ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 1 (2016). С. 3-14.

УДК 517.538.2 + 517.984.26 + 517.547

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГЛАВНЫХ ПОДМОДУЛЕЙ В МОДУЛЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА И ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Н.Ф. АБУЗЯРОВА

Аннотация. В работе рассматривается топологический модуль целых функций $\mathcal{P}(a;b)$ – изоморфный образ при преобразовании Фурье-Лапласа пространства Шварца распределений с компактными носителями в конечном или бесконечном интервале $(a;b)\subset\mathbb{R}$. Изучаются условия, при которых главный подмодуль модуля $\mathcal{P}(a;b)$ может быть однозначно восстановлен по нулям порождающей функции.

Ключевые слова: целые функции, субгармонические функции, преобразование Фурье-Лапласа, главные подмодули, локальное описание подмодулей, инвариантные подпространства, спектральный синтез.

Mathematics Subject Classification: 30D15, 30H99, 42A38, 47E05

1. Введение

Пусть $[a_1;b_1]\Subset[a_2;b_2]\Subset\ldots$ – последовательность отрезков, исчерпывающая конечный или бесконечный интервал $(a;b)$ вещественной прямой, P_k – банахово пространство, состоящее из всех целых функций φ, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_k=\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|\varphi(z)|}{(1+|z|)^k\exp(b_ky^+-a_ky^-)},\quad y^{\pm}=\max\{0,\pm y\},\quad z=x+\mathrm{i}y. \tag{1.1}$$

Обозначим через $\mathcal{P}(a;b)$ индуктивный предел последовательности $\{P_k\}$. В этом пространстве операция умножения на независимую переменную z непрерывна, поэтому $\mathcal{P}(a;b)$ – топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$. Каждое из вложений $P_k\subset P_{k+1}$ вполне непрерывно, следовательно, $\mathcal{P}(a;b)$ есть локально-выпуклое пространство типа (LN^*) (см. [1]). Известно (см., например, [2, гл. I, лек. 16, теоремы 1 и 2]), что всякий элемент пространства $\mathcal{P}(a;b)$ является функцией вполне регулярного роста при порядке 1, индикаторная диаграмма которой есть отрезок мнимой оси $[\mathrm{i}c_\varphi;\mathrm{i}d_\varphi]\subset(\mathrm{i}a;\mathrm{i}b)$.

В данной работе мы исследуем главные подмодули модуля $\mathcal{P}(a;b)$. Напомним, что *главным подмодулем* $\mathcal{J}_\varphi$, *порожденным функцией* $\varphi\in\mathcal{P}(a;b)$, называется замыкание в $\mathcal{P}(a;b)$ множества $\{p\varphi:\ p\in\mathbb{C}[z]\}$.

Для краткости всюду ниже, если не оговорено противное, будем пользоваться термином *«подмодуль»*, имея в виду замкнутый подмодуль.

Подмодули модуля $\mathcal{P}(a;b)$ состоят в двойственности с замкнутыми подпространствами пространства $C^\infty(a;b)$, инвариантными относительно оператора дифференцирования

N.F. Abuzyarova, Some properties of principal submodules in the module of entire functions of exponential type and polynomial growth on the real axis.

Работа выполнена при поддержке гранта №01201456408 Минобрнауки РФ.

Поступила 2 июня 2015 г.

(см. [3], [4]). А именно, преобразование Фурье-Лапласа $\mathcal{F}$, действующее в сильном сопряженном пространстве $(C^\infty(a;b))'$ по правилу

$$\mathcal{F}(S)(z) = (S, e^{-itz}), \quad S \in (C^\infty(a;b))',$$

есть линейный топологический изоморфизм пространств $(C^\infty(a;b))'$ и $\mathcal{P}(a;b)$ [5, теорема 7.3.1]. При этом между совокупностью $\{\mathcal{J}\}$ замкнутых подмодулей модуля $\mathcal{P}(a;b)$ и совокупностью $\{W\}$ замкнутых инвариантых относительно дифференцирования подпространств пространства $C^\infty(a;b)$ имеет место взаимно однозначное соответствие по правилу: $\mathcal{J} \longleftrightarrow W$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$, где замкнутое подпространство $W^0 \subset (C^\infty(a;b))'$ состоит из всех распределений $S \in (C^\infty(a;b))'$, аннулирующих W. Задача спектрального синтеза для замкнутых инвариантых относительно дифференцирования подпространств $W \subset C^\infty(a;b)$ была впервые рассмотрена в работе [6] (для случая произвольного интервала $(a;b) \subset \mathbb{R}$). Эта задача двойственна задаче о (слабой) локализуемости подмодулей в $\mathcal{P}(a;b)$.

Напомним ряд понятий, характеризующих свойства подмодулей (см. [3], [4], [7], [8]). Для подмодуля $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(a;b)$ положим $c_\mathcal{J} = \inf\limits_{\varphi\in\mathcal{J}} c_\varphi$, $d_\mathcal{J} = \sup\limits_{\varphi\in\mathcal{J}} d_\varphi$. Множество $[c_\mathcal{J}; d_\mathcal{J}]$ называется *индикаторным отрезком* подмодуля $\mathcal{J}$.

Дивизор функции $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ определяется формулой

$$n_\varphi(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \varphi(\lambda) \neq 0, \\ m, & \text{если} \quad \lambda \text{ – нуль } \quad \varphi \quad \text{кратности} \quad m, \end{cases}$$

а *дивизор подмодуля* $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(a;b)$ – формулой $n_\mathcal{J}(\lambda) = \min\limits_{\varphi\in\mathcal{J}} n_\varphi(\lambda)$.

Подмодуль $\mathcal{J}$ *слабо локализуем*, если он содержит *все* функции $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$, удовлетворяющие условиям: 1) $n_\varphi(z) \geq n_\mathcal{J}(z)$, $z \in \mathbb{C}$; 2) индикаторная диаграмма функции φ содержится в множестве $\mathrm{i}[c_\mathcal{J}; d_\mathcal{J}]$. В случае, если $c_\mathcal{J} = a$ и $d_\mathcal{J} = b$, слабая локализуемость $\mathcal{J}$ означает, что этот подмодуль *обильный*.

Подмодуль $\mathcal{J}$ называется *устойчивым в точке* $\lambda \in \mathbb{C}$, если выполнение условий $\varphi \in \mathcal{J}$ и $n_\varphi(\lambda) > n_\mathcal{J}(\lambda)$ влечет включение $\varphi/(z-\lambda) \in \mathcal{J}$. Подмодуль $\mathcal{J}$ *устойчив*, если он устойчив в любой точке $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ясно, что *устойчивость подмодуля $\mathcal{J}$ является необходимым условием его слабой локализуемости.*

Из результатов работы [9, § 4] следует, что главный подмодуль в $\mathcal{P}(a;b)$ всегда устойчив. Это также нетрудно проверить непосредственно, используя определение устойчивости и описание топологии в $\mathcal{P}(a;b)$. В силу принципа двойственности [4, предложение 1] индикаторный отрезок главного подмодуля есть $[c_\varphi; d_\varphi]$.

Для функции $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$ обозначим через $\mathcal{J}(\varphi)$ слабо локализуемый подмодуль с дивизором, равным дивизору n_φ функции φ и индикаторным отрезком $[c_\varphi; d_\varphi]$. Иначе говоря, подмодуль $\mathcal{J}(\varphi)$ состоит из *всех* функций $\psi \in \mathcal{P}(a;b)$, делящихся на φ и имеющих индикатор $h_\psi = h_\varphi$.

Подмодули $\mathcal{J}_\varphi$ и $\mathcal{J}(\varphi)$ имеют один и тот же дивизор, равный n_φ, и один и тот же индикаторный отрезок $[c_\varphi; d_\varphi]$. Поэтому справедливо включение

$$\mathcal{J}_\varphi \subset \mathcal{J}(\varphi).$$

Равенство

$$\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}(\varphi) \tag{1.2}$$

эквивалентно слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$. Как показывает пример, построенный в работе [10], это равенство имеет место не всегда.

Для выполнения равенства (1.2) имеются две возможности.

(I) Подмодуль $\mathcal{J}(\varphi)$, а значит, и главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$, содержит только функции вида $p\varphi$, $p \in \mathbb{C}[z]$. Иными словами, образующая φ такова, что совокупность целых функций минимального типа при порядке 1, представимых в виде Φ/φ, $\Phi \in \mathcal{P}(a;b)$, совпадает с множеством многочленов $\mathbb{C}[z]$.

(II) Множество $\mathcal{J}(\varphi) \setminus \{p\varphi: \ \ p \in \mathbb{C}[z]\}$ не пусто, и для каждой функции $\Phi \in \mathcal{J}(\varphi)$ существует обобщенная последовательность многочленов p_α такая, что $p_\alpha\varphi \to \Phi$ в топологии пространства $\mathcal{P}(a;b)$.

Достаточное условие для реализации первой из указанных возможностей состоит в требовании *обратимости* функции φ: функция $\varphi \in \mathcal{P}(-\infty;+\infty)$ называется *обратимой* (см. [11]), если для любой такой же функции Φ выполнена импликация: из условия «$\Phi \in \mathcal{P}(-\infty;+\infty)$, Φ/φ – целая функция» следует, что $\Phi/\varphi \in \mathcal{P}(-\infty;+\infty)$, т.е. главный идеал $\mathcal{I}_\varphi$, порожденный этой функцией в алгебре $\mathcal{P}(-\infty;\infty)$, замкнут.

Действительно, нетрудно видеть, что если $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$ обратима, то

$$\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi: \ \ p \in \mathbb{C}[z]\}. \tag{1.3}$$

Оказывается, что обратимость порождающей функции не является необходимым условием для справедливости (1.3). Ниже, во втором параграфе, мы строим пример необратимой функции $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$, для которой выполнены соотношения (1.3).

Переходя к рассмотрению случая (II), приведем упомянутый выше пример из работы [10]. Пусть $(a;b) = (-2\pi;2\pi)$, положим

$$\varphi_0(z) = \frac{\sin \pi z}{U(z)V(z)}, \quad \text{где} \quad U(z) = \frac{\sin \pi\sqrt{z}}{\pi\sqrt{z}}, \quad V(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{2^{2n}+1}\right). \tag{1.4}$$

Теорема 1.2 работы [10] утверждает (хотя и в двойственных терминах допустимости спектрального синтеза в слабом смысле), что главный подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi_0}$ не является слабо локализуемым в $\mathcal{P}(-2\pi;2\pi)$.

В третьем параграфе настоящей работы выводятся некоторые необходимые условия слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ в $\mathcal{P}(a;b)$ в случае, когда множество

$$\mathcal{J}(\varphi) \setminus \{p\varphi, \ p \in \mathbb{C}[z]\}$$

не пусто. В том числе доказывается следующее утверждение, содержащее в себе, как частный случай, цитированный выше результат [10, теорема 1.2].

Теорема 3. *Пусть образующая подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ имеет вид*

$$\varphi = \frac{\Phi}{\omega},$$

где $\Phi = e^{i\gamma z}S \in \mathcal{P}(a;b)$, S – функция типа синуса, $\gamma \in \mathbb{R}$, ω – целая функция минимального типа при порядке 1.

Если для порядков функции ω на лучах $\arg z = 0$ и $\arg z = \pi$, определяемых равенствами

$$\rho_0 = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln|f(r)|}{\ln r}, \quad \rho_\pi = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln|f(-r)|}{\ln r}, \quad \textit{соответственно,}$$

выполнено одно из соотношений

$$\rho_0 < 1/4 < 1/2 \le \rho_\pi \quad \textit{или} \quad \rho_\pi < 1/4 < 1/2 \le \rho_0, \tag{1.5}$$

то подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ не является слабо локализуемым.

2. Пример необратимой функции, для которой выполнены соотношения (1.3)

Пусть границы интервала a и b удовлетворяют условиям

$$a < -\pi, \quad \pi < b.$$

Положим
$$\varphi(z)=\frac{s(z)}{s_1(z)}+\frac{\pi z s(z)}{s_0(z)},$$
где
$$s(z)=\frac{\sin\pi z}{\pi z},\quad s_1(z)=s(\sqrt{z})=\frac{\sin\pi\sqrt{z}}{\pi\sqrt{z}},\quad s_0(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2^{2k}}\right).$$

Хорошо известно, что для функции s имеют место оценки
$$|s(z)|\le\frac{c_0e^{\pi|\operatorname{Im}z|}}{\pi(1+|z|)},\quad z\in\mathbb{C},\tag{2.1}$$
$$|s(z)|\ge\frac{m_de^{\pi|\operatorname{Im}z|}}{\pi|z|},\quad |z-k|\ge d,\quad k\in\mathbb{Z},\tag{2.2}$$
где c_0 – абсолютная постоянная, $d\in(0;1/2)$ – произвольное число, m_d – положительное число, зависящее от d. Из (2.1) следует, что целая функция s_1 допускает оценку сверху:
$$|s_1(z)|\le\frac{c_0e^{\pi\sqrt{|z|}|\sin(\theta/2)|}}{\pi(1+\sqrt{|z|})},\quad z=re^{i\theta},\quad -\pi<\theta\le\pi,\quad r>0.\tag{2.3}$$

Другие вспомогательные оценки оформим в виде лемм.

Лемма 1. *Пусть число $d_0\in(0;1/2)$ столь мало, что $\left|\frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}-1\right|\le1/2$ при $\pi|\xi|\le d_0$. Тогда существует постоянная $c_{d_0}>0$, такая, что*
$$|s_1(z)|\ge\frac{c_{d_0}e^{\pi\sqrt{|z|}|\sin(\theta/2)|}}{1+|z|},\quad z\in\mathbb{C}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left\{z:\,|z-k^2|<3d_0\right\}.\tag{2.4}$$

Доказательство.
Прежде всего заметим, что для всех z, удовлетворяющих неравенствам
$$\frac{d_0}{|k|}\le|z-k|\le d_0,\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\tag{2.5}$$
выполняется оценка
$$|s(z)|\ge\frac{d_0}{4|z|^2}.\tag{2.6}$$

Из неравенств (2.2) и (2.6) стандартными методами выводится оценка
$$|s(z)|\ge\frac{c_{d_0}e^{\pi|\operatorname{Im}z|}}{1+|z|^2}\quad z\in\mathbb{C}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left\{z:\,|z-k|<\frac{d_0}{|k|}\right\},\tag{2.7}$$
где c_{d_0} – положительная постоянная, зависящая от d_0. Утверждение леммы, в свою очередь, следует из (2.7).

Лемма 2. *При всех $\theta\in(-\pi;\pi)$ имеет место асимптотическое равенство*
$$\ln s_0(re^{i\theta})=\frac{(\ln r)^2}{\ln 8}+\frac{i\theta\ln r}{\ln 4}+o(\ln r),\quad r\to\infty.\tag{2.8}$$
Существуют число $\delta>0$ и множество $E_0\subset(-\infty;0)$ нулевой относительной меры, такие, что для всех $x\in(-\infty;0)\setminus E_0$ выполняется неравенство
$$\ln|s_0(x)|\ge\delta\left(\ln\left(|x|+1\right)\right)^2.\tag{2.9}$$

Доказательство. Считающая функция нулей $n(r)$ функции s_0 удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$n(r) = \frac{\ln r}{\ln 4} + o(\ln r), \quad r \to \infty. \tag{2.10}$$

Поэтому, согласно теореме 1 работы [12], функция s_0 имеет *сильный регулярный рост,* и для нее имеет место асимптотическое соотношение (2.8).

В силу (2.10) для функции s_0 выполнены условия теоремы 3.6.1 [13]. Эта теорема утверждает, что

$$\frac{\min\limits_{|z|=r} |s_0(z)|}{\max\limits_{|z|=r} |s_0(z)|} \to 1, \tag{2.11}$$

когда $r \to +\infty$, оставаясь вне некоторого множества нулевой относительной меры E_0.

Из (2.11) получаем, что для некоторого числа $\delta > 0$ неравенство (2.9) выполняется всюду на вещественной полуоси $(-\infty; 0)$, за исключением множества E_0.

Теорема 1. *Функция φ содержится в $\mathcal{P}(a; b)$ и не является обратимой. Подмодули $\mathcal{J}_\varphi$ и $\mathcal{J}(\varphi)$ удовлетворяют соотношениям (1.3).*

Доказательство.

Рассмотрим функцию $\varphi_1 = s/s_1$. Для этой функция на вещественой оси справделивы следующие оценки

$$|\varphi_1(x)| \le \frac{c_0}{\pi c_{d_0} e^{\pi\sqrt{|x|}}}, \quad x \le 0, \tag{2.12}$$

$$|\varphi_1(x)| \le \frac{c_0 e^{3d_0\pi}}{\pi c_{d_0}}, \quad x > 0. \tag{2.13}$$

Первая из этих оценок является прямым следствием оценок (2.1) и (2.4), а вторая, (2.13), выводится из них же стандартными приемами с использованием принципа максимума для аналитических функций. Из оценок (2.12) и (2.13), в свою очередь, следует, что функция φ_1 ограничена на вещественной оси. Учитывая, что она имеет тип π при порядке 1, заключаем, что

$$\varphi_1 \in \mathcal{P}(a; b). \tag{2.14}$$

Покажем, что функция $\varphi_2 = (\pi z s)/s_0$ тоже содержится в $\mathcal{P}(a; b)$. Эта функция, как и функция φ_1, имеет тип π при порядке 1.

Из рассуждений, приведенных в доказательстве леммы 2, следует, что для любого $\varepsilon \in (0; 1/2)$ найдется $\delta > 0$, такое, что вне объединения колец

$$A_j = \{(1-\varepsilon)4^j \le |z| \le (1+\varepsilon)4^j\}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

выполняется неравенство

$$\ln |s_0(z)| \ge \delta \left(\ln\left(|z| + 1\right)\right)^2. \tag{2.15}$$

Поэтому для всех вещественных

$$x \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} (-(1+\varepsilon)4^j; -(1-\varepsilon)4^j)$$

будет выполняться неравенство

$$\ln |s_0(x)| \ge \delta \left(\ln\left(|x| + 1\right)\right)^2. \tag{2.16}$$

Для оценки функции φ_2 в интервалах

$$(-(1+\varepsilon)4^j; -(1-\varepsilon)4^j), \quad j \in \mathbb{N}, \tag{2.17}$$

заметим, что в силу (2.15) на границе кольца A_j имеет место неравенство

$$\ln|\varphi_2(z)| \le \ln\left|\frac{\sin\pi z}{1-z^2/4^{2j}}\right| + 2\ln(2+\varepsilon) - \delta\left(\ln((1-\varepsilon)4^j+1)\right)^2.$$

Так как правой частью последнего неравенства является функция, гармоническая в кольце A_j, это неравенство остается справедливым для всех $z \in A_j$. Следовательно, найдутся положительные числа $\tilde{\delta} > \delta$ и $\tilde{c} > 1$, зависящие от δ и ε и не зависящие от j, такие, что в интервалах (2.17) верна оценка

$$|\varphi_2(x)| \le \frac{\tilde{c}}{e^{\tilde{\delta}(\ln(|x|+1))^2}}, \quad x \in (-(1+\varepsilon)4^j; -(1-\varepsilon)4^j), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, с учетом (2.16), получаем, что на всей вещественной оси справедливо неравенство

$$|\varphi_2(x)| \le \frac{\tilde{c}}{e^{\tilde{\delta}(\ln(|x|+1))^2}}. \tag{2.18}$$

Применяя теорему Пэли-Винера-Шварца [5, теорема 7.3.1], заключаем, что

$$\varphi_2 \in \mathcal{F}(C_0^\infty(a;b)) \subset \mathcal{P}(a;b). \tag{2.19}$$

Из включений (2.14) и (2.19) следует, что функция φ принадлежит пространству $\mathcal{P}(a;b)$.

Для доказательства необратимости функции φ нам понадобится аналитический критерий Л.Эренпрайса [14, теорема I]:
функция $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$ обратима тогда и только тогда, когда существует положительное число a со свойством: для каждого $x \in \mathbb{R}$ найдется $y \in \mathbb{R}$ такое, что

$$|x-y| \le a\ln(1+|x|),$$
$$\varphi(y) \ge (a+|y|)^{-a}.$$

В силу (2.12) и (2.18) найдется положительное число c_1, такое, что функция φ на всем луче $(-\infty;0)$ удовлетворяет оценке

$$\ln|\varphi(x)| \le -\tilde{\delta}(\ln(|x|+1))^2 + c_1.$$

Сопоставляя эту оценку и критерий обратимости Л. Эренпрайса, заключаем, что функция φ не обратима.

Докажем последнее из сформулированных для функции φ утверждений – равенство

$$\mathcal{J}(\varphi) = \{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\}. \tag{2.20}$$

Из оценок (2.2), (2.4) и соотношения (2.8) следует, что для любого положительного θ_0 найдется постоянная $a_0 = a_0(\theta_0)$, такая, что вне углов $\{z : \ |\arg z| < \theta_0\}$, $\{z : \ |\pi - \arg z| < \theta_0\}$ функция φ допускает оценку снизу:

$$|\varphi(z)| \ge |s(z)|\left(\frac{\pi|z|}{|s_0(z)|} - \frac{1}{|s_1(z)|}\right) \ge \frac{a_0 e^{\pi|\operatorname{Im} z|}}{\exp\left((\ln(|z|+1))^2/\ln 8\right)}. \tag{2.21}$$

Пусть Φ – произвольная функция из подмодуля $\mathcal{J}(\varphi)$. При некоторых $C_0 > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$|\Phi(z)| \le C_0(1+|z|)^k e^{\pi|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.22}$$

Из этого соотношения и оценки (2.21), используя принцип Фрагмена-Линделефа, нетрудно вывести, что для функции $\omega = \Phi/\varphi$ во всей комплексной плоскости верна оценка

$$|\omega(z)| \le Ce^{k\ln(|z|+1)+(\ln(|z|+1))^2}, \tag{2.23}$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная. В частности, эта оценка означает, что ω – целая функция нулевого порядка.

Оценим функцию ω на луче $(3d_0; +\infty)$. Для этого заметим, что, в силу (2.2), (2.3), (2.8), всюду в полуполосе $\{z = x + iy : \ x > 3d_0, \ |y| \le d_0\}$, но вне кружков $|z - k| < 3d_0$, $k \in \mathbb{N}$, для некоторой постоянной $b_0 > 0$ будет выполняться оценка

$$|\varphi(z)| \ge |s(z)| \left(\frac{1}{|s_1(z)|} - \frac{\pi |z|}{|s_0(z)|} \right) \ge \frac{b_0}{1 + |z|}. \tag{2.24}$$

Учитывая оценку (2.22) для функции Φ, из (2.24) получим, что при всех положительных x справедливо неравенство

$$|\omega(x)| \le (C_0/b_0)(1 + x)^{k+1}. \tag{2.25}$$

Из оценок (2.23) и (2.25) и принципа Фрагмена-Линделефа следует, что ω – многочлен. Так как данный факт имеет место для любой целой функции ω вида Φ/φ, $\Phi \in \mathcal{J}(\varphi)$, заключаем, что выполняется требуемое соотношение для подмодулей (2.20).

3. Необходимые условия слабой локализуемости главного подмодуля

Обозначим через $\mathcal{P}_0(a; b) \subset \mathcal{P}(a; b)$ образ пространства финитных бесконечно дифференцируемых функций $C_0^\infty(a; b) \subset (C^\infty(a; b))'$ при преобразовании $\mathcal{F}$.

Рассмотрим функцию $\varphi \in \mathcal{P}(a; b)$, для которой подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ содержит элементы вида

$$\Phi = \omega\varphi, \quad \omega - \text{целая функция, отличная от многочлена.} \tag{3.1}$$

В этом параграфе выводятся некоторые условия, необходимые для слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$

Теорема 2. *Главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ содержит функции Φ вида (3.1) тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathcal{P}_0(a; b)$.*

Доказательство.

1) Необходимость. Докажем эквивалентную импликацию: условие

$$\varphi \notin \mathcal{P}_0(a; b) \tag{3.2}$$

влечет равенство

$$\mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\}. \tag{3.3}$$

Согласно уже упоминавшейся теореме Пэли-Винера-Шварца [5, теорема 7.3.1] из (3.2) следует существование натурального числа k_0 и вещественной последовательности

$$x_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad |x_n| \to \infty,$$

для которых

$$|\varphi(x_n)| \ge |x_n|^{-k_0}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.4}$$

С другой стороны, включение $\varphi \in \mathcal{P}(a; b)$ означает, что для некоторых $C > 0$ и $m_0 \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ всюду в $\mathbb{C}$ имеет место оценка

$$|\varphi(z)| \le C(1 + |z|)^{m_0} e^{b_{m_0} y^+ - a_{m_0} y^-}, \tag{3.5}$$

где $y^\pm = \max\{0, \pm y\}$, $z = x + \mathrm{i}y$, $a < a_{m_0} < b_{m_0} < b$. Из оценок (3.4) и (3.5) следует, что для каждого натурального j замыкание множества (возможно, пустого)

$$P_j \bigcap \{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\} \tag{3.6}$$

в банаховом пространстве P_j содержится в множестве (возможно, пустом)

$$P_j \bigcap \{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z], \ \deg p \le j + k_0 - m_0\},$$

которое есть, в свою очередь, подмножество множества (3.6). Следовательно, множество (3.6) замкнуто для каждого $j \in \mathbb{N}$. Согласно критерию замкнутости в пространстве типа (LN^*) [1, теорема 1] множество $\{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\}$ замкнуто в $\mathcal{P}(a; b)$, и значит, выполняется (3.3).

2) Достаточность.

Пусть $\varphi = \mathcal{F}(s)$, $s \in C_0^\infty(a;b)$, $[a_0;b_0]$ – замыкание выпуклой оболочки носителя функции s, $[a_0;b_0] \Subset (a;b)$, и пусть $\varphi \in P_{k_1}$.

В силу теоремы Пэли-Винера-Шварца существуют положительные постоянные C_n, $n = 1, 2, \dots$, такие, что верны оценки

$$|\varphi(z)| \le \frac{C_n}{(1+|z|)^n} e^{b_0 y^+ - a_0 y^-}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Положим

$$f(r) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (n \ln(1+r) - \ln C_n),$$

и рассмотрим субгармоническую в $\mathbb{C}$ функцию $v(z) = f(|z|)$. Согласно теореме 5 из работы [15] существует целая функция ω, такая, что вне множества кружков с конечной суммой радиусов для некоторого натурального числа m_0 верно неравенство

$$|\ln|\omega(z)| - v(z)| \le m_0 \ln(1+|z|),$$

в частности, $\omega \notin \mathbb{C}[z]$. Следовательно, $\Phi = \omega\varphi$ – целая функция вида (3.1), принадлежащая подмодулю $\mathcal{J}(\varphi)$.

Покажем, что $\Phi \in \mathcal{J}_\varphi$, иными словами, что функцию Φ можно аппроксимировать в топологии пространства $\mathcal{P}(a;b)$ функциями вида $p\varphi$, где p – многочлен.

Возможность такой аппроксимации вытекает из следующего утверждения.

Лемма 3. *Существует последовательность многочленов p_j, сходящаяся к функции ω на вещественой оси в весовой норме $\|\cdot\|_V$, определяемой по формуле*

$$\|f\|_V = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{V(x)}, \tag{3.8}$$

где $V(x) = C_1(1+|x|)^{m_0+3} e^{v(x)}$, постоянная C_1 – из неравенств (3.7).

Доказательство леммы 3.

В монографии [16, гл. VI] в качестве веса V рассмотрена *четная* весовая функция W, заданная на вещественной оси и удовлетворяющая условиям

1) $W(x) \ge 1$, $x \in \mathbb{R}$,

для каждого натурального n отношение $x^n/W(x)$ стремится к нулю при $x \to \pm\infty$,

$\ln W(x)$ выпуклая функция аргумента $t = \ln|x|$;

2) для каждого $\delta > 1$ существует постоянная $C_\delta > 0$, такая, что

$$x^2 W(x) \le C_\delta(\delta x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Из теоремы де Бранжа [16, VI.H.1] и теорем, доказанных П. Кусисом в этой же работе [16, VI.H.2], следует, что для веса W, удовлетворяющего условиям 1) и 2), каждая целая функция ω минимального типа при порядке 1, растущая на вещественной оси медленнее, чем W:

$$\frac{|\omega(x)|}{W(x)} \to 0, \quad x \to \pm\infty -$$

аппроксимируется многочленами в норме $\|\omega\|_W = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\omega(x)|}{W(x)}$.

Функция $\tilde{V}(x) = C_1(1+|x|)^{m_0+1} e^{v(x)}$ удовлетворяет условиям 1) и, вообще говоря, не удовлетворяет условию 2). Однако, прослеживая доказательство П. Кусиса (стр. 226–229 в [16, VI.H.2]), видим, что аппроксимация функции ω многочленами на вещественной оси возможна в норме $\|\cdot\|_V$, $V = (1+|x|)^2\tilde{V}$.

Лемма доказана.

Из определения функции V следует, что найдется постоянная $C_0 > 0$, такая, что на всей вещественной оси

$$|p_j(x)\varphi(x)| \le C_0(1+|x|)^{m_0+3}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Используя принцип Фрагмена-Линделефа, отсюда выводим, что во всей комплексной плоскости

$$|p_j(z)\varphi(z)| \le \tilde{C}_0(1+|z|)^{m_0+3}e^{b_0y^+ - a_0y^-}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Из этих оценок, учитывая, что пространство $\mathcal{P}(a;b)$ относится к классу локально-выпуклых пространств типа (LN^*), и используя свойства таких пространств, установленные в работе [1], выводим, что найдется подпоследовательность этой последовательности, сходящаяся в $\mathcal{P}(a;b)$ к функции Φ.

Замечание 1. Функция $\varphi_1 = (\sin\pi z)/(\sqrt{z}\sin\pi\sqrt{z})$, рассмотренная в §1, не принадлежит классу $\mathcal{P}_0(a;b)$, а множество

$$\mathcal{J}(\varphi_1) \setminus \{p\varphi : \ \mathbb{C}[z]\}$$

содержит функцию $\frac{\sin\pi\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ и, следовательно, не пусто. Так что, в отличие от главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$, подмодуль $\mathcal{J}(\varphi)$ может содержать функции $\omega\varphi$, $\omega \notin \mathbb{C}[z]$, и в том случае, когда порождающая функция φ не принадлежит классу $\mathcal{P}_0(a;b)$. Тем не менее, из доказанной теоремы следует, что главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ с образующей $\varphi \notin \mathcal{P}_0(a;b)$ может быть слабо локализуемым только в случае, если выполнены соотношения (1.3).

Доказательство теоремы 3.

Сначала докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 4. *В условиях сформулированной теоремы существует положительное число d, такое, что при каждом натуральном n функция φ может быть представлена в виде произведения двух целых функций $\varphi_{1,n}$ и $\varphi_{2,n}$, удовлетворяющих условию: при всех z, лежащих вне полосы $|\operatorname{Im} z| < 3d$, справедливы неравенства*

$$\big|\ln|\varphi_{1,n}(z)| - 2^{-n}\ln|\varphi(z)|\big| \le \ln(1+|z|) + A_0, \tag{3.9}$$

где A_0 – положительная постоянная, зависящая только от d, a, b.

Доказательство леммы 4.

Так как нулевое множество функции φ является частью нулевого множества функции типа синуса, оно содержится в некоторой горизонтальной полосе $|\operatorname{Im} z| < d/2$ (см., например, [2, гл. III, лек. 22]).

Воспользуемся следующей теоремой из работы [17, теорема 2]:
Пусть f – целая функция, все нули которой лежат в полосе $|\operatorname{Im} z| \le d/2$, и существует целая функция F, делящаяся на функцию f и удовлетворяющая условиям

$$\ln|F(z)| \le H(z), \quad F(0) = 1, \tag{3.10}$$

где функция H липшицева:

$$|H(z') - H(z'')| \le \sigma|z' - z''|, \quad z', z'' \in \mathbb{C}.$$

Тогда f представляется в виде произведения двух целых функций, f_1 и f_2, причем для z, $|\operatorname{Im} z| \ge 3d$, и любого $p \ge 1$ выполняется соотношение

$$|\ln|f_1(z)| - \ln|f_2(z)|| \le \frac{C_0}{p}\left(H(z) - \ln|F(z)|\right) + C_1 + \ln(1+|z|) + C_2 + C_3e^p, \tag{3.11}$$

где C_j – некоторые постоянные, зависящие от σ, d, $H(0)$.

Положим $f = \varphi$, $F = \Phi$, $H(re^{i\theta}) = h_\Phi(\theta)r$, h_Φ – индикатор функции Φ, $\sigma = \max\limits_{\theta\in[0;2\pi]}|h_\Phi(\theta)|$, $p = 1$. Учитывая, что в силу свойств функций типа синуса [2] при $|\operatorname{Im} z| \ge 3d$ будет

$$|H(z) - \ln|F(z)|| = |h_\Phi(\arg z)|z| - \ln|\Phi(z)|| \le C_4,$$

где постоянная C_4 зависит только от функции Φ, получаем представление функции φ в виде произведения двух целых функций, $\varphi_{1,1}$ и $\varphi_{2,1}$, причем

$$|\ln|\varphi_{1,1}(z)| - \ln|\varphi_{2,1}(z)|| \leq \ln(1+|z|) + A_0, \quad |\operatorname{Im} z| \geq 3d, \tag{3.12}$$

постоянная A_0 зависит только от функции Φ.

Из (3.12) и равенства

$$\ln|\varphi| = \ln|\varphi_{1,1}| + \ln|\varphi_{2,1}|,$$

выводим оценку

$$\left|\ln|\varphi_{1,1}(z)| - \frac{1}{2}\ln|\varphi(z)|\right| \leq \frac{1}{2}\ln(1+|z|) + \frac{A_0}{2}, \quad |\operatorname{Im} z| \geq 3d. \tag{3.13}$$

Применяя теперь цитированную выше теорему Р.С. Юлмухаметова к функции $f = \varphi_{1,1}$ с теми же F, H, σ и p, что и выше, получим представление

$$\varphi_{1,1} = \varphi_{1,2}\varphi_{2,2},$$

в котором целая функция $\varphi_{1,2}$ удовлетворяет оценке

$$\left|\ln|\varphi_{1,2}(z)| - \frac{1}{2}\ln|\varphi_{1,1}(z)|\right| \leq \frac{1}{2}\ln(1+|z|) + \frac{A_0}{2}, \quad |\operatorname{Im} z| \geq 3d.$$

Из этой оценки и (3.13) следует, что

$$\left|\ln|\varphi_{1,2}(z)| - \frac{1}{2^2}\ln|\varphi(z)|\right| \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)(\ln(1+|z|) + A_0), \quad |\operatorname{Im} z| \geq 3d.$$

Продолжая этот процесс, через n шагов получим представление функции φ в виде произведения двух целых функций $\varphi_{1,n}$ и $\varphi_{2,n}$, причем для всех z, лежащих вне полосы $|\operatorname{Im} z| < 3d$, будет выполняться требуемая оценка (3.9).

Докажем, что в условиях теоремы функция Φ не может принадлежать главному подмодулю $\mathcal{J}_\varphi$. Предположим противное: пусть существует обобщенная последовательность многочленов p_α, такая, что $p_\alpha\varphi$ сходится к Φ в пространстве $\mathcal{P}(a;b)$. Фиксируем натуральное число n_0, для которого функция $\varphi\varphi_{1,n_0}$ лежит в $\mathcal{P}(a;b)$. Используя свойства пространства $\mathcal{P}(a;b)$, нетрудно установить существование *счетной* подпоследовательности $p_{\alpha_k}\varphi\varphi_{1,n_0}$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящейся к функции $\Phi\varphi_{1,n_0}$ в одной из норм $\|\cdot\|_{m_0}$ (см. (1.1)). В частности, эта подпоследовательность ограничена по указанной норме: для некоторой постоянной $C > 0$ и всех натуральных k имеем

$$|p_{\alpha_k}(z)\varphi(z)\varphi_{1,n_0}(z)| \leq C(1+|z|)^{m_0}\exp(b_{m_0}y^+ - a_{m_0}y^-), \quad y = \operatorname{Im} z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Из этих неравенств, леммы 4 и свойств функций типа синуса, получим, что на прямой $\operatorname{Im} z = y_0$, $|y_0| \geq 3d$, справедливы оценки

$$|p_{\alpha_k}(z)| \leq \tilde{C}(1+|z|)^{m_0+1}|\omega(z)|^{1+2^{-n_0}}, \tag{3.14}$$

где $\tilde{C}$ – положительная постоянная, зависящая только от d.

Предположим, что выполнено первое из соотношений (1.5), и оценим $|p_{\alpha_k}(z)|$ на полупрямой $z = x + iy_0$, $x > 0$, $y_0 \geq 3d$.

Согласно замечанию после теоремы 3 в [2, §14.2] и с учетом того, что функция ω имеет минимальный тип при порядке 1, для всех $x \in \mathbb{R}$, $y_0 > 0$ можем написать

$$\ln|\omega(x+iy_0)| = \frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln|\omega(t)|}{(t-x)^2+y_0^2}\,\mathrm{d}\,t + \sum_{j=1}^{\infty}\ln\left|\frac{x+iy_0-\lambda_j}{x+iy_0-\bar{\lambda}_j}\right|,$$

где $\{\lambda_j\}$ – множество нулей функции ω, принадлежащих верхней полуплоскости.

Оценим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|\omega(t)|}{(t-x)^2+y_0^2}\mathrm{d}\,t$ при положительных x и y_0. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|\omega(t)|}{(t-x)^2+y_0^2}\mathrm{d}\,t = \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln|\omega(t)|}{(t-x)^2+y_0^2}\mathrm{d}\,t + \\ + \int_{0}^{2x} \frac{\ln|\omega(t)|}{(t-x)^2+y_0^2}\mathrm{d}\,t + \int_{2x}^{+\infty} \frac{\ln|\omega(t)|}{(t-x)^2+y_0^2}\mathrm{d}\,t = I_1 + I_2 + I_3. \quad (3.15)$$

Для первого слагаемого, I_1 справедлива оценка

$$|I_1| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln|\omega(t)||}{t^2+y_0^2}\mathrm{d}\,t < +\infty, \quad (3.16)$$

конечность интеграла следует из замечания в [2, §14.2]. Далее, для любого положительного числа $\varepsilon < 1/8 - \rho_0/2$ найдутся положительные постоянные b_ε, c_ε такие, что при всех $x > 0$ будет

$$\ln|\omega(x)| \leq b_\varepsilon x^{\rho_0+\varepsilon} + c_\varepsilon.$$

Поэтому слагаемые I_2 и I_3 можно оценить следующим образом:

$$I_2 \leq (2^{\rho_0+\varepsilon} b_\varepsilon x^{\rho_0+\varepsilon} + c_\varepsilon) \int_{0}^{2x} \frac{\mathrm{d}\,t}{(t-x)^2+y_0^2} \leq \frac{\pi}{y_0}\left(2^{\rho_0+\varepsilon} b_\varepsilon x^{\rho_0+\varepsilon} + c_\varepsilon\right), \quad (3.17)$$

$$I_3 \leq (b_\varepsilon + c_\varepsilon)\left(\int_{1}^{+\infty} \frac{t^{\rho_0+\varepsilon}}{t^2/4+y_0^2}\mathrm{d}\,t + y_0^{-2}\right) \leq (b_\varepsilon + c_\varepsilon)\left(4\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^{2-\rho_0-\varepsilon}} + y_0^{-2}\right). \quad (3.18)$$

Из соотношений (3.14)–(3.18) следует, что на полупрямой $z = x + iy_0$, $x > 0$, $y_0 \geq 3d$ верны оценки

$$|p_{\alpha_k}(z)| \leq C'(1+|z|)^{m_0+1}\exp(C''|z|^{\rho_0+\varepsilon}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где C', C'' – положительные постоянные, зависящие от ε и y_0 и не зависящие от x и k.

Из этих оценок, используя принцип Фрагмена-Линделефа, нетрудно вывести, что во всей комплексной плоскости имеют место неравенства

$$|p_{\alpha_k}(z)| \leq C\exp(|z|^{\rho_0+2\varepsilon}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

причем постоянная $C > 0$ зависит от ε и не зависит от k и z. Отсюда, в свою очередь, следует, что функция ω (равная пределу последовательность p_{α_k}) должна иметь во всей плоскости порядок, меньший, чем $1/4$, чего не может быть в силу условий (1.5).

Замечание 2. Требование $\max(\rho_0, \rho_\pi) \geq 1/2$ является необходимым для того, чтобы могло иметь место строгое неравенство $\min(\rho_0, \rho_\pi) < \max(\rho_0, \rho_\pi)$, в силу теоремы Вимана (см., например, [18, гл. 1, §18, теорема 30]).

Замечание 3. Для функции $V(-z)$, где $V(z)$ – функция из определения φ_0 в (1.4), справедливы оба соотношения, (2.8) и (2.9), леммы 2. Используя этот факт и лемму 1, нетрудно убедиться в том, что для функции φ_0 из работы [10], цитированной во введении, выполнены условия доказанной теоремы. А именно, $\varphi_0 = \frac{\sin\pi z}{\omega}$, где $\omega = UV$, при этом порядки ρ_0 и ρ_π функции ω равны, соответственно, 0 и $1/2$. Применение теоремы 3 дает отличное от приведенного в [10] доказательство отсутствия свойства слабой локализуемости у главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ в любом модуле $\mathcal{P}(a;b)$, $a < -\pi$, $\pi < b$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Себастьян-и-Сильва Ж. *О некоторых классах ЛВП, важных в приложениях* // Математика. Сб. переводов инстранных статей. 1957. 1:1. С. 60–77.
2. B.Y. Levin (in collaboration with Yu. Lyubarskii, M. Sodin, V. Tkachenko). *Lectures on entire functions* (Rev. Edition). AMS. Providence. Rhode Island, 1996. 254 p.
3. Абузярова Н.Ф. *Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций* // Доклады РАН. 2014. Т. 457. № 5. С. 510–513.
4. Абузярова Н.Ф. *Замкнутые подмодули в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси* // Уфимский матем. журнал. 2014. Т. 6, № 4. С. 3–18.
5. Хермандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений и анализ Фурье.* М.: Мир, 1986. 462 с.
6. A. Aleman, B. Korenblum *Derivation-Invariant Subspaces of* C^∞ // Computation Methods and Function Theory. 2008. V. 8. № 2. P. 493–512.
7. Красичков-Терновский И.Ф. *Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. I*// Известия АН СССР, серия матем. 1979. Т. 43. № 1. С. 44–66.
8. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Матем. сборник. 1972. Т. 87 (129). № 4. С. 459–489.
9. Красичков-Терновский И.Ф. *Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. II*// Известия АН СССР, серия матем. 1979. Т. 43. № 2. С. 309–341.
10. A. Aleman, A. Baranov, Yu. Belov *Subspaces of* C^∞ *invariant under the differentiation* // Journal of Functional Analysis. 2015. V. 268. P. 2421–2439.
11. C.A. Berenstein, B.A. Taylor *A new look at interpolation theory for entire functions of one variable* // Advances in Mathematics. 1980. V. 33. P. 109–143.
12. Заболоцкий Н.В. *Сильно регулярный рост целых функций нулевого порядка* // Матем. заметки. 1998. Т. 63. Вып. 2. С. 196–208.
13. R.P. Boas, Jr. *Entire functions.* Acad. Press. Publ. Inc. New-York. 1954. 276 pp.
14. L. Ehrenpreis *Solution of some problems of division, IV* // Amer. Journal of Math. 1960. V. 57. P. 522–588.
15. Юлмухаметов Р.С. *Аппроксимация субгармонических функций* // Anal. Math. 1985. V. 11. P. 257–282.
16. P. Koosis *The logarithmic integral I.* Cambridge Univ. Press. 1998. 606 pp.
17. Юлмухаметов Р.С. *Разложение целых функций на произведение двух «почти равных» функций* // Сиб. матем. журнал. 1997. Т.38. № 2. С. 463–473.
18. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: ГИТТЛ. 1956. 632 с.

Наталья Фаирбаховна Абузярова,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: abnatf@gmail.com