ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 4 (2015). С. 146-154.

УДК 517.547.22

ЗАДАЧА О НАИМЕНЬШЕМ ТИПЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ПОРЯДКА $\rho \in (0, 1)$ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ НУЛЯМИ ЗАДАННЫХ ПЛОТНОСТЕЙ И ШАГА

О.В. ШЕРСТЮКОВА

Посвящается памяти профессора
Игоря Федоровича Красичкова–Терновского

Аннотация. Рассматривается задача о наименьшем возможном значении, которое может принимать тип при порядке $\rho \in (0, 1)$ целых функций, все нули которых лежат на одном луче и имеют заданные плотности и шаг. Доказана точность полученной ранее автором оценки для типа указанных функций. Дано подробное обоснование конструкции экстремальной целой функции в этой задаче.

Ключевые слова: тип целой функции, верхняя, нижняя плотности и шаг последовательности нулей, экстремальная задача.

Mathematics Subject Classification: 30D15

1. Введение

В работе автора [1] поставлена следующая задача. Рассматриваются все целые функции, нули которых расположены на одном луче и имеют заданные верхнюю, нижнюю плотности и шаг при показателе $\rho \in (0, 1)$. Требуется указать наименьшую возможную величину для типа при порядке ρ таких функций. В статье [1] приводится доказательство точной оценки снизу для типа и коротко обсуждается идея построения экстремальной функции. Работа служит продолжением статьи [1] и содержит подробное описание конструкции нулевого множества целой функции, обладающей наименьшим возможным типом. Проверка того, что построенный пример является экстремальным, сопряжена с весьма громоздкими выкладками и потребовала серьезных усилий и времени. Именно поэтому такое построение излагается нами отдельно. В результате исследование поставленной в [1] задачи приобретает должную законченность.

Приведем необходимые определения. Для целой функции $f(z)$ тип при порядке $\rho > 0$ задается формулой

$$\sigma_\rho(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f(z)|$$

и часто называется коротко ρ-типом. Предполагаем, что функция $f(z)$ имеет бесконечно много нулей; нули выписаны с учетом кратностей в порядке возрастания модулей и образуют последовательность $\Lambda_f = \Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$. Пусть $n_\Lambda(r) = \sum\limits_{|\lambda_n|\leqslant r} 1$ обозначает считающую функцию последовательности Λ. Верхней ρ-плотностью Λ называется величина

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho}.$$

O.V. Sherstyukova, The problem on the minimal type of entire functions of order $\rho \in (0,1)$ with positive zeroes of prescribed densities and step.

Поступила 1 октября 2015 г.

Соответствующий нижний предел называется нижней ρ-плотностью Λ и обозначается $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)$. Введем еще характеристику

$$h_\rho(\Lambda) = \varliminf_{n\to\infty} \left(|\lambda_{n+1}|^\rho - |\lambda_n|^\rho\right),$$

называемую ρ-шагом последовательности Λ. Для любой последовательности Λ конечной верхней ρ-плотности справедливо соотношение $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)\, h_\rho(\Lambda) \leqslant 1$.

Далее изучаем только целые функции $f(z)$ с нулями на луче, считая для определенности все нули положительными. Зададим обе плотности и шаг последовательности нулей $\Lambda_f = \Lambda$ при некотором показателе $\rho \in (0,1)$. Точнее говоря, зафиксируем числа ρ, β, α, h, удовлетворяющие условиям

$$\rho \in (0,\, 1), \qquad \beta > 0, \qquad \alpha \in [0,\, \beta], \qquad h \in [0,\, 1/\beta],$$

и рассмотрим экстремальную величину

$$s(\alpha,\beta,h;\rho) \equiv \inf\left\{\sigma_\rho(f) : \Lambda_f \subset \mathbb{R}_+, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f) = \beta, \underline{\Delta}_\rho(\Lambda_f) \geq \alpha, h_\rho(\Lambda_f) \geq h\right\}. \tag{1}$$

Для ρ-типов целых функций из определения (1) доказана оценка (см. [1])

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} + \sup_{a>0} \varphi(a), \tag{2}$$

где обозначено

$$\varphi(a) = \varphi_{\alpha,\,\beta,\,h,\,\rho}(a) = \int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau + \frac{s}{h} \int\limits_{a}^{a\nu^{1/\rho}} \frac{\nu\tau^{-\rho} - a^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau, \tag{3}$$

$$s = 1 - \beta h \in [0,\, 1], \qquad \nu = \frac{1-\alpha h}{1-\beta h} \in [1,\, +\infty].$$

При $h = 0$ и $h = 1/\beta$ формулу (3) нужно понимать в предельном смысле.

Так при $h = 0$ второе слагаемое в (3) приобретает значение, равное

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{a}^{a\nu^{1/\rho}} \frac{\nu\tau^{-\rho} - a^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau = (\beta-\alpha) \lim_{h\to 0} \int\limits_{a}^{a\nu^{1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau = 0.$$

Мы применили правило Лопиталя, формулу Лейбница дифференцирования интеграла по параметру и учли, что $\nu^{1/\rho} \to 1$ при $h \to 0$. Таким образом, второе слагаемое в формуле (3) пропадает, и оценка (2) дает точный результат В. Б. Шерстюкова из работы [2]:

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau.$$

В случае $h = 1/\beta$, учитывая, что $\nu^{1/\rho} \to +\infty$ при $h \to 1/\beta$, и раскрывая неопределенность, получаем, что значение второго слагаемого в (3) равно

$$\lim_{h\to 1/\beta} \frac{s}{h} \int\limits_{a}^{a\nu^{1/\rho}} \frac{\nu\tau^{-\rho} - a^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau =$$

$$= \beta \lim_{h\to 1/\beta} (1-\beta h) \int\limits_{a}^{a\nu^{1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau = (\beta-\alpha) \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau.$$

Теперь формула (3) принимает вид

$$\varphi(a) = \int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau \;+\; (\beta-\alpha) \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau,$$

откуда

$$\sup_{a>0}\ \varphi(a) \;\geq\; \lim_{a\to+0}\ \varphi(a) \;=\; \frac{\pi(\beta-\alpha)}{\sin\pi\rho}.$$

Здесь оценка (2) дает неравенство

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}.$$

Поскольку всегда справедливо противоположное неравенство, это приводит к точной формуле

$$\sigma_\rho(f) = \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}. \tag{4}$$

Тот факт, что формула (4) справедлива при любом значении $\alpha \in [0,\, \beta]$, лишь бы $h = 1/\beta$, по-видимому, является новым. (Ранее считалось, что по правилу (4) вычисляется тип при порядке $\rho \in (0,\, 1)$ только целой функции с измеримой последовательностью положительных нулей, т. е. такой, что $\Lambda_f \subset \mathbb{R}_+$ и существует предел $\lim\limits_{r\to+\infty} r^{-\rho}\, n_\Lambda(r) = \beta$.)

Отметим, что наш интерес к задаче (1) вызван работой А. Ю. Попова [3], где вопрос о наименьшем типе изучался без учета нижней плотности и шага последовательностей нулей. Подробное обсуждение экстремальной проблемы (1) и обзор предшествующих результатов см. в [1].

В частном случае $\alpha = 0$ оценка (2) получена автором в [4], а соответствующий пример, подтверждающий ее точность, построен в [5]. Результаты [4], [5] показывают, что

$$s(\beta, h; \rho) := s(0, \beta, h; \rho) = h^{-1} \sup_{a>0} \left\{ a^{-\rho} \ln \frac{1+a}{(1+as^{-1/\rho})^s} \;+\; \int\limits_{a}^{as^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau \right\}$$

со значением $s = 1 - \beta h$.

Покажем, что и в общем случае $\alpha \in [0,\, \beta]$ оценка (2) достигается. При этом значения параметров $\alpha = 0$, $\alpha = \beta$, $h = 0$, $h = 1/\beta$ можно исключить из рассмотрения. Тем самым, будет обосновано равенство

$$s(\alpha, \beta, h; \rho) \;=\; \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} \;+\; \sup_{a>0}\ \varphi(a)$$

с функцией $\varphi(a)$, определенной в (3), и задача (1) получит полное решение.

2. Доказательство точности оценки (2)

Итак, зафиксируем числа

$$\rho \in (0,\, 1), \qquad \beta > 0, \qquad \alpha \in (0,\, \beta), \qquad h \in (0,\, 1/\beta).$$

Построим последовательность $\Lambda_0 = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ так, чтобы

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_0) = \beta, \qquad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda_0) = \alpha, \qquad h_\rho(\Lambda_0) = h,$$

а ρ-тип соответствующего канонического произведения

$$f_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

вычислялся по формуле
$$\sigma_\rho(f_0) \;=\; \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} \;+\; \max_{a>0}\; \varphi(a). \tag{6}$$
Функция $\varphi(a)$, определенная по правилу (3) с параметрами
$$s = 1-\beta h \in (0,\,1), \qquad \nu = \frac{1-\alpha h}{1-\beta h} \in (1,\,+\infty),$$
положительна и непрерывна при $a>0$, причем
$$\lim_{a\to+0}\varphi(a) = \lim_{a\to+\infty}\varphi(a) = 0.$$
Поэтому в формуле (6) по сравнению с (2) фигурирует max вместо sup. Обозначим через $a_0 = a_0(\alpha,\,\beta,\,h,\,\rho)$ точку максимума $\varphi(a)$ на луче $a>0$ и введем функцию
$$\psi_0(t) = \begin{cases} \alpha, & t\in\big[0,\,\nu^{-1/\rho}/a_0\big]\cup\big[k^{-1/\rho}/a_0,\,+\infty\big)\,; \\ h^{-1}\left(1-\dfrac{s}{(a_0t)^\rho}\right), & t\in\big(\nu^{-1/\rho}/a_0,\,1/a_0\big]\,; \\ \dfrac{\beta}{(a_0t)^\rho}, & t\in\big(1/a_0,\,k^{-1/\rho}/a_0\big)\,. \end{cases}$$
Положим еще для удобства
$$K(t) \;=\; \frac{t^{\rho-1}}{1+t}, \qquad t\ge 0. \tag{7}$$
Тогда оценка (2) может быть переписана в более компактном виде
$$\sigma_\rho(f) \;\ge\; \int\limits_0^{+\infty} \psi_0(t)\,K(t)\,dt, \tag{8}$$
а формула (6) — соответственно в виде
$$\sigma_\rho(f_0) \;=\; \int\limits_0^{+\infty} \psi_0(t)\,K(t)\,dt. \tag{9}$$
Переход от (2) к (8) и от (6) к (9) основан на том, что после замены переменной $\tau = 1/t$ в (3) получим
$$\varphi(a) = \int\limits_{\nu^{-1/\rho}/a}^{1/a} \left[h^{-1}\left(1-\frac{s}{(at)^\rho}\right)-\alpha\right]K(t)\,dt + \int\limits_{1/a}^{k^{-1/\rho}/a}\left(\frac{\beta}{(at)^\rho}-\alpha\right)K(t)\,dt. \tag{10}$$
Подставляя в (10) значение $a=a_0$, находим
$$\varphi(a_0) = \int\limits_0^{+\infty} \psi_0(t)\,K(t)\,dt \;-\;\alpha\int\limits_0^{+\infty} K(t)\,dt \;=\; \int\limits_0^{+\infty}\psi_0(t)\,K(t)\,dt \;-\; \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho},$$
что и дает нужную формулу
$$\int\limits_0^{+\infty} \psi_0(t)\,K(t)\,dt \;=\; \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} \;+\; \varphi(a_0). \tag{11}$$
Наша задача — предъявить целую функцию (5) со свойством (9).

Следуя [2], [3], зададим вначале последовательность $(m_n)_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условию $m_{n+1}=m_n^4$, $n\in\mathbb{N}$, и положим $k=\alpha/\beta\in(0,\,1)$. Сразу отметим, что при любом $p>0$ выполнены соотношения

$$\sum_{n=1}^{j-1} m_n^p = o(m_j^p), \qquad \sum_{n=j+2}^{\infty}\frac{1}{m_n^p} = o\left(\frac{1}{m_{j+1}^p}\right), \qquad j\to\infty. \tag{12}$$

Экстремальную последовательность положительных чисел Λ_0 строим следующим образом. На промежутках вида $[m_n,\,\nu^{-1/\rho}m_n^2]\cup[k^{-1/\rho}m_n^2,\,m_{n+1}]$ точки λ_j выбираем так, чтобы λ_j^ρ образовывали арифметическую прогрессию с разностью $1/\alpha$. На полуинтервалы $(\nu^{-1/\rho}m_n^2,\,m_n^2]$ точки λ_j помещаем так, чтобы λ_j^ρ давали арифметическую прогрессию с разностью h. Интервалы $(m_n^2,\,k^{-1/\rho}m_n^2)$ оставляем свободными от точек λ_j. Вводя вспомогательную последовательность $\Omega:=(\lambda_n^\rho)_{n=1}^{\infty}$, для каждого $n\in\mathbb{N}$ запишем

$$\Omega\cap[m_n^\rho,\,\nu^{-1}m_n^{2\rho}] = \left\{m_n^\rho + j/\alpha: \quad j\in\mathbb{N}, \quad j\leqslant \alpha\,(\nu^{-1}m_n^{2\rho}-m_n^\rho)\right\};$$
$$\Omega\cap(\nu^{-1}m_n^{2\rho},\,m_n^{2\rho}] = \left\{\nu^{-1}m_n^\rho + jh: \quad j\in\mathbb{N}, \quad j\leqslant h^{-1}(1-\nu^{-1})\,m_n^{2\rho}\right\};$$
$$\Omega\cap(m_n^{2\rho},\,k^{-1}m_n^{2\rho}) = \emptyset;$$
$$\Omega\cap[k^{-1}m_n^{2\rho},\,m_{n+1}^\rho] = \left\{k^{-1}m_n^{2\rho} + j/\alpha: \quad j\in\mathbb{N}, \quad j\leqslant \alpha\,(m_{n+1}^\rho-k^{-1}m_n^{2\rho})\right\}.$$

По построению имеем

$$h_\rho(\Lambda_0) = \varliminf_{n\to\infty}\left(\lambda_{n+1}^\rho-\lambda_n^\rho\right) = h,$$

так как $h<1/\beta<1/\alpha$.

При подсчете ρ-плотностей последовательности Λ_0 понадобятся выражения для считающей функции $n_\Omega(r)$ на различных промежутках положительной полуоси. Прежде всего отметим, что

$$n_\Omega(m_n^\rho) = \sum_{j=1}^{n-1}\left(\alpha\,(\nu^{-1}m_j^{2\rho}-m_j^\rho)+h^{-1}(1-\nu^{-1})\,m_j^{2\rho}\right) + \sum_{j=2}^{n}\alpha\,(m_j^\rho-k^{-1}m_{j-1}^{2\rho}) +$$
$$+O(n) \;=\; \alpha(m_n^\rho-m_1^\rho) + \sum_{j=1}^{n-1}\left[\alpha\,(\nu^{-1}-k^{-1})+h^{-1}(1-\nu^{-1})\right]\,m_j^{2\rho} + O(n).$$

Выражение в квадратных скобках обращается в нуль. Действительно,

$$\alpha\,(\nu^{-1}-k^{-1}) + h^{-1}(1-\nu^{-1}) = \nu^{-1}\,(\alpha-h^{-1}) + h^{-1}-\beta =$$
$$= \frac{1-\beta h}{1-\alpha h}\,\frac{\alpha h-1}{h} + \frac{1-\beta h}{h} = 0.$$

Поэтому справедливо соотношение

$$n_\Omega(m_n^\rho) = \alpha\, m_n^\rho + O(n), \qquad n\to\infty.$$

Если теперь $r\in[m_n^\rho,\,\nu^{-1}m_n^{2\rho}]$, то

$$n_\Omega(r) = n_\Omega(m_n^\rho)+\alpha(r-m_n^\rho)+O(1) = \alpha r + O(n).$$

Если $r\in(\nu^{-1}m_n^{2\rho},\,m_n^{2\rho}]$, то

$$n_\Omega(r) = n_\Omega(\nu^{-1}m_n^{2\rho}) + h^{-1}(r-\nu^{-1}m_n^{2\rho}) + O(1) =$$
$$= \alpha\nu^{-1}m_n^{2\rho}+O(n)+h^{-1}(r-\nu^{-1}m_n^{2\rho}) = h^{-1}r+\nu^{-1}(\alpha-h^{-1})\,m_n^{2\rho}+O(n) =$$
$$= h^{-1}r-h^{-1}sm_n^{2\rho}+O(n) = h^{-1}(r-sm_n^{2\rho})+O(n).$$

Если $r\in(m_n^{2\rho},\,k^{-1}m_n^{2\rho})$, то

$$n_\Omega(r) = n_\Omega(m_n^{2\rho}) = h^{-1}(m_n^{2\rho}-sm_n^{2\rho})+O(n) =$$
$$= h^{-1}(1-s)\,m_n^{2\rho}+O(n) = \beta m_n^{2\rho}+O(n).$$

Если $r \in [k^{-1}m_n^{2\rho},\, m_{n+1}^{\rho}]$, то

$$n_\Omega(r) = n_\Omega(k^{-1}m_n^{2\rho}) + \alpha(r - k^{-1}m_n^{2\rho}) + O(1) =$$

$$= \beta m_n^{2\rho} + O(n) + \alpha(r - k^{-1}m_n^{2\rho}) = \alpha r + O(n).$$

В результате при каждом $n \in \mathbb{N}$ имеем представление (с остаточными членами $O(n)$ при $n \to \infty$):

$$n_\Omega(r) = \begin{cases} \alpha r + O(n), & r \in [m_n^{\rho},\, \nu^{-1}m_n^{2\rho}] \cup [k^{-1}m_n^{2\rho},\, m_{n+1}^{\rho}]; \\ h^{-1}(r - s m_n^{2\rho}) + O(n), & r \in (\nu^{-1}m_n^{2\rho},\, m_n^{2\rho}]; \\ \beta m_n^{2\rho} + O(n), & r \in (m_n^{2\rho},\, k^{-1}m_n^{2\rho}). \end{cases}$$

Отсюда, учитывая связь $n_{\Lambda_0}(r) = n_\Omega(r^\rho)$, находим, что

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_0) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_\Omega(r)}{r} = \beta, \qquad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda_0) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{n_\Omega(r)}{r} = \alpha.$$

При фиксированном $r > 0$ рассмотрим функцию $\varphi_r(t)$, заданную по правилу

$$\varphi_r(t) := \frac{n_{\Lambda_0}(rt)}{(rt)^\rho} = \frac{n_\Omega\left((rt)^\rho\right)}{(rt)^\rho}, \qquad t > 0.$$

На основании предыдущего запишем при каждом $n \in \mathbb{N}$ представление

$$\varphi_r(t) = \begin{cases} \alpha + O\left(\dfrac{n}{(rt)^\rho}\right), & t \in \left[\dfrac{m_n}{r},\, \nu^{-1/\rho}\dfrac{m_n^2}{r}\right] \cup \left[k^{-1/\rho}\dfrac{m_n^2}{r},\, \dfrac{m_{n+1}}{r}\right]; \\ h^{-1}\left(1 - s\left(\dfrac{m_n^2}{rt}\right)^\rho\right) + O\left(\dfrac{n}{(rt)^\rho}\right), & t \in \left(\nu^{-1/\rho}\dfrac{m_n^2}{r},\, \dfrac{m_n^2}{r}\right]; \\ \beta\left(\dfrac{m_n^2}{rt}\right)^\rho + O\left(\dfrac{n}{(rt)^\rho}\right), & t \in \left(\dfrac{m_n^2}{r},\, k^{-1/\rho}\dfrac{m_n^2}{r}\right). \end{cases}$$

Вводим далее функцию $\Phi_r(t)$ (с параметром $r > 0$), заданную при $t \geq 0$ так, что

$$\Phi_r(t) = \alpha, \qquad t \in [0,\, m_1/r],$$

а ее сужения на отрезки $[m_n/r,\, m_{n+1}/r]$, $n \in \mathbb{N}$, имеют вид

$$\Phi_r(t) = \begin{cases} \alpha, & t \in \left[\dfrac{m_n}{r},\, \nu^{-1/\rho}\dfrac{m_n^2}{r}\right] \cup \left[k^{-1/\rho}\dfrac{m_n^2}{r},\, \dfrac{m_{n+1}}{r}\right]; \\ h^{-1}\left(1 - s\left(\dfrac{m_n^2}{rt}\right)^\rho\right), & t \in \left(\nu^{-1/\rho}\dfrac{m_n^2}{r},\, \dfrac{m_n^2}{r}\right]; \\ \beta\left(\dfrac{m_n^2}{rt}\right)^\rho, & t \in \left(\dfrac{m_n^2}{r},\, k^{-1/\rho}\dfrac{m_n^2}{r}\right). \end{cases}$$

С учетом (7) значение ρ-типа целой функции (5) можно найти по формуле

$$\sigma_\rho(f_0) = \varlimsup_{r\to+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_r(t)\, K(t)\, dt = \varlimsup_{r\to+\infty} \int_0^{+\infty} \Phi_r(t)\, K(t)\, dt, \tag{13}$$

так как остаточные члены в представлении $\varphi_r(t)$ на величину $\sigma_\rho(f_0)$ не влияют (см. [2]). Ввиду общей оценки (8) для доказательства равенства (9) достаточно установить, что

$$\sigma_\rho(f_0) \leqslant \int_0^{+\infty} \psi_0(t)\, K(t)\, dt,$$

а это (см. (13)) будет следовать из соотношения

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \left(\Phi_r(t)-\psi_0(t)\right)\, K(t)\, dt \,\leqslant\, 0. \tag{14}$$

Все свелось к проверке (14). Заметим вначале, что справедлива формула

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\Phi_r(t)-\psi_0(t)\right)\, K(t)\, dt \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{a_0 r}{r_n}\right) - \varphi(a_0), \qquad r>0, \tag{15}$$

где $r_n = a_0 m_n^2$, $n\in\mathbb{N}$. В самом деле, используя определение функции $\Phi_r(t)$ и представление (10) для функции $\varphi(a)$, запишем

$$\int\limits_0^{+\infty} \Phi_r(t)\, K(t)\, dt \,=\, \alpha \int\limits_0^{+\infty} K(t)\, dt +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{ \int\limits_{\frac{m_n^2}{\nu^{1/\rho} r}}^{\frac{m_n^2}{r}} \left[h^{-1}\left(1-s\left(\frac{m_n^2}{rt}\right)^{\rho}\right)-\alpha\right] K(t)\, dt + \int\limits_{\frac{m_n^2}{r}}^{\frac{m_n^2}{k^{1/\rho} r}} \left[\beta\left(\frac{m_n^2}{rt}\right)^{\rho}-\alpha\right] K(t)\, dt \right\} =$$

$$= \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{r}{m_n^2}\right).$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{+\infty} \Phi_r(t)\, K(t)\, dt \,=\, \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{r}{m_n^2}\right), \qquad r>0.$$

Вычитая отсюда равенство (11), приходим к формуле (15).

Применим (15) для доказательства (14). Для этого зафиксируем номер $j\geq 2$, разобъем выражение в правой части (15) на три суммы

$$\sum_{n=1}^{j-1} \varphi\left(\frac{a_0 r}{r_n}\right), \qquad \sum_{n=j+2}^{\infty} \varphi\left(\frac{a_0 r}{r_n}\right), \qquad \varphi\left(\frac{a_0 r}{r_j}\right) + \varphi\left(\frac{a_0 r}{r_{j+1}}\right) - \varphi(a_0)$$

и оценим их отдельно для $r\in[r_j,\, r_{j+1}]$.

Займемся первой суммой. Полагая в представлении (10) $a = a_0 r/r_n$ и применяя очевидное неравенство $K(t)\leqslant t^{\rho-1}$, получим

$$\varphi\left(\frac{a_0 r}{r_n}\right) \leqslant \int\limits_{\nu^{-1/\rho}\frac{r_n}{a_0 r}}^{\frac{r_n}{a_0 r}} \left[h^{-1}\left(1-s\left(\frac{r_n}{a_0 r t}\right)^{\rho}\right)-\alpha\right] t^{\rho-1}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\frac{r_n}{a_0 r}}^{k^{-1/\rho}\frac{r_n}{a_0 r}} \left[\beta\left(\frac{r_n}{a_0 r t}\right)^{\rho}-\alpha\right] t^{\rho-1}\, dt \,=$$

$$= \frac{h^{-1}-\alpha}{\rho}\left(1-\nu^{-1}\right)\left(\frac{r_n}{a_0 r}\right)^{\rho} - \, h^{-1} s \ln \nu^{1/\rho}\left(\frac{r_n}{a_0 r}\right)^{\rho} +$$

$$+\beta \ln k^{-1/\rho}\left(\frac{r_n}{a_0 r}\right)^{\rho} - \,\frac{\alpha}{\rho}(k^{-1}-1)\left(\frac{r_n}{a_0 r}\right)^{\rho} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\frac{r_n}{a_0 r}\right)^{\rho}\left[\frac{1-\alpha h}{h}\left(1-\frac{1-\beta h}{1-\alpha h}\right)-\frac{s}{h}\ln\nu-\beta\ln k-(\beta-\alpha)\right] = A\left(\frac{m_n^2}{r}\right)^{\rho}$$

с константой

$$A \,=\, -\,\frac{1}{\rho h}\,[s\ln\nu+\beta h\ln k] \,>\, 0.$$

Поэтому для $r \geq r_j = a_0 m_j^2$ имеем

$$0 \,<\, \sum_{n=1}^{j-1}\varphi\left(\frac{a_0 r}{r_n}\right) \,\leqslant\, \frac{A}{r^{\rho}}\sum_{n=1}^{j-1} m_n^{2\rho} \,\leqslant\, \frac{A}{a_0^{\rho}}\,\frac{1}{m_j^{2\rho}}\sum_{n=1}^{j-1} m_n^{2\rho}.$$

Применяя первую из формул (12) с $p=2\rho$, приходим к соотношению

$$\sup_{r\in[r_j,\,r_{j+1}]}\sum_{n=1}^{j-1}\varphi\left(\frac{a_0 r}{r_n}\right)\to 0, \qquad j\to\infty. \tag{16}$$

Займемся второй суммой. Снова полагая в представлении (10) $a=a_0 r/r_n$ и применяя другое также очевидное неравенство $K(t)\leqslant t^{\rho-2}$, получим

$$\varphi\left(\frac{a_0 r}{r_n}\right) \leqslant \int\limits_{\nu^{-1/\rho}\frac{r_n}{a_0 r}}^{\frac{r_n}{a_0 r}}\left[h^{-1}\left(1-s\left(\frac{r_n}{a_0 r t}\right)^{\rho}\right)-\alpha\right]t^{\rho-2}\,dt +$$

$$+ \int\limits_{\frac{r_n}{a_0 r}}^{k^{-1/\rho}\frac{r_n}{a_0 r}}\left[\beta\left(\frac{r_n}{a_0 r t}\right)^{\rho}-\alpha\right]t^{\rho-2}\,dt \,=$$

$$= \frac{h^{-1}-\alpha}{\rho-1}\,(1-\nu^{1/\rho-1})\left(\frac{r_n}{a_0 r}\right)^{\rho-1} - h^{-1}s\,(\nu^{1/\rho}-1)\left(\frac{r_n}{a_0 r}\right)^{\rho-1} +$$

$$+\beta\,(1-k^{1/\rho})\left(\frac{r_n}{a_0 r}\right)^{\rho-1} + \frac{\alpha}{1-\rho}\,(k^{1/\rho-1}-1)\left(\frac{r_n}{a_0 r}\right)^{\rho-1} \,=\, B\left(\frac{m_n^2}{r}\right)^{\rho-1}$$

с константой

$$B = \frac{(h^{-1}-\alpha)(\nu^{1/\rho-1}-1)-\alpha(1-k^{1/\rho-1})}{1-\rho} - h^{-1}s\,(\nu^{1/\rho}-1)+\beta\,(1-k^{1/\rho}) \,>\, 0.$$

Поэтому для $r \leqslant r_{j+1} = a_0 m_{j+1}^2$ имеем

$$0 < \sum_{n=j+2}^{\infty}\varphi\left(\frac{a_0 r}{r_n}\right) \,\leqslant\, B\,r^{1-\rho}\sum_{n=j+2}^{\infty}\frac{1}{m_n^{2(1-\rho)}} \,\leqslant\, B a_0^{1-\rho}\,m_{j+1}^{2(1-\rho)}\sum_{n=j+2}^{\infty}\frac{1}{m_n^{2(1-\rho)}}.$$

Применяя вторую из формул (12) с $p=2(1-\rho)$, приходим к соотношению

$$\sup_{r\in[r_j,\,r_{j+1}]}\sum_{n=j+2}^{\infty}\varphi\left(\frac{a_0 r}{r_n}\right)\to 0, \qquad j\to\infty. \tag{17}$$

Займемся, наконец, третьей суммой. В оценках воспользуемся тем, что a_0 является точкой максимума непрерывной положительной при $a>0$ функции $\varphi(a)$, а сама функция исчезает в нуле и бесконечности. Рассмотрим два случая: $r\in[r_j,\,\sqrt{r_j\,r_{j+1}}]$ и $r\in[\sqrt{r_j\,r_{j+1}},\,r_{j+1}]$.

В первом случае имеем $r_j/r_{j+1} \leqslant r/r_{j+1} \leqslant \sqrt{r_j/r_{j+1}}$. Поэтому в оценке

$$\varphi\left(\frac{a_0 r}{r_j}\right)+\varphi\left(\frac{a_0 r}{r_{j+1}}\right)-\varphi(a_0)\leqslant\varphi\left(\frac{a_0 r}{r_{j+1}}\right)$$

правая часть равномерно по $r \in [r_j, \sqrt{r_j\, r_{j+1}}]$ стремится к нулю при $j \to \infty$.

Во втором случае имеем $\sqrt{r_{j+1}/r_j} \leqslant r/r_j \leqslant r_{j+1}/r_j$. Поэтому в оценке

$$\varphi\left(\frac{a_0 r}{r_j}\right) + \varphi\left(\frac{a_0 r}{r_{j+1}}\right) - \varphi(a_0) \leqslant \varphi\left(\frac{a_0 r}{r_j}\right)$$

снова правая часть при $j \to \infty$ равномерно по $r \in [\sqrt{r_j\, r_{j+1}}, r_{j+1}]$ стремится к нулю.

В результате

$$\varlimsup_{j\to\infty} \sup_{r\in[r_j,\, r_{j+1}]} \left\{\varphi\left(\frac{a_0 r}{r_j}\right) + \varphi\left(\frac{a_0 r}{r_{j+1}}\right) - \varphi(a_0)\right\} \leqslant 0. \tag{18}$$

Сочетая (15)–(18), получаем (14). Таким образом, функция (5) удовлетворяет (9). Пример экстремальной функции построен. Это вместе с результатом работы [1] дает доказательство следующего утверждения.

Теорема. *При любых $\rho \in (0,1)$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0, \beta]$, $h \in [0, 1/\beta]$ экстремальная величина* (1) *вычисляется по формуле*

$$s(\alpha, \beta, h; \rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\rho} + \sup_{a>0} \varphi(a),$$

где функция $\varphi(a)$ определена правилом

$$\varphi(a) = \int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau + \frac{s}{h} \int\limits_{a}^{a\nu^{1/\rho}} \frac{\nu\tau^{-\rho} - a^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau,$$

$$s = 1 - \beta h, \qquad \nu = \frac{1-\alpha h}{1-\beta h}.$$

Нижняя грань $s(\alpha, \beta, h; \rho)$ достигается на некоторой целой функции с последовательностью положительных простых нулей, имеющих ρ-плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha$ и ρ-шаг $h_\rho(\Lambda) = h$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шерстюкова О.В. *Об экстремальном типе целой функции порядка меньше единицы с нулями фиксированных плотностей и шага* // Уфимск. матем. журн. Т. 4. № 1. 2012. С. 161–165.
2. Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б. *О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0,1)$ с положительными нулями* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 75. № 1. 2011. С. 3–28.
3. Попов А.Ю. *Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности* // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. № 1. 2005. С. 31–36.
4. Шерстюкова О.В. *О влиянии шага последовательности нулей целой функции порядка меньше единицы на величину ее типа* // Наука в вузах: математика, информатика, физика, образование. М.: МПГУ, 2010. С. 192–195.
5. Шерстюкова О.В. *О наименьшем типе целых функций порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями на луче* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015 (принята к печати).

Ольга Владимировна Шерстюкова,
Московский педагогический государственный университет,
ул. М. Пироговская, 1,
199296, г. Москва, Россия
E-mail: sherov73@mail.ru