ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 4 (2015). С. 25-33.

УДК 517.928.1

О ВОЗМУЩЕНИИ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА ОСИ УЗКИМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

А.Р. БИКМЕТОВ, В.Ф. ВИЛЬДАНОВА, И.Х. ХУСНУЛЛИН

Аннотация. Рассматривается оператор Шредингера на оси с двумя комплекснозначными потенциалами, зависящими от двух малых параметров. Один из этих параметров описывает длину носителей потенциалов, а обратная величина второго соответствует максимальным значениям модулей потенциалов. Получено достаточное условие, при котором из края непрерывного спектра возникает собственное значение и построена его асимптотика.

Ключевые слова: оператор Шредингера, возмущение, асимптотика.

Mathematics Subject Classification: 35J10, 34E10

1. Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть $V_1(x)$ и $V_2(x)$ – коплекснозначные функции из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, x_1, x_2 – произвольные числа ($x_1 < x_2$), параметры $0 < \mu, \varepsilon \ll 1$ удовлетворяют соотношению

$$\varepsilon\mu^{-1} = o(1). \tag{1}$$

В работе рассматривается оператор

$$\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu} := -\frac{d^2}{dx^2} + \mu^{-1}\left(V_1\left(\frac{x-x_1}{\varepsilon}\right) + V_2\left(\frac{x-x_2}{\varepsilon}\right)\right), \quad x_1 < x_2 \tag{2}$$

в $L_2(\mathbb{R})$ с областью определения $W_2^2(\mathbb{R})$.

Хорошо известно (см., например, [1, Глава V]), что оператор $\mathcal{H}_0 := -\frac{d^2}{dx^2}$ в $L_2(\mathbb{R})$ с областью определения $W_2^2(\mathbb{R})$ является самосопряженным, его дискретный спектр пуст, непрерывный спектр совпадает с полуосью $[0, +\infty)$. Так как функции V_j – финитные, то в силу [1, Глава IV, теоремы 1.1, 5.35]) непрерывный спектр оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ совпадает с полуосью $[0, +\infty)$ (для случая комплекснозначных функций см., например [2]).

В [3]–[6] изучался эффект возникновения собственных значений из границы непрерывного спектра для оператора $\mathcal{H}_0 + \varepsilon W(x)$, где $W(x)$ – достаточно быстро убывающий на бесконечности вещественный потенциал. В [3] был рассмотрен случай, когда функция $W(x)$ удовлетворяет условию $\int_\mathbb{R} |W(x)|(1+x^2)dx < \infty$. Показано, что если $\int_\mathbb{R} W(t)dt \leqslant 0$ то оператор $\mathcal{H}_0 + \varepsilon W(x)$ имеет единственное собственное значение. В [4] рассматривался более широкий класс функций $W(x)$, для которых $\int_\mathbb{R} |W(x)|(1+x^2)dx = \infty$. Рассмотрено три случая, когда $W(x)$ при $x \to \infty$ ведет себя как $-ax^{-\beta}$. Показано, что при $2 < \beta < 3$ результаты

A.R. Bikmetov, V.F. Vil'danova, I.Kh. Khusnullin, On perturbation of a Schrödinger operator on axis by narrow potentials.

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14-01-97024 р_поволжье_а). Работа третьего автора выполнена в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности Минобрнауки России.

Поступила 18 август 2015 г.

полученные в [3] остаются в силе. В [5] доказано существование собственного значения оператора $\mathcal{H}_0+\varepsilon W(x)$ в случаях, когда $W(x)$ удовлетворяет условиям $\int_{\mathbb{R}}|W(x)|(1+|x|)dx<\infty$ и $\int_{\mathbb{R}}W(t)dt\leqslant 0$. Так же доказано, что при $\int_{\mathbb{R}}W(t)dt>0$ собственного значения нет.

В [7] был рассмотрен оператор $\mathcal{H}_0-\varepsilon\mathcal{L}_\varepsilon$, где $0<\varepsilon\ll 1$, $\mathcal{L}_\varepsilon : W^2_{2,loc}(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R};Q)$ – произвольный линейный оператор, удовлетворяющий равномерно по ε неравенству

$$\|\mathcal{L}_\varepsilon u\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant C\|u\|_{W^2_2(Q)}, \tag{3}$$

для некоторого конечного интервала Q на оси, постоянная C не зависит от ε. $L_2(\mathbb{R};Q)$ – подмножество функций из $L_2(\mathbb{R})$ с носителями из $\overline{Q}$, $W^2_{2,loc}(\mathbb{R})$ – множество функций, определенных в пространстве $\mathbb{R}$, сужение которых на любое ограниченное множество $D\subset\mathbb{R}$ принадлежит $W^2_2(D)$. Получены достаточные условия существования малых собственных значений рассматриваемого оператора. В случае, когда собственные значения имеются, построены их асимптотики.

В [8] изучался эффект возникновения собственных значений из края непрерывного спектра оператора для операторов с узкими потенциалами, частным случаем которых является оператор (2). На основе результатов, полученных в [7] были установлены достаточные условия, при которых из края непрерывного спектра возникает собственное значение в предположении существования числа $\gamma>0$, такого, что $\mu^{-1}\varepsilon^{1/2}=o(\varepsilon^\gamma)$.

С другой стороны, из результатов, полученных в [9], [10] при возмущении дискретного спектра оператора Шредингера узкими потенциалами, естественно ожидать, что результаты, полученные в [8] справедливы для более широкого класса параметров ε,μ, удовлетворяющих условию (1). В настоящей работе на основе подхода, предложенного в [11], показывается справедливость этого предположения, то есть устанавливаются достаточные условия возникновения собственного значения из края непрерывного спектра при условии (1).

Пусть отрезок $Q=[a,b]$ таков, что $x_j\in Q$ и $\mathrm{supp}V_j(x)\subset Q$, $j=1,2$. Обозначим

$$\langle g\rangle :=\int_{\mathbb{R}}g(t)dt.$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (1). Тогда если*

$$\mathrm{Re}\left(\langle V_1\rangle+\langle V_2\rangle\right)>0, \tag{4}$$

то существует единственное и простое собственное значение $\lambda_{\varepsilon,\mu}$ оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$, стремящееся к нулю при $\varepsilon\to 0$. Его асимптотика имеет вид

$$\lambda_{\varepsilon,\mu}=-\frac{1}{4}\left(\varepsilon\mu^{-1}\right)^2\left(\langle V_1\rangle+\langle V_2\rangle\right)^2+O\left(\varepsilon^3\mu^{-3}\right). \tag{5}$$

Если

$$\mathrm{Re}\left(\langle V_1\rangle+\langle V_2\rangle\right)<0, \tag{6}$$

то оператор $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ не имеет собственных значений, стремящееся к нулю при $\varepsilon\to 0$.

2. Вспомогательные утверждения

Легко видеть, что функция

$$W_j(\xi)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|\xi-t|V_j(t)dt,$$

является решением уравнения

$$W_j''(\xi)=V_j(\xi),\quad j=1,2. \tag{7}$$

Так как $x_1 < x_2$, то при достаточно малых ε $\mathrm{supp}V_1(\frac{x-x_1}{\varepsilon}) \cap \mathrm{supp}V_2(\frac{x-x_2}{\varepsilon}) = \varnothing$. Поэтому существуют фиксированные промежутки $Q_1 \subset Q$ и $Q_2 \subset Q$, такие, что $\mathrm{supp}V_j(\frac{x-x_j}{\varepsilon}) \subset Q_j$, $j = 1, 2$ и $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$. Выберем срезающие функции $\chi_j(x)$, удовлетворяющие следующим условиям: функции $\chi_j(x)$ равны единице при $x \in Q_j$ соответственно, нулю при $x \notin Q_j$ и $\chi_1(x)\chi_2(x) = 0$.

Далее, мы следуем подходу, предложенному в [11]. Положим

$$\varphi_{\varepsilon,\mu}(x) := 1 + \varepsilon^2\mu^{-1}\left(\chi_1(x)W_1\left(\frac{x-x_1}{\varepsilon}\right) + \chi_2(x)W_2\left(\frac{x-x_2}{\varepsilon}\right)\right). \tag{8}$$

Оператор умножения на функцию $\varphi_{\varepsilon,\mu}(x)$ обозначим через $U_{\varepsilon,\mu}$:

$$U_{\varepsilon,\mu}[v] := \varphi_{\varepsilon,\mu}(x)v. \tag{9}$$

Оператор $U_{\varepsilon,\mu}$ взаимно однозначно отображает $L_2(\mathbb{R})$ на себя. Поэтому собственные значения оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ совпадают с собственными значениями оператора $U^{-1}_{\varepsilon,\mu}\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}U_{\varepsilon,\mu}$.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие (1), тогда для оператора $U_{\varepsilon,\mu}$ справедливы оценки*

$$\left|U^{-1}_{\varepsilon,\mu}[1]\right| \leqslant C_1, \quad x \in Q, \tag{10}$$

$$U^{-1}_{\varepsilon,\mu}[1] = 1 + O(\varepsilon\mu^{-1}), \quad x \in Q. \tag{11}$$

Доказательство. Оценка (10) непосредственно следует из определения функций χ_j, W_j и (1), (9). Далее, из (9) следует, что

$$U^{-1}_{\varepsilon,\mu}[1] = \frac{1}{\varphi_{\varepsilon,\mu}(x)} := \widetilde{\varphi}_{\varepsilon,\mu}(x).$$

Разложими функцию $\widetilde{\varphi}_{\varepsilon,\mu}(x)$ в ряд в окрестности нуля:

$$\widetilde{\varphi}_{\varepsilon,\mu}(x) = \widetilde{\varphi}_{\varepsilon,\mu}(0) + \widetilde{\varphi}'_{\varepsilon,\mu}(c)x, \quad 0 < c < x, \quad x \in Q,$$

где

$$\widetilde{\varphi}'_{\varepsilon,\mu}(x) = -\frac{\varepsilon\mu^{-1}}{\varphi^2_{\varepsilon,\mu}(x)}\Big(\chi_1(x)W_1'(\xi_1) + \chi_2(x)W_2'(\xi_2) + \varepsilon\left(\chi_1'(x)W_1(\xi_1) + \chi_2'(x)W_2(\xi_2)\right)\Big),$$

$\xi_j = (x - x_j)\varepsilon^{-1}$.

Из определения функции $\widetilde{\varphi}_{\varepsilon,\mu}(x)$ следует, что

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_{\varepsilon,\mu}(0) =& \frac{1}{1+q},\\
\widetilde{\varphi}'_{\varepsilon,\mu}(c) =& -\frac{\varepsilon\mu^{-1}}{\varphi^2_{\varepsilon,\mu}(c)}\left(\chi_1(c)W_1'\left(\frac{c-x_1}{\varepsilon}\right) + \chi_2(c)W_2'\left(\frac{c-x_2}{\varepsilon}\right)\right)\\
&-\frac{\varepsilon^2\mu^{-1}}{\varphi^2_{\varepsilon,\mu}(c)}\left(\chi_1'(c)W_1\left(\frac{c-x_1}{\varepsilon}\right) + \chi_2'(c)W_2\left(\frac{c-x_2}{\varepsilon}\right)\right),
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$q = \varepsilon^2\mu^{-1}\left(\chi_1(0)W_1\left(\frac{-x_1}{\varepsilon}\right) + \chi_2(0)W_2\left(\frac{-x_2}{\varepsilon}\right)\right).$$

В силу (1), (8) и определения функций χ_j, W_j справедливы оценки

$$|q| < 1, \qquad |\varphi^{-2}_{\varepsilon,\mu}(c)| \leqslant C_2,$$

следовательно, из последних оценок и (12) вытекают

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_{\varepsilon,\mu}(0) =& 1 + O(q) = 1 + O(\varepsilon^2\mu^{-1}),\\
\widetilde{\varphi}'_{\varepsilon,\mu}(c) =& O(\varepsilon\mu^{-1}).
\end{aligned}$$

Из последних оценок вытекает справедливость (11). Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть выполнено условие (1), тогда справедливо представление*

$$U^{-1}_{\varepsilon,\mu}\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}U_{\varepsilon,\mu} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon\mu^{-1}\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}, \tag{13}$$

где $\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}$ *– дифференциальный оператор второго порядка с ограниченными финитными коэффициентами, удовлетворяющий оценке*

$$\|\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}u\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C_3\|u\|_{W_2^2(Q)}, \tag{14}$$

где C_3 *– не зависит от* ε.

Доказательство. Из (2) и (9) последовательно получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}U_{\varepsilon,\mu} = &\left(\mathcal{H}_0 + \mu^{-1}\left(V_1(\xi_1) + V_2(\xi_2)\right)\right)\Big[1 + \varepsilon^2\mu^{-1}\left(\chi_1(x)W_1(\xi_1) + \chi_2(x)W_2(\xi_2)\right)\Big]\\
=&U_{\varepsilon,\mu}[1]\mathcal{H}_0 + \mu^{-1}\left(V_1(\xi_1) + V_2(\xi_2)\right) + \varepsilon^2\mu^{-1}\Big(\chi_1(x)\mathcal{H}_0[W_1(\xi_1)]\\
&+ \chi_2(x)\mathcal{H}_0[W_2(\xi_2)]\Big)\\
&+ \varepsilon^2\mu^{-1}\sum_{j=1}^{2}\Big(W_j(\xi_j)\mathcal{H}_0[\chi_j(x)] - 2\frac{d}{dx}[\chi_j(x)]\frac{d}{dx}[W_j(\xi_j)]\\
&- 2W_j(\xi_j)\frac{d}{dx}[\chi_j(x)]\frac{d}{dx} - 2\chi_j(x)\frac{d}{dx}[W_j(\xi_j)]\frac{d}{dx}\Big)\\
&+ \varepsilon^2\mu^{-2}\Big(V_1(\xi_1)W_1(\xi_1) + V_2(\xi_2)W_2(\xi_2)\\
&+ V_1(\xi_1)\chi_2(x)W_2(\xi_2) + V_2(\xi_2)\chi_1(x)W_1(\xi_1)\Big).
\end{aligned}$$

В силу (7), определения оператора $\mathcal{H}_0$ и функций χ_j из последнего равенства последовательно получаем

$$\begin{aligned}
&\mu^{-1}\left(V_1(\xi_1) + V_2(\xi_2)\right) + \varepsilon^2\mu^{-1}\left(\chi_1(x)\mathcal{H}_0[W_1(\xi_1)] + \chi_2(x)\mathcal{H}_0[W_2(\xi_2)]\right) =\\
&\mu^{-1}\left(V_1(\xi_1) + V_2(\xi_2)\right) + \varepsilon^2\mu^{-1}\left(\mathcal{H}_0[W_1(\xi_1)] + \mathcal{H}_0[W_2(\xi_2)]\right) =\\
&\mu^{-1}\left(V_1(\xi_1) + V_2(\xi_2)\right) - \mu^{-1}\left(V_1(\xi_1) + V_2(\xi_2)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Далее, из определения функций χ_j следует, что

$$V_1(\xi_1)\chi_2(x)W_2(\xi_2) = 0, \qquad V_2(\xi_2)\chi_1(x)W_1(\xi_1) = 0.$$

С учетом последних равенств получаем, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}U_{\varepsilon,\mu} =&U_{\varepsilon,\mu}[1]\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2\mu^{-1}\sum_{j=1}^{2}\Big(W_j(\xi_j)\mathcal{H}_0[\chi_j(x)] - 2\frac{d}{dx}[\chi_j(x)]\frac{d}{dx}[W_j(\xi_j)]-\\
&- 2W_j(\xi_j)\frac{d}{dx}[\chi_j(x)]\frac{d}{dx} - 2\chi_j(x)\frac{d}{dx}[W_j(\xi_j)]\frac{d}{dx}\Big)+\\
&+ \varepsilon^2\mu^{-2}\Big(V_1(\xi_1)W_1(\xi_1) + V_2(\xi_2)W_2(\xi_2)\Big).
\end{aligned}$$

Из (9) и последнего равенства вытекает равенство (13), где

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu} =&U^{-1}_{\varepsilon,\mu}[1]\varepsilon\sum_{j=1}^{2}\Big(W_j(\xi_j)\mathcal{H}_0[\chi_j(x)]-2\frac{d}{dx}[\chi_j(x)]\frac{d}{dx}[W_j(\xi_j)]-\\ &-2W_j(\xi_j)\frac{d}{dx}[\chi_j(x)]\frac{d}{dx}-2\chi_j(x)\frac{d}{dx}[W_j(\xi_j)]\frac{d}{dx}\Big)+\\ &+U^{-1}_{\varepsilon,\mu}[1]\varepsilon\mu^{-1}\Big(V_1(\xi_1)W_1(\xi_1)+V_2(\xi_2)W_2(\xi_2)\Big).\end{aligned} \tag{15}$$

Далее, докажем, что оператор $\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}$ удовлетворяет оценке (14). Из (10) следует, что

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}u\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant&\varepsilon C_1\sum_{j=1}^{2}\left(\Big\|W_j(\xi_j)\mathcal{H}_0[\chi_j(x)]u\Big\|_{L_2(\mathbb{R})}+2\Big\|\frac{d}{dx}[\chi_j(x)]\frac{d}{dx}[W_j(\xi_j)]u\Big\|_{L_2(\mathbb{R})}+\right.\\ &\left.+2\Big\|W_j(\xi_j)\frac{d}{dx}[\chi_j(x)]\frac{du}{dx}\Big\|_{L_2(\mathbb{R})}+2\Big\|\chi_j(x)\frac{d}{dx}[W_j(\xi_j)]\frac{du}{dx}\Big\|_{L_2(\mathbb{R})}\right)+\\ &+\varepsilon\mu^{-1}C_1\left(\Big\|V_1(\xi_1)W_1(\xi_1)u\Big\|_{L_2(\mathbb{R})}+\Big\|V_2(\xi_2)W_2(\xi_2)u\Big\|_{L_2(\mathbb{R})}\right).\end{aligned} \tag{16}$$

Далее, оценим каждое слагаемое в правой части последнего неравенства. В силу определения функций χ_j имеем

$$\Big\|W_j(\xi_j)\mathcal{H}_0[\chi_j(x)]u\Big\|_{L_2(\mathbb{R})}=\Big\|W_j(\xi_j)\chi''_j(x)u\Big\|_{L_2(Q)}\leqslant C^j_4\|u\|_{L_2(Q)}\leqslant C^j_4\|u\|_{W^2_2(Q)},$$

где $C^j_4=\max\limits_{x\in Q}(|W_j(\xi_j)\chi''_j(x)|)$,

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{d}{dx}[\chi_j(x)]\frac{d}{dx}[W_j(\xi_j)]u\Big\|_{L_2(\mathbb{R})}=\varepsilon^{-1}\Big\|\chi'_j(x)W'_j(\xi_j)u\Big\|_{L_2(Q)}&\leqslant\varepsilon^{-1}C^j_5\|u\|_{L_2(Q)}\\ &\leqslant\varepsilon^{-1}C^j_5\|u\|_{W^2_2(Q)},\end{aligned}$$

где $C^j_5=\max\limits_{x\in Q}(|\chi'_j(x)W'_j(\xi_j)|)$,

$$\Big\|W_j(\xi_j)\frac{d}{dx}[\chi_j(x)]\frac{du}{dx}\Big\|_{L_2(\mathbb{R})}=\Big\|W_j(\xi_j)\chi'_j(x)\frac{du}{dx}\Big\|_{L_2(Q)}\leqslant C^j_6\Big\|\frac{du}{dx}\Big\|_{L_2(Q)}\leqslant C^j_6\|u\|_{W^2_2(Q)},$$

где $C^j_6=\max\limits_{x\in Q}(|W_j(\xi_j)\chi'_j(x)|)$,

$$\begin{aligned}\Big\|\chi_j(x)\frac{d}{dx}[W_j(\xi_j)]\frac{du}{dx}\Big\|_{L_2(\mathbb{R})}=\varepsilon^{-1}\Big\|\chi_j(x)W'_j(\xi_j)\frac{du}{dx}\Big\|_{L_2(Q)}&\leqslant\varepsilon^{-1}C^j_7\Big\|\frac{du}{dx}\Big\|_{L_2(Q)}\\ &\leqslant\varepsilon^{-1}C^j_7\|u\|_{W^2_2(Q)},\end{aligned}$$

где $C^j_7=\max\limits_{x\in Q}(|\chi_j(x)W'_j(\xi_j)|)$,

$$\Big\|V_j(\xi_j)W_j(\xi_j)u\Big\|_{L_2(\mathbb{R})}=\Big\|V_j(\xi_j)W_j(\xi_j)u\Big\|_{L_2(Q)}\leqslant C^j_8\|u\|_{L_2(Q)}\leqslant C^j_8\|u\|_{W^2_2(Q)},$$

где $C^j_8=\max\limits_{x\in Q}(|V_j(\xi_j)W_j(\xi_j)|)$.

Из последних оценок и (16) вытекает оценка (14). Лемма 2 доказана. □

3. Доказательство теоремы

Ведем следующие обозначения

$$
\begin{aligned}
m^{(1)}_{\varepsilon,\mu} &:= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[1]dx, \qquad m^{(2)}_{\varepsilon,\mu} := \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}\left[\int_{\mathbb{R}} |x-t|\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[1]dt\right]dx,\\
k_{\varepsilon,\mu} &:= \frac{\varepsilon\mu^{-1}}{2} m^{(1)}_{\varepsilon,\mu} + \frac{(\varepsilon\mu^{-1})^2}{2} m^{(2)}_{\varepsilon,\mu}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Для оператора $\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}$ выполняется неравенство (14), то из теоремы 1 работы [7] следует, что если

$$
k_{\varepsilon,\mu} = \varepsilon\mu^{-1}c_1 + (\varepsilon\mu^{-1})^2 c_2 + O\left((\varepsilon\mu^{-1})^3\right), \quad c_1, c_2 = \mathrm{const}, \tag{18}
$$

то достаточным условием наличия у оператора $(\mathcal{H}_0 - \varepsilon\mu^{-1}\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu})$ собственного значения, стремящегося к нулю при $\varepsilon \to 0$, является неравенство

$$
\mathrm{Re}(c_1 + \varepsilon\mu^{-1}c_2) < 0, \tag{19}
$$

а достаточным условием отсутствия такого собственного значения – неравенство

$$
\mathrm{Re}(c_1 + \varepsilon\mu^{-1}c_2) > 0. \tag{20}
$$

Если выполнено (19), то оператор $(\mathcal{H}_0 - \varepsilon\mu^{-1}\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu})$ имеет единственное и простое собственное значение, стремящееся к нулю. Оно имеет асимптотику

$$
\lambda_{\varepsilon,\mu} = -\left(\varepsilon\mu^{-1}c_1 + (\varepsilon\mu^{-1})^2 c_2\right)^2 + O\left(c_1(\varepsilon\mu^{-1})^4 + (\varepsilon\mu^{-1})^5\right). \tag{21}
$$

Из (15) следует, что

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[1]dx =& \varepsilon \int_{\mathbb{R}} U^{-1}_{\varepsilon,\mu}[1] \sum_{j=1}^{2} \Big(W_j(\xi_j)\mathcal{H}_0[\chi_j(x)] - 2\frac{d}{dx}[\chi_j(x)]\frac{d}{dx}[W_j(\xi_j)]\Big)dx+\\
&+ \varepsilon\mu^{-1} \int_{\mathbb{R}} U^{-1}_{\varepsilon,\mu}[1]\Big(V_1(\xi_1)W_1(\xi_1) + V_2(\xi_2)W_2(\xi_2)\Big)dx.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Далее, после замены переменной, получаем оценку

$$
\int_{\mathbb{R}} V_j\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right) W_j\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right) dx = \varepsilon \int_{\mathbb{R}} V_j(t)W_j(t)dt = O(\varepsilon).
$$

Из (11) и последней оценки следует оценка

$$
\varepsilon\mu^{-1} \int_{\mathbb{R}} U^{-1}_{\varepsilon,\mu}[1]\Big(V_1(\xi_1)W_1(\xi_1) + V_2(\xi_2)W_2(\xi_2)\Big)dx = O(\varepsilon^2\mu^{-1}).
$$

Из (22) и определения оператора $\mathcal{H}_0$ следует

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \left(W_j(\xi_j)\mathcal{H}_0[\chi_j(x)] - 2\frac{d}{dx}[\chi_j(x)]\frac{d}{dx}[W_j(\xi_j)]\right) dx\\
&= \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \left(-W_j(\xi_j)\chi''_j(x) - 2\varepsilon^{-1}\chi'_j(x)W'_j(\xi_j)\right) dx.
\end{aligned} \tag{23}
$$

Интегрируя по частям два раза в силу (7) и определения функций $\chi_j(x)$ из последнего равенства последовательно поучаем

$$\begin{aligned}\varepsilon\int_{\mathbb{R}}\left(-W_j(\xi_j)\chi_j''(x)-2\varepsilon^{-1}\chi_j'(x)W_j'(\xi_j)\right)dx=&-\int_{\mathbb{R}}\chi_j'(x)W_j'(\xi_j)dx\\ =&\varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{R}}\chi_j(x)W_j''(\xi_j)dx\\ =&\varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{R}}V_j(\xi_j)dx=\int_{\mathbb{R}}V_j(t)dt.\end{aligned}\tag{24}$$

Из (22), (11), (23) и (24) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}}\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[1]dx=\langle V_1\rangle+\langle V_2\rangle+O(\varepsilon\mu^{-1}).\tag{25}$$

Покажем, что справедлива оценка

$$m^{(2)}_{\varepsilon,\mu}=O(1).\tag{26}$$

Из (17) имеем

$$m^{(2)}_{\varepsilon,\mu}=\int_{\mathbb{R}}\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}\left[\int_{\mathbb{R}}|x-t|\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[1]dt\right]dx=\int_{\mathbb{R}}\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[f(x)]dx,$$

где

$$f(x):=\int_{\mathbb{R}}|x-t|\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[1]dt.\tag{27}$$

В силу (25) и определения оператора $\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}$ при $x\in Q$ получаем оценку

$$\left|\int_{\mathbb{R}}|x-t|\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[1]dt\right|=\left|\int_{Q}|x-t|\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[1]dt\right|\leqslant C_Q\left|\int_{Q}\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[1]dt\right|\leqslant C_9,$$

где $C_Q=\max\limits_{x,t\in Q}|x-t|$, следовательно

$$|f(x)|\leqslant C_9,\quad x\in Q.\tag{28}$$

Из оценки (16) следует

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[f(x)]dx\right|\leqslant&\varepsilon C_1\sum_{j=1}^{2}\Big(\int_{\mathbb{R}}\Big|W_j(\xi_j)\chi_j''(x)f(x)\Big|dx+2\varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{R}}\Big|\chi_j'(x)W_j'(\xi_j)f(x)\Big|dx+\\ &+2\int_{\mathbb{R}}\Big|W_j(\xi_j)\chi_j'(x)f'(x)\Big|dx+2\varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{R}}\Big|\chi_j(x)W_j'(\xi_j)f'(x)\Big|dx\Big)+\\ &+\varepsilon\mu^{-1}C_1\left(\int_{\mathbb{R}}\Big|V_1(\xi_1)W_1(\xi_1)f(x)\Big|dx+\int_{\mathbb{R}}\Big|V_2(\xi_2)W_2(\xi_2)f(x)\Big|dx\right).\end{aligned}\tag{29}$$

В силу финитности χ_j и V_j и (28) справедливы оценки

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}\Big|W_j(\xi_j)\chi_j''(x)f(x)\Big|dx=\int_{Q}\Big|W_j(\xi_j)\chi_j''(x)f(x)\Big|dx\leqslant C_{10},\\ &\int_{\mathbb{R}}\Big|\chi_j'(x)W_j'(\xi_j)f(x)\Big|dx=\int_{Q}\Big|\chi_j'(x)W_j'(\xi_j)f(x)\Big|dx\leqslant C_{11},\\ &\int_{\mathbb{R}}\Big|V_j(\xi_j)W_j(\xi_j)f(x)\Big|dx=\int_{Q}\Big|V_j(\xi_j)W_j(\xi_j)f(x)\Big|dx\leqslant C_{12}.\end{aligned}\tag{30}$$

Из (27) следует, что

$$f'(x)=\int_{-\infty}^{x}\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[1]dt+\int_{+\infty}^{x}\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[1]dt.\tag{31}$$

Обозначим

$$f_\varepsilon^{(1)}(x) := \chi_j(x)W_j'(\xi_j), \qquad f_\varepsilon^{(2)}(x) := \chi_j'(x)W_j(\xi_j).$$

В силу (31) верно неравенство

$$\int_{\mathbb{R}} \left| f_\varepsilon^{(j)}(x)f'(x) \right| dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left| f_\varepsilon^{(j)}(x) \int_{-\infty}^{x} \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[1]dt \right| dx + \int_{\mathbb{R}} \left| f_\varepsilon^{(j)}(x) \int_{+\infty}^{x} \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[1]dt \right| dx.$$

После замены порядка интегрирования во втором интеграле, последнее неравенство принимает вид

$$\int_{\mathbb{R}} \left| f_\varepsilon^{(j)}(x)f'(x) \right| dx \leqslant 2 \int_{\mathbb{R}} \left| f_\varepsilon^{(j)}(x) \int_{-\infty}^{x} \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[1]dt \right| dx. \tag{32}$$

Далее, в силу (25) имеем

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left| f_\varepsilon^{(j)}(x) \int_{-\infty}^{x} \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[1]dt \right| dx &= \int_{Q} \left| f_\varepsilon^{(j)}(x) \int_{-\infty}^{x} \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[1]dt \right| dx \\ &\leqslant \int_{Q} \left| f_\varepsilon^{(j)}(x) \right| \left| \int_{-\infty}^{x} \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[1]dt \right| dx \\ &\leqslant \int_{Q} \left| f_\varepsilon^{(j)}(x) \right| \left| \int_{Q} \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[1]dt \right| dx \\ &\leqslant C_{13}^j \left| \int_{Q} \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}[1]dt \right| \leqslant C_{14}^j.\end{aligned}$$

Из последнего неравенства и (32) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}} \left| f_\varepsilon^{(j)}(x)f'(x) \right| dx \leqslant 2C_{14}^j,$$

а отсюда и из (29), (30) вытекает оценка (26).

Из (17), (25), (26) следует

$$k_{\varepsilon,\mu} = \frac{\varepsilon\mu^{-1}}{2} \left(\langle V_1 \rangle + \langle V_2 \rangle \right) + O\left(\varepsilon^2\mu^{-2} \right).$$

Таким образом, выполнено равенство (18) при

$$c_1 = \frac{\langle V_1 \rangle + \langle V_2 \rangle}{2}, \qquad c_2 = O(1). \tag{33}$$

Из (19) и (20) следует, что достаточным условием наличия у оператора $(\mathcal{H}_0 + \varepsilon\mu^{-1}\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu})$ собственного значения, стремящегося к нулю при $\varepsilon \to 0$, является неравенство

$$\mathrm{Re}(c_1 + \varepsilon\mu^{-1}c_2) > 0, \tag{34}$$

а достаточным условием отсутствия такого собственного значения – неравенство

$$\mathrm{Re}(c_1 + \varepsilon\mu^{-1}c_2) < 0. \tag{35}$$

Далее, из (1) и (33) следует, что при достаточно малых ε, μ знак $\mathrm{Re}(c_1 + \varepsilon\mu^{-1}c_2)$ совпадает со знаком $\mathrm{Re}(c_1)$. Следовательно, из (34), (35) и (33) вытекают неравенства (4) и (6). Асимптотика (5) вытекает из (21) и (33).

4. Заключительные замечания

Из теоремы 1 работы [7] следует, что, помимо собственного значения, стремящегося к нулю, остальные собственные значения оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ (если они существуют) стремятся к бесконечности при $\varepsilon \to 0$.

Благодарности. Авторы выражают признательность Д.И. Борисову за полезные замечания и Р.Р. Гадыльшину за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов* Мир, М., 1972.
2. Борисов Д.И., Гадыльшин Р.Р. *О спектре периодического оператора с малым локализованным возмущением* // Известия АН. Сер. матем. Т. 72, №4. 2008. С. 37–66.
3. B. Simon *The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions* // Ann. Phys. V. 97. 1976. P. 279–288.
4. R. Blankenbecler, M.L. Goldberger, B. Simon *The bound states of weakly coupled long-range one-dimensional quantum Hamiltonians* // Ann. Phys. V. 108. 1977. P. 69–78.
5. M. Klaus *On the bound state of Schrödinger operators in one dimension*, Ann. Phys. V. 108. 1977. P. 288–300.
6. M. Klaus, B. Simon *Coupling constant thresholds in nonrelativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case* // Ann. Phys. V. 130. 1980. P. 251–281.
7. Гадыльшин Р.Р. *О локальных возмущениях оператора Шрёдингера на оси* // Теор. и матем. физика. Т. 132, No 1. 2002. С. 97–104.
8. Гадыльшин Р.Р., Хуснуллин И.Х. *Оператор Шредингера на оси с потенциалами, зависящими от двух параметров* // Алгебра и анализ. Т. 22, №6. 2010. С. 50–66.
9. Гадыльшин Р.Р., Хуснуллин И.Х. *Возмущение оператора Шредингера узким потенциалом* // Уфимский математический журнал. Т. 3, № 3. 2011. С. 55–66.
10. Хуснуллин И.Х. *Возмущенная краевая задача на собственные значения для оператора Шредингера на отрезке* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 50, № 4. 2010. С. 679–698.
11. Борисов Д.И., Каримов Р.Х., Шарапов Т.Ф. *Оценка начальных масштабов для волноводов с некоторыми случайными сингулярными потенциалами* // Уфимский математический журнал. Т. 7, № 2. 2015. С. 35–56.

Бикметов Айдар Ренатович,
ФГБОУ ВПО БГПУ им. М.Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: BikmetovAR@yandex.ru

Вильданова Венера Фидарисовна,
ФГБОУ ВПО БГПУ им. М.Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: gilvenera@mail.ru

Хуснуллин Ильфат Хамзиевич,
ФГБОУ ВПО БГПУ им. М.Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: KhusnullinIKh@mail.ru