ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 4 (2015). С. 80-92.

СВЕРТКА, ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА ПОРОЖДАЕМЫЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕЙ ИОНКИНА

Б.Е. КАНГУЖИН, Н.Е. ТОКМАГАМБЕТОВ

Аннотация. В данной работе с $\mathcal{B}$, оператором второго порядка с нелокальными краевыми условиями, связывается свое преобразование Фурье и свертка. Исследуются свойства введенной свертки, а затем описывается класс пробных функций. Также введены пространства Соболева и получено тождество Планшереля, связанные с оператором $\mathcal{B}$.

Ключевые слова: свертка, преобразование Фурье, нелокальное краевое условие, пробные функции, пространство Соболева, тождество Планшереля, дифференциальный оператор, задача Ионкина.

Mathematics Subject Classification: 43A99, 46F12, 42A16, 34B10, 45J05

1. Введение

Стандартное преобразование Фурье является унитарным преобразованием в гильбертовом пространстве $L_2(0,b)$ и порождается оператором дифференцирования $(-i\frac{d}{dx})$, поскольку система экспонент $\{exp(i\lambda x), \lambda \in R\}$ представляет систему «собственных» функций соответствующего его непрерывному спектру. С преобразованием Фурье тесным образом связана билинейная, коммутативная, ассоциативная свертка без аннуляторов. В работах [1]–[4] вместо оператора дифференцирования $(-i\frac{d}{dx})$ в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ рассмотрен в гильбертовом пространстве $L_2(0,b)$ при $b<\infty$, оператор порожденный дифференциальным выражением $(-i\frac{d}{dx})$, и введены преобразования Фурье и свертки, порожденные этим оператором. В работе [5] развит анализ Фурье, порожденный дифференциальным оператором в ограниченной области с собственными значениями, кратности которых равны единице. Главное отличие данной работы от работы [5] – порождающий оператор имеет собственные значения с кратностями, не равными единице. В данной статье вводится понятие преобразования Фурье и свертка, порождаемые оператором двукратного дифференцирования в пространстве $L_2(0,1)$ с нелокальными краевыми условиями изученной в работе [6]. Известно, какую роль играют понятия обобщенного решения дифференциальных уравнений. Оказывается, что нелокальные краевые операторы порождают свой индивидуальный класс пробных функций. В связи с чем возникают новые классы обобщенных функций, которые отражают специфику нелокальных краевых условий.

B.E. Kanguzhin, N.E. Tokmagambetov, Convolution, Fourier transform and Sobolev spaces generated by non-local Ionkin problem.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант 0757/ГФ4). Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант 0773/ГФ4).

Поступила 19 февраля 2015 г.

В гильбертовом пространстве $L_2(0,1)$ определим оператор $\mathcal{B}$, порожденный дифференциальным выражением

$$l(u) \equiv -\frac{d^2u(x)}{dx^2},\ \ 0 < x < 1 \tag{1.1}$$

с областью определения

$$D(\mathcal{B}) = \{u \in W_2^2[0,\ 1] : u(0) = 0,\ u'(0) = u'(1)\},$$

спектральные свойства которого были подробно изучены в работе Н.И. Ионкина [6]. Оператор $\mathcal{B}$ не является самосопряженным, но его система собственных и присоединенных функций является базисом в $L_2(0,1)$. Это дает развить негармонический анализ, связанный с оператором $\mathcal{B}$. Негармонический анализ, порожденный системами экспонент, детально изучен в работах А. М. Седлецкого [7]–[9]. В последующих работах будут введены псевдо-дифференциальные операторы и другие элементы гармонического анализа, порожденные оператором $\mathcal{B}$.

Сопряженный оператор к $\mathcal{B}$, который порождается дифференциальным выражением (1.1) и краевыми условиями

$$v'(1) = 0,\ \ v(0) = v(1), \tag{1.2}$$

обозначим через $\mathcal{B}^*$.

Оператор $\mathcal{B}$ имеет собственные значения

$$\lambda_k = (2\pi k)^2,\ \ k = 0,\ 1,\ \dots ,$$

и собственные и присоединенные функции

$$u_0(x) = x,\ u_{2k-1}(x) = \sin(2\pi kx),\ u_{2k}(x) = x\cos(2\pi kx),\ \ k = 1,\ 2,\ \dots . \tag{1.3}$$

Это означает, что при $k > 0$ функции из (1.3) принадлежат $D(\mathcal{B})$ и являются решениями дифференциальных уравнений

$$-u''_{2k-1}(x) = \lambda_k u_{2k-1}(x),$$

$$-u''_{2k}(x) = \lambda_k u_{2k}(x) + 2\sqrt{\lambda_k}u_{2k-1}(x).$$

Каждому собственному значению λ_k при $k > 0$ соответствует собственная функция $u_{2k-1}(x)$
и присоединенная $u_{2k}(x)$.

А оператор $\mathcal{B}^*$ имеет собственные значения

$$\mu_k = (2\pi k)^2,\ \ k = 0,\ 1,\ \dots ,$$

и собственные и присоединенные функции

$$v_0(x) = 2,\ v_{2k-1}(x) = 4(1-x)\sin(2\pi kx),\ v_{2k}(x) = 4\cos(2\pi kx),\ \ k = 1,\ 2,\ \dots . \tag{1.4}$$

При этом каждому собственному значению μ_k при $k > 0$ соответствует собственная функция $v_{2k}(x)$ и присоединенная $v_{2k-1}(x)$, то есть для функций из (1.4) выполняются соотношения

$$-v''_{2k}(x) = \mu_k v_{2k}(x),$$

$$-v''_{2k-1}(x) = \mu_k v_{2k-1}(x) + 2\sqrt{\mu_k}v_{2k}(x)$$

и краевые условия (1.2).

Из работы [6] известны следующие результаты.

Лемма 1.1. *Последовательности функций (1.3) и (1.4) образуют биортогональную на интервале* $(0,\ 1)$ *систему функций, так что для любых номеров* $i, j \in \mathbb{N}$ *выполняется соотношение*

$$(u_{2i-k},\ v_{2j-l}) = \int_0^1 u_{2i-k}(x) v_{2j-l}(x)dx = \delta_{2i-k,2j-l},\ k = 0, m_i - 1;\ l = 0, m_j - 1,$$

здесь $\delta_{2i-k,2j-l}$ *– символ Кронекера,* $m_0 = 1$ *и* $m_i = 2,\ i \geq 1$.

Теорема 1.1. *Последовательность функций*

$$u_0(x) = x,\ u_{2k-1}(x) = \sin(2\pi kx),\ u_{2k}(x) = x\cos(2\pi kx),\ \ k \in \mathbb{N}$$

образует базис Рисса в пространстве $L_2(0, 1)$.

2. Свертка, порождаемая оператором $\mathcal{B}$

В пространстве $L_2(0,\ 1)$ введем свертку по формуле

$$(g * f)(x) = \frac{1}{2}\int_x^1 g(1 + x - t)f(t)dt + \frac{1}{2}\int_{1-x}^1 g(x - 1 + t)f(t)dt +$$

$$+\int_0^x g(x - t)f(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^{1-x} g(1 - x - t)f(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^x g(1 + t - x)f(t)dt.$$

Лемма 2.1. a) *Введенная свертка при любых* $f, g \in L_2(0,\ 1)$ *билинейна, коммутативна и ассоциативна.*

b) *Резольвента оператора* $\mathcal{B}$ *имеет сверточное представление*

$$(\mathcal{B} - \lambda I)^{-1} f = g * f,$$

где $g(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda}-1)}$, I *– единичный оператор.*

c) *Свертка функций* g *и* f *принадлежит области определения оператора* $\mathcal{B}$, *если* $g \in D(\mathcal{B})$, *причем справедливо равенство*

$$\mathcal{B}(g * f) = \mathcal{B}g * f.$$

d) *Свертка, порождаемая оператором* $\mathcal{B}$, *без аннуляторов, то есть если при всех* $g \in L_2(0,\ 1)$ *справедливо* $g * f \equiv 0$, *то* $f \equiv 0$.

Доказательство леммы 2.1. a) Билинейность и ассоциативность введенной свертки проверяется тривиально. Покажем, что введенная свертка коммутативна в пространстве суммируемых функций. Введем интегралы по формулам

$$I_1(g, f) = \int_x^1 g(1 + x - t)f(t)dt,\ I_2(g, f) = \int_0^x g(x - t)f(t)dt,$$

$$I_3(g, f) = \int_0^{1-x} g(1 - x - t)f(t)dt,\ I_4(g, f) = \int_{1-x}^1 g(x - 1 + t)f(t)dt,$$

$$I_5(g, f) = \int_0^x g(1 + t - x)f(t)dt,$$

где $x \in (0, 1)$.

Легко убедиться, что

$$I_k(g, f) = I_k(f, g) \ \text{ при } \ k = 1, 2, 3.$$

Рассмотрим $I_4(g, f)$ и сделаем замену $\tau = x - 1 + t$ в соответствующем интеграле. Тогда имеем соотношение

$$I_4(g, f) = \int_0^x g(\tau) f(1 - x + \tau) d\tau.$$

Отсюда следует, что $I_4(g, f) = I_5(f, g)$. Точно также проверяется соотношение $I_5(g, f) = I_4(f, g)$. Поскольку по определению свертки

$$g * f = \frac{1}{2} I_1(g, f) + I_2(g, f) - \frac{1}{2} I_3(g, f) + \frac{1}{2} I_4(g, f) + \frac{1}{2} I_5(g, f),$$

то имеем коммутативное равенство $g * f = f * g$.

b) Обозначим через

$$y(x, \lambda) = (g * f)(x),$$

где $g(x, \lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda}-1)}$. Вычислим производную от $y(x, \lambda)$ по x.

$$y'(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda} - 1)} \frac{d}{dx} \Big[\frac{1}{2} \int_x^1 \sin\sqrt{\lambda}(1 + x - t) f(t) dt + \int_0^x \sin\sqrt{\lambda}(x - t) f(t) dt -$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^{1-x} \sin\sqrt{\lambda}(1 - x - t) f(t) dt + \frac{1}{2} \int_{1-x}^1 \sin\sqrt{\lambda}(x - 1 + t) f(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^x \sin\sqrt{\lambda}(1 + t - x) f(t) dt \Big] =$$

$$= \frac{f(x)}{2\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda} - 1)} \Big[- \sin\sqrt{\lambda} + \sin\sqrt{\lambda} \Big] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda} - 1)} \Big[\frac{1}{2} \int_x^1 \cos\sqrt{\lambda}(1 - x - t) f(t) dt + \int_0^x \cos\sqrt{\lambda}(x - t) f(t) dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{1-x} \cos\sqrt{\lambda}(1 - x - t) f(t) dt + \frac{1}{2} \int_{1-x}^1 \cos\sqrt{\lambda}(x - 1 + t) f(t) dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^x \cos\sqrt{\lambda}(1 + t - x) f(t) dt \Big].$$

Точно также вычисляется вторая производная от $y(x, \lambda)$ по x. В результате имеем

$$y''(x, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda} - 1)} \Big[- \cos\sqrt{\lambda} f(x) + 2f(x) - f(x) - f(x) - \cos\sqrt{\lambda} f(x) \Big] - \lambda y(x, \lambda).$$

Отсюда следует, что $y(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$-y''(x, \lambda) = \lambda y(x, \lambda) + f(x).$$

Остается проверить выполнение краевых условий. Первое краевое условие проверяется непосредственной подстановкой $x = 0$.

$$y(0, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda} - 1)} \Big[\int_0^1 \sin\sqrt{\lambda}(1 - t) f(t) dt - \int_0^1 \sin\sqrt{\lambda}(1 - t) f(t) dt \Big] = 0.$$

Проверка второго краевого условия.

$$y'(0, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda} - 1)} \Big[\int_0^1 \cos\sqrt{\lambda}(1 - t) f(t) dt + \int_0^1 \cos\sqrt{\lambda}(1 - t) f(t) dt \Big],$$

$$y'(1, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda} - 1)} \Big[2 \int_0^1 \cos\sqrt{\lambda}(1 - t) f(t) dt + \int_0^1 \cos(\sqrt{\lambda} t) f(t) dt - \int_0^1 \cos(\sqrt{\lambda} t) f(t) dt \Big].$$

Отсюда $y'(0) = y'(1)$.

c) Пусть $g \in D(\mathcal{B})$. Рассмотрим свертку $g * f$, где $f \in L_2(0,1)$. Поскольку $g \in D(\mathcal{B})$, то $g * f \in W_2^2[0,1]$. Действительно, справедливы следующие представления первой и второй производных свертки по x:

$$\frac{d}{dx}(g*f)(x) = \int_x^1 g'(1+x-t)f(t)dt + \int_{1-x}^1 g'(x-1+t)f(t)dt+$$

$$+2\int_0^x g'(x-t)f(t)dt + \int_0^{1-x} g'(1-x-t)f(t)dt - \int_0^x g'(1+t-x)f(t)dt,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(g*f)(x) = (g''*f)(x).$$

При выводе указанных соотношений существенно использовалось то, что $g(0) = 0$ и $g'(0) = g'(1)$.

d) Пусть для всех $g \in L_2(0,1)$ свертка $g*f \equiv 0$. Введем функцию $g(x) = \left.\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda}-1)}\right|_{\lambda=1}$, которая корректно определена, так как $\cos 1 \neq 1$. Согласно утверждению b) свертка $g*f$ означает $(\mathcal{B}-I)^{-1}f$. Если $(\mathcal{B}-I)^{-1}f(x) \equiv 0$, то $f(x) \equiv 0$. Что и требовалось показать.

Лемма 2.1 полностью доказана.

Приведем одно полезное тождество.

Лемма 2.2. *Для любых комплексных α и β справедливо соотношение*

$$\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} * \frac{\sin(\beta x)}{\beta} = \left(\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}(\cos\beta - 1) - \frac{\sin(\beta x)}{\beta}(\cos\alpha - 1)\right)/(\beta^2-\alpha^2). \tag{2.1}$$

Доказательство. Обозначим через

$$y(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} * \frac{\sin(\beta x)}{\beta}$$

и

$$u(x) = \left(\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}(\cos\beta - 1) - \frac{\sin(\beta x)}{\beta}(\cos\alpha - 1)\right)/(\beta^2-\alpha^2).$$

Из утверждения b) леммы 2.1 следует, что функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$-y''(x) = \alpha^2 y(x) + \frac{\sin(\beta x)}{\beta}(\cos\alpha - 1) \tag{2.2}$$

и краевым условиям

$$y(0) = 0, \ y'(0) = y'(1). \tag{2.3}$$

Теперь докажем, что функция $u(x)$ также как и функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению (2.2) и краевым условиям (2.3). Тем самым получим требуемое.

Найдем первую и вторую производную от функции $u(x)$:

$$u'(x) = \left(\alpha\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha}(\cos\beta - 1) - \beta\frac{\cos(\beta x)}{\beta}(\cos\alpha - 1)\right)/(\beta^2-\alpha^2),$$

$$u''(x) = \left(-\alpha^2\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}(\cos\beta - 1) + \beta^2\frac{\sin(\beta x)}{\beta}(\cos\alpha - 1)\right)/(\beta^2-\alpha^2) =$$

$$= -\alpha^2\left(\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}(\cos\beta - 1) - \frac{\sin(\beta x)}{\beta}(\cos\alpha - 1)\right)/(\beta^2-\alpha^2)+$$

$$+(\beta^2-\alpha^2)\left(\frac{\sin(\beta x)}{\beta}(\cos\alpha - 1)\right)/(\beta^2-\alpha^2) =$$

$$= -\alpha^2 u(x) + \frac{\sin(\beta x)}{\beta}(\cos\alpha - 1).$$

Таким образом установили, что функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (2.2). Не сложные вычисления

$$u(0) = \left(\frac{\sin(\alpha 0)}{\alpha}(\cos\beta - 1) - \frac{\sin(\beta 0)}{\beta}(\cos\alpha - 1)\right)/(\beta^2 - \alpha^2) = 0,$$

$$u'(0) = \left(\alpha\frac{1}{\alpha}(\cos\beta - 1) - \beta\frac{1}{\beta}(\cos\alpha - 1)\right)/(\beta^2 - \alpha^2) =$$

$$= ((\cos\beta - 1) - (\cos\alpha - 1))/(\beta^2 - \alpha^2) = (\cos\beta - \cos\alpha))/(\beta^2 - \alpha^2),$$

$$u'(1) = \left(\alpha\frac{\cos\alpha}{\alpha}(\cos\beta - 1) - \beta\frac{\cos\beta}{\beta}(\cos\alpha - 1)\right)/(\beta^2 - \alpha^2) =$$

$$= (\cos\alpha(\cos\beta - 1) - \cos\beta(\cos\alpha - 1))/(\beta^2 - \alpha^2) = (\cos\beta - \cos\alpha)/(\beta^2 - \alpha^2),$$

влекут за собой выполнение краевых условий (2.3). Лемма 2.2 полностью доказана.

Преобразуем формулу (2.1) в следующий вид

$$\sin(\alpha x) * \sin(\beta x) = \frac{(\beta\sin(\alpha x)(\cos\beta - 1) - \alpha\sin(\beta x)(\cos\alpha - 1))}{\beta^2 - \alpha^2}. \tag{2.4}$$

Лемма 2.3. *Для $\xi \in \mathbb{Z}_+$ справедливо*

$$\sin(2\pi\xi x) * \sin(2\pi\xi x) = 0.$$

Доказательство. Чтобы доказать лемму, нам понадобятся следующие тождества, которые следуют из формулы (2.4) подстановками и простыми вычислениями. Подставив в формуле (2.4) $\beta = 2\pi\xi$ для $\xi > 0$, получим, что

$$\sin(\alpha x) * \sin(2\pi\xi x) = \frac{\alpha\sin(2\pi\xi x)(\cos\alpha - 1)}{\alpha^2 - (2\pi\xi)^2}. \tag{2.5}$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 2\pi\xi$ в (2.5), имеем

$$\sin(2\pi\xi x) * \sin(2\pi\xi x) = \lim_{\alpha\to 2\pi\xi}\sin(\alpha x) * \sin(2\pi\xi x) = \lim_{\alpha\to 2\pi\xi}\frac{\alpha\sin(2\pi\xi x)(\cos\alpha - 1)}{\alpha^2 - (2\pi\xi)^2} = 0. \tag{2.6}$$

Лемма доказана.

Заметим также, что для любого целого η

$$\sin(2\pi\eta x) * \sin(2\pi\xi x) = 0, \tag{2.7}$$

так как $\cos\alpha - 1 = 0$ при $\alpha = 2\pi\xi$.

Лемма 2.4. *Для $\xi \in \mathbb{Z}_+$ справедливо тождество*

$$x\cos(2\pi\xi x) * \sin(2\pi\xi x) = -\frac{1}{4}\sin(2\pi\xi x). \tag{2.8}$$

.

Доказательство. Теперь обе части тождества (2.5) дифференцируя по α, получим

$$x\cos(\alpha x) * \sin(2\pi\xi x) =$$
$$= \sin(2\pi\xi x)\frac{[\cos\alpha - 1 - \alpha\sin\alpha](\alpha^2 - (2\pi\xi)^2) - 2\alpha^2(\cos\alpha - 1)}{(\alpha^2 - (2\pi\xi)^2)^2}. \tag{2.9}$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 2\pi\xi$ из (2.9), имеем

$$x\cos(2\pi\xi x) * \sin(2\pi\xi x) = \lim_{\alpha\to 2\pi\xi} x\cos(\alpha x) * \sin(2\pi\xi x) =$$
$$= \sin(2\pi\xi x)\lim_{\alpha\to 2\pi\xi}\frac{[\cos\alpha - 1 - \alpha\sin\alpha](\alpha^2 - (2\pi\xi)^2) - 2\alpha^2(\cos\alpha - 1)}{(\alpha^2 - (2\pi\xi)^2)^2} =$$
$$= -\sin(2\pi\xi x)\left[\lim_{\alpha\to 2\pi\xi}\frac{\alpha\sin\alpha}{\alpha^2 - (2\pi\xi)^2} + 2\lim_{\alpha\to 2\pi\xi}\frac{\alpha^2(\cos\alpha - 1)}{(\alpha^2 - (2\pi\xi)^2)^2}\right] =$$
$$= -\sin(2\pi\xi x)\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = -\frac{1}{4}\sin(2\pi\xi x).$$

Таким образом, справедливо равенство (2.8).

Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. *Для $\xi \in \mathbb{Z}_+$ справедливо тождество*

$$x\cos(2\pi\xi x) * x\cos(2\pi\xi x) = -\frac{1}{4}\sin(2\pi\xi x) - \frac{1}{4}x\cos(2\pi\xi x).$$

Доказательство. Вычислим

$$x\cos(2\pi\xi x) * x\cos(2\pi\xi x) =$$
$$= \lim_{\alpha\to 2\pi\xi}\frac{d}{d\alpha}\left[\lim_{\beta\to 2\pi\xi}\frac{d}{d\beta}(\sin(\alpha x) * \sin(\beta x))\right] =$$
$$= \lim_{\alpha\to 2\pi\xi}\frac{d}{d\alpha}\left[\lim_{\beta\to 2\pi\xi}\frac{d}{d\beta}\left(\frac{(\beta\sin(\alpha x)(\cos\beta - 1) - \alpha\sin(\beta x)(\cos\alpha - 1))}{\beta^2 - \alpha^2}\right)\right] =$$
$$= \lim_{\alpha\to 2\pi\xi}\frac{d}{d\alpha}\left[\lim_{\beta\to 2\pi\xi}K(\alpha,\beta)\right],$$

где

$$K(\alpha,\beta) = \frac{\sin(\alpha x)(\cos\beta - 1 - \beta\sin\beta) - \alpha x\cos(\beta x)(\cos\alpha - 1)}{\beta^2 - \alpha^2} -$$
$$- \frac{2\beta(\beta\sin(\alpha x)(\cos\beta - 1) - \alpha\sin(\beta x)(\cos\alpha - 1))}{(\beta^2 - \alpha^2)^2}.$$

Так как

$$\lim_{\beta\to 2\pi\xi}K(\alpha,\beta) = -x\cos(2\pi\xi x)\frac{\alpha(\cos\alpha - 1)}{(2\pi\xi)^2 - \alpha^2} +$$
$$+ 4\pi\xi\sin(2\pi\xi x)\frac{\alpha(\cos\alpha - 1)}{((2\pi\xi)^2 - \alpha^2)^2},$$

то приходим к

$$x\cos(2\pi\xi x) * x\cos(2\pi\xi x) =$$
$$= \lim_{\alpha\to 2\pi\xi}\frac{d}{d\alpha}\left[-x\cos(2\pi\xi x)\frac{\alpha(\cos\alpha - 1)}{(2\pi\xi)^2 - \alpha^2} + 4\pi\xi\sin(2\pi\xi x)\frac{\alpha(\cos\alpha - 1)}{((2\pi\xi)^2 - \alpha^2)^2}\right] = \lim_{\alpha\to 2\pi\xi}F(\alpha),$$

где

$$F(\alpha) = -x\cos(2\pi\xi x)\left(\frac{\cos\alpha - 1 - \alpha\sin\alpha}{(2\pi\xi)^2 - \alpha^2} + 2\alpha\frac{\alpha(\cos\alpha - 1)}{((2\pi\xi)^2 - \alpha^2)^2}\right) +$$

$$+4\pi\xi\sin(2\pi\xi x)\left(\frac{\cos\alpha - 1 - \alpha\sin\alpha}{((2\pi\xi)^2 - \alpha^2)^2} + 4\alpha\frac{\alpha(\cos\alpha - 1)}{((2\pi\xi)^2 - \alpha^2)^3}\right).$$

Вычислим

$$\lim_{\alpha\to 2\pi\xi} F(\alpha) = -\frac{1}{4}\sin(2\pi\xi x) - \frac{1}{4}x\cos(2\pi\xi x).$$

Окончательно имеем

$$x\cos(2\pi\xi x) * x\cos(2\pi\xi x) = -\frac{1}{4}\sin(2\pi\xi x) - \frac{1}{4}x\cos(2\pi\xi x).$$

Таким образом, лемма 2.5 доказана полностью.

Следующее равенство проверяется непосредственными вычислениями

$$x * x = \frac{1}{2}x. \tag{2.10}$$

Аналогичными рассуждениями не сложно показать, что для $\xi \neq \eta > 0$ имеют место тождества

$$\sin(2\pi\xi x) * \sin(2\pi\eta x) = 0, \; x\cos(2\pi\xi x) * \sin(2\pi\eta x) = 0,$$

$$x\cos(2\pi\xi x) * x\cos(2\pi\eta x) = 0, \; \sin(2\pi\xi x) * x = 0, \; x\cos(2\pi\xi x) * x = 0. \tag{2.11}$$

3. Пробные функции, $\mathcal{B}$–Фурье преобразование и пространства Соболева $\mathcal{B}W_2^s[0,1]$

При определении распределений на $\mathbb{R}$ важную роль играет выбор класса пробных функций. В качестве пробных функции на $\mathbb{R}$ могут выступать бесконечно дифференцируемые с компактными носителями функции. Когда изучаются периодические процессы, то роль пробных функций играют периодические бесконечно дифференцируемые функции. В нашем случае, в качестве пробных функции рассматриваем класс $D(\mathcal{B}^\infty) = \bigcap_{m=1}^{\infty} D(\mathcal{B}^m)$, где $D(\mathcal{B}^m)$ — область определения оператора $\mathcal{B}^m$ при $m \geq 1$.

В следующей лемме решается вопрос о существовании пробных функции из $D(\mathcal{B}^\infty)$.

Лемма 3.1. *Если $g \in D(\mathcal{B}^\infty)$, то при всех $f \in L_2(0, 1)$ свертка*

$$g * f \in D(\mathcal{B}^\infty).$$

Доказательство леммы 3.1 следует из утверждения c) леммы 2.1.

Согласно лемме 3.1 достаточно построить одну функцию $g \in D(\mathcal{B}^\infty)$, чтобы получить бесконечно много других из $D(\mathcal{B}^\infty)$. В качестве g могут выступать собственные и присоединенные функции оператора $\mathcal{B}$. Нам необходимо выбрать, может быть, конечный набор функции $g_1, g_2, \ldots$ из $D(\mathcal{B}^\infty)$, так, чтобы замыкание линейной оболочки $span\,\{g_s * f : s = 1, 2, \ldots, f \in L_2(0, 1)\}$ совпадало с $D(\mathcal{B}^\infty)$. Для определения замыкания надо ввести топологию в линейном пространстве $D(\mathcal{B}^\infty)$. Будем говорить, что последовательность функции y_j из $D(\mathcal{B}^\infty)$ сходится в смысле топологии $D(\mathcal{B}^\infty)$ к нулю при $j \to \infty$, если при всех $m = 1, 2, \ldots$

$$\mathcal{B}^m y_j \rightrightarrows^{[0,\,1]} 0, j \to \infty,$$

где $\rightrightarrows^{[0,\,1]}$ — означает равномерную на $[0,\,1]$ сходимость.

Введем обозначение $C^{\infty}_{\mathcal{B}}[0,1] := D(\mathcal{B}^{\infty})$. На самом деле функции из $C^{\infty}_{\mathcal{B}}[0,1]$ определены лишь на интервале $[0,1]$. В дальнейшем, функции $C^{\infty}_{\mathcal{B}}[0,1]$ продолжим непрерывным образом на всю ось.

Для начала, продолжим функции из $C^{\infty}_{\mathcal{B}}[0,1]$ на $[-1,0)$. С учетом выполнения краевого условия $y(0)=0$, продолжим эту функцию нечетным образом, т.е.

$$y(0-x) = -y(0+x),\ x \in (0,1]$$

или

$$y(x) = -y(-x),\ x \in [-1,0).$$

Теперь индуктивно определим функцию y на $I_n = (n, n+1]$ следующим образом:

$$y(x) = 2y(x-1) - y(x-2),\ x \in I_n.$$

Определение 3.1. *Дуальное пространство к* $C^{\infty}_{\mathcal{B}}[0,1]$ *пространство* $\mathcal{D}'_{\mathcal{B}}(0,1) := \mathcal{L}(C^{\infty}_{\mathcal{B}}[0,1], \mathbb{C})$ *называется пространством $\mathcal{B}$-распределений. Для* $u \in \mathcal{D}'_{\mathcal{B}}(0,1)$ *и* $\varphi \in C^{\infty}_{\mathcal{B}}[0,1]$ *запишем*

$$u(\varphi) = \langle u,\ \varphi\rangle.$$

Для любых $\psi \in C^{\infty}_{\mathcal{B}}[0,1]$ *соответствие*

$$\varphi \mapsto \int_0^1 \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx$$

является $\mathcal{B}$-распределением, что влечет вложение $\psi \in C^{\infty}_{\mathcal{B}}[0,1] \subset \mathcal{D}'_{\mathcal{B}}(0,1)$.

Определение 3.2. *Через* $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ *обозначим пространство быстро убывающих функций, действующих из* $\mathbb{Z}_+$ *на* $\mathbb{C}$. *То есть,* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, *если для произвольного* $M < \infty$ *существует некоторая константа* $C_{\varphi,M}$ *так, чтобы имела место оценка*

$$|\varphi(\xi)| \leqslant C_{\varphi,M}\langle\xi\rangle^{-M}$$

для всех $\xi \in \mathbb{Z}_+$, *где*

$$\langle\xi\rangle := (1+\sqrt{\lambda_\xi}).$$

Топология на $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ *задается полунормами* p_k, *где* $k \in \mathbb{Z}_+$ *и* $p_k(\varphi) := \sup_{\xi\in\mathbb{Z}_+}\langle\xi\rangle^k|\varphi(\xi)|$.

Замечание 3.1. Линейные непрерывные функционалы на $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ имеют следующий вид

$$\varphi \mapsto \langle u, \varphi\rangle := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} u(\xi)\varphi(\xi),$$

где функции $u : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$ растут полиномиально на бесконечности, то есть существуют такие константы $M < \infty$ и $C_{u,M}$, что неравенство

$$|u(\xi)| \leqslant C_{u,M}\langle\xi\rangle^M$$

справедливо для всех $\xi \in \mathbb{Z}_+$. Такие распределения $u : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$ составляют пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}_+)$.

Определение 3.3. *Для* $f \in C^{\infty}_{\mathcal{B}}[0,1]$ *введем $\mathcal{B}$-Фурье преобразование по формуле*

$$\widehat{f}(\xi) := (\mathcal{F}_{\mathcal{B}}f)(\xi) = \int_0^1 f(x)v_\xi(x)dx. \tag{3.1}$$

Аналогично, для $f \in C^{\infty}_{\mathcal{B}^*}[0,1]$ *введем $\mathcal{B}^*$-Фурье преобразование по формуле*

$$\widehat{f}^*(\xi) := (\mathcal{F}_{\mathcal{B}^*}f)(\xi) = \int_0^1 f(x)u_\xi(x)dx. \tag{3.2}$$

Лемма 3.2. *$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ является непрерывной биекцией*

$$(\mathcal{F}_{\mathcal{B}}f)(\xi) = (f \mapsto \widehat{f}(\xi)) : C^\infty_{\mathcal{B}}[0,1] \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+),$$

и обратное преобразование $\mathcal{F}^{-1}_{\mathcal{B}} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to C^\infty_{\mathcal{B}}[0,1]$ задается формулой

$$f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_+} \widehat{f}(\xi) u_\xi(x). \tag{3.3}$$

Аналогично, $\mathcal{F}_{\mathcal{B}^*}$ является непрерывной биекцией

$$(\mathcal{F}_{\mathcal{B}^*}f)(\xi) = (f \mapsto \widehat{f}^*(\xi)) : C^\infty_{\mathcal{B}^*}[0,1] \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$$

и обратное преобразование $\mathcal{F}^{-1}_{\mathcal{B}^*} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to C^\infty_{\mathcal{B}^*}[0,1]$ задается формулой

$$f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_+} \widehat{f}^*(\xi) v_\xi(x). \tag{3.4}$$

Доказательство леммы 3.2 сильно не отличается от доказательства классического периодического случая, кроме тех моментов, где существенно используются свойства биортогональности. Покажем сперва, что для $f \in C^\infty_{\mathcal{B}}[0,1]$ справедливо $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, то есть для каждого $M < \infty$ найдется такая постоянная C, что оценка

$$|\widehat{f}(\xi)| \leqslant C\langle\xi\rangle^{-M}$$

имеет место для всех $\xi \in \mathbb{Z}_+$. На самом деле, для произвольного $M \in \mathbb{N}$ и ξ четного, получим неравенство

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left|\int_0^1 f(x) v_\xi(x) dx\right| = \left|\int_0^1 f(x) \frac{(\mathcal{B}^*)^M v_\xi(x)}{\lambda_\xi^M} dx\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\lambda_\xi^M} \int_0^1 \mathcal{B}^M f(x) v_\xi(x) dx\right| \leqslant C\|\mathcal{B}^M f\|_{L_2(0,1)} \langle\xi\rangle^{-2M}.$$

Такая же оценка верна и при ξ нечетном случае. Таким образом, для $f \in C^\infty_{\mathcal{B}}[0,1]$ имеем $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. В силу того, что $\|\mathcal{B}^M f\|_{L_2(0,1)}$ задают полунормы в пространстве $fC^\infty_{\mathcal{B}}[0,1]$, то отсюда также следует непрерывность оператора $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ из $C^\infty_{\mathcal{B}}[0,1]$ в $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$.

Ясно, что для $h \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ формула (3.3) определяет функцию $\mathcal{F}^{-1}_{\mathcal{B}} h \in C^\infty_{\mathcal{B}}[0,1]$ с коэффициентом Фурье $h(\xi)$. Если две функции f_1, $f_2 \in C^\infty_{\mathcal{B}}[0,1]$ имеют одинаковые коэффициенты Фурье $\widehat{f_1}(\xi) = \widehat{f_2}(\xi)$ для всех $\xi \in \mathbb{Z}_+$, то так как линейная оболочка $\{u_\xi\}_{\xi \in \mathbb{Z}_+}$ плотна в $C^\infty_{\mathcal{B}}[0,1]$, получим

$$f_1(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_+} \widehat{f_1}(\xi) u_\xi(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_+} \widehat{f_2}(\xi) u_\xi(x) = f_2(x).$$

Непрерывность отображения $\mathcal{F}^{-1}_{\mathcal{B}} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to C^\infty_{\mathcal{B}}[0,1]$ выводится такими же рассуждениями. Свойства сопряженного преобразования $\mathcal{F}_{\mathcal{B}^*}$ доказываются аналогичным образом. Лемма доказана.

По обратному $\mathcal{B}$-Фурье преобразованию $\mathcal{F}^{-1}_{\mathcal{B}} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to C^\infty_{\mathcal{B}}[0,1]$ расширим $\mathcal{B}$-Фурье преобразование единственным образом до отображения

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}} : \mathcal{D}'_{\mathcal{B}}(0,1) \to \mathcal{S}'(\mathbb{Z}_+)$$

по формуле

$$\langle \mathcal{F}_{\mathcal{B}} w, \varphi \rangle := \langle w, \overline{\mathcal{F}^{-1}_{\mathcal{B}^*} \overline{\varphi}} \rangle, \qquad \text{для } w \in \mathcal{D}'_{\mathcal{B}}(0,1),\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+). \tag{3.5}$$

Отсюда следует, что если $w \in \mathcal{D}'_{\mathcal{B}}(0,1)$, то $\widehat{w} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}_+)$. Также заметим, что если $w \in C^\infty_{\mathcal{B}}[0,1]$, то тождество

$$\langle \widehat{w}, \varphi \rangle = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_+} \widehat{w}(\xi)\varphi(\xi) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_+} \left(\int_0^1 w(x)\overline{v_\xi(x)}dx \right) \varphi(\xi) =$$

$$= \int_0^1 w(x) \overline{\left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_+} \overline{\varphi(\xi)} v_\xi(x) \right)} dx = \int_0^1 w(x) \overline{(\mathcal{F}_{\mathcal{B}^*}^{-1}\overline{\varphi})} dx = \langle w, \overline{\mathcal{F}_{\mathcal{B}^*}^{-1}\overline{\varphi}} \rangle$$

имеет место.

Аналогично определим отображение

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}^*} : \mathcal{D}'_{\mathcal{B}^*}(0,1) \to \mathcal{S}'(\mathbb{Z}_+).$$

Теперь в пространстве последовательностей $X = \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{C}^{m_k}$ введем внутреннюю свертку Коши, где индексы m_k из леммы 1.1: $m_0 = 1$ и $m_i = 2,\ i \geq 1$. Пусть $\xi = \{\xi_0; \xi_{2k-1}, \xi_{2k}, k > 0\}$ и $\eta = \{\eta_0; \eta_{2k-1}, \eta_{2k}, k > 0\}$ элементы $X = \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{C}^{m_k}$, тогда их сверткой назовем последовательность $\theta = \{\theta_0; \theta_{2k-1}, \theta_{2k}, k > 0\}$, где

$$\theta_0 = \xi_0\eta_0,$$
$$\theta_{2k-1} = \xi_{2k-1}\eta_{2k} + \xi_{2k}\eta_{2k} + \xi_{2k}\eta_{2k-1},$$
$$\theta_{2k} = \xi_{2k}\eta_{2k}.$$

Полученную таким образом свертку будем обозначать через $\xi *_X \eta := \theta$. Введенные свертки $*_X$ и $*$ связаны между собой через преобразование Фурье.

Теорема 3.1. *Для любых двух элементов $f,\ g \in C^\infty_{\mathcal{B}}[0,1]$ справедливо равенство*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} *_X \widehat{g}.$$

Доказательство. Записав свертку в следующем виде, и учитывая полученные тождества (2.4)-(2.11) и леммы 2.3 – 2.5, вычислим

$$(f * g)(x) = \sum_{\xi=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_\xi} \widehat{f}(2\xi - k) u_{2\xi-k}(x) * \sum_{\eta=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m_\eta} \widehat{g}(2\eta - s) u_{2\eta-s}(x) =$$

$$= \frac{1}{2}\widehat{f}(0)\widehat{g}(0)u_0(x) -$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{\xi=1}^{\infty} \left[(\widehat{f}(2\xi-1)\widehat{g}(2\xi) + \widehat{f}(2\xi)\widehat{g}(2\xi) + \widehat{f}(2\xi)\widehat{g}(2\xi-1))u_{2\xi-1}(x) + \widehat{f}(2\xi)\widehat{g}(2\xi)u_{2\xi}(x) \right].$$

После преобразования Фурье получим требуемое тождество.

Теорема 3.1 доказана полностью.

Введем пространство последовательностей $\mathcal{B}l_2$, порожденное системами функций $\{u_\xi\}_{\xi=0}^{\infty}$ и $\{v_\xi\}_{\xi=0}^{\infty}$ со скалярным произведением

$$(\widehat{f},\ \widehat{g})_{\mathcal{B}l_2} := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_+} \widehat{f}(\xi)\ \overline{\widehat{g^*}(\xi)}. \tag{3.6}$$

Не сложно убедиться, что пространство $\mathcal{B}l_2$ является гильбертовым. На самом деле

$$(\widehat{f},\ \widehat{g})_{\mathcal{B}l_2} = (\widehat{f}, \widehat{g}^*)_{l_2}.$$

Более того,

$$(\widehat{f}, \widehat{g})_{\mathcal{B}l_2} = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_+} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}^*(\xi)} = \widehat{f}(0)\overline{\widehat{g}^*(0)} + \sum_{\xi\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{2} \widehat{f}(2(\xi-1)+i)\overline{\widehat{g}^*(2(\xi-1)+i)} =$$

$$= \widehat{f}(0)\overline{\widehat{g}^*(0)} + \sum_{\xi\in\mathbb{N}}\sum_{\eta\in\mathbb{N}}\sum_{i=1}^{2}\widehat{f}(2(\xi-1)+i)\overline{\widehat{g}^*(2(\eta-1)+i)}(u_{2(\xi-1)+i}, v_{2(\eta-1)+i})_{L_2} = (f,g)_{L_2}.$$

Таким образом,

$$(\widehat{f},\widehat{g})_{\mathcal{B}l_2} = (f,g)_{L_2}.$$

Аксиомы гильбертового пространства следуют из полученного равенства. Тем самым, справедливо тождество Планшереля:

Лемма 3.3. *(Тождество Планшереля) Если $f \in L_2(0,1)$, тогда $\widehat{f} \in \mathcal{B}l_2$ и*

$$\|f\|_{L_2} = \|\widehat{f}\|_{\mathcal{B}l_2}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Непосредственными вычислениями

$$\|f\|^2_{L_2} = (f,f)_{L_2} = \left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_+}\widehat{f}(\xi)u_\xi, \sum_{\eta\in\mathbb{Z}_+}\widehat{f}^*(\eta)v_\eta\right)_{L_2} =$$

$$= \widehat{f}(0)\overline{\widehat{g}^*(0)} + \sum_{\xi\in\mathbb{N}}\sum_{\eta\in\mathbb{N}}\sum_{i=1}^{2}\widehat{f}(2(\xi-1)+i)\overline{\widehat{g}^*(2(\eta-1)+i)}(u_{2(\xi-1)+i}, v_{2(\eta-1)+i})_{L_2} =$$

$$= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_+}\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}^*(\xi)} = (\widehat{f},\widehat{f})_{\mathcal{B}l_2} = \|\widehat{f}\|^2_{\mathcal{B}l_2}$$

получим требуемое утверждение. Лемма доказана.

В следующем определении введем пространство Соболева, порожденное оператором $\mathcal{B}$:

Определение 3.4. *(Соболевские пространства $\mathcal{B}W^s[0,1]$) Для $f \in \mathcal{D}'_{\mathcal{B}}(0,1)$ и числа $s \in \mathbb{R}$ определим норму $\|\cdot\|_{\mathcal{B}W^s[0,1]}$ по формуле*

$$\|f\|_{\mathcal{B}W^s[0,1]} := \left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\langle\xi\rangle^{2s}\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}^*(\xi)}\right)^{1/2}. \tag{3.8}$$

Пространство Соболева $\mathcal{B}W^s[0,1]$ является пространством $\mathcal{B}$-распределений f, для которых $\|f\|_{\mathcal{B}W^s[0,1]} < \infty$. Или, для $f \in L_2(0,1)$: $f \in \mathcal{B}W^s[0,1]$ тогда и только тогда $\langle\xi\rangle^s\widehat{f}(\xi) \in \mathcal{B}l_2$.

Лемма 3.4. *Для каждого $s \in \mathbb{R}$ пространство Соболева $\mathcal{B}W^s[0,1]$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением*

$$(f,\ g)_{\mathcal{B}W^s} := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_+}\langle\xi\rangle^{2s}\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}^*(\xi)}.$$

Доказательство. Пространства $\mathcal{B}W^0[0,1]$ и $\mathcal{B}W^s[0,1]$ являются изометрично изоморфными по каноническому изоморфизму $\varphi_s : \mathcal{B}W^0[0,1] \to \mathcal{B}W^s[0,1]$, определенному по формуле

$$\varphi_s f(x) := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_+}\langle\xi\rangle^{-s}\widehat{f}(\xi)u_\xi(x).$$

На самом деле, φ_s является линейной изометрией между $\mathcal{B}W^t[0,1]$ и $\mathcal{B}W^{t+s}[0,1]$ для каждой $s \in \mathbb{R}$, и верны формулы $\varphi_{s_1}\varphi_{s_2} = \varphi_{s_1+s_2}$ и $\varphi_s^{-1} = \varphi_{-s}$. Тем самым, полнота пространства $L_2(0,1) = \mathcal{B}W^0[0,1]$ переводится на пространство $\mathcal{B}W^s[0,1]$ для каждого $s \in \mathbb{R}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кангужин Б.Е., Гани С.Н. *Свертки, порождаемые дифференциальными операторами на отрезке* // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. 2004. №1. С. 29–33.
2. Кангужин Б.Е., Нурахметов Д.Б. *Нелокальные внутренне краевые задачи дифференциальных операторов и некоторые конструкции связанные с ними* // Математический журнал. 2012. Т. 12. №3. С. 92–100.
3. B. Kanguzhin and N. Tokmagambetov *The Fourier transform and convolutions generated by a differential operator with boundary condition on a segment* // Fourier Analysis: Trends in Mathematics. 2014. P. 235–251. Birkhäuser Basel AG, Basel.
4. B. Kanguzhin, N. Tokmagambetov, K. Tulenov *Pseudo-differential operators generated by a nonlocal boundary value problem* // Complex Var. Elliptic Equ. 2015. V. 60. №1. P. 107–117.
5. M. Ruzhansky, N. Tokmagambetov, *Nonharmonic analysis of boundary value problems* // International Mathematics Research Notices. 2015. P. 1–68. http://dx.doi.org/10.1093/imrn/rnv243.
6. Ионкин Н.И. *Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием* // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. №2. С. 294–304.
7. Седлецкий А.М. *Биортогональные разложения функций в ряд экспонент на интервалах вещественной оси* // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37. №5. С. 51–95.
8. A. M. Sedletskii *Nonharmonic analysis* // J. Math. Sci. (N. Y.). 2003. №5. P. 3551–3619.
9. Седлецкий А.М. *Негармонический анализ* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2006. Т. 96. С. 106–211.

Балтабек Есматович Кангужин,
Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
пр. аль-Фараби, 71,
050040, г. Алматы, Казахстан
E-mail: kanbalta@mail.ru

Нияз Есенжолович Токмагамбетов,
Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
пр. аль-Фараби, 71,
050040, г. Алматы, Казахстан
E-mail: niyaz.tokmagambetov@gmail.com