных уравнений Гаммерштейна-Вольтерра различных типов посвящено немало интересных работ (см. [6]-[9] и ссылки в них). Например, в работах [6]-[7] исследована следующая нелинейная дискретная система Гаммерштейна:

$$y_n=\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}f_j(y_j)+g_n, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{1.8}$$

где

$$f_j(0)=0, \quad j\in\mathbb{N},$$

причем

$$(f_j(u)-f_j(v))(u-v)\leqslant c_f(u-v)^2, \quad j\in\mathbb{N},$$

при некотором $c_f>0$, в предположении

$$c_f\cdot\mu_0<1$$

и μ_0– наименьшее положительное число, удовлетворяющее следующему неравенству:

$$\|Ay\|_{l_{2,\tau}}\leqslant\mu_0(Ay,y), \quad y\in l_{2,\tau}.$$

Здесь $l_{2,\tau}$–некоторое весовое пространство бесконечных векторов, а $A=(a_{nj})_{n,j=1}^{\infty}$.

В работе [8] исследована следующая дискретная система Гаммерштейна-Вольтерра:

$$x_n=\sum_{j=n-N_0}^{n} a_{nj}h_j(x_j), \quad n\in\mathbb{N}, \tag{1.9}$$

относительно бесконечного вектора $x=(x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots)^T$. При определенных ограничениях на $\{a_{nj}\}_{n,j=1}^{\infty}$ и $\{h_j(u)\}_{j=1}^{\infty}$ в этой работе доказано существование периодических решений.

Вопросы линеаризации для общих нелинейных дискретных уравнений Вольтерра обсуждались в работе [9].

Следует отметить, что условие (1.6) в определенном смысле затрудняет ситуацию, ибо из (1.6) сразу следует, что тождественно нулевой вектор удовлетворяет системе (1.1).

Здесь возникают следующие вопросы:

1) При каких ограничениях на $\{h_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$ система (1.1), кроме тривиального решения, имеет покомпонентно положительное решение?

2) Из какого пространства решение?

3) Обладает ли свойством единственности построенное решение в определенном классе бесконечных векторов с положительными координатами?

4) Или существует однопараметрическое семейство положительных решений?

5) Если существует однопараметрическое семейство решений, то какую структуру имеет соответствующее множество параметров?

В настоящей заметке при определенных ограничениях относительно последовательности функций $\{h_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$ доказывается существование однопараметрического семейства покомпонентно положительных решений. Устанавливается, что каждое решение из этого семейства принадлежит пространству l_1. Описывается множество параметров. Устанавливается также монотонная зависимость каждого решения как по параметру, так и по соответствующему индексу. В конце работы приведены частные примеры последовательности функций $\{h_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$, удовлетворяющие условиям сформулированной теоремы. Следует отметить, что сформулированная теорема носит конструктивный характер, ибо в доказательстве этой теоремы, кроме соответствующих априорных оценок, применяется метод последовательных приближений.

Также отметим, что методы, разработанные в работе, позволяют успешно продолжить исследования для построения однопараметрического семейства положительных решений в $L_1(0,\infty)$ соответствующего нелинейного интегрального уравнения (1.7).

2. Формулировка теоремы

Прежде чем сформулируем основной результат настоящей работы, введем некоторые обозначения.

Рассмотрим следующую функцию, определенную на отрезке $[0,1]$:

$$\chi(p)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kp^k,\quad p\in[0,1], \tag{2.1}$$

где $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}-$ удовлетворяет условиям (1.3)–(1.5). Из (1.3)–(1.5) следует

- $\chi(0)=a_0=0,\quad \chi(1)=\mu>1,\quad \chi\in C[0,1],$ (2.2)
- $\chi(p)\quad\uparrow\quad$ по p на $[0,1]$. (2.3)

Следовательно, существует единственное число $p_0>0$ такое, что $\chi(p_0)=1$. Зафиксируем это число и сделаем следующие предположения относительно

$$\omega_j(u)\equiv h_j(u)-u,\quad j=0,1,2,\ldots: \tag{2.4}$$

I) пусть существует число $\alpha>0$ такое, что при каждом фиксированном $j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ функции $\omega_j(u)\quad\uparrow\quad$ по u на $[\alpha p_0^j,+\infty)$,

II) $\omega_j\in C(\Omega_j)$, где $\Omega_j\equiv[\alpha p_0^j,+\infty)$, $\quad j=0,1,2,\ldots,$

III) существует $\sup\limits_{u\geq\alpha}\omega_j(u)\equiv\tau_j$, $\quad j=0,1,2,\ldots$, где $\{\tau_j\}_{j=0}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию:

$$\sum_{j=0}^{\infty}j\tau_jp_0^{-j}<+\infty, \tag{2.5}$$

IV) $\omega_j(u)\geq0,\quad u\in\Omega_j,\quad j=0,1,2,\ldots.$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (1.3)–(1.5), *а* $\{\omega_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$ *обладает свойствами* (2.4) *и* I) – IV). *Тогда система* (1.1) *имеет однопараметрическое семейство покомпонентно положительных решений* $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Pi}$, $x_\gamma=(x_{0,\gamma},x_{1,\gamma},\ldots,x_{n,\gamma},\ldots)^T$, *причем*

1) $x_\gamma\in l_1,\quad\forall\gamma\in\Pi\equiv[\alpha,+\infty)$,

2) *если* $\gamma_1,\gamma_2\in\Pi$ *и* $\gamma_1>\gamma_2$, *то справедливы оценки снизу:*

$$x_{n,\gamma_1}-x_{n,\gamma_2}\geq(\gamma_1-\gamma_2)p_0^n,\quad\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{2.6}$$

3) *если существует натуральное число* N_0 *такое, что при всяком фиксированном* $u\geq0$

$$\omega_{j+1}(u)\leqslant\omega_j(u),\quad j=N_0,N_0+1,N_0+2,\ldots, \tag{2.7}$$

то

$$x_{n+1,\gamma}\leqslant x_{n,\gamma},\quad n=N_0,N_0+1,N_0+2,\ldots, \tag{2.8}$$

$\forall\gamma\in\Pi$.

3. Доказательство теоремы

Сначала рассмотрим следующую вспомогательную дискретную систему типа Вольтерра:

$$y_n = z_n + \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n} y_j, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.1}$$

относительно искомого бесконечного вектора

$$y = (y_0, y_1, \dots, y_n \dots)^T, \tag{3.2}$$

где

$$z_n \equiv \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n} \tau_j, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{3.3}$$

Умножим обе части системы (3.1) на p_0^{-n} $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, и после обозначений

$$y_n^* \equiv p_0^{-n} y_n, \quad z_n^* \equiv p_0^{-n} z_n, \quad b_n \equiv p_0^n a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{3.4}$$

относительно $y^* = (y_0^*, y_1^*, \dots, y_n^* \dots)^T$ приходим к следующей системе:

$$y_n^* = z_n^* + \sum_{j=n}^{\infty} b_{j-n} y_j^*, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{3.5}$$

Так как $\chi(p_0) = 1$, то из (3.4) сразу следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = 1. \tag{3.6}$$

Ниже убедимся, что

- $$z^* \in l_1, \quad z^* = (z_0^*, z_1^*, \dots, z_n^* \dots)^T, \tag{3.7}$$
- $$\sum_{n=0}^{\infty} n z_n^* < +\infty. \tag{3.8}$$

Заметим, что (3.7) очевидным образом следует из (3.8). Поэтому достаточно доказать (3.8). При любом $N \in \mathbb{N}$, учитывая (3.4) и (2.5), оценим частичную сумму ряда (3.8):

$$\sum_{j=0}^{N} j z_j^* = \sum_{j=0}^{N} j p_0^{-j} \sum_{i=j}^{\infty} a_{i-j} \tau_i \leqslant \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=j}^{\infty} a_{i-j} i p_0^{-i} \tau_i = \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=j}^{N} a_{i-j} i p_0^{-i} \tau_i +$$

$$+ \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=N+1}^{\infty} a_{i-j} i p_0^{-i} \tau_i = \sum_{i=0}^{N} i p_0^{-i} \tau_i \sum_{j=0}^{i} a_{i-j} + \sum_{i=N+1}^{\infty} i p_0^{-i} \tau_i \sum_{j=0}^{N} a_{i-j} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{N} i p_0^{-i} \tau_i \sum_{j=0}^{i} a_{i-j} + \sum_{i=N+1}^{\infty} i p_0^{-i} \tau_i \sum_{j=0}^{i} a_{i-j} = \sum_{i=0}^{N} i p_0^{-i} \tau_i \sum_{m=0}^{i} a_m + \sum_{i=N+1}^{\infty} i p_0^{-i} \tau_i \sum_{m=0}^{i} a_m \leqslant$$

$$\leqslant \mu \left(\sum_{i=0}^{N} i p_0^{-i} \tau_i + \sum_{i=N+1}^{\infty} i p_0^{-i} \tau_i \right) = \mu \sum_{i=0}^{\infty} i p_0^{-i} \tau_i < +\infty.$$

Поскольку $N \in \mathbb{N}-$ произвольное, а $z_n^* \geq 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то из полученной оценки следует (3.8).

Таким образом, мы получили, что свободный член z^* системы (3.5) и последовательность $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют соответственно условиям (3.8),(3.7) и (3.6). Следовательно, из результатов работы [10] (см. стр. 81, лемма 4.8) следует, что система (3.5) имеет покомпонентно положительное решение в пространстве l_1.

Из (3.4) следует

$$y_n = p_0^n \cdot y_n^*, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.9}$$

является решением системы (3.1). Так как $y^* \in l_1$ и $p_0 \in (0,1)$, то из (3.9) получаем

$$y = (y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots)^T \in l_1. \tag{3.10}$$

Теперь для основной системы (1.1) введем в рассмотрение следующие итерации:

$$x_{n,\gamma}^{(m+1)} = \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n} h_j(x_{j,\gamma}^{(m)}), \quad x_{n,\gamma}^{(0)} = \gamma p_0^n, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad m = 0,1,2,\ldots, \quad \gamma \in \Pi. \tag{3.11}$$

Индукцией по m докажем, что

$$A) \;\; x_{n,\gamma}^{(m)} \;\; \uparrow \;\; \text{по} \;\; m, \;\; \forall \gamma \in \Pi, \;\; \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$B) \;\; x_{n,\gamma}^{(m)} \leqslant \gamma p_0^n + y_n, \;\; \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \;\; \forall \gamma \in \Pi, \;\; \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Сначала докажем монотонность последовательности $\{x_{n,\gamma}^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ по m. Действительно, в силу монотонности $\{\omega_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$ по u на $[\alpha p_0^j, +\infty)$, $\;j = 0,1,2,\ldots$, с учетом условия $IV)$ теоремы, из (3.11) имеем

$$x_{n,\gamma}^{(1)} = \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n}(x_{j,\gamma}^{(0)} + \omega_j(x_{j,\gamma}^{(0)})) \geq \gamma \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n} p_0^j =$$

$$= \gamma \sum_{i=0}^{\infty} a_i p_0^{n+i} = \gamma p_0^n \chi(p_0) = \gamma p_0^n = x_{n,\gamma}^{(0)}.$$

Предполагая

$$x_{n,\gamma}^{(m)} \geq x_{n,\gamma}^{(m-1)}$$

при некотором $m \in \mathbb{N}$, $\;n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\;\gamma \in \Pi$ и учитывая монотонность $\omega_j(u)$ по u, из (3.11) получим

$$x_{n,\gamma}^{(m+1)} \geq \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n}(x_{j,\gamma}^{(m-1)} + \omega_j(x_{j,\gamma}^{(m-1)})) = x_{n,\gamma}^{(m)}.$$

Теперь докажем неравенства $B)$. При $m = 0$ оно очевидно, ибо $y_n \geq 0$, $\;n = 0,1,2,\ldots$. Предположим, что $B)$ выполняется при некотором $m \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая $I)$, $\;III)$ и $IV)$, из (3.11) будем иметь

$$x_{n,\gamma}^{(m+1)} \leqslant \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n}(\gamma p_0^j + y_j + \omega_j(\gamma p_0^j + y_j)) \leqslant \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n}(\gamma p_0^j + y_j + \omega_j(\gamma + y_j)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n}(\gamma p_0^j + y_j + \tau_j) = \gamma \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n} p_0^j + \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n} y_j + z_n = \gamma p_0^n + y_n.$$

Из $A)$ и $B)$ следует, что при каждом фиксированном $\gamma \in \Pi$ последовательность бесконечных векторов $\{x_\gamma^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$, $\quad x_\gamma^{(m)} = (x_{0,\gamma}^{(m)}, x_{1,\gamma}^{(m)}, \ldots, x_{n,\gamma}^{(m)}, \ldots)^T$ имеет предел, когда $m \to \infty : \lim\limits_{m\to\infty} x_\gamma^{(m)} = x_\gamma$, причем предельный вектор в силу условия $II)$ и из того факта, что

$$\sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \sum_{j=n}^{\infty} a_{j-n}(x_{j,\gamma} + \omega_j(x_{j,\gamma})) \leqslant \gamma + \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} y_n < +\infty$$

удовлетворяет системе (1.1). Из $A)$ и $B)$, следует также

$$\gamma p_0^n \leqslant x_{n,\gamma} \leqslant \gamma p_0^n + y_n, \quad \gamma \in \Pi, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Теперь докажем неравенство (2.6). С этой целью сначала индукцией по m убедимся, что если $\gamma_1, \gamma_2 \in \Pi$, $\;\gamma_1 > \gamma_2$, то

$$x_{n,\gamma_1}^{(m)} - x_{n,\gamma_2}^{(m)} \geq (\gamma_1 - \gamma_2) p_0^n, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad m = 0,1,2,\ldots. \tag{3.12}$$

В случае $m=0-$ (3.12) выполняется очевидным образом, ибо оно превращается в равенство. Пусть (3.12) выполняется при некотором $m\in\mathbb{N}$. Тогда из монотонности $\omega_j(u)$ по u на $[\alpha p_0^j,+\infty)$, $\quad j=0,1,2,\ldots$ и с учетом $\gamma_i\geq\alpha$, $\quad i=1,2$, будем иметь

$$x_{n,\gamma_1}^{(m+1)}-x_{n,\gamma_2}^{(m+1)}=\sum_{j=n}^{\infty}a_{j-n}(x_{j,\gamma_1}^{(m)}-x_{j,\gamma_2}^{(m)}+\omega_j(x_{j,\gamma_1}^{(m)})-\omega_j(x_{j,\gamma_2}^{(m)}))\geq\sum_{j=n}^{\infty}a_{j-n}(x_{j,\gamma_1}^{(m)}-x_{j,\gamma_2}^{(m)})\geq$$

$$\geq(\gamma_1-\gamma_2)\sum_{j=n}^{\infty}a_{j-n}p_0^j=(\gamma_1-\gamma_2)p_0^n\cdot\chi(p_0)=(\gamma_1-\gamma_2)p_0^n.$$

Устремляя в (3.12) $m\to\infty$, приходим к (2.6).

Для завершения доказательства теоремы нам осталось убедиться, что при выполнении условия (2.7) следует неравенство (2.8).

Сначала докажем, что при выполнении условия (2.7) имеет место

$$x_{n+1,\gamma}^{(m)}\leqslant x_{n,\gamma}^{(m)},\quad n=0,1,2,\ldots,\quad m=0,1,2,\ldots,\quad \gamma\in\Pi. \tag{3.13}$$

При $m=0$ это следует из следующего простого неравенства:

$$x_{n+1,\gamma}^{(0)}=\gamma p_0^{n+1}\leqslant\gamma p_0^n=x_{n,\gamma}^{(0)}.$$

Пусть (3.13) выполняется для некоторого $m\in\mathbb{N}$. Тогда, учитывая (2.7), монотонность $\omega_j(u)$ по u на $[\alpha p_0^j,+\infty)$, $\quad j=0,1,2,\ldots$, из (3.11) получим

$$x_{n+1,\gamma}^{(m+1)}-x_{n,\gamma}^{(m+1)}=\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{j-(n+1)}(x_{j,\gamma}^{(m)}+\omega_j(x_{j,\gamma}^{(m)}))-\sum_{j=n}^{\infty}a_{j-n}(x_{j,\gamma}^{(m)}+\omega_j(x_{j,\gamma}^{(m)}))=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x_{k+n+1,\gamma}^{(m)}+\omega_{k+n+1}(x_{k+n+1,\gamma}^{(m)}))-\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x_{k+n,\gamma}^{(m)}+\omega_{k+n}(x_{k+n,\gamma}^{(m)}))=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x_{k+n+1,\gamma}^{(m)}-x_{k+n,\gamma}^{(m)}+\omega_{k+n+1}(x_{k+n+1,\gamma}^{(m)})-\omega_{k+n}(x_{k+n,\gamma}^{(m)}))=I_1+I_2+I_3,$$

где

$$I_1\equiv\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x_{k+n+1,\gamma}^{(m)}-x_{k+n,\gamma}^{(m)})\leqslant 0$$

в силу индукционного предположения,

$$I_2\equiv\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\omega_{k+n+1}(x_{k+n+1,\gamma}^{(m)})-\omega_{k+n+1}(x_{k+n,\gamma}^{(m)}))\leqslant 0,$$

в силу того, что $\omega_j(u)\uparrow$ по u на $[\alpha p_0^j,+\infty)$, $\; j=0,1,2,\ldots$, и индукционного предположения, а

$$I_3\equiv\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\omega_{k+n+1}(x_{k+n,\gamma}^{(m)})-\omega_{k+n}(x_{k+n,\gamma}^{(m)}))\leqslant 0$$

в силу выполнения условия (2.7).

Следовательно,

$$x_{n+1,\gamma}^{(m+1)}\leqslant x_{n,\gamma}^{(m+1)},\quad n=0,1,2,\ldots,\quad \gamma\in\Pi.$$

В обеих частях (3.13) m устремляя к бесконечности, приходим к (2.8). Таким образом, **теорема полностью доказана.**

В конце работы приведем несколько примеров последовательности $\{\omega_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$, для которых выполняются все условия сформулированной теоремы:

$$a)\ \ \omega_j(u)=p_0^{2j}(1-e^{-u}),\quad j=0,1,2,\ldots,\quad u\geq 0,$$

$$b)\ \ \omega_j(u) = p_0^{2j}\frac{u}{u+c},\ \ \forall c>0,\ \ j=0,1,2,\ldots,\ \ u\geq 0,$$

$$c)\ \ \omega_j(u) = p_0^{2j}\frac{u^q}{u^q+c},\ \ \forall c>0,\ \ \forall q>2,\ \ j=0,1,2,\ldots,\ \ u\geq 0,$$

$$d)\ \ \omega_j(u) = p_0^{2j}\frac{u+sin^2 u}{u+sin^2 u+1},\ \ j=0,1,2,\ldots,\ \ u\geq 0.$$

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Енгибарян Н.Б. *Об одной задаче нелинейного переноса излучения* // Астрофизика. 1966. Т. 2, № 4. С. 31–36.
2. Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А. *Качественное различие решений для стационарных уравнений Больцмана в линейном и нелинейном случаях* // Теоретическая и Математическая Физика. 2014. Т. 180, № 2. С. 497–504.
3. J.D. Sargan. *The distribution of wealth* // Econometrics. 1957. Vol. 25, № 4. P. 568–590.
4. A.Kh.Khachatryan, Kh.A. Khachatryan *On the Solvability of a Nonlinear Integro-Differential Equations Arising in the Income Distribution Problem* // Comp. Mathematics and Math. Physics. 2010. V.50 , № 10. P. 1702–1711.
5. O. Diekman *Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection* // J. Math. Biol. 1978. V. 6, № 2. P. 109–130.
6. F. Dedagić, S. Halilović, E. Baraković *On the solvability of discrete Nonolinear Hammerstein Systems in $l_{p,\sigma}$ Spaces* // Mathematica Balkanica, New Series. 2012. Vol. 26, Fasc. 3-4. P. 325–333.
7. F. Dedagić *On the discrete Nonlinear Hammerstein systems with non-symmetric kernels* // Sarajevo Journal of Mathematics. 2009. Vol. 5 (18). P. 279–289.
8. Christopher T.H. Baker, Yihong Song *Concerning periodic Solutions to non-linear discrete Volterra equations with finite memory.* Applied Math. Group Research. 2007. report, University of Chester, -24 pp.
9. Yihong Song, Christopher T.H. Baker *Linearized stability analysis of discrete Volterra equations* // Journal Math. Anal. and Appl. 2004. Vol. 294. P. 310–333.
10. Арабаджян Л.Г. *Уравнения Винера-Хопфа в консервативном случае и нелинейные уравнения факторизации.* Диссертация на соиск. уч. степ. кандидата физ.мат. наук, Ереван, 86- стр., 1981.

Эрмине Оганесовна Азизян,
Армянский национальный аграрный университет,
ул. Теряна, 74,
0009, г.Ереван, Армения
E-mail: Hermineazizyan@mail.ru

Хачатур Агавардович Хачатрян,
Институт математики НАН РА,
проспект Маршала Баграмяна, 24/5,
0019, г. Ереван, Армения
E-mail: Khach82@rambler.ru