ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 4 (2015). С. 109-115.

УДК 517.94

ФОРМУЛА РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО СЛЕДА ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ИЗ КЛАССА ШАТЕНА–ФОН НЕЙМАНА ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Х.Х. МУРТАЗИН, З.Ю. ФАЗУЛЛИН

Посвящается памяти профессора
Игоря Федоровича Красичкова–Терновского

Аннотация. В работе исследуется формула регуляризованного следа возмущений из класса Шатена-фон Неймана $(\sigma_p, p \in \mathbb{N})$ дискретных самосопряженных операторов. Доказано равенство нулю регуляризованного следа с вычетом $(p-1)$ поправок теории возмущений, в случае отсутствия расширяющихся лакун в спектре невозмущенного оператора.

Ключевые слова: теория возмущений, регуляризованный след, дискретный оператор, спектр, резольвента.

Mathematics Subject Classification: 47B10, 47B15, 47A55

1. Введение

Пусть L_0 полуограниченный снизу самосопряженный дискретный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $V = V^*$ – ограниченный оператор в H. Через λ_k и μ_k, $k = 1, 2, ...$ обозначим собственные числа операторов L_0 и $L = L_0 + V$, пронумерованные в порядке роста с учетом их кратности, через f_k – ортонормированный базис в H из собственных функций оператора L_0, соответствующих собственным числам λ_k; $N(\lambda) = \sum\limits_{\lambda_k<\lambda} 1$ – функцию распределения спектра оператора L_0; σ_p, $p \in \mathbb{N}$ – класс компактных операторов Шатена-фон Неймана.

Из результатов работы М.Г. Крейна [1], в частности для дискретных операторов, вытекает, если $V = V^* \in \sigma_1$, т.е. оператор V – ядерный, то верны соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k - \lambda_k) = SpV = \sum_{k=1}^{\infty} (Vf_k, f_k), \tag{1}$$

то есть

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k - \lambda_k - (Vf_k, f_k)) = 0. \tag{2}$$

Далее были многочисленные попытки доказать формулу (2) для неядерных возмущений V. Отметим наиболее существенные работы в этом направлении.

Kh.Kh. Murtazin, Z.Yu. Fazullin, Formula of the regularized trace for perturbation in the Schatten-von Neumann of discrete operators.

Работа выполнена при поддержке гранта №01201456408 Минобрнауки РФ.
Поступила 26 ноября 2015 г.

В работе [2] для произвольных ограниченных возмущений V (не обязательно самосопряженных), если резольвента $R_0(z) = (L_0 - z)^{-1}$ ядерный оператор, то доказано, что существует подпоследовательность натуральных чисел $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n_m} (\mu_k - \lambda_k - (Vf_k, f_k)) = 0. \tag{3}$$

В работе [3] для произвольных ограниченных самосопряженных возмущений V, формула (2) доказана при более слабом ограничении, а именно, когда $N(\lambda) = \overline{o}(\lambda)$, $\lambda \to \infty$.

Далее для произвольных компактных возмущений V справедливость формулы (3) в работе [2] была установлена при выполнении следующих двух условий:

1) существует $\delta \geq 0$ такой, что оператор VL_0^{δ} продолжается до ограниченного;

2) $L_0^{-(1+\delta)}$ – ядерный оператор.

В работе [3] для произвольных компактных $V = V^*$ возмущений формула (3) доказана при условии, что $N(\lambda) = O(\lambda)$, $\lambda \to \infty$.

Как видим из вышеприведенных утверждений для произвольных ограниченных и компактных возмущений, для доказательства справедливости формулы (3) приходится накладывать условие на функцию распределения спектра $N(\lambda)$ невозмущенного оператора L_0, в то время как для возмущений $V \in \sigma_1$ нет необходимости накладывать условие на рост функции $N(\lambda)$ (см. формулу (2)).

Следующее продвижение в этом направлении было сделано в работе [3], где получен аналог формулы (1) для возмущений Гильберта-Шмидта ($V \in \sigma_2$), и доказано, что формула (3)(равенство нулю регуляризованного следа с вычетом первой поправки теории возмущений) для возмущений $V = V^* \in \sigma_2$ справедлива без ограничений на функцию $N(\lambda)$. Следовательно, естественно возникает вопрос: сколько поправок теории возмущений нужно вычесть для равенства нулю регуляризованного следа, в случае возмущений из класса σ_p, $p \geq 3$, и при этом не накладывать ограничения на рост функции $N(\lambda)$. Частичный ответ на этот вопрос был дан в работе [2], где авторы доказали равенство нулю регуляризованного следа с вычетом $(p-1)$ поправок теории возмущений (см. формулу (4) в данной работе) для возмущений из класса σ_p, $p \geq 2$ при условии существования системы расширяющихся лакун в спектре невозмущенного оператора L_0. Последнее означает, что существует подпоследовательность $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что $\lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m} \to \infty$ при $m \to \infty$, и является довольно жестким условием в теории возмущений. В данной работе нам удалось снять это условие и ответить на поставленный выше вопрос.

Для формулировки основного результата работы введем обозначения

$$R_0(z) = (L_0 - z)^{-1},\ R(z) = (L - z)^{-1},$$
$$r_m = \tfrac{\lambda_{n_m+1} + \lambda_{n_m}}{2},\ \Gamma_m = \{z : |z| = r_m\}.$$

Справедлива:

Теорема. *Пусть существует $\delta > 0$ и подпоследовательность $\{n_m\}_{m=1}^{\infty} \subset N$ такая, что $\lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m} \geq \delta$. Тогда для $V = V^* \in \sigma_p$, $3 \leqslant p$, $p \in N$*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n_m} \left(\mu_k - \lambda_k - \sum_{l=1}^{p-1} \alpha_l^{(m)} \right) = 0, \tag{4}$$

где $\alpha_l^{(m)} = (2\pi i)^{-1}(-1)^l Sp \oint\limits_{\Gamma_m} z(R_0(z)V)^l R_0(z)dz$ – l-я поправка теории возмущений.

Предварительно докажем вспомогательные утверждения, касающиеся расстановки скобок суммирования.

Лемма 1. *Пусть существует $\delta > 0$ и подпоследовательность $\{n_m\}_{m=1}^{\infty} \subset N$ такая, что $\lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m} \geq \delta$. Тогда для любого компактного оператора V в H*

$$\lim_{m\to\infty}\max_{|z|=r_m}\|VR_0(z)\|=0. \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть $f\in H$, поскольку

$$R_0(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(f,f_k)f_k}{\lambda_k-z},$$

для любого $N\in\mathbb{N}$ и $z\in\Gamma_m$

$$\|R_0(z)f\|^2=\sum_{k=1}^{N}\frac{|(f,f_k)|^2}{|\lambda_k-z|^2}+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{|(f,f_k)|^2}{|\lambda_k-z|^2}.$$

При данном f, так как $|\lambda_k-z|\geq\frac{\delta}{2}$, $k\in\mathbb{N}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|(f,f_k)|=\|f\|^2<\infty$, за счет выбора N второе слагаемое можно сделать сколь угодно малым, т.е.

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{|(f,f_k)|^2}{|\lambda_k-z|^2}\leqslant\frac{4}{\delta^2}\sum_{k=N+1}^{\infty}|(f,f_k)|^2<\frac{\epsilon}{2}. \tag{1.2}$$

Зафиксируем N, тогда при $z\in\Gamma_m$, $m>>N$ имеем

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{|(f,f_k)|^2}{|\lambda_k-z|^2}\leqslant\frac{C_N}{|\lambda_N-z|^2}\sum_{k=1}^{N}|(f,f_k)|^2<\frac{\epsilon}{2}, \tag{1.3}$$

поскольку $|\lambda_N-z|\to\infty$ при $m\to\infty$.

Следовательно, из (1.2) и (1.3) заключаем, что для произвольного $f\in H$

$$\lim_{m\to\infty}\max_{|z|=r_m}\|R_0(z)f\|=0. \tag{1.4}$$

Далее, так как V – компактный оператор, его можно представить в виде [4, гл: IX, лемма 9.11]

$$V=K_{1n}+K_{2n}, \tag{1.5}$$

где K_{1n} – конечномерный оператор, а оператор K_{2n} такой, что $\|K_{2n}\|\to 0$ при $n\to\infty$. Поскольку, для любого конечномерного оператора справедливо представление

$$K_{1n}=\sum_{j=1}^{n}(\cdot,\psi_j)\varphi_j,$$

имеем

$$K_{1n}R_0(z)=\sum_{j=1}^{n}(\cdot,R_0^*(z)\psi_j)\varphi_j,\ z\in\Gamma_m.$$

Следовательно,

$$\|K_{1n}R_0(z)\|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\|R_0^*(z)\psi_j\|\,\|\varphi_j\|,\ z\in\Gamma_m,$$

отсюда, согласно (1.4) и представления (1.5), заключаем справедливость соотношения (1.1).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть V – произвольный компактный оператор в H и предположим, что существует подпоследовательность $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ такая, что $\lambda_{n_m+1}-\lambda_{n_m}\geq\delta$, $\delta>0$. Тогда внутри контуров Γ_m содержится одинаковое количество собственных чисел операторов L_0 и $L=L_0+V$.*

Доказательство. Поскольку $D(L_0)\subseteq D(V)=H$, семейство операторов $L_x=L_0+xV$, $x\in[0,1]$ является голоморфным семейством типа (A)[6, гл: VII]. Следовательно, согласно аналитической теории возмущений [6, гл: VII], собственные значения $\lambda_n(x)$ операторов L_x, по крайней мере, являются непрерывными функциями параметра x. Далее, пусть $m >> 1$ и $z \in \Gamma_m$ тогда в силу леммы 1

$$\|xVR_0(z)\| \leqslant \|VR_0(z)\| < 1,$$

поэтому все $z \in \Gamma_m$ при $m >> 1$ принадлежат резольвентному множеству операторов L_x, так как

$$R_x(z) = (L_x - zI)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k R_0(z)\left[xVR_0(z)\right]^k,\ z \in \Gamma_m$$

сходится. Следовательно, согласно теорем 3.16 и 3.18 гл: IV из [6], собственные значения $\lambda_n(x)$ (непрерывные функции параметра x) семейства операторов L_x не пересекают контура Γ_m, при $x \in [0,1]$.

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. Согласно лемме 1, при $m >> 1$, $z \in \Gamma_m$ $\|VR_0(z)\| < 1$. Следовательно, для резольвенты возмущенного оператора L справедливо представление

$$R(z) = \sum_{l=o}^{\infty}(-1)^l (R_0(z)V)^l R_0(z).$$

Так, что для $p \geq 3$ имеем

$$R(z) - R_0(z) - \sum_{l=1}^{p-1}(-1)^l (R_0(z)V)^l R_0(z) = G_p(z) \quad z \in \Gamma_m, \tag{1.6}$$

где

$$G_p(z) = \sum_{l=p}^{\infty}(-1)^l (R_0(z)V)^l R_0(z) = (-1)^p (R_0(z)V)^p R(z) =$$
$$= (-1)^p (R_0(z)V)^{p-1} R(z) V R_0(z). \tag{1.7}$$

Отсюда следует, что $G_p(z)$ – ядерный оператор, поскольку $V \in \sigma_p$.

Справедлива

Лемма 3. *При* $m >> 1$

$$\oint_{\Gamma_m} SpG_p(z)dz = 0.$$

Доказательство. Согласно (1.7) достаточно показать, что при $l \geq p$

$$\oint_{\Gamma_m} Sp(R_0(z)V)^l R_0(z)dz = 0. \tag{1.8}$$

Для этого введем операторы

$$L_x = L_0 + xV,$$
$$R_x(z) = (L_x - z)^{-1},\ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Хорошо известно [6, гл. I,§4, п. 5 и §5, п. 2], что существует $\frac{d^s}{dx^s}R_x(z)$ в равномерной топологии при $z \in \Gamma_m$ и

$$\frac{d^s}{dx^s}R_x(z) = s![R_x(z)V]^s R_x(z), \tag{1.9}$$

причем при $x = 0$ $R_x(z) = R_0(z)$, а при $x = 1$ $R_x(z) = R(z)$.

Далее, легко заметить, что при $m >> 1$

$$Sp\oint_{\Gamma_m} R_x(z)VR_x(z)dz = 0, \tag{1.10}$$

следовательно, дифференцируя (1.10), согласно (1.9), находим, что для всех $l \geq p$

$$\oint\limits_{\Gamma_m} Sp[R_x(z)V]^l R_x(z)dz = 0. \tag{1.11}$$

Полагая в (1.11) $x = 0$, получим (1.8). Лемма 3 доказана.

Далее, поскольку $V \in \sigma_p$, $p \geq 3$, оператор G_p – ядерный, применяя к обеим частям равенства (1.6) оператор $Sp\left(-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_m}(\,\cdot\,)zdz\right)$, получим

$$\sum_{k=1}^{n_m}\left(\mu_k - \lambda_k - \sum_{l=1}^{p-1}\alpha_l^{(m)}\right) = \beta_p^{(m)},$$

где $\beta_p^{(m)} = -(2\pi i)^{-1}\oint\limits_{\Gamma_m} zSpG_p(z)dz$.

Следовательно, для доказательства теоремы, достаточно показать, что

$$\lim_{m\to\infty}\beta_p^{(m)} = 0. \tag{1.12}$$

С этой целью введем проекторы

$$Q_m = -(2\pi i)^{-1}\oint\limits_{\Gamma_m} R(z)dz,\ Q_m^0 = -(2\pi i)^{-1}\oint\limits_{\Gamma_m} R_0(z)dz,$$
$$Q_m^{\perp} = I - Q_m,\ Q_m^{0\perp} = I - Q_m^0,$$

и операторы

$$R_{m1}(z) = R(z)Q_m,\ R_{m2}(z) = R(z)Q_m^{\perp},$$
$$R_{m1}^0(z) = R_0(z)Q_m,\ R_{m2}^0(z) = R_0(z)Q_m^{0\perp}.$$

Для наглядности изложения докажем (1.12) при $p = 3$

Лемма 4. *Если $V \in \sigma_3$, то*

$$\oint\limits_{\Gamma_m} zSp\left\{(R_{ms}^0(z)V)^2 R_{ms}(z)VR_{ms}^0(z)\right\}dz =$$
$$= \oint\limits_{\Gamma_m} Sp\left\{(R_{ms}^0(z)V)^2 R_{ms}(z)VR_{ms}^0(z)\right\}dz = 0, \quad s = 1, 2. \tag{1.13}$$

Доказательство. Справедливость соотношений (1.13) при $s = 2$ следует из того, что оператор-функции $R_{m2}^0(z)$ и $R_{m2}(z)$ внутри контура Γ_m не имеют особенностей.

Пусть $f(z) = z^l Sp\{(R_{m1}^0(z)V)^2 R_{m1}(z)VR_{m1}^0(z)\}$, $l = 0, 1$. Поскольку все особенности функции $f(z)$ расположены внутри контура Γ_m и

$$\sum_{\lambda_j,\mu_j}\operatorname{res} f(z) = -\operatorname{res}_{z=\infty} f(z).$$

Поэтому, справедливость соотношений (1.13) следует из разложения при $z \in \Gamma_m$

$$f(z) = z^l\left\{\tfrac{a_4}{z^4} + \tfrac{a_5}{z^5} + ...\right\},\ l = 0, 1.$$

Лемма 4 доказана.

Заменяя интегрирование по контуру Γ_m на интегрирование по прямой $z_m = \{r_m + it, t \in R\}$. Из (1.7), лемм 3 и 4 находим, что

$$\beta_3^{(m)} = (2\pi i)^{-1}\sum_{k=1}^{n_m}\int\limits_{-\infty}^{\infty} t(\lambda_k - r_m - it)^{-2}[(VR_{m1}^o(r_m + it)R_{m2}$$
$$(r_m + it)Vf_k, f_k) + (VR_{m2}^0(r_m + it)VR_{m1}(r_m + it)Vf_k, ff_k) +$$

$$+(VR^0_{m2}(r_m+it)VR_{m2}(r_m+it)Vf_k,f_k)]dt+$$

$$+(2\pi i)^{-1}\sum_{k=n_m+1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}t(\lambda_k-r_m-it)^{-2}[(VR^0_{m1}VR_{m2}(r_m+it)Vf_k,f_k)+$$

$$+(VR^0_{m2}(r_m+it)VR_{m1}(r_m+it)Vf_k,f_k)+$$

$$+(VR^0_{m1}(r_m+it)VR_{m1}(r_m+it)Vf_k,f_k)]dt.$$

Докажем, что каждое из шести слагаемых стремится к нулю при $m\to\infty$.

Ограничимся доказательством утверждения для первого слагаемого $\beta^{(m)}_{31}$, для остальных слагаемых рассуждения и выкладки доказательства совершенно анологичные.

Итак, используя полярное представление ограниченного оператора, поскольку [6, с. 421]

$$U\left|V\right|U^*=\left|V^*\right|=\left|V\right|$$

и неравенство Коши-Буняковского, имеем оценку

$$\left|(VR^0_{m1}(z)VR_{m2}(z)Vf_k,f_k)\right|^2\leqslant(VR^*_{m2}(z)\left|V\right|R_{m2}(z)Vf_k,f_k)\cdot(VR^{*0}_{m1}(z)\left|V\right|R_{m1}(z)Vf_k,f_k).$$

На основе этой оценки и неравенства Гельдера находим, что

$$\left|\beta^{(m)}_{31}\right|\leqslant\left\{\gamma^{(m)}_{31}\right\}^{\frac12}\cdot\left\{\omega^{(m)}_{31}\right\}^{\frac12}, \tag{1.14}$$

где

$$\gamma^{(m)}_{31}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n_m}\int_{-\infty}^{\infty}|t|\left((\lambda_k-r_m)^2+t^2\right)^{-1}(VR^*_{m2}(z)\left|V\right|R_{m2}(z)Vf_k,f_k)dt,$$

$$\omega^{(m)}_{31}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n_m}\int_{-\infty}^{\infty}|t|\left((\lambda_k-r_m)^2+t^2\right)^{-1}(VR^{*0}_{m1}(z)\left|V\right|R^0_{m1}(z)Vf_k,f_k)dt,$$

$$z=r_m+it.$$

Теперь покажем, что $\gamma^{(m)}_{31}\to0$ при $m\to\infty$. Для этого, используя интегральное представление, при $z=r_m+it$

$$(VR^*_{m2}(z)\left|V\right|R_{m2}(z)Vf_k,f_k)=\int_{\mu_{n_m+1}}^{\infty}ds\int_{\mu_{n_m+1}}^{\infty}d\tau\frac{(V[E(s)-Q_m]|v|[E(\tau)-Q_m]Vf_k,f_k)}{(s-r_m+it)^2(\tau-r_m-it)^2}$$

и оценку

$$\left|(V[E(s)-Q_m]\left|V\right|[E(\tau)-Q_m]Vf_k,f_k)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac12\left\{(V[E(s)-Q_m]\left|V\right|[E(s)-Q_m]Vf_k,f_k)+(V[E(\tau)-Q_m]\left|V\right|[E(\tau)-Q_m]Vf_k,f_k)\right\},$$

находим, что $(z=r_m+it)$

$$\left|(VR^*_{m2}(z)\left|V\right|R_{m2}(z)Vf_k,f_k)\right|\leqslant\frac{\pi}{|t|}\int_{\mu_{n_m+1}}^{\infty}\frac{(V[E(s)-Q_m]|V|[E(s)-Q_m]Vf_k,f_k)}{(s-r_m)^2+t^2}ds,$$

следовательно,

$$\gamma^{(m)}_{31}\leqslant\frac{\pi}{8}\int_{\mu_{n_m+1}}^{\infty}\frac{1}{(s-r_m)^3}Sp(V[E(s)-Q_m]\left|V\right|[E(s)-Q_m]V)ds. \tag{1.15}$$

Далее, пусть $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}=\sigma(V)$ – спектр оператора V, $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – соответствующая последовательность собственных функций, тогда согласно неравенству Гельдера

$$Sp(V[E(s)-Q_m]\left|V\right|[E(s)-Q_m]V)=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\alpha_i\right|^2(\left|V\right|[E(s)-Q_m]\psi_i,[E(s)-Q_m]\psi_i)\leqslant$$

$$\leqslant(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\alpha_i\right|^3)^{\frac23}\cdot(\sum_{i=1}^{\infty}(\left|V\right|[E(s)-Q_m]\psi_i,[E(s)-Q_m]\psi_i)^3)^{\frac13}. \tag{1.16}$$

Так как

$$(|V|\,[E(s)-Q_m]\psi_i, [E(s)-Q_m]\psi_i)^3 \leqslant (|V|^3\,[E(s)-Q_m]\psi_i, [E(s)-Q_m]\psi_i)$$

и

$$Sp[E(s)-Q_m]\,|V|^3\,[E(s)-Q_m] \leqslant Sp(Q_m^{\perp}\,|V|^3\,Q_m^{\perp}),$$

из (1.15)–(1.16) получим, что

$$\gamma_{31}^{(m)} \leqslant \tfrac{C}{(\mu_{n_m+1}-r_m)^2} Sp(Q_m^{\perp}\,|V|^3\,Q_m^{\perp})^{\frac{1}{3}},\; C>0.$$

Откуда, поскольку $\mu_{n_m+1}-r_m \approx 2(\lambda_{n_m+1}-\lambda_{n_m})$, при $m\to\infty$, заключаем, что $\gamma_{31}^{(m)} \to 0$ при $m\to\infty$. Аналогично устанавливается, что $\omega_{31}^{(m)} \leqslant CSp(Q_m^{\perp}\,|V|^3\,Q_m^{\perp})$.

Следовательно, согласно (1.14) доказано, что $\beta_{31}^{(m)} \to 0$ при $m\to\infty$.

Совершенно аналогично исследуются слагаемые $\beta_{3i}^{(m)}$, $i=\overline{2,6}$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн М.Г. *О формуле следов в теории возмущений* // Матем. сб. 1953. Т. 33(75). № 3. С. 597–626.
2. Садовничий В.А., Поольский В.Е.*Следы операторов с относительно компактным возмущением* // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 2. С. 129–152.
3. Муртазин Х.Х., Фазуллин З.Ю. *Неядерные возмущения дискретных операторов и формулы следов* // Матем. сб. 2005. Т. 196. № 12. С. 123–156.
4. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Т.2.* М.: Мир, 1966.
5. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука, Физматлит, 1965.
6. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир, 1972.

Хайрулла Хабибуллович Муртазин,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
Зиганур Юсупович Фазуллин,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: fazullinzu@mail.ru