ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 4 (2015). С. 93-98.

УДК 511

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

Ю.Ф. КОРОБЕЙНИК

Посвящается памяти профессора
Игоря Федоровича Красичкова–Терновского

Аннотация. В работе вычисляются главные значения некоторых интегралов, связанных с дзета-функцией Римана. Высказывается одна, по-видимому, новая гипотеза, из которой вытекает справедливость знаменитой гипотезы Римана об отсутствии нулей дзета-функции в полуплоскости $\Re z > 1/2$, а также некоторые другие факты из теории дзета-функции. Библ. 2 назв.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, теория вычетов.

Mathematics Subject Classification: 14G10

1. Вместо предисловия

Эту заметку я хотел бы посвятить памяти моего давнего приятеля и выдающегося математика Игоря Федоровича Красичкова-Терновского. Судьба свела меня с ним где-то в конце 50-х – начале 60-х гг. прошлого века. В это время я, молодой еще тогда кандидат наук, во время своих многочисленных командировок в Москву, аккуратно посещал научные семинары А.Ф. Леонтьева, сначала в МЭИ, а затем в «Стекловке». После окончания еженедельного семинара А.Ф. Леонтьева (по понедельникам, с 11 часов утра), его участники, среди которых был и его аспирант, выпускник мехмата МГУ И.Ф. Красичков-Терновский, дружной гурьбой шли во главе с Алексеем Федоровичем на Ленинские горы, чтобы принять участие в работе научного семинара по ТФКП профессора А.И. Маркушевича на мехмате МГУ.

В те годы я неоднократно бывал на московских квартирах Игоря Федоровича, на Матвеевской улице и Университетском проспекте. Наше знакомство продолжалось и в Уфе, куда Игорь Федорович перебрался вслед за Алексеем Федоровичем, после успешной зашиты кандидатской диссертации. Следует отметить, что если первые ученики А.Ф. Леонтьева Ю.Н. Фролов и В.П. Громов, защитившие свои докторские диссертации не без деятельной помощи своего научного руководителя, покинули Уфу и перебрались обратно в Москву вскоре после защит, то Игорь Федорович и после защиты своей докторской диссертации в Харькове, оставался в Уфе до конца своей активной деятельности и вернулся в Москву лишь в конце жизни, когда он серьезно занемог.

Все это время (70-е – 90-е гг. прошлого века) я неоднократно встречался с Игорем Федоровичем на различных школах, конференциях, семинарах и других математических мероприятиях во многих городах нашей необъятной Родины. Он же первым сообщил мне горестную весть о кончине в 1987 г. Алексея Федоровича Леонтьева, и я простился с Алексеем Федоровичем уже в Москве в его квартире вблизи тогдашнего МЭИ.

Yu.F. Korobeinik, On some problems in the theory of the Riemann's zeta-function.

Поступила 12 сентября 2015 г.

Эту заметку было бы естественно написать по моей хорошо знакомой уфимцам прежней научной тематике (линейные уравнения бесконечного порядка, абсолютно представляющие системы и их приложения к уравнениям в частных производных), в которой я неоднократно использовал и цитировал глубокие результаты Игоря Федоровича. Однако после долгих раздумий я решил все-таки привести здесь результаты по теории дзета функции Римана, которой я занимаюсь (упорно, но не слишком успешно) последние 15 лет. Надеюсь, что моя заметка привлечет внимание уфимских математиков к этой, по-видимому, свежей для них тематике.

2. О главных значениях некоторых определенных интегралов, связанных с дзета-функцией

Пусть $\varphi \in (0, \pi/2]$ и $\Gamma_\varphi = \left\{z = \dfrac{1}{2} + \rho e^{i\varphi},\ -\infty < \rho < +\infty\right\}$ — прямая, проходящая через точку $A = 1/2$ под углом φ к вещественной оси (точнее, к ее положительной полуоси). Пусть, далее, $T \in (0, +\infty)$ и $\Gamma_{\varphi,T}$ — отрезок прямой Γ_φ с началом в точке $B_{T,\varphi} = \left\{\dfrac{1}{2} - Te^{i\varphi}\right\}$ и концом в точке $C_{T,\varphi} = \left\{\dfrac{1}{2} + Te^{i\varphi}\right\}$. Рассмотрим интеграл

$$\mathcal{I}_{T,\varphi} := \int_{B_{T,\varphi}}^{C_{T,\varphi}} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\, dz,$$

взятый по сегменту $\Gamma_{\varphi,T}$. Предположим вначале, что $\zeta\Big(\dfrac{1}{2} + Te^{i\varphi}\Big) \neq 0$ (в силу известного функционального уравнения $\zeta(z) = a(z)\zeta(1-z)$, где $a(z) = z(2\pi)^{z-1} \sin \dfrac{\pi z}{2} \Gamma(1-z)$, тогда и $\zeta\Big(\dfrac{1}{2} - Te^{i\varphi}\Big) \neq 0$). Пусть z_1, z_2,…,z_p — возможные нули $\zeta(z)$ на отрезке $\Big[\dfrac{1}{2} - Te^{i\varphi}, \dfrac{1}{2}\Big]$. Тогда, в силу уже упоминавшегося функционального уравнения для $\zeta(z)$, $1-z_1$, $1-z_2$,…,$1-z_p$ — нули $\zeta(z)$ на отрезке $\Big[\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} + Te^{i\varphi}\Big]$, причем z_j — нуль той же кратности, что и $1 - z_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$.

Пусть еще $\Gamma^{(1)}_{\varphi,T}$ — кривая с началом в точке $\dfrac{1}{2} - Te^{i\varphi}$ и концом в точке $\dfrac{1}{2}$, составленная из полуокружностей $C^{1,r,j}_{T,\varphi}$ радиуса $r > 0$ и отрезков (частей) сегмента $\Big[\dfrac{1}{2} - Te^{i\varphi}, \dfrac{1}{2}\Big]$

$$\Big[\frac{1}{2} - Te^{i\varphi}, z_1 - re^{i\varphi}\Big], \Big[z_1 + re^{i\varphi}, z_2 - re^{i\varphi}\Big], \ldots \Big[z_{p-1} + re^{i\varphi}, z_p - re^{i\varphi}\Big], \Big[z_p + -re^{i\varphi}, \frac{1}{2}\Big].$$

При этом число $r > 0$ выберем столь малым, чтобы полукружности $C^{1,r,j}_{T,\varphi}$ не пересекались ни друг с другом, ни с концами $\dfrac{1}{2} - Te^{i\varphi}$ и $\dfrac{1}{2}$. Все полуокружности $C^{1,r,j}_{T,\varphi}$ выбираем так, что их центры z_j остаются слева при обходе по кривой $\Gamma^{(1)}_{\varphi,T}$ (от точки $\dfrac{1}{2} - Te^{i\varphi}$ до $\dfrac{1}{2}$).

Обозначим через $\Gamma^{(2)}_{\varphi,T}$ кривую, симметричную с $\Gamma^{(1)}_{\varphi,T}$ относительно точки $\dfrac{1}{2}$, то есть кривую с началом в точке $\dfrac{1}{2}$ и концом в $\dfrac{1}{2} + Te^{i\varphi}$, составленную из частей сегмента $\Big[\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} + Te^{i\varphi}\Big]$ и полуокружностей $C^{2,r,j}_{T,\varphi}$, $j = 1, 2, \ldots, p$, с центрами в точках $1 - z_j$ и радиусом r. При этом центры остаются справа при обходе по кривой $\Gamma^{(2)}_{\varphi,T}$ от $\dfrac{1}{2}$ к $\dfrac{1}{2} + Te^{i\varphi}$. Положим

$$\mathcal{I}^{T,\varphi}_r := \int_{\Gamma^{(1)}_{\varphi,T}} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\, dz + \int_{\Gamma^{(2)}_{\varphi,T}} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\, dz = \int_{\Gamma^{(1)}_{\varphi,T}} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\, dz + \int_{\Gamma^{(1)}_{\varphi,T}} \frac{\zeta'(1-w)}{\zeta(1-w)}\, dw =$$

$$= \int_{\Gamma^{(1)}_{\varphi,T}} \Big[\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \frac{\zeta'(1-z)}{\zeta(1-z)}\Big]\, dz$$

(как известно, независимое переменное под знаком определенного или контурного интеграла можно обозначать любой буквой). Из функционального уравнения Римана легко вывести, что если $\zeta(z)\,\zeta(1-z)\,a(z)\neq 0$, то

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \frac{\zeta'(1-z)}{\zeta(1-z)} = \frac{a'(z)}{a(z)}.$$

Отсюда $\mathcal{I}^{T,\varphi}_r := \displaystyle\int_{\Gamma^{(1)}_{\varphi,T}} \frac{a'(z)}{a(z)}\, dz$ и, следовательно,

$$\lim_{r\to+0} \mathcal{I}^{T,\varphi}_r = \text{v.p.} \int_{\frac12 - Te^{i\varphi}}^{\frac12 + Te^{i\varphi}} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\, dz = \int_{\frac12 - Te^{i\varphi}}^{\frac12} \frac{a'(z)}{a(z)}\, dz = -\ln a\Big(\frac12 - Te^{i\varphi}\Big)$$

(из функционального уравнения для $\zeta(z)$ следует, что $a(1/2) = 1$). Таким образом, $\forall\varphi \in (0.\pi/2]$, $\forall T \in (0,+\infty)$

$$\text{v.p.} \int_{\frac12 - Te^{i\varphi}}^{\frac12 + Te^{i\varphi}} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\, dz = -\ln a\Big(\frac12 - Te^{i\varphi}\Big). \tag{1}$$

В случае, когда $\zeta\Big(\dfrac12 - Te^{i\varphi}\Big) = 0$ (тогда и $\zeta\Big(\dfrac12 + Te^{i\varphi}\Big) = 0$), при построении кривой $\Gamma^{(1)}_{\varphi,T}$ приходится взять еще четверть окружности радиуса $r > 0$ с центром в точке $\dfrac12 - Te^{i\varphi}$. Соответствующее изменение (то есть построение четверти окружности радиуса $r > 0$ с центром в точке $\dfrac12 + Te^{i\varphi}$) производится и при построении кривой $\Gamma^{(2)}_{\varphi,T}$, которая окажется симметричной с $\Gamma^{(1)}_{\varphi,T}$ относительно точки $\dfrac12$. И здесь теми же рассуждениями приходим к формуле (1). Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если $\varphi \in (0.\pi/2]$ и $T \in (0,+\infty)$, то справедлива формула* (1).

Замечание 1. *В исключительном случае, когда $\varphi = 0$, ситуация несколько усложняется из-за наличия тривиальных простых нулей вида $-2\pi k$, $k = 1,2,\dots,$ и простого полюса $z = 1$ у функции $\zeta(z)$, а также простых нулей $2m$, $m = 0,1,\dots,$ и простых полюсов $2k-1$, $k = 1,2,\dots$ у функции $a(z)$. Однако и в этом случае примерно теми же рассуждениями можно получить аналог формулы* (1).

Замечание 2. *Теорема 1 находит применения в теории дзета-функции Римана. Точнее, там используется главное значение несколько более общего интеграла*

$$v.p. \int_{\frac12 - Te^{i\varphi}}^{\frac12 + Te^{i\varphi}} h(z)\, \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\, dz,$$

где функция $h(z)$ (локально) аналитична в некоторой окрестности прямой Γ_φ и удовлетворяет соотношению $h(z) = h(1-z)$, $\forall z \in \Gamma_\varphi$. Это главное значение легко вычисляется при $\varphi \in (0.\pi/2]$ методами, изложенными в данном разделе.

3. Об одной гипотезе из теории дзета-функции

Назовем, следуя [1], число T из $(0,+\infty)$ ζ-регулярным, если $\zeta(\sigma + iT) \neq 0$, $\forall\sigma \in \mathbb{R}$. Напомним некоторые хорошо известные свойства дзета-функции $\zeta(z)$, описанные, например, в монографиях [1], [2]. Как известно, дзета-функция Римана определяется вначале в полуплоскости $G_1 := \{z : \Re z > 1\}$ как сумма обыкновенного ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ или как обратная величина к абсолютно сходящемуся в той же полуплоскости бесконечному произведению Эйлера–Римана. Функция $\zeta(z)$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость, за исключением точки $z = 1$, в которой она имеет простой полюс. Наконец (это свойство $\zeta(z)$ используется в предыдущем разделе), $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

$$\zeta(\overline{z}) = \overline{\zeta(z)} \text{ и } \frac{\zeta'(\overline{z})}{\zeta(\overline{z})} = \overline{\Big(\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\Big)}.$$

Последнее равенство имеет смысл, если $\zeta(z) \neq 0$. Заметим, что эти равенства справедливы и для более широких классов функций, например, для тех функций, которые являются однозначными аналитическими продолжениями либо суммы степенного ряда с отличным от нуля радиусом сходимости и вещественными тейлоровскими коэффициентами, либо суммы ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n z}$ с абсциссой абсолютной сходимости $a < +\infty$, с вещественными показателями λ_n и вещественными коэффициентами b_n, $n \geq 1$.

Пусть теперь $\varphi = \pi/2$, $h \in (0, +\infty)$, $T \in (0, +\infty)$ и является ζ-регулярным значением. Положим $B := \frac{1}{2} - iT$, $C := h - iT$, $D := h + iT$, $E := \frac{1}{2} + iT$, $\Gamma := \bigcup_{k=1}^{4} \Gamma_k$, где $\Gamma_1 := [B, C]$, $\Gamma_2 := [C, D]$, $\Gamma_3 := [D, E]$, $\Gamma_4 := \lim\limits_{r \to +0} \Gamma_4^r$, а спрямляемая жордановая кривая Γ_4^r с началом в точке E и концом в точке B построена так, как описано в п. 2, то есть Γ_4^r состоит из полуокружностей $C_{T,\varphi}^{s,r,j}$ $(s = 1, 2)$ с центрами в лежащих на T_φ нулях z_j функции $\zeta(z)$ и достаточно малым радиусом $r > 0$, а также из некоторых частей отрезка $[E, B]$. При этом, как показано в п. 2

$$\text{v.p.} \int_{\Gamma_4} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\, dz = \lim_{r \to +0} \int_{\Gamma_4^r} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\, dz = \ln a\Big(\frac{1}{2} - iT\Big).$$

По теореме о логарифмическом вычете

$$2\pi[N_0(T) + N_1(T) - 1] = \Im \int_{\Gamma} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{4} \Im \int_{\Gamma_k} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{4} \Im I_k.$$

Здесь, как в [1], $N_0(T)$ — число всех нулей функции $\zeta(z)$ (с учетом их кратностей), принадлежащих интервалу $\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + iT,\Big)$, а $N_1(T)$ — число всех (возможных) нулей функции $\zeta(z)$ (также с учетом их кратностей), принадлежащих внутренности прямоугольника с вершинами B, C, D, E. При этом

$$\Im I_1 = -\Im \int_C^B \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\, dz = -\Im \int_h^{1/2} \frac{\zeta'(x - iT)}{\zeta(x - iT)}\, dx,$$

откуда следует, что $\Im I_1 + \Im I_3 = 2\Im I_3$. Далее,

$$\Im \int_C^D \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\, dz = \Im\Big\{\int_{-T}^{0} \frac{\zeta'(h + i\tau)}{\zeta(h + i\tau)}\, i d\tau + \int_0^T \frac{\zeta'(h + i\tau)}{\zeta(h + i\tau)}\, i d\tau\Big\} =$$

$$= 2 \int_0^T \Re \frac{\zeta'(h + i\tau)}{\zeta(h + i\tau)}\, d\tau.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &2\pi[N_0(T)+N_1(T)-1]= \\ &=\Im\ln a\Big(\frac{1}{2}-iT\Big)+2\Im\int_h^{1/2}\frac{\zeta'(x+iT)}{\zeta(x+iT)}\,dx+2\int_0^T\Re\frac{\zeta'(h+i\tau)}{\zeta(h+i\tau)}\,d\tau. \end{aligned} \tag{2}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} N_0(T)+N_1(T)+\frac{1}{\pi}\Im\int_{1/2}^h\frac{\zeta'(x+iT)}{\zeta(x+iT)}\,dx= \\ =1+\frac{1}{2\pi}\Im\ln a\Big(\frac{1}{2}-iT\Big)+\frac{1}{\pi}\int_0^T\Re\frac{\zeta'(h+i\tau)}{\zeta(h+i\tau)}\,d\tau. \end{aligned} \tag{3}$$

Перед кратким анализом полученной формулы условимся обозначать через $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно и неограниченно возрастающую к ∞ последовательность ζ-нерегулярных значений: $0<T_1<T_2<\dots<T_k\uparrow+\infty$, а символом Q — открытое множество всех остальных (ζ-регулярных) значений из $(0,+\infty)$: $Q=(0,T_1)\cup(T_1,T_2)\cup\dots$.

Правая часть формулы (3) (обозначим ее ради краткости символом $\mu_1(T)$) определена и непрерывна на $(0,+\infty)$ и, в частности, в каждой ζ-нерегулярной точке T_k, $k=1,2,\dots$. Первые два слагаемых в формуле (3) $N_0(T)+N_1(T)$ составляют функцию (в обозначениях монографии [1]) $N(T)=N_0(T)+N_1(T)$, монотонно и неограниченно возрастающую на $(0,+\infty)$; при этом $N(T)$ постоянна в каждом интервале (T_k,T_{k+1}) и имеет в любой точке T_k скачок 1-го рода, равный $\alpha_k+2\beta_k$, где $\forall k\geq 1$ α_k — кратность возможного нуля $\zeta(z)$ в точке $\frac{1}{2}+iT_k$, а β_k — сумма кратностей всех возможных нулей $\zeta(z)$ из интервала $\Big(\frac{1}{2}+iT_k,h+iT_k\Big)$ (точнее, из промежутка $\Big(\frac{1}{2}+iT_k,1+iT_k\Big]$); при этом мы не учитываем и не используем дальше известный результат Валле-Пуссена и Адамара об отсутствии нулей $\zeta(z)$ на прямой $\Re z=1$). Всегда $\alpha_k+2\beta_k\geq 1$, $\forall k\geq 1$. Из формулы (3) видно, что функция

$$\mu_2(T):=\frac{1}{\pi}\Im\int_{1/2}^h\frac{\zeta'(x+iT)}{\zeta(x+iT)}\,dx$$

имеет скачок 1-го рода в каждой точке T_k, равный $\alpha_k+2\beta_k$. При этом $\forall k\geq 1$, $\forall T\in(T_k,T_{k+1})$, $\mu_2(T)=N(T)-\mu_1(T)=N(T_k)-\mu_1(T)$. Следовательно, $\forall k\geq 1$ существуют конечные односторонние пределы

$$\mu_2(T_k-0)=N(T_{k-1})-\mu_1(T_k),\ \mu_2(T_k+0)=N(T_k)-\mu_1(T_k).$$

Таким образом, функция $\mu_2(T)$ непрерывна в каждом интервале из множества Q и допускает в любой ζ-нерегулярной точке T_k скачок 1-го рода, равный $N(T_k)-N(T_{k-1})=\alpha_k+2\beta_k$. Положим $\psi(T)=\mu_2(T+0)-\mu_2(T-0)$. Тогда функция $\psi(T)$ определена в интервале $(0,+\infty)$, равна нулю в каждой точке из Q и равна $\alpha_k+2\beta_k$ при $T=T_k$, $k\geq 1$.

Теперь уже можно сформулировать одну гипотезу, которая представляется довольно правдоподобной.

Гипотеза $\mathbf{A_0}$. *Для всех T из $(0,+\infty)$ $|\psi(T)|<2$.*

Из этой гипотезы следует

Теорема 2. *Пусть гипотеза A_0 верна. Тогда*

(1) гипотеза Римана об отсутствии нулей у $\zeta(z)$ в полуплоскости $\Re z>1/2$ верна;

(2) все нули $\zeta(z)$ на прямой $\Re z=1/2$ — простые;

(3) число $N_0(T)$ всех (простых) нулей, лежащих на отрезке $\Big[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+iT\Big]$, $T\in(0,+\infty)$, удовлетворяет соотношению

$$N_0(T) = \frac{1}{2\pi}\Im \ln a\Big(\frac{1}{2} - iT\Big) + \frac{1}{\pi}\Im\int_{1/2}^{h}\frac{\zeta'(x+iT)}{\zeta(x+iT)}\,dx + O(1), \tag{4}$$

в котором h — произвольное фиксированное число из $(1, +\infty)$.

Утверждения (1) и (2) этой теоремы следуют из того, что неравенство $\alpha_k + 2\beta_k = |\alpha_k + 2\beta_k| < 2$ при любом $k \geq 1$ возможно только в том случае, когда $\beta_k = 0$ и $\alpha_k = 1$. Далее, $\forall T \in (0, +\infty)$ (и при каждом фиксированном $h \in (1, +\infty)$)

$$\Big|\int_0^T \Re\frac{\zeta'(h+i\tau)}{\zeta(h+i\tau)}\,d\tau\Big| = \Big|\Re\int_0^T \frac{\zeta'(h+i\tau)}{\zeta(h+i\tau)}\,d\tau\Big| = \big|\ln|\zeta(h+iT)| - \ln|\zeta(h)|\big| \leq$$
$$\leq \big|\ln\zeta(h+iT)\big| + \big|\ln\zeta(h)\big| \leq M < +\infty.$$

Для того чтобы воспользоваться формулой (4), нужно, во-первых, установить асимптотическое представление (при $T \gg 1$) функции $\Big|\Im\ln a\Big(\frac{1}{2} - iT\Big)\Big|$, что в принципе сделать нетрудно, и оценить рост (при $T \uparrow \infty$) функции

$$\Big|\Im\int_{1/2}^{h}\frac{\zeta'(x+iT)}{\zeta(x+iT)}\,dx\Big|,$$

что является гораздо более трудной задачей. Напомним, что еще Бэклунд в ходе своего более простого, чем исходное, доказательства равенства фон Мангольдта (см., например, [1, стр. 211, формула (3)]) доказал, что

$$\Big|\Im\int_{1/2}^{h}\frac{\zeta'(x+iT)}{\zeta(x+iT)}\,dx\Big| = O(\ln T).$$

По-видимому, этот результат Бэклунда можно существенно уточнить.

Отметим, что гипотеза A_0 (а с нею и теорема 2) будет опровергнута, если на прямой $\Re z = 1/2$ найдут кратный корень (их тогда будет по крайней мере два) функции $\zeta(z)$ или все-таки обнаружат хотя бы один нуль $\zeta(z)$ (таких корней будет по крайней мере четыре), принадлежащий объединению двух вертикальных полос $0 < \Re z < 1/2$, $1/2 < \Re z < 1$.

Заметим еще, что формулы (2)–(4) можно получить, используя теорему о логарифмическом вычете, для других контуров (типа прямоугольного четырехугольника и прямоугольного треугольника).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Титчмарш Е.К. *Теория дзета-функции Римана.* М.: ИЛ. 1953. 406 с.
2. H.M. Edwards *Riemann's zeta function* Dover Publications, Inc., Mineola, New York. 1974. 315 pp.

Юрий Федорович Коробейник,
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
ул. Маркуса, 22,
362027, г. Владикавказ, Россия
Южный федеральный университет,
ул. Мильчакова, 8а,
344090, г. Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: `kor@math.rsu.ru`