ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 4 (2015). С. 15-24.

УДК 517.53

ТОЧНОСТЬ ОЦЕНОК ДЛЯ К-ПОРЯДКА РЯДА ДИРИХЛЕ В ПОЛУПОЛОСЕ

Н.Н. АИТКУЖИНА, А.М. ГАЙСИН

Посвящается памяти профессора
Игоря Федоровича Красичкова–Терновского

Аннотация. Изучаются ряды Дирихле, сходящиеся лишь в полуплоскости, последовательность показателей которых допускает расширение до некоторой «правильной» последовательности. Доказана точность двусторонних оценок k-порядка суммы ряда Дирихле в полуполосе, ширина которой зависит от специальной плотности распределения показателей.

Ключевые слова: k-порядок ряда Дирихле в полуполосе, целые функции с заданной асимптотикой на вещественной оси.

Mathematics Subject Classification: 30Д10

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$—последовательность, удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n} = H < \infty. \tag{1}$$

При изучении целых функций

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \tag{2}$$

определённых всюду сходящимися рядами Дирихле, в своё время Риттом было введено понятие R-порядка [1]:

$$\rho_R = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln\ln M(\sigma)}{\sigma},$$

где $M(\sigma) = \sup\limits_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$. Отметим, что в силу условия (1) ряд (2) сходится во всей плоскости абсолютно. Известно, что $\ln M(\sigma)$—возрастающая выпуклая функция от σ, $\lim\limits_{\sigma\to+\infty} \ln M(\sigma) = +\infty$. Величина

$$\rho_s = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln^+ \ln M_s(\sigma)}{\sigma} \quad (a^+ = \max(a, 0))$$

называется R-порядком функции F в полосе $S(a, t_0) = \{s = \sigma + it : |t - t_0| \le a\}$. Здесь $M_s(\sigma) = \max\limits_{|t-t_0|\le a} |F(\sigma + it)|$.

N.N. Aitkuzhina, A.M. Gaisin, Exactness of estimates for kth order of Dirichlet series in a semi-strip.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 15-01-01661), Программы фундаментальных исследований Отделения математики РАН «Современные проблемы теоретической математики»: проект «Комплексный анализ и функциональные уравнения»).

Поступила 6 октября 2015 г.

В [2] приведены достаточные условия на Λ и величину a, при выполнении которых $\rho_R = \rho_S$. Наиболее общий результат о связи между величинами ρ_R и ρ_s установлен А.Ф. Леонтьевым [3].

Аналогичные вопросы в случае, когда $H = 0$, а область сходимости ряда (2) — полуплоскость $\Pi_0 = \{s = \sigma + it : \sigma < 0\}$, исследованы А.М. Гайсиным в [4].

При $H = 0$, если ряд (2) сходится в полуплоскости Π_0, то он сходится в Π_0 и абсолютно. Тогда сумма ряда F аналитична в данной полуплоскости. Класс всех неограниченных аналитических функций, представимых рядами Дирихле (2), сходящимися лишь в полуплоскости Π_0, обозначим через $D_0(\Lambda)$.

Пусть $S(a, t_0) = \{s = \sigma + it : |t - t_0| \le a, \sigma < 0\}$—полуполоса. Величины

$$\rho_R = \overline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{\ln^+ \ln M(\sigma)}{|\sigma|^{-1}}, \qquad \rho_s = \overline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{\ln^+ \ln M_s(\sigma)}{|\sigma|^{-1}}$$

называются порядками по Ритту функции F в полуплоскости Π_0 и полуполосе $S(a, t_0)$ [4]. В дальнейшем ρ_R и ρ_s будем называть порядками в полуплоскости и полуполосе. Если это необходимо, вместо ρ_R и ρ_s будем писать $\rho_R(F)$ и $\rho_s(F)$.

В [4] показано, что условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} \ln n = 0$$

достаточно для того, чтобы порядок ρ_R любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ был равен

$$\rho_R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} \ln^+ |a_n|. \tag{3}$$

Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность D. Тогда

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \quad (z = x + iy)$$

— целая функция экспоненциального типа. Если $h(\varphi)$ — индикатриса роста, а τ — тип функции L, то $\tau = h(\pm\frac{\pi}{2}) \le \pi D^*$ (D^* — усредненная верхняя плотность последовательности Λ) [2]. Предположим, что

$$|L(x)| \le e^{g(x)}\, (x \ge 0), \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x) \ln x}{x} = 0, \tag{4}$$

где g – некоторая неотрицательная на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ функция. В этом случае сопряжённая диаграмма функции L есть отрезок $I = [-\tau i, \tau i], h(\varphi) = \tau |\sin \varphi|$.

В [4] доказана следующая

Теорема I. *Пусть функция L удовлетворяет условиям (4) и имеет тип τ $(0 \le \tau < \infty)$. Положим $q = q(L)$, где*

$$q(L) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right|. \tag{5}$$

Тогда порядок ρ_s в полуполосе $S(a, t_0)$ при $a > \tau$ и порядок ρ_R любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ в полуплоскости Π_0 удовлетворяют оценкам

$$\rho_s \le \rho_R \le \rho_s + q. \tag{6}$$

Левая оценка в (6) точна [4]. Но в общей ситуации правая оценка не точна, более того, пара условий (4) может и не выполняться. Однако может существовать целая функция экспоненциального типа Q с простыми нулями в точках последовательности Λ, для которой условия (4) будут иметь место, причём $q(Q) = q^*$, где

$$q^* = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} \int\limits_0^1 \frac{n(\lambda_n; t)}{t} dt,$$

$q(Q)$—величина, определяемая точно так же, что и $q(L)$ в (5), а $n(\lambda_n; t)$ — число точек $\lambda_k \neq \lambda_n$ из отрезка $\{x : |x - \lambda_n| \leq t\}$. Построению таких целых функций Q с заданным подмножеством нулей Λ и требуемой асимптотикой на вещественной оси посвящена статья [5]. Оказывается, в терминах специальной плотности $G(R)$ распределения точек последовательности Λ можно указать условия, при выполнении которых справедливы оценки

$$\rho_s \leqslant \rho_R \leq \rho_s + q^*$$

(ρ_s—порядок в полуполосе $S(a, t_0)$ ширины больше, чем $2\pi G(R)$), не улучшаемые в классе $D_0(\Lambda)$ [6]. В [7] получены аналогичные оценки для k-порядков. Цель статьи — показать точность этих оценок.

§1. Определения и необходимые факты

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность, L — класс положительных, непрерывных и неограниченно возрастающих на $[0, \infty)$ функций. Через K обозначим подкласс функций h из L, таких, что $h(0) = 0$, $h(t) = o(t)$ при $t \to \infty$, $\frac{h(t)}{t} \downarrow$ при $t \uparrow$ ($\frac{h(t)}{t}$ монотонно убывает при $t > 0$). В частности, если $h \in K$, то $h(2t) \leq 2h(t)$ $(t > 0)$, $h(t) \leq h(1)t$ при $t \geq 1$.

K — плотностью последовательности Λ называется величина

$$G(K) = \inf_{h\in K} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\mu_\Lambda(\omega(t))}{h(t)}, \tag{7}$$

где $\omega(t) = [t, t + h(t))$ — полуинтервал, $\mu_\Lambda(\omega(t))$—число точек из Λ, попавших в полуинтервал $\omega(t)$.

Пусть $\Omega = \{\omega\}$ — семейство полуинтервалов вида $\omega = [a, b)$. Через $|\omega|$ будем обозначать длину ω. Всякая последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ порождает целочисленную считающую меру μ_Λ:

$$\mu_\Lambda(\omega) = \sum_{\lambda_n\in\omega} 1, \quad \omega \in \Omega.$$

Пусть μ_Γ — считающая мера, порождённая последовательностью $\Gamma = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_n \uparrow \infty)$. Тогда включение $\Lambda \subset \Gamma$ означает, что $\mu_\Lambda(\omega) \leq \mu_\Gamma(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega$. В этом случае говорят, что мера μ_Γ мажорирует меру μ_Λ.

Через $D(K)$ обозначим точную нижнюю грань тех чисел b $(0 \leq b < \infty)$, для каждого из которых существует мера μ_Γ, мажорирующая μ_Λ, такая, что для некоторой функции $h \in K$

$$|M(t) - bt| \leq h(t) \qquad (t \geq 0). \tag{8}$$

Здесь $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $\Gamma = \{\mu_n\}$, $M(t) = \sum\limits_{\mu_n \leq t} 1$.

В [6] показано, что $D(K) = G(K)$.

Величина

$$\rho_k = \overline{\lim_{\sigma\to 0_-}} \frac{\ln_k M(\sigma)}{|\sigma|^{-1}} \quad (k \geq 2) \tag{9}$$

называется k-порядком функции $F \in D_0(\Lambda)$ в полуплоскости $\Pi_0 = \{s : \ \sigma = Res < 0\}$ [7]. Здесь $\ln_0 t = t$, $\ln_k t = \underbrace{\ln\ln\ldots\ln t}_{k}$ $(k \geq 1)$. Из определения k-порядка (9) видно, что $\rho_2 = \rho_R$, где ρ_R — R-порядок в полуплоскости Π_0 [4].

В [7] доказана

Теорема II. *Условие*
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n\ln_{k-1}\lambda_n}{\lambda_n}=0 \quad (k\geq 2) \tag{10}$$
является необходимым и достаточным для того, чтобы для k-порядка ρ_k любой функции $F\in D_0(\Lambda)$ была справедлива формула
$$\rho_k=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n}\ln_{k-1}\lambda_n \quad (k\geq 2;\, 0\leqslant\rho_R\leqslant\infty). \tag{11}$$

Отметим, что формула (3) является частным случаем равенства (11).

Аналогично вводится понятие k-порядка $\rho_s^{(k)}$ в полуполосе $S(a,t_0)$. Для удобства его по-прежнему будем обозначать ρ_s.

Введем в рассмотрение следующие классы функций:
$$L_k=\{h\in L:\ h(x)\ln_{k-1}x=o(x),\quad x\to\infty\}\ \ (k\geq 2),$$
$$S=\left\{h\in K:\ \ d(h)=\varlimsup_{x\to\infty}\frac{h(x)\ln h(x)}{x\ln\frac{x}{h(x)}}<\infty\right\},$$
$$R_k=\{h\in S:\ h(x)\ln\frac{x}{h(x)}=o\left(\frac{x}{\ln_{k-1}x}\right),\quad x\to\infty\}\ \ (k\geq 2).$$

В статье [7] была доказана следующая

Теорема III. *Пусть $\Lambda=\{\lambda_n\}$ $(0<\lambda_n\uparrow\infty)$ — последовательность, удовлетворяющая условиям:*
$$1)\ \ \Lambda(x+\rho)-\Lambda(x)\leq c\rho+d+\frac{\varphi(x)}{\ln^+\rho+1}\quad (\rho\geq 0),$$
где $\Lambda(x)=\sum\limits_{\lambda_n\leq x}1$, φ — некоторая функция из L_k $(k\geq 2)$;
$$2)\ \ q_k^*=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln_{k-1}\lambda_n}{\lambda_n}\int\limits_0^1\frac{n(\lambda_n;t)}{t}dt<\infty\quad (k\geq 2),$$
где $n(\lambda_n;t)$ — число точек $\lambda_k\neq\lambda_n$ из отрезка $\{x:\ |x-\lambda_n|\leq t\}$.

Если R_k — плотность последовательности Λ равна $G(R)$, то k-порядок ρ_s любой функции $F\in D_0(\Lambda)$ в полуполосе $S(a,t_0)$ при $a>\pi G(R_k)$ и порядок ρ_R этой функции в полуплоскости Π_0 удовлетворяют оценкам
$$\rho_s\leq\rho_k\leq\rho_s+q_k^*\quad (k\geq 2). \tag{12}$$

Оценка $\rho_s\leqslant\rho_k$ в (12), как известно, точна. Далее речь будет идти о точности неравенства $\rho_k\leqslant\rho_s+q_k^*$ $(k\geq 2)$.

§2. Основная теорема о точности оценок для k-порядка

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Пусть Λ — любая последовательность, удовлетворяющая условиям теоремы III. Тогда существует функция $F\in D_0(\Lambda)$, для которой $\rho_k(F)=\rho_s(F)+q^*$, где $\rho_k(F)$ — порядок в полуплоскости Π_0, а $\rho_s(F)$ — порядок в полуполосе $S(a,t_0)$ $(a>\pi G(R))$.*

Следствие. *Пусть последовательность Λ удовлетворяет условиям теоремы 1. Для того чтобы для любой функции $F\in D_0(\Lambda)$ порядок $\rho_k(F)$ был равен порядку $\rho_s(F)$ в любой полуполосе $S(a,t_0)(a>\pi G(R))$, необходимо и достаточно, чтобы $q^*=0$.*

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится

Теорема IV [6]. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — *последовательность, имеющая конечную* S — *плотность* $G(S)$. *Тогда для любого* $b > G(S)$ *существует последовательность* $\Gamma = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_n \uparrow \infty)$, *содержащая* Λ *и имеющая плотность* b, *такая, что целая функция экспоненциального типа* πb

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right) \quad (z = x + iy)$$

обладает свойствами:

1) $Q(\lambda_n) = 0,\ Q^{'}(\lambda_n) \neq 0$ *для любого* $\lambda_n \in \Lambda$;

2) существует $H \in S$, *такая, что:*

$$\ln|Q(x)| \leq AH(x)\ln^{+}\frac{x}{H(x)} + B; \tag{13}$$

3) если $\Lambda(x) = \sum\limits_{\lambda_n \leq x} 1$, *и*

$$\Lambda(x+\rho) - \Lambda(x) \leq a\rho + b + \frac{\varphi(x)}{\ln^{+}\rho + 1} \quad (\rho \geq 0) \tag{14}$$

(φ — *любая неотрицательная, неубывающая функция, определённая на луче* $[0, \infty)$, $1 \leq \varphi(x) \leq \alpha x \ln^{+} x + \beta$*), то существует последовательность* $\{r_n\}$, $0 < r_n \uparrow \infty$, $r_{n+1} - r_n = O(H(r_n))$ *при* $n \to \infty$, *такая, что для* $x = r_n$ $(n \geq 1)$

$$\ln|Q(x)| \geq -CH(x)\ln^{+}\frac{x}{H(x)} - 2\varphi(x) - D; \tag{15}$$

4) если

$$\Delta = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^1 \frac{n(\lambda_n;t)}{t}dt < \infty,$$

то при условии (14)

$$\left|\ln\left|\frac{1}{Q^{'}(\lambda_n)}\right| - \int\limits_0^1 \frac{n(\lambda_n;t)}{t}dt\right| \leq EH(\lambda_n)\ln^{+}\frac{\lambda_n}{H(\lambda_n)} +$$
$$+2\varphi(\lambda_n) + F\ln\lambda_n + L \quad (n \geq 1), \tag{16}$$

где $n(\lambda_n;t)$ — *число точек* $\lambda_k \neq \lambda_n$ *из отрезка* $\{x : |x - \lambda_n| \leq t\}$.

Здесь все постоянные положительны, конечны.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — последовательность, удовлетворяющая условиям теоремы III. Тогда, согласно теореме IV, для любого $b > G(R_k)$ $(G(R_k)$ — R_k-плотность последовательности $\Lambda)$ существует последовательность $\Gamma = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_n \to \infty)$, содержащая Λ, такая, что

$$|M(t) - bt| \leq H(t) \quad (t \geq 0), \quad H \in R, \tag{17}$$

причём целая функция экспоненциального типа πb

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right) \quad (z = x + iy) \tag{18}$$

обладает свойствами:

1^0. $Q(\lambda_n) = 0,\ Q^{'}(\lambda_n) \neq 0\,(n \geq 1)$;

2^0. $\ln|Q(x)| \leq g(x)\,(x \geq 0), g \in L_k$;

3^0. при $x = r_n\,(n \geq 1)$ выполняется оценка

$$\ln|Q(x)| \geq -CH(x)\ln^{+}\frac{x}{H(x)} - 2\varphi(x) - D, \ \ H \in R_k.$$

Оценки 2^0, 3^0 в теореме III следуют из (13), (15). Но поскольку $H \in R_k$, $\varphi \in L_k$, то найдётся функция $V \in L_k$, такая, что при $r = r_n$ $(r = |z|)$ $(n \geq 1)$

$$\ln |Q(z)| \geq \ln |Q(r)| \geq -V(r). \tag{19}$$

Пусть $\{r_n\}$—последовательность из теоремы IV (при $|z| = r_n$ $(n \geq 1)$ верны оценки (19)). Пусть $\Delta_n = (r_{p_n}, r_{p_n+1})$ $\quad (n \geq 1)$ все те интервалы, каждый из которых содержит хотя бы одну точку из Λ(некоторые из интервалов (r_n, r_{n+1}), могут и не содержать точек из Λ).

Через $\Gamma_{p_n}(n \geq 1)$ обозначим замкнутый контур, образованный дугами окружностей $K_{p_n} = \{\lambda : |\lambda| = r_{p_n}\}$ и $K_{p_n+1} = \{\lambda : |\lambda| = r_{p_n+1\}}$ из угла $\{\lambda : |\arg \lambda| \leq \varphi_n < \frac{\pi}{4}\}$ и отрезками лучей $\{\lambda : |\arg \lambda| = \varphi_n\}$.

Для доказательства теоремы 1 понадобятся функции

$$q_n(\lambda) = \prod_{\nu_k \in \Delta_n} \left(1 - \frac{\lambda}{\nu_k}\right),$$

где $\Delta_n = (r_{p_n}, r_{p_n+1}), \nu = \{\nu_k\} = \Gamma \setminus \Lambda$. Последовательность ν строится в процессе доказательства теоремы IV и обладает свойствами [6]:

а) $\inf\limits_{i \neq j} |\nu_i - \nu_j| \geq \tau > 0$;

б) $\inf\limits_{m \geq 1} |\lambda_n - \nu_m| \geq \frac{\gamma}{\varphi(2\lambda_n)}$ $(\gamma > 0, n \geq 1)$,

где φ — функция из условия (14) теоремы IV.

Установим оценки для $|q_n(\lambda)|$.

Лемма 1. *Существует функция* $u \in L_k$, *такая, что*

$$\max_{\lambda_j \in \Delta_n} |\ln |q_n(\lambda_j)|| \leq u(r_{p_n}) \quad (n \geq 1). \tag{20}$$

Действительно, пусть $\lambda_j \in \Delta_n, \nu_j^{'}$ и $\nu_j^{''}$ — ближайшие к λ_j точки последовательности ν, расположенные слева и справа от λ_j соответственно. Имеем

$$\left|\frac{\nu_j^{'} - \lambda_j}{\nu_j^{'}}\right| \left|\frac{\nu_j^{''} - \lambda_j}{\nu_j^{''}}\right| \geq \left[\frac{\gamma}{\varphi(2\lambda_j)}\right]^2 r_{p_n+1}^{-2} \quad (\lambda_j \in \Delta_n).$$

Так как $1 \leq \varphi(x) \leq \alpha x \ln^+ x + \beta, r_{p_n}/r_{p_n+1} \to 1$ при $n \to \infty$, то отсюда получаем оценку

$$\left|1 - \frac{\lambda_j}{\nu_j^{'}}\right| \left|1 - \frac{\lambda_j}{\nu_j^{''}}\right| \geq e^{-c_1 - c_2 \ln r_{p_n}} \quad (\lambda_j \in \Delta_n), \tag{21}$$

где $0 < c_i < \infty$ $(i = 1, 2)$.

Пусть $\Delta_n^{'} = \Delta_n \backslash \{\nu_j^{'}, \nu_j^{''}\}$. Тогда

$$\prod_{\substack{\nu_k \in \Delta_n^{'} \\ \nu_k < \lambda_j}} \left|\frac{\nu_k - \lambda_j}{\nu_k}\right| \geq \left(\frac{\tau}{r_{p_n+1}}\right)^{s_n} s_n!, \tag{22}$$

где s_n — число точек $\nu_k < \lambda_j, \nu_k \in \Delta_n^{'}$. Аналогично,

$$\prod_{\substack{\nu_k \in \Delta_n^{'} \\ \nu_k > \lambda_j}} \left|\frac{\nu_k - \lambda_j}{\nu_k}\right| \geq \left(\frac{\tau}{r_{p_n+1}}\right)^{l_n} l_n!, \tag{23}$$

где l_n — число точек $\nu_k > \lambda_j, \nu_k \in \Delta_n^{'}$. Из (21)–(23) получаем, что при $\lambda_j \in \Delta_n$ $(n \geq 1)$

$$|q_n(\lambda_j)| \geq e^{-c_1 - c_2 \ln r_{p_n}} \left(\frac{\delta}{r_{p_n}}\right)^{s_n + l_n} s_n! l_n! \quad (0 < \delta \leq 1). \tag{24}$$

Если $\sup\limits_{n\geq 1}(s_n+l_n)<\infty$, то требуемая оценка снизу для $|q_n(\lambda_j)|$ очевидна. В противном случае воспользуемся сначала известной оценкой

$$s_n!l_n! \geq \frac{(s_n+l_n)!}{2^{s_n+l_n}},$$

затем — асимптотической формулой Стирлинга: при $n\to\infty$

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Тогда из (24) получим

$$|q_n(\lambda_j)| \geq \exp\left(-c_3 - c_2\ln r_{p_n}\right)\left[\frac{\delta(s_n+l_n)}{2er_{p_n}}\right]^{s_n+l_n} \quad (n\geq 1),$$

где $0<c_i<\infty$ $(i=2,3)$. Полагая $s_n+l_n=m_n$, для $\lambda_j\in\Delta_n$ имеем

$$|q_n(\lambda_j)| \geq \exp\left(-c_3 - c_2\ln r_{p_n} - m_n\ln\frac{2er_{p_n}}{\delta m_n}\right), \tag{25}$$

где $n\geq 1$, m_n — число, не превосходящее числа точек ν_k из интервала Δ_n. Так как $0<r_{p_n+1}-r_{p_n}\leq pH(p_n)(0<p<\infty)$, то, учитывая свойство а) последовательности ν, имеем: $m_n\leq c_4H(r_{p_n}), 0<c_4<\infty\,(n\geq 1)$. Далее, $\frac{H(x)}{x}\downarrow 0$ при $x\uparrow\infty$, а функция $\psi(x)=x\ln\frac{\Delta}{x}$ (Δ — положительная постоянная) при $0<x<\frac{\Delta}{e}$ является возрастающей. Следовательно, из (25) получаем, что для $\lambda_j\in\Delta_n$ $(n\geq n_0)$

$$\ln|q_n(\lambda_j)| \geq -c_5 - c_2\ln r_{p_n} - c_6H(r_{p_n})\ln\frac{r_{p_n}}{H(r_{p_n})},$$

где $0<c_i<\infty$ $(i=2,5,6)$. Так как $H\in R_k$, то существует $u_1\in L_k$, что для $\lambda_j\in\Delta_n$

$$\ln|q_n(\lambda_j)| \geq -u_1(r_{p_n}) \quad (n\geq 1). \tag{26}$$

Оценим $\ln|q_n(\lambda_j)|$ сверху. Для этого заметим, что при $n\geq n_1$ для любого $\lambda_j\in\Delta_n$

$$\left|1-\frac{\lambda_j}{\nu_k}\right| \leq 1+\frac{r_{p_n+1}}{r_{p_n}} \leq e.$$

Значит для $\lambda_j\in\Delta_n$

$$\ln|q_n(\lambda_j)| \leq m_n+2 \leq c_4H(r_{p_n})+2 \quad (n\geq n_1).$$

Отсюда следует, что для некоторой функции $u_2\in L_k$

$$\ln|q_n(\lambda_j)| \leq u_2(r_{p_n}) \quad (n\geq 1). \tag{27}$$

Таким образом, из (26), (27) окончательно получаем, что

$$\max_{\lambda_j\in\Delta_n}|\ln|q_n(\lambda_j)|| \leq u(r_{p_n}) \quad (n\geq 1),$$

где $u=u_1+u_2$.

Лемма 1 доказана.

Положим $\gamma_n=\Gamma_{p_n}$ $\quad(n\geq 1)$. Справедлива

Лемма 2. *Для любого* $n\geq 1$

$$M_n = \max_{\lambda\in\gamma_n}\ln|q_n(\lambda)| \leq u(r_{p_n}), \tag{28}$$

где u*— некоторая функция из* L_k.

Докажем лемму 2. Для любого $\lambda\in\gamma_n, \nu_k\in\Delta_n$ при $n\geq n_1$ имеем

$$\left|1-\frac{\lambda}{\nu_k}\right| \leq 1+\frac{r_{p_n+1}}{r_{p_n}} \leq e.$$

Следовательно, как и в лемме 1, $M_n \leq u_2(r_{p_n}) \leq u(r_{p_n})$ $(n \geq 1)$. Таким образом, оценка (28) действительно имеет место.

Теперь всё готово для доказательства теоремы.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\gamma_n = \Gamma_{p_n}\quad (n \geq 1)$. Положим $\rho_n^{'} = r_{p_n}, \rho_n^{''} = r_{p_n+1}$. Тогда $\Delta_n = (\rho_n^{'}, \rho_n^{''})\quad (n \geq 1)$.

Рассмотрим ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{\lambda_j s} \quad (s = \sigma + it), \tag{29}$$

где для $\lambda_j \in \Delta_n\quad (n \geq 1)$

$$a_j = \exp\left((\rho - q^*)\frac{\rho_n^{'}}{\ln_{k-1}\rho_n^{'}}\right)\frac{q_n(\lambda_j)}{Q^{'}(\lambda_j)} \quad (j \geq 1).$$

Здесь Q — функция (18), q_n—функция, о которой речь идёт в леммах 1, 2, $0 \leq \rho < \infty$, а q^* — величина, определённая в теореме III. Так как $H \in R_k$, $\varphi \in L_k$, то из оценки (16) теоремы IV следует, что $q^* = q(Q) \geq 0$, где

$$q(Q) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n}\ln\left|\frac{1}{Q^{'}(\lambda_n)}\right|.$$

Так как $\rho_n^{''}/\rho_n^{'} \to 1$ при $n \to \infty$, $q(Q) < \infty$, то с учётом (20) получаем, что

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{\ln|a_j|}{\lambda_j} = 0.$$

Значит, $F \in D_0(\Lambda)$. Ещё раз учитывая (20) и пользуясь формулой (11) для вычисления k-порядка ρ_k, имеем:

$$\rho_k(F) = \overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{\ln_{k-1}\lambda_j}{\lambda_j}\ln_{k-1}\left|\frac{1}{Q^{'}(\lambda_j)}\right| + \lim_{j\to\infty}\frac{\ln_{k-1}\lambda_j}{\lambda_j}\ln|q_n(\lambda_j)| +$$

$$+\lim_{j\to\infty}\frac{\ln\lambda_j}{\lambda_j}(\rho - q^*)\frac{\rho_n^{'}}{\ln_{k-1}\rho_n^{'}} = q(Q) + \rho - q^* = \rho.$$

Оценим теперь порядок $\rho_s(F)$ в полуполосе $S(a, t_0)\quad (a > \pi G(R_k))$. Последовательность $\Gamma = \{\mu_n\}$ нулей функции Q имеет плотность b (это следует из (17)), $G(R) < b$. При заданных $G(R_k)$ и a параметр b в теореме IV выберем так, чтобы выполнились оценки $G(R_k) < b < \frac{a}{\pi}$.

Далее, заметим, что

$$A_n \overset{df}{\equiv} \sum_{\lambda_j\in\Delta_n} a_j e^{\lambda_j s} = e^{(\rho-q^*)\frac{\rho_n^{'}}{\ln_{k-1}\rho_n^{'}}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{q_n(\xi)}{Q(\xi)}e^{s\xi}d\xi, \tag{30}$$

где γ_n — замкнутый контур, образованный дугами окружностей $K_{\rho_n^{'}}$ и $K_{\rho_n^{''}}$ из угла $\{\lambda : |\arg\lambda| \leq \varphi_n < \frac{\pi}{4}$ и отрезками лучей $\{\lambda : |\arg\lambda| = \varphi_n\}$. Возьмём $\varphi_n = \varepsilon_0\frac{H(\rho_n^{'})}{\rho_n^{'}}$ $(0 < \varepsilon_0 < 1)$. Так как $H \in R_k$, то $\varphi_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$. Число ε_0 выберем так, чтобы $0 < \varphi_n < \frac{\pi}{4}\,(n \geq 1)$.

Оценим на контуре γ_n функцию $\left|\frac{q_n(\xi)}{Q(\xi)}\right|$. Для этого, учитывая (17), применим оценку (см. в [5]):

$$-\ln|Q(re^{\pm i\varphi_n})| \leq 6H(r)\ln\frac{r}{H(r)} + \frac{8\pi}{|\varphi_n|}\frac{H^2(r)}{r} + 3\mu_1 b,\ \ r \geq \rho_{n_0}^{'}.$$

Отметим, что данная «эффективная оценка» произведения Вейерштрасса на лучах справедлива при выполнении единственного требования — условия (17).

Пусть $\rho_n^{'} \le r \le \rho_n^{''}, n \ge n_0$. Так как $\frac{H(r)}{r} \downarrow$ при $r \uparrow$, то $H(r) \le \frac{r}{\rho_n^{'}} H(\rho_n^{'}) \le \frac{\rho_n^{''}}{\rho_n^{'}} H(\rho_n^{'})$. Значит, при $n \ge n_1$

$$-\ln|Q(re^{\pm i\varphi_n})| \le 12H(\rho_n^{'}) \ln \frac{\rho_n^{'}}{H(\rho_n^{'})} + \frac{32\pi}{\varepsilon_0} H(\rho_n^{'}) + 3\mu_1 b. \tag{31}$$

На дугах окружностей $K_{\rho_n^{'}}$ и $K_{\rho_n^{''}}$ контура γ_n выполняются оценки (19). Так как $H \in R_k$, то с учётом того, что $\rho_n^{''}/\rho_n^{'} \to 1$ при $n \to \infty$, из (19), (31) получаем, что для некоторой функции $w \in L_k$

$$-\ln|Q(\xi)| \le w(\rho_n^{'}), \quad \xi \in \gamma_n \quad (n \ge n_1).$$

Следовательно, применяя лемму 2, получаем оценку

$$\max_{\xi \in \gamma_n} \left| \frac{q_n(\xi)}{Q(\xi)} \right| \le e^{u(\rho_n^{'}) + w(\rho_n^{'})} \quad (n \ge n_1),$$

где u, w — функции из L_k. Но тогда из (30) при $n \ge n_1$ имеем

$$|A_n| \le 2\rho_n^{''} e^{(\rho - q^*)\frac{\rho_n^{'}}{\ln \rho_n^{'}} + u(\rho_n^{'}) + w(\rho_n^{'})} e^{\max\limits_{\xi \in \gamma_n} Re\,(s\xi)}. \tag{32}$$

Пусть $s \in S(a, t_0)$, $\xi \in \gamma_n, s = \sigma + it$, $\xi = \xi_1 + i\xi_2$. Тогда

$$\left| \sum_{\lambda_j < \rho_{n_1}^{'}} a_j e^{\lambda_j s} \right| \le \sum_{\lambda_j < \rho_{n_1}^{'}} |a_j| e^{\lambda_j \sigma} \le \sum_{\lambda_j < \rho_{n_1}^{'}} |a_j| = M, \tag{33}$$

$Re\,(s\xi) = \sigma\xi_1 - t\xi_2 \le \sigma\rho_n^{'} + (|t_0| + a)|Im\,\xi|$. Так как $|Im\,\xi| \le \rho_n^{''}|\sin\varphi_n| \le \rho_n^{'}|\varphi_n| = \varepsilon_0 \frac{\rho_n^{''}}{\rho_n^{'}} H(\rho_n^{'})$ при $\xi \in \gamma_n$, то существует $d (0 < d < \infty)$, такое, что для $s \in S(a, t_0)$

$$\max_{\xi \in \gamma_n} (s\xi) \le \sigma\rho_n^{'} + dH(\rho_n^{'}), \quad (n \ge 1). \tag{34}$$

Следовательно, из (32)–(34) получаем, что

$$M_s(\sigma) = \max_{|t - t_0| \le a} |F(\sigma + it)| \le M + \sum_{n=n_1}^{\infty} \gamma_n e^{\sigma\rho_n^{'}} \quad (\sigma < 0),$$

где

$$\gamma_n = \exp\left[\ln(2\rho_n^{''}) + (\rho - q^*)\frac{\rho_n^{'}}{\ln \rho_n^{'}} + dH(\rho_n^{'}) + u(\rho_n^{'}) + w(\rho_n^{'})\right].$$

Введём в рассмотрение вспомогательный ряд

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{s\rho_n^{'}} \quad (s = \sigma + it).$$

Так как H, u, w принадлежат L_k, $\rho_n^{''}/\rho_n^{'} \to 1$ при $n \to \infty$, то согласно формуле (11) порядок функции Φ в полуплоскости Π_0 равен $\rho_k(\Phi) = \rho - q^*$. Но $M_s(\sigma) \le \Phi(\sigma) + M$. Значит, $\rho_s(F) \le \rho - q^*$. Из теоремы III следует, что $\rho_k(F) \le \rho_s(F) + q^*$. Так как $\rho_k(F) = \rho$, то $\rho_k(F) = \rho_s(F) + q^*$, и тем самым теорема 1 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J.F. Ritt *On certain points in the theory of Dirichlet series* // Amer. J. of Math. 1928. V. 50, № 1. P. 73–86.
2. Мандельбройт С. *Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения.* М.: ИЛ, 1955.
3. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976.
4. Гайсин А.М. *Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуполосе* // Матем. сб. 1982. Т. 117(159), № 3. С. 412–424.
5. Гайсин А.М., Сергеева Д.И. *Целые функции с заданной последовательностью нулей, имеющие правильное поведение на вещественной оси. I* // Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 996–1008.
6. Гайсин А.М., Сергеева Д.И. *Оценка ряда Дирихле в полуполосе в случае нерегулярного распределения показателей. II* // Сиб. матем. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 280–298.
7. Аиткужина Н.Н., Гайсин А.М. *Двусторонняя оценка k-порядка ряда Дирихле в полуполосе* // Уфимский матем. журн. 2014. Т. 6, № 4. С. 19–31.

Наркес Нурмухаметовна Аиткужина,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `Yusupovan@rambler.ru`

Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `Gaisinam@mail.ru`