ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 4 (2015). С. 116-132.

УДК 517.518.8

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИЙ

А.Ю. ТРЫНИН

Аннотация. Исследуются аппроксимативные свойства различных операторов, являющихся модификациями синк-приближений непрерывных функций на отрезке.

Ключевые слова: синк-аппроксимации, интерполяция функций, равномерное приближение.

1. Введение

Э. Борель и Э.Т. Уиттекер независимо друг от друга ввели понятие кардинальной функции и усечённой кардинальной функции, сужение на отрезок $[0,\pi]$ которых выглядят так:

$$L_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(nx-k\pi)}{nx-k\pi}f\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\sin nx}{nx-k\pi}f\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}l_{k,n}(x)f\Big(\frac{k\pi}{n}\Big). \tag{1}$$

На сегодняшний момент очень подробно исследована проблема синк-аппроксимации аналитической в полосе, содержащей действительную ось, функции, экспоненциально убывающей на бесконечности. Наиболее полный обзор результатов, полученных в этом направлении до 1993 г., а также большое количество важных приложений синк-аппроксимаций можно найти в [1]. Интересные исторические обзоры исследований в этой области содержатся также в [2], [3].

Синк-приближения нашли широкое применение при построении различных численных методов математической физики и теории приближения функций как одной, так и нескольких переменных [1], [4], в теории квадратурных формул [1], теории вейвлет-преобразований или всплесков [5, Гл. 7,§4, п.2], [6, Гл. 2], [7], [8].

Интересные признаки равномерной сходимости на оси кардинальных функций Уиттекера приводятся в [9], [10].

Не менее важное достаточное условие сходимости синк-аппроксимаций получено авторами статьи [11]. Ими установлено, что для некоторых подклассов, абсолютно непрерывных вместе со своими производными на интервале $(0,\pi)$ и имеющих ограниченную вариацию на всей оси $\mathbb{R}$ функций ряды Котельникова (или кардинальные функции Уиттекера), сходятся равномерно внутри интервала $(0,\pi)$.В [12] оригинально получена оценка сверху наилучшего приближения непрерывных, исчезающих на концах отрезка $[0,\pi]$, функций линейными комбинациями синков. В работах [13], [14], [15] установлены оценки погрешности равномерной аппроксимации на всей оси значениями различных операторов, представляющих собой комбинации синков, на классе равномерно непрерывных и ограниченных на

A.Yu. Trynin, On some properties of sinc approximations of continuous functions on the interval.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00102).

Поступила 17 августа 2015 г.

$\mathbb{R}$ функций. Отметим, что некоторые из рассмотренных в [13], [14] операторов по своей конструкции похожи на операторы, изучаемые в настоящей работе.

К сожалению, при приближении непрерывных функций на отрезке с помощью (1) и многих других операторов вблизи концов отрезка возникает явление Гиббса смотрите, например, [16] и [17].

В [18], [19], [20] и [17] получены различные оценки погрешности аппроксимации аналитических в круге функций с помощью синк-приближений (1). Насколько мне известно, до появления работ [18], [19], [20] и [17] приближение кардинальными функциями Уиттекера на отрезке или ограниченном интервале осуществлялось только для некоторых классов аналитических функций сведением к случаю оси с помощью конформного отображения.

В статье [20] установлены точные по порядку оценки для функций и констант Лебега оператора (1), а также получен пригодный для изучения аппроксимативных свойств оператора (1) аналог формулы Г.П. Неваи. Работы [21], [22] посвящены получению необходимых и достаточных условий поточечной и равномерной внутри интервала $(0, \pi)$ сходимости синк-аппроксимаций (1) для непрерывных на $[0, \pi]$ функций. Авторы интересной статьи [23] используют результаты работы [21] для исследования сходимости алгоритмов многоуровневых синк-аппроксимаций функций с минимальной гладкостью.

В [24] построен пример непрерывной, исчезающей на концах отрезка $[0, \pi]$ функции, для которой последовательность значений операторов (1) неограниченно расходится всюду на интервале $(0, \pi)$. Из результатов исследований в [24] видно, что при попытке приближения негладких непрерывных функций значениями операторов (1) возможно появление «резонанса», приводящего к неограниченному росту погрешности аппроксимации на всём интервале $(0, \pi)$. В этой же работе установлено отсутствие равносходимости значений операторов (1) и рядов или интегралов Фурье на классе непрерывных функций.

Работа [25] посвящена исследованию аппроксимативных свойств операторов интерполирования, построенных по решениям задач Коши с дифференциальными выражениями второго порядка. В [26] приводится ряд приложений результатов работы [25] к исследованию аппроксимативных свойств классических интерполяционных процессов Лагранжа с матрицей узлов интерполирования, каждая строка которой состоит из нулей многочленов Якоби $P_n^{\alpha_n, \beta_n}$ с параметрами, зависящими от n. Статьи [27] и [28] посвящены применению рассматриваемых в [25] операторов к изучению интерполяционных процессов Лагранжа-Штурма-Лиувилля.

Эта краткая историческая справка, конечно, ни в коей мере не претендует на полноту обзора всех работ, посвящённых теореме отсчётов или дискретизации и её обобщений. Тем более, мы здесь не цитируем статьи, из трудно обозримого цикла работ, содержащих большое количество приложений этого направления исследований математического анализа в смежных областях естествознания.

В настоящей работе, используя концепции публикаций [29]–[36], изучаются вопросы возможности приближения непрерывных на отрезке $[0, \pi]$ функций с помощью линейных комбинаций системы синков $\{l_{k,n}\}_{k=0,n=1}^{n,\ \infty}$ и линейных функций. При этом допускается использовать в качестве информации об аппроксимируемой функции только её значения в узлах $x_{k,n} = \frac{\pi k}{n}$ $0 \leq k \leq n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Основное внимание в предлагаемых исследованиях уделяется следующим вопросам. Во-первых, как компенсировать появление нежелательного «резонанса» при аппроксимации негладких функций фрактального вида. Во-вторых, можно ли предложить операторы, лишённые явления Гиббса (Уилбрейама-Гиббса) вблизи концов отрезка $[0, \pi]$. Есть ли возможность сохранить при этом интерполяционное свойство новых операторов.

Поставим в соответствие каждой, принимающей конечные значения на множестве $x_{k,n} = \frac{\pi k}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$, функции f целую функцию LT_n по следующему правилу

$$LT_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n-1}\left\{ f(x_{k,n}) - \frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)k}{n} - f(0)\right\}\frac{\cos nx \sin nx}{nx-k\pi} -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\left\{ \frac{f(x_{k+1,n})+f(x_{k,n})}{2} - \frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k+1)}{2n} - f(0)\right\}\frac{\sin nx \cos nx}{nx-(k+\frac{1}{2})\pi} +$$

$$+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x + f(0). \tag{2}$$

Обратите, пожалуйста, внимание на тот факт, что в качестве информации о функции f оператор (2) использует её значения исключительно в узлах $x_{k,n} = \frac{\pi k}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$. Кроме того, $\cos nx_{k,n} = (-1)^k$ при $n \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$, и поэтому первое слагаемое в определении оператора (2) фактически представляет собой несколько «подправленный» оператор синк-аппроксимаций (1). А второе слагаемое (2) компенсирует нежелательный резонанс, в случае его появления, при приближении негладких функций. Поэтому оператор (2) обладает такими же аппроксимативными свойствами, как и операторы (13), несмотря на то, что значения этого оператора достаточно гладкие и интерполируют приближаемую функцию, т.е. для любых $n \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$, $f(x_{k,n}) = LT_n(f, x_{k,n})$. Применение приёма, использованного при построении оператора $T_\lambda(f,\cdot)$ [25, формула (1.9)], позволяет избавиться от эффекта Гиббса вблизи концов отрезка $[0,\pi]$ при аппроксимации функций с помощью оператора (2).

Для вычислительной математики может быть полезным более компактное представление оператора (2) в эквивалентном виде

$$LT_n(f,x) \equiv \sum_{k=1}^{n-1}\left(f(x_{k,n}) - \frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)k}{n} - f(0)\right)\left\{\frac{\pi^2 \sin 2nx}{2(nx-k\pi)\big(\pi^2-4(nx-k\pi)^2\big)}\right\} +$$

$$+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x + f(0).$$

Теорема 1. *Для любой непрерывной на отрезке* $[0,\pi]$ *функции* f *справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - LT_n(f,\cdot)\|_{C[0,\pi]} = 0.$$

Будем обозначать $C_0[0,\pi]$ пространство непрерывных, исчезающих на концах отрезка, функций с чебышевской нормой, то есть $C_0[0,\pi] = \{f : f \in C[0,\pi],\ f(0) = f(\pi) = 0\}$.

Результаты настоящей работы позволяют также сделать выводы о полноте системы элементов $\{l_{k,n}\}_{k=0,n=1}^{n,\ \infty}$ в нормированных пространствах $C[0,\pi]$ и $C_0[0,\pi]$.

Следствие 1. *Система* $\{l_{k,n}\}_{k=0,n=1}^{n,\ \infty}$ *полна в* $C_0[0,\pi]$, *что согласуется с результатами работы* [12]. *А система функций* $\{1,x\} \cup \{l_{k,n}\}_{k=0,n=1}^{n,\ \infty}$ *полна в* $C[0,\pi]$.

Более того, никакими линейными комбинациями функций системы $\{l_{k,n}\}_{k=0,n=1}^{n,\ \infty}$ невозможно приблизить произвольный элемент пространства $C[0,\pi]$.

Теорема 2. *Линейные оболочки систем функций*

$$\{l_{k,n}\}_{k=0}^{n}, n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

не плотны в $C[0,\pi]$.

2. Вспомогательные утверждения

Сначала приведём некоторые вспомогательные утверждения, которые будем использовать в дальнейшем.

Предложение 1. [20, Теорема 2] *Если функция f непрерывна на отрезке $[0,\pi]$, то для всех $x \in [0,\pi]$ имеют место следующие соотношения*

$$\lim_{n\to\infty}\Big(f(x) - L_n(f,x) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\big)l_{k,n}(x)\Big) = 0, \tag{4}$$

где

$$l_{k,n}(x) = \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi}.$$

Сходимость в (4) поточечная на отрезке $[0,\pi]$ и равномерная внутри интервала $(0,\pi)$, то есть равномерная на каждом компакте, содержащемся в этом интервале.

В предположении $\rho_\lambda \geq 0$, при каждом неотрицательном λ считаем, что функция q_λ такая, что

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\bigg(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\bigg), \quad \text{при } \lambda\to\infty, \quad q_\lambda(0) = 0. \tag{5}$$

Тогда для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$, при $\lambda \to +\infty$, нули решения задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + \big(\lambda - q_\lambda(x)\big)y = 0,\\ y(0,\lambda) = 1,\\ y'(0,\lambda) = h(\lambda), \end{cases} \tag{6}$$

или, при дополнительном условии $h(\lambda) \neq 0$, — задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + \big(\lambda - q_\lambda(x)\big)y = 0,\\ y(0,\lambda) = 0,\\ y'(0,\lambda) = h(\lambda), \end{cases} \tag{7}$$

попадающие в $[0,\pi]$ и перенумерованные в порядке возрастания, обозначим

$$0 \leq x_{0,\lambda} < x_{1,\lambda} < \ldots < x_{n(\lambda),\lambda} \leq \pi \quad (x_{-1,\lambda} < 0, x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi). \tag{8}$$

(Здесь $x_{-1,\lambda} < 0$, $x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi$ обозначают нули продолжения решения задачи Коши (6) или (7), после доопределения каким-либо образом функции q_λ вне отрезка $[0,\pi]$ с сохранением ограниченности вариации). В случае задачи Коши (7), кроме того, потребуем отличие от нуля функции $h(\lambda)$, то есть

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\bigg(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\bigg), \text{ при } \lambda\to\infty, \quad q_\lambda(0) = 0, \quad h(\lambda) \neq 0. \tag{9}$$

В [25] исследуются аппроксимативные свойства операторов типа Лагранжа, построенных по решениям задачи Коши вида (6) или (7) и ставящих в соответствие любой, определённой на отрезке $[0,\pi]$ функции f, интерполирующую её в узлах $\{x_{k,\lambda}\}_{k=0}^n$ непрерывную функцию таким образом

$$S_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda},\lambda)(x - x_{k,\lambda})}f(x_{k,\lambda}) = \sum_{k=0}^{n} s_{k,\lambda}(x) f(x_{k,\lambda}). \tag{10}$$

В частности, установлена справедливость следующего утверждения.

Предложение 2. [25, Предложение 9] *Пусть $y(x,\lambda)$ – решения задачи Коши (6) или (7). Для задачи Коши (6) выполняются соотношения (5). В случае же задачи Коши (7) — (9).*

Если функция $f \in C_0[0,\pi]$, то равномерно по $x \in [0,\pi]$ и по всем $q_\lambda \in V_{C_\lambda}[0,\pi]$ справедливо соотношение

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Big(f(x) - S_\lambda(f,x) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\{f(x_{k+1,\lambda}) - f(x_{k,\lambda})\}s_{k,\lambda}(x)\Big) = 0,$$

где $s_{k,\lambda}(x) = \frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda},\lambda)(x-x_{k,\lambda})}$.

Замечание 1. [25, Предложение 9] *Аналогично убеждаемся в справедливости следующего утверждения в рамках условий предложения 2. Если функция $f \in C_0[0,\pi]$, то равномерно по $x \in [0,\pi]$ и по всем $q_\lambda \in V_{C_\lambda}[0,\pi]$ справедливы соотношения*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Big(f(x) - S_\lambda(f,x) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{f(x_{k-1,\lambda}) - f(x_{k,\lambda})\}s_{k,\lambda}(x)\Big) = 0,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Big(f(x) - S_\lambda(f,x) - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\{f(x_{k+1,\lambda}) - 2f(x_{k,\lambda}) + f(x_{k-1,\lambda})\}s_{k,\lambda}(x)\Big) = 0.$$

Следствие 2. *Если функция $f \in C_0[0,\pi]$, то равномерно по $x \in [0,\pi]$ справедливо утверждение предложения 2 при $\lambda_n = n^2$, $h(\lambda) \neq 0$, $q_\lambda \equiv 0$, $S_{\lambda_n}(f,x) \equiv L_n(f,x)$, а $s_{k,\lambda_n}(x) \equiv l_{k,n}(x)$.*

Доказательство следствия 2. В случае задачи Коши (7), при $\lambda_n = n^2$, $h(\lambda) \neq 0$, $q_\lambda \equiv 0$ оператор (10) превращается в (1), $l_{k,n}(x) \equiv s_{k,\lambda_n}(x)$. Отсюда получаем истинность утверждения следствия 2.

□

Для приближения негладких непрерывных функций, например, функций f, имеющих фрактальный характер, определим новые операторы. Так, операторы $A_n(f,x)$ и $\widetilde{A}_n(f,x)$ ставят в соответствие каждой непрерывной на отрезке $[0,\pi]$ функции f линейную комбинацию синков по правилам

$$A_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{l_{k,n}(x) + l_{k-1,n}(x)}{2}f(x_{k,n}), \tag{11}$$

$$\widetilde{A}_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_{k,n}) + f(x_{k+1,n})}{2}l_{k,n}(x). \tag{12}$$

Обратим внимание на то, что в пространстве $C_0[0,\pi]$ значения $A_n(f,x)$ и $\widetilde{A}_n(f,x)$ совпадают, а в $C[0,\pi]$ ведут себя одинаково во внутренних точках $(0,\pi)$. Здесь приводятся результаты в терминах обоих операторов, чтобы не перепроверять эти факты при использовании (11) и (12) в приложениях.

Модификацию этих операторов после применения приёма, который позволяет избавиться от явления Гиббса вблизи концов отрезка $[0,\pi]$ будем обозначать

$$AT_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{l_{k,n}(x) + l_{k-1,n}(x)}{2}\Big\{f(x_{k,n}) - \frac{\big(f(\pi) - f(0)\big)k}{n} - f(0)\Big\} + \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi}x+$$

$$+f(0) = \sum_{k=0}^{n-1}\Big\{\frac{f(x_{k+1,n}) + f(x_{k,n})}{2} - \frac{\big(f(\pi) - f(0)\big)(2k+1)}{2n} - f(0)\Big\}l_{k,n}(x)+$$

$$+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0). \tag{13}$$

Предложение 3. *Пусть $f \in C[0,\pi]$. Тогда равномерно на $[0,\pi]$*

$$\lim_{n\to\infty} AT_n(f,x)=f(x). \tag{14}$$

Доказательство предложения 3. Сначала заметим, что для $f \in C_0[0,\pi]$, согласно следствию 2 из предложения 2, равномерно на $[0,\pi]$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty}\Big(f(x)-L_n(f,x)-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})\Big)l_{k,n}(x)\Big)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} f(x)-A_n(f,x)=\lim_{n\to\infty} f(x)-\widetilde{A}_n(f,x)=0.$$

Для доказательства (14) заметим, что функция $f(x)-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x-f(0)$ принадлежит пространству $C_0[0,\pi]$. И, следовательно, равномерно на всём отрезке $[0,\pi]$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\Big\{\frac{f(x_{k+1,n})+f(x_{k,n})}{2}-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k+1)}{2n}-f(0)\Big\}l_{k,n}(x)=$$

$$=f(x)-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x-f(0),$$

то есть верно (14). Предложение 3 доказано.

□

Можно также рассматривать операторы, аналогичные (11), (12), (13) вида

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{l_{k,n}(x)+l_{k+1,n}(x)}{2}f(x_{k,n}),$$

$$\widetilde{B}_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1,n})+f(x_{k,n})}{2}l_{k,n}(x),$$

$$BT_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{l_{k,n}(x)+l_{k+1,n}(x)}{2}\Big\{f(x_{k,n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)k}{n}-f(0)\Big\}+$$

$$+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0)=\sum_{k=1}^{n}\Big\{\frac{f(x_{k-1,n})+f(x_{k,n})}{2}-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k-1)}{2n}-f(0)\Big\}l_{k,n}(x)+$$

$$+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0).$$

Наконец, чтобы избавиться от асимметрии в конструкциях введённых операторов, положим

$$C_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{l_{k+1,n}(x)+2l_{k,n}(x)+l_{k-1,n}(x)}{4}f(x_{k,n}), \tag{15}$$

$$\widetilde{C}_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(x_{k+1,n})+2f(x_{k,n})+f(x_{k-1,n})}{4}l_{k,n}(x). \tag{16}$$

Модификацию этих операторов после применения приёма, который позволяет избавиться от явления Гиббса вблизи концов отрезка будем обозначать

$$CT_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{l_{k+1,n}(x)+2l_{k,n}(x)+l_{k-1,n}(x)}{4}\Big\{f(x_{k,n})-$$

$$-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)k}{n}-f(0)\Big\}l_{k,n}(x)+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0),$$

$$\widetilde{CT}_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n-1}\Big\{\frac{f(x_{k+1,n})+2f(x_{k,n})+f(x_{k-1,n})}{4}-$$

$$-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)k}{n}-f(0)\Big\}l_{k,n}(x)+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0).$$

Замечание 2. *Аналогично доказательству предложения 3 устанавливается справедливость следующего утверждения. Пусть $f\in C[0,\pi]$. Тогда равномерно на $[0,\pi]$*

$$\lim_{n\to\infty}BT_n(f,x)=f(x),$$

$$\lim_{n\to\infty}CT_n(f,x)=\lim_{n\to\infty}\widetilde{CT}_n(f,x)=f(x).$$

К сожалению, предлагаемые операторы не обладают интерполяционными свойствами как L_n, то есть, вообще говоря, значения операторов A_n, AT_n, B_n, BT_n, C_n, CT_n, $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{B}_n$, $\widetilde{C}_n$ и $\widetilde{CT}_n$ не обязаны совпадать с аппроксимируемой функцией в точках $x_{k,n}=\frac{k\pi}{n}$, $0\le k\le n,\quad n\in\mathbb{N}$. Зато их аппроксимативные качества существенно менее чувствительны к гладкостным свойствам приближаемой функции. С их помощью можно приближать произволный элемент пространства $C[0,\pi]$.

Замечание 3. *В теории приближения функций классическими алгебраическими многочленами хорошо известны процессы Бернштейна по матрице узлов Чебышёва* [37, см. формулу (11) и предыдущую к ней], *которые в некотором смысле идентичны конструкции $\widetilde{A}_n$ (12) и $\widetilde{C}_n$ (16). Заметим также, что оператор, аналогичный C_n (15) использовался В.П. Скляровым при доказательстве теоремы 1 в* [12], *а также в случае продолжения на всю ось превращается в оператор Блэкмана-Харриса при $m=1$, $a_0=a_1=0,5$* [13, формула (9)]. *Методы исследований аппроксимативных свойств рассматриваемых конструкций операторов у С.Н. Бернштейна, В.П. Склярова, авторов* [13] *и предложенный в данной работе существенно отличаются друг от друга.*

Замечание 4. *Если наряду с операторами (11), (12), (15), (16) рассмотреть, например, операторы вида*

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(x_{k+1,n})+f(x_{k-1,n})}{2}l_{k,n}(x)$$

или

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{l_{k+1,n}(x)+l_{k-1,n}(x)}{2}f(x_{k,n}),$$

то для сходимости их значений к приближаемой функции f потребуются адекватные необходимые и достаточные условия (например, условия, сформулированные в [21, Теоремы 1 и 2]*).*

3. Исследование полноты системы синков в $C_0[0,\pi]$ и $C[0,\pi]$

Результаты предыдущего параграфа позволяют сделать выводы о полноте системы элементов $\{l_{k,n}\}_{k=0,n=1}^{n,\ \infty}$ в нормированных пространствах $C[0,\pi]$ и $C_0[0,\pi]$.

Доказательство следствия 1. Из следствия 2 и предложения 3 вытекает следствие 1.

□

Доказательство теоремы 2. Покажем, что линейные оболочки систем функций (3) не плотны в $C[0,\pi]$. Система (3) является системой Чебышева [38], [39], то есть линейные оболочки функций (3) представляют собой чебышевские пространства [38, Гл. 1, §2]. Действительно, во-первых, это непрерывные функции. Во-вторых, каждый обобщённый полином

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k,n} l_{k,n}(x) = \frac{\sin nx}{\omega_n(x)} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k,n}\omega_n'(x_{k,n})}{(-1)^k n} \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})},$$

где $\omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_{k,n})$, может иметь не более n нулей как произведение многочлена степени n на целую функцию $\frac{\sin nx}{\omega_n(x)}$, отличную от нуля на отрезке $[0,\pi]$. Для каждого элемента $f \in C[0,\pi]$ по теореме Хаара [38, Гл. 1, §2] или теореме Бернштейна [39, Гл. IX, §1] существует единственный элемент наилучшего приближения

$$\Big\| f - \sum_{k=0}^{n} p_{k,n} l_{k,n} \Big\|_{C[0,\pi]} = \inf_{a_{k,n}\in\mathbb{R}} \Big\| f - \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} l_{k,n} \Big\|_{C[0,\pi]} = E_n(f).$$

Рассмотрим функцию $f \equiv 1$. Тогда при $n \geq 2$

$$\Big| \sum_{k=0}^{n} p_{k,n} l_{k,n}\Big(\frac{\pi}{2n}\Big) - \sum_{k=0}^{n} p_{k,n} l_{k,n}\Big(\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n}\Big) \Big| \leq 2E_n(1).$$

В силу биортогональности систем (3) и $\{x_{k,n}\}_{k=0}^{n,}$ $n \in \mathbb{N}$, для всех $0 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ выполняются соотношения $1 - E_n(1) \leq p_{k,n} \leq 1 + E_n(1)$. Если существует последовательность $n_i \nearrow \infty$ при $i \to \infty$ такая, что $E_{n_i}(1) \geq 1$, то теорема 2 доказана. В противном случае оценим разность

$$2E_n(1) \geq \sum_{k=0}^{n} p_{k,n} l_{k,n}\Big(\frac{\pi}{2n}\Big) - \sum_{k=0}^{n} p_{k,n} l_{k,n}\Big(\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n}\Big) =$$

$$= \frac{8}{\pi}\Big\{ p_{0,n}\frac{1}{5} + p_{1,n}\frac{1}{3} - p_{2,n}\frac{1}{3} - \sum_{j=0}^{n-3} \frac{(-1)^j p_{j+3,n}}{(2j+5)(2j+1)} \Big\} \geq$$

$$\geq \frac{8}{\pi}\Big\{ \big(1 - E_n(1)\big)\frac{1}{5} + \big(1 - E_n(1)\big)\frac{1}{3} - \big(1 + E_n(1)\big)\frac{1}{3} +$$

$$+ \big(1 - E_n(1)\big) \sum_{m=0}^{[\frac{n-3}{2}]} \frac{1}{(4m+7)(4m+3)} - \big(1 + E_n(1)\big) \sum_{m=0}^{[\frac{n-3}{2}]+1} \frac{1}{(4m+1)(4m+5)} \Big\}.$$

Предположим, что

$$E_n(1) \to 0, \text{ при } n \to \infty. \tag{17}$$

Учитывая (смотрите [40, §5.1.11, п.4, п.14]), что

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(4m+1)(4m+5)} = \frac{1}{4}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(4m+3)(4m+7)} = \frac{1}{12},$$

после перехода к пределу при $n \to \infty$ получаем противоречие с предположением (17). Следовательно, никакой линейной комбинацией функций системы (3) нельзя равномерно на всём отрезке $[0,\pi]$ приблизить даже функцию $f \equiv 1$. Теорема 2 доказана.

□

Лемма 1. [21, Лемма 1] *Для всех $x \in [0,\pi]$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \big| l_{k,n}(x) + l_{k-1,n}(x) \big| \leq 4\Big(1 + \frac{1}{\pi}\Big),$$

где

$$l_{k,n}(x) = \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi}.$$

Из леммы 1 вытекает ограниченность последовательности констант Лебега операторов A_n вида (11)

$$\|A_n\|_{C[0,\pi]\to C[0,\pi]} \le 2\left(1+\frac{1}{\pi}\right), \text{ для любого } n\in\mathbb{N}.$$

К сожалению, из этого факта нельзя сделать вывод о справедливости, например, соотношения (18). Так как, в силу теоремы Банаха-Штейнхауса ([41, Гл. 4, теорема 2]), требуется ещё установить наличие подмножества M_0 множества непрерывных функций, исчезающих на концах отрезка $[0,\pi]$, линейные комбинации элементов которого лежат всюду плотно в $C_0[0,\pi]$, такого, что для всякой $f\in M_0$

$$\lim_{n\to\infty} A_n(f,x)=f(x) \text{ равномерно на } [0,\pi].$$

Тем не менее, верно следующее

Предложение 4. *Пусть $f\in C[0,\pi]$. Тогда равномерно внутри $(0,\pi)$, т.е. равномерно на любом компакте, содержащемся в интервале $(0,\pi)$, имеют место соотношения*

$$\lim_{n\to\infty} A_n(f,x)=\lim_{n\to\infty}\widetilde{A}_n(f,x)=f(x). \tag{18}$$

Для того чтобы сходимость в (18) была равномерная на $[0,\pi]$, необходимо и достаточно, чтобы $f\in C_0[0,\pi]$.

Доказательство предложения 4. Докажем (18) для произвольной непрерывной на $[0,\pi]$ функции f. Преобразуем левую часть (4) согласно определениям (11) и (12) следующим образом

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-L_n(f,x)-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})\Big)l_{k,n}(x)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\big(f(x)-\widetilde{A}_n(f,x)-f(\pi)l_{n,n}(x)\big)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-A_n(f,x)-\frac{f(\pi)}{2}l_{n,n}(x)-\frac{f(0)}{2}l_{0,n}(x)\right). \tag{19}$$

Возьмём произвольный отрезок $[a,b]\subset(0,\pi)$. Согласно утверждению предложения 1 равномерно на $[a,b]$ выполняется соотношение (4), то есть пределы в смысле равномерной сходимости на $[a,b]$ в (19) равны нулю. Но для всех $x\in[a,b]$

$$\big|f(\pi)l_{n,n}(x)\big|\le\|f\|_{C[0,\pi]}\frac{1}{n(\pi-b)}\to 0, \text{ при } n\to\infty,$$

$$\big|f(0)l_{0,n}(x)\big|\le\|f\|_{C[0,\pi]}\frac{1}{na}\to 0, \text{ при } n\to\infty.$$

Пусть теперь $f\in C_0[0,\pi]$. Тогда, согласно предложению 2, равномерно на $[0,\pi]$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-L_n(f,x)-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})\Big)l_{k,n}(x)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} f(x)-A_n(f,x)=\lim_{n\to\infty} f(x)-\widetilde{A}_n(f,x)=0.$$

Достаточность принадлежности функции f пространству $C_0[0,\pi]$ для того, чтобы сходимость в (18) была равномерной, доказана.

Необходимость принадлежности функции f пространству $C_0[0,\pi]$ для того, чтобы сходимость в (18) была равномерной на $[0,\pi]$ вытекает из теоремы 2.

$\square$

Замечание 5. *Аналогично устанавливается, что для $f \in C[0,\pi]$ равномерно внутри $(0,\pi)$ имеют место соотношения*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f,x) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{B}_n(f,x) = f(x), \tag{20}$$

$$\lim_{n\to\infty} C_n(f,x) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{C}_n(f,x) = f(x). \tag{21}$$

Для того чтобы сходимость в (20) и (21) была равномерная на $[0,\pi]$, необходимо и достаточно, чтобы $f \in C_0[0,\pi]$.

Замечание 6. *Заметим, что при построении операторов AT_n, BT_n, CT_n, $\widetilde{CT}_n$ вместо множества функций $\{1,x\}$ систему $\{l_{k,n}\}_{k=0,n=1}^{n,\ \infty}$ можно дополнить другой удобной парой линейно независимых функций, например, $\{l_{0,1}, l_{1,1}\}$.*

Прежде чем доказывать теорему 1, установим справедливость одного вспомогательного утверждения.

Лемма 2. *Для любой непрерывной на отрезке $[0,\pi]$ функции f справедливо следующее представление погрешности аппроксимации с помощью операторов LT_n*

$$\begin{gathered}
|f(x) - LT_n(f,x)| = \\
= \Bigg| f(x) - \Bigg[\sum_{k=0}^{n-1}\Bigg\{ f(x_{2k,2n}) - \frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)k}{n} - f(0)\Bigg\}\frac{\sin 2nx}{2(nx-k\pi)} + \\
+ \sum_{k=0}^{n-1}\Bigg\{\frac{f(x_{2k+1,2n}) - f(x_{2k,2n})}{2} - \frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)}{4n}\Bigg\}\times \\
\times\left(\frac{\sin 2nx}{2(nx-k\pi)} - \frac{\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}\right) - \\
- \sum_{k=0}^{n-1}\Bigg\{\frac{f(x_{2k+2,2n}) + f(x_{2k,2n})}{2} - \frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k+1)}{2n} - f(0)\Bigg\}\times \\
\times\frac{\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi} + \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x + f(0)\Bigg] + \\
+ \sum_{k=0}^{n-1}\Bigg\{\frac{f(x_{2k+1,2n}) - f(x_{2k,2n})}{2} - \frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)}{4n}\Bigg\}\left(\frac{\sin 2nx}{2(nx-k\pi)} - \frac{\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}\right)\Bigg|.
\end{gathered}$$

Доказательство леммы 2. Возьмём произвольную непрерывную на отрезке $[0,\pi]$ функцию f. Так как при $k=0$ $f(x_{k,n}) - \frac{\left(f(\pi)-f(0)\right)k}{n} - f(0) = 0$, получаем равенство

$$\begin{gathered}
|f(x) - LT_n(f,x)| = \Bigg| f(x) - \Bigg[\cos nx\sum_{k=0}^{n-1}\Bigg\{ f(x_{k,n}) - \frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)k}{n} - f(0)\Bigg\}\frac{(-1)^{2k}\sin nx}{nx-k\pi} + \\
+ \sin nx\sum_{k=0}^{n-1}\Bigg\{\frac{f(x_{k+1,n}) + f(x_{k,n})}{2} - \frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k+1)}{2n} - f(0)\Bigg\}\frac{(-1)^{2k+1}\cos nx}{nx-(k+\frac{1}{2})\pi} + \\
+ \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x + f(0)\Bigg]\Bigg| = \\
= \Bigg| f(x) - \Bigg[\cos nx\sum_{k=0}^{n-1}\Bigg\{ f(x_{2k,2n}) - \frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)2k}{2n} - f(0)\Bigg\}\frac{(-1)^{2k}\sin nx}{nx-k\pi} +
\end{gathered}$$

$$+\sin nx\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+2,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k+2)}{2n}-f(0)+f(x_{2k,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)2k}{2n}-f(0)}{2}\right\}\times$$
$$\times\frac{(-1)^{2k+1}\cos nx}{nx-(k+\frac{1}{2})\pi}+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0)\Bigg]\Bigg|.$$

К полученному представлению добавим и отнимем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+1,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k+1)}{2n}-f(0)-f(x_{2k,2n})+\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)2k}{2n}+f(0)}{2}\right\}\times$$
$$\times\left(\frac{(-1)^{2k}\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+\frac{(-1)^{2k+1}\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}\right).$$

Теперь имеем соотношение

$$|f(x)-LT_n(f,x)|=$$
$$=\Bigg|f(x)-\Bigg[\cos nx\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f(x_{2k,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)2k}{2n}-f(0)\right\}\frac{(-1)^{2k}\sin nx}{nx-k\pi}+$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+1,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k+1)}{2n}-f(0)-f(x_{2k,2n})+\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)2k}{2n}+f(0)}{2}\right\}\times$$
$$\times\left(\frac{(-1)^{2k}\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+\frac{(-1)^{2k+1}\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}\right)+$$
$$+\sin nx\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+2,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k+2)}{2n}-f(0)+f(x_{2k,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)2k}{2n}-f(0)}{2}\right\}\times$$
$$\times\frac{(-1)^{2k+1}\cos nx}{nx-(k+\frac{1}{2})\pi}+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0)\Bigg]+$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+1,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k+1)}{2n}-f(0)-f(x_{2k,2n})+\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)2k}{2n}+f(0)}{2}\right\}\times$$
$$\times\left(\frac{(-1)^{2k}\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+\frac{(-1)^{2k+1}\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}\right)\Bigg|.$$

После дальнейших преобразований получаем представление

$$|f(x)-LT_n(f,x)|=$$
$$=\Bigg|f(x)-\Bigg[\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f(x_{2k,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)2k}{2n}-f(0)\right\}\frac{\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+1,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k+1)}{2n}-f(x_{2k,2n})+\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)2k}{2n}}{2}\right\}\times$$
$$\times\left(\frac{\sin 2nx}{2nx-2k\pi}-\frac{\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}\right)-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+2,2n})-\frac{\left(f(\pi)-f(0)\right)(2k+2)}{2n}+f(x_{2k,2n})-\frac{\left(f(\pi)-f(0)\right)2k}{2n}-2f(0)}{2}\right\}\times$$

$$\left.\times\frac{\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0)\right]+$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+1,2n})-f(x_{2k,2n})}{2}-\frac{\left(f(\pi)-f(0)\right)}{4n}\right\}\left(\frac{\sin 2nx}{2nx-2k\pi}-\frac{\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}\right)\right|.$$

Отсюда следует утверждение леммы 2.

Доказательство теоремы 1. Возьмём произвольную непрерывную на отрезке $[0,\pi]$ функцию f и при любом натуральном n оценим модуль уклонения от неё значения оператора (2). В силу леммы 2 уклонение значения оператора LT_n от функции f представим в виде

$$|f(x)-LT_n(f,x)|=$$

$$=\left|f(x)-\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f(x_{2k,2n})-\frac{\left(f(\pi)-f(0)\right)2k}{2n}-f(0)\right\}\frac{(-1)^{2k}\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+\right.\right.$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+1,2n})-\frac{\left(f(\pi)-f(0)\right)(2k+1)}{2n}-f(0)-f(x_{2k,2n})+\frac{\left(f(\pi)-f(0)\right)2k}{2n}+f(0)}{2}\right\}\times$$

$$\times\left(\frac{(-1)^{2k}\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+\frac{(-1)^{2k+1}\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+2,2n})-\frac{\left(f(\pi)-f(0)\right)(2k+2)}{2n}-f(0)+f(x_{2k,2n})-\frac{\left(f(\pi)-f(0)\right)2k}{2n}-f(0)}{2}\right\}\times$$

$$\left.\frac{(-1)^{2k+1}\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0)\right]+$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+1,2n})-f(x_{2k,2n})}{2}-\frac{\left(f(\pi)-f(0)\right)}{4n}\right\}\left(\frac{(-1)^{2k}\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+\frac{(-1)^{2k+1}\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}\right)\right|.$$

Раскроем скобки во втором слагаемом суммы, заключённой в квадратные скобки, а в числителе первого множителя третьего слагаемого этой суммы добавим и отнимем $f(x_{2k+1,2n})-\frac{\left(f(\pi)-f(0)\right)(2k+1)}{2n}-f(0)$. После перегруппировки получим представление

$$|f(x)-LT_n(f,x)|=\left|f(x)-\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f(x_{2k,2n})-\frac{\left(f(\pi)-f(0)\right)2k}{2n}-f(0)\right\}\frac{(-1)^{2k}\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+\right.\right.$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+1,2n})-\frac{\left(f(\pi)-f(0)\right)(2k+1)}{2n}-f(0)-f(x_{2k,2n})+\frac{\left(f(\pi)-f(0)\right)2k}{2n}+f(0)}{2}\right\}\times$$

$$\times\frac{(-1)^{2k}\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+1,2n})-\frac{\left(f(\pi)-f(0)\right)(2k+1)}{2n}-f(0)-f(x_{2k,2n})+\frac{\left(f(\pi)-f(0)\right)2k}{2n}+f(0)}{2}\right\}\times$$

$$\times\frac{(-1)^{2k+1}\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+1,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k+1)}{2n}-f(0)-f(x_{2k,2n})+\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)2k}{2n}+f(0)}{2}\right\}\times$$

$$\times\frac{(-1)^{2k+1}\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+2,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k+2)}{2n}-f(0)+f(x_{2k+1,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k+1)}{2n}-f(0)}{2}\right\}\times$$

$$\left.\times\frac{(-1)^{2k+1}\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0)\right]+$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+1,2n})-f(x_{2k,2n})}{2}-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)}{4n}\right\}\left(\frac{(-1)^{2k}\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+\frac{(-1)^{2k+1}\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}\right)\right|.$$

Далее, получаем эквивалентное представление

$$|f(x)-LT_n(f,x)|=$$

$$=\left|f(x)-\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f(x_{2k,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)2k}{2n}-f(0)\right\}\frac{(-1)^{2k}\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+\right.\right.$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+1,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k+1)}{2n}-f(0)-f(x_{2k,2n})+\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)2k}{2n}+f(0)}{2}\right\}\times$$

$$\times\frac{(-1)^{2k}\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+2,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k+2)}{2n}-f(0)+f(x_{2k+1,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k+1)}{2n}-f(0)}{2}\right\}\times$$

$$\left.\times\frac{(-1)^{2k+1}\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0)\right]+$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+1,2n})-f(x_{2k,2n})}{2}-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)}{4n}\right\}\left(\frac{(-1)^{2k}\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+\frac{(-1)^{2k+1}\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}\right)\right|=$$

$$=\left|f(x)-\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+1,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k+1)}{2n}-f(0)+f(x_{2k,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)2k}{2n}-f(0)}{2}\right\}\times\right.\right.$$

$$\times\frac{(-1)^{2k}\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+2,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k+2)}{2n}-f(0)+f(x_{2k+1,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2k+1)}{2n}-f(0)}{2}\right\}\times$$

$$\left.\times\frac{(-1)^{2k+1}\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0)\right]+$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+1,2n})-f(x_{2k,2n})}{2}-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)}{4n}\right\}\left(\frac{(-1)^{2k}\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+\frac{(-1)^{2k+1}\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}\right)\right|.$$

Объединяя первую и вторую суммы в квадратных скобках в одну, получим соотношение

$$|f(x)-LT_n(f,x)|=$$
$$=\left|f(x)-\left[\sum_{j=0}^{2n-1}\left\{\frac{f(x_{j+1,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(j+1)}{2n}-f(0)+f(x_{j,2n})-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)j}{2n}-f(0)}{2}\right\}\times\right.\right.$$
$$\left.\times\frac{(-1)^j\sin 2nx}{2nx-j\pi}+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0)\right]+$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+1,2n})-f(x_{2k,2n})}{2}-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)}{4n}\right\}\left(\frac{(-1)^{2k}\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+\frac{(-1)^{2k+1}\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}\right)\right|=$$
$$=\left|f(x)-\left[\sum_{j=0}^{2n-1}\left\{\frac{f(x_{j+1,2n})+f(x_{j,2n})}{2}-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)(2j+1)}{4n}-f(0)\right\}\frac{(-1)^j\sin 2nx}{2nx-j\pi}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0)\right]+$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+1,2n})-f(x_{2k,2n})}{2}-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)}{4n}\right\}\left(\frac{(-1)^{2k}\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+\frac{(-1)^{2k+1}\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}\right)\right|.$$

В силу определения оператора (13) имеем представление

$$|f(x)-LT_n(f,x)|=\Bigg|f(x)-AT_{2n}(f,x)+$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+1,2n})-f(x_{2k,2n})}{2}-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)}{4n}\right\}\left(\frac{(-1)^{2k}\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+\frac{(-1)^{2k+1}\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}\right)\right|.$$

Теперь для равномерной на отрезке $[0,\pi]$ оценки погрешности приближения произвольной непрерывной функции f значениями оператора (2) воспользуемся неравенством треугольника

$$|f(x)-LT_n(f,x)|\le|f(x)-AT_{2n}(f,x)|+$$
$$+\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{2k+1,2n})-f(x_{2k,2n})}{2}-\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)}{4n}\right\}\left(\frac{(-1)^{2k}\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+\frac{(-1)^{2k+1}\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}\right)\right|\le$$
$$\le|f(x)-AT_{2n}(f,x)|+$$
$$+\left\{\frac{1}{2}\omega\Big(f,\frac{\pi}{2n}\Big)+\left|\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)}{4n}\right|\right\}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{(-1)^{2k}\sin 2nx}{2nx-2k\pi}+\frac{(-1)^{2k+1}\sin 2nx}{2nx-(2k+1)\pi}\right|\le$$
$$\le|f(x)-AT_{2n}(f,x)|+$$
$$+\left\{\frac{1}{2}\omega\Big(f,\frac{\pi}{2n}\Big)+\left|\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)}{4n}\right|\right\}\sum_{k=0}^{2n-1}\left|\frac{(-1)^{k+1}\sin 2nx}{2nx-(k+1)\pi}+\frac{(-1)^{k}\sin 2nx}{2nx-k\pi}\right|.$$

В силу леммы 1 и предложения 3 получаем соотношение

$$|f(x)-LT_n(f,x)|\le|f(x)-AT_{2n}(f,x)|+$$
$$+\left\{\frac{1}{2}\omega\Big(f,\frac{\pi}{2n}\Big)+\left|\frac{\big(f(\pi)-f(0)\big)}{4n}\right|\right\}4\left(1+\frac{1}{\pi}\right)=o(1).$$

Теорема 1 доказана.

□

Рассмотрим оператор, который ставит в соответствие каждой, принимающей конечные значения на множестве $x_{k,2n} = \frac{\pi k}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le 2n$, функции f целую функцию Q_n по следующему правилу

$$Q_n(f,x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\cos nx \sin nx}{nx - i\pi} f\Big(\frac{i\pi}{n}\Big) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\sin nx \cos nx}{nx - (i+\frac{1}{2})\pi} f\Big(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\Big). \tag{22}$$

Этот оператор, в отличие от (2), обладает следующим интерполяционным свойством, для любых $n \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le 2n$ $f(x_{k,2n}) = Q_n(f, x_{k,2n})$. И поэтому, на первый взгляд, оператор (22) должен обладать лучшими аппроксимативными качествами, чем (2). Однако, его значения, как и значения синк-аппроксимаций (1), приближают только достаточно гладкие функции. Например, из [21, Теорема 2] при $\lambda_n = n^2$, $q_{\lambda_n} \equiv 0$, $h(\lambda_n) \ne 0$ вытекает

Следствие 3. *Пусть $f \in C_0[0,\pi]$. Для любого натурального n равномерно на отрезке $[0,\pi]$ справедливо*

$$\lim_{n\to\infty} \left| f(x) - Q_n(f,x) - \frac{\sin 2nx}{2\pi} \sum_{m=1}^{[\frac{2n-1}{2}]}{}' \frac{f\big(\frac{\pi(2m+1)}{2n}\big) - 2f\big(\frac{2\pi m}{2n}\big) + f\big(\frac{\pi(2m-1)}{2n}\big)}{[\frac{2nx}{\pi}] - 2m} \right| = 0.$$

А для равенства

$$\lim_{n\to\infty} \|f - Q_n(f,\cdot)\|_{C_0[0,\pi]} = 0$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\le p\le 2n} \left| \sum_{m=1}^{[\frac{2n-1}{2}]}{}' \frac{f\big(\frac{\pi(2m+1)}{2n}\big) - 2f\big(\frac{2\pi m}{2n}\big) + f\big(\frac{\pi(2m-1)}{2n}\big)}{p - 2m} \right| = 0,$$

где штрих у сумм означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю.

Доказательство следствия 3. Сделаем следующие эквивалентные преобразования

$$Q_n(f,x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\cos nx \sin nx}{nx - i\pi} f\Big(\frac{i\pi}{n}\Big) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\sin nx \cos nx}{nx - (i+\frac{1}{2})\pi} f\Big(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\Big) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{\sin 2nx}{2nx - 2i\pi} f\Big(\frac{2i\pi}{2n}\Big) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\sin 2nx}{2nx - (2i+1)\pi} f\Big(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\Big) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{2i} \sin 2nx}{2nx - 2i\pi} f\Big(\frac{2i\pi}{2n}\Big) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2i+1} \sin 2nx}{2nx - (2i+1)\pi} f\Big(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k \sin 2nx}{2nx - k\pi} f\Big(\frac{k\pi}{2n}\Big) = L_{2n}(f,x).$$

Теперь из [21, Теорема 2] при $\lambda_n = 4n^2$, $q_{\lambda_n} \equiv 0$, $h(\lambda_n) \ne 0$, теоремы 2 и следствия 1 вытекает справедливость следствия 3.

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. F. Stenger *Numerical Metods Based on Sinc and Analytic Functions*, (N.Y., Springer Ser. Comput. Math., **20** Springer-Verlag, 1993)
2. P.L. Butzer *A retrospective on 60 years of approximation theory and associated fields* // Journal of Approximation Theory. 2009. **160**, P. 3–18.
3. J.R. Higgins *Five short stories about the cardinal series* // Bulletin (New Series) Of the american mathematical society. 1985. **12**(1). P. 45–89.
4. M.T. Alquran, K. Al-Khaled *Numerical Comparison of Methods for Solving Systems of Conservation Laws of Mixed Type* // Int. Journal of Math. Analysis. 2011. **5**(1). P. 35–47.
5. Кашин Б.С., Саакян А.А. *Ортогональные ряды.* М.: Изд-во АФЦ. 1999.
6. Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам.* Ижевск. "Регулярная и хаотическая динамика". 2001.
7. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. *Основные конструкции всплесков* // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. **3**(4). С. 999–1028.
8. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. *Основы теории всплесков* // Успехи математических наук. 1998. **53**, 6(324). С. 53–128.
9. J.L.Jr. Brown *On the error in reconstructing a nonbandlimited function by means of bandpass sampling theorem* // J. of Mathematical Analysis and Applications.1967. **18**. P. 75–84.
10. P.L. Butzer, J.R. Higgins, R.L. Stens *Classical and approximate sampling theorems: studies in the $L^p(\mathbb{R})$ and the uniform norm* // Journal of Approximation Theory. 2005. **137**. P. 250–263.
11. Шмуклер А.И., Шульман Т.А. *О некоторых свойствах рядов Котельникова* // Известия вузов. Математика. 1974. № 3. С. 93–103.
12. V.P. Sklyarov *On the best uniform sinc-approximation on a finite interval* // East Journal on Approximations. 2008. **14**(2). P. 183–192.
13. A. Kivinukk, G. Tamberg *On Blackman–Harris windows for Shannon sampling series* // Sampl. Theory Signal Image Process. 2007. **6**. P. 87–108.
14. A. Kivinukk, G. Tamberg *Interpolating generalized Shannon sampling operators, their norms and approximation propositionositionositionerties* // Sampl. Theory Signal Image Process. 2009. **8**. P. 77–95.
15. G. Schmeisser *Interconnections Between Multiplier Methods and Window Methods in Generalized Sampling* // Sampl. Theory Signal Image Process. 2010. **9**(1–3). P. 1–24.
16. Abdul J. Jerri *Lanczos-Like σ-Factors for Reducing the Gibbs Phenomenon in General Orthogonal Expansions and Other Representations* // Journal of Computational Analysis and Applications. 2000. **2**(2). P. 111–127.
17. A.Yu. Trynin, V.P. Sklyarov *Error of sinc approximation of analytic functions on an interval* // Sampling Theory in Signal and Image Processing. 2008. **7** (3). P. 263–270.
18. Трынин А.Ю. *Об аппроксимации аналитических функций операторами Лагранжа-Штурма-Лиувилля* // Тезисы докладов X Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». 27 января-2 февраля 2000 г., Изд-во Сарат. ун-та, Саратов. С. 140–141.
19. Трынин А.Ю. *Об оценке аппроксимации аналитических функций интерполяционным оператором по синкам* // Математика. Механика., Изд-во Сарат. ун-та, Саратов. 2005. **7**. С. 124–127.
20. Трынин А.Ю. *Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc-приближений непрерывных функций на отрезке* // Сибирский математический журнал. 2007. **48**(5). С. 1155–1166.
21. Трынин А.Ю. *Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке* // Математический сборник. 2007. **198**(10). С. 141—158.
22. Трынин А.Ю. *Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке* // Известия высш. уч-ых заведений. Математика. 2008. 6, С. 66–78.
23. Oren E. Livne, Achi E. Brandt *MuST: The multilevel sinc transform* // SIAM J. on Scientific Computing. 2011. **33**(4). P. 1726–1738.
24. Трынин А.Ю. *О расходимости синк-приближений всюду на* $(0,\pi)$ // Алгебра и анализ. 2010. **22** (4). С. 232–256.

25. Трынин А.Ю. *Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера-Котельникова-Шеннона для непрерывных функций на отрезке* // Математический сборник. 2009. **200**(11). С. 61–108.
26. Трынин А.Ю. *Об операторах интерполирования по решениям задачи Коши и многочленах Лагранжа–Якоби* // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. **75**(6). С. 129-–162.
27. Трынин А.Ю. *Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля* // Известия высш. уч-ых заведений. Математика. 2000. **9**(460). С. 60–73.
28. Трынин А.Ю. *О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля* // Известия высш. уч-ых заведений. Математика. 2010. 11, С. 74–85.
29. Голубов Б.И. *Сферический скачок функции и средние Бохнера–Рисса сопряженных кратных рядов и интегралов Фурье* // Матем. заметки. 2012. **91**(4). С. 506–514.
30. Голубов Б.И. *Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье* // Матем. заметки. 1985. **37:1**. С. 13–24.
31. Дьяченко М.И. *Об одном классе методов суммирования кратных рядов Фурье* // Математический сборник. 2013. **204:3**, С. 3—18.
32. Дьяченко М.И. *Равномерная сходимость гиперболических частичных сумм кратных рядов Фурье* // Матем. заметки. 2004. **76:5**. С. 723–731.
33. Половинкин Е.С. *Об интегрировании многозначных отображений* // ДАН. 1983. **281:5**. С. 1069–1074.
34. Борисов Д.И., Гадыльшин Р.Р. *О спектре периодического оператора с малым локализованным возмущением* // Изв. РАН. Сер. матем., 2008, **72** №4. С. 37–66.
35. Борисов Д.И., Гадыльшин Р.Р. *О спектре самосопряженного дифференциального оператора на оси с быстро осциллирующими коэффициентами* // Матем. сб., 2007. **198** №8. С. 3–34.
36. Половинкин Е.С. *О некоторых свойствах производных многозначных отображений* // Труды МФТИ. 2012. **4:4**. С. 141–154.
37. Бернштейн С.Н. *Об одном видоизменении интерполяционной формулы Лагранжа* // (Собрание сочинений. Конструктивная теория функций. Т. 2.) 1954. М.: Изд-во АН СССР. С. 130–140.
38. Даугавет И.К. *Введение в теорию приближения функций.* Изд-во Ленинградского университета. Ленинград. 1977.
39. Карлин С., Стадден В. *Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике.* М.: «Наука». Главн. ред. физико-математической литературы. 1976.
40. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды.* М.: «Наука». Главн. ред. физико-математической литературы. 1981.
41. Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа.* М.: «Наука». Главн. ред. физико-математической литературы. 1965.

Александр Юрьевич Трынин,
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, 83
410012, г. Саратов, Россия
E-mail: atrynin@gmail.com