ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 4 (2015). С. 3-14.

УДК 517.9+517.5

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ МНОЖЕСТВА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА ГОЛОМОРФНЫХ В ШАРЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

А.В. АБАНИН

Посвящается памяти профессора
Игоря Федоровича Красичкова–Терновского

Аннотация. Развит новый подход к изучению определяющих множеств (sampling sets) в смысле работы Ч. Горовица, Б. Коренблюма и Б. Пинчука (Michigan Math. J., 44:2, 1997) в пространстве всех голоморфных функций полиномиального роста в шаре, основанный на привлечении слабо достаточных множеств для промежуточных индуктивных пределов. С его помощью получено полное топологическое описание таких множеств и, в качестве применений этого описания, установлен ряд новых свойств определяющих множеств общего и специального вида. В частности, основной результат упомянутой выше статьи об определяющих последовательностях окружностей распространен на многомерный случай.

Ключевые слова: определяющие множества, слабо достаточные множества, пространство голоморфных функций полиномиального роста.

Mathematics Subject Classification: 32A38, 32C18, 46A13

1. Введение

Пусть $\mathbb{B}^N := \{z \in \mathbb{C}^N : |z| < 1\}$ — единичный шар в $\mathbb{C}^N$, где, как обычно, $|z| = (|z_1|^2 + \ldots + |z_N|^N)^{1/2}, z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$. Полагаем $\mathbb{B}^1 =: \mathbb{D}$ — единичный круг в комплексной плоскости. Для каждого $p \geq 0$ образуем банахово пространство

$$A^{-p}(\mathbb{B}^N) := \{f \in H(\mathbb{B}^N) : \|f\|_p := \sup_{|z|<1} |f(z)|(1 - |z|)^p < \infty\},$$

где $H(\mathbb{B}^N)$ — пространство всех голоморфных в $\mathbb{B}^N$ функций.

В соответствии с определением, введенным Ч. Горовицем, Б. Коренблюмом и Б. Пинчуком [1] при $N = 1$, подмножество S в $\mathbb{D}$ называется *определяющим* (*sampling*) для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$, если

$$T_S(f) := \varlimsup_{\zeta \in S, |\zeta| \to 1} \frac{\ln |f(\zeta)|}{|\ln(1 - |\zeta|)|} = \varlimsup_{|z| \to 1-0} \frac{\ln |f(z)|}{|\ln(1 - |z|)|} =: T(f) \qquad (1)$$

для любой функции $f \in A^{-\infty}(\mathbb{D})$. Ясно, что это понятие без изменений распространяется на случай $N > 1$.

В работе [1] в основном изучался вопрос о взаимосвязи между определяющими множествами для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$ и $A^{-p}(\mathbb{D})$. При этом, $S \subset \mathbb{D}$ называется *определяющим* (*sampling*) для пространства $A^{-p}(\mathbb{D})$, если имеется такая постоянная $C > 0$, что $\|f\|_p \leq C\|f\|_{p,S}$ для всех $f \in A^{-p}(\mathbb{D})$. Было показано, что если S является определяющим для всех $A^{-p}(\mathbb{D})$, $p > 0$,

---

A.V. Abanin, Sampling sets for the space of holomorphic functions of polynomial growth in a ball.

Работа поддержана РФФИ (проект № 15-01-0140415 а.)

Поступила 22 июля 2015 г.

то оно будет определяющим и для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$. Было также установлено, что обратный результат, вообще говоря, места не имеет. Причина этого, на первый взгляд неожиданного, факта осталась неясной.

Л.Х. Хой и П. Томас [2] исследовали взаимосвязь между определяющими и слабо достаточными для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$ множествами.

Напомним определение слабо достаточного множества, введенное Д.М. Шнейдером [3]. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{C}^N$, $\mathcal{V} = (v_n)_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность весов (непрерывных положительных функций) на Ω. Образуем линейное пространство $\mathcal{V}H(\Omega) := \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{v_n}(\Omega)$, где

$$H_{v_n}(\Omega) := \left\{ f \in H(\Omega) : \|f\|_{v_n} := \sup_{z\in\Omega} \frac{|f(z)|}{v_n(z)} < \infty \right\} -$$

банаховы пространства голоморфных в Ω функций. Наделим $\mathcal{V}H(\Omega)$ топологией τ внутреннего индуктивного предела последовательности $(H_{v_n}(\Omega))_{n=1}^{\infty}$.

Для подмножества $S \subset \Omega$ определим полунормированные пространства

$$H_{v_n}(\Omega|S) := \left\{ f \in \mathcal{V}H(\Omega) : \|f\|_{v_n,S} := \sup_{\zeta\in S} \frac{|f(\zeta)|}{v_n(\zeta)} < \infty \right\}.$$

Так как $H_{v_n}(\Omega) \hookrightarrow H_{v_n}(\Omega|S) \subset \mathcal{V}H(\Omega)$ ($\hookrightarrow$ — символ непрерывного вложения), то $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_{v_n}(\Omega|S) = \mathcal{V}H(\Omega)$, и топология τ мажорирует в $\mathcal{V}H(\Omega)$ топологию τ_S внутреннего индуктивного предела последовательности $(H_{v_n}(\Omega|S))_{n=1}^{\infty}$. В случае, когда τ_S совпадает с τ, S называется *слабо достаточным множеством* для $\mathcal{V}H(\Omega)$.

В [2] было показано, что всякое определяющее для пространства $A^{-\infty}(\mathbb{D})$ множество является для него слабо достаточным, и построен пример, показывающий, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Впоследствии в статье [4] эти результаты были тем же методом установлены при $N > 1$.

Х. Бонет и П. Домански ввели и систематически исследовали (p, q)-определяющие множества и с их помощью получили критерий того, что данное множество является определяющим для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$ (см. [5, следствие 2.4]). Это описание оказалось достаточно сложным по форме и трудным для применения.

Во всех упомянутых выше работах — [1], [2], [4], [5] — основной моделью для иллюстрации, а в ряде мест и для обоснования основных результатов выступали, так называемые, инвариантные относительно вращения множества (rotate invariant sets), то есть семейства концентрических окружностей или сфер с центром в начале. Для них удалось установить при $N = 1$ критерии того, что они являются определяющими или слабо достаточными для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$. Следует отметить, что при этом в ряде доказательств использовалась сложная техника, которая опиралась на тонкие одномерные результаты, не имеющие аналогов при $N > 1$. Это стало одной из причин того, что при попытке распространения результатов на многомерный случай, предпринятой в [4], даже для таких простых по структуре множеств это удалось сделать для тривиальной части предшествующих исследований, когда фактически нет зависимости от размерности N.

В настоящей работе развивается новый метод исследования определяющих для $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ множеств в смысле [1]. Он основан на использовании слабо достаточных множеств для промежуточных индуктивных пределов $A_{-p}(\mathbb{B}^N) := \mathrm{ind}_{q<p} A^{-q}(\mathbb{B}^N)$. На этом пути удается полностью выяснить топологическую природу определяющих для $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ множеств. Как оказалось (см. ниже теорему 2), это ровно те подмножества $\mathbb{B}^N$, которые обладают универсальной слабой достаточностью — они слабо достаточны сразу для всех пространств $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$, $p > 0$, одновременно. Это и есть топологическое отражение алгебраического содержания, заложенного в работе [1] в понятие определяющих для $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ множеств. С этой точки зрения, применение к ним термина «определяющий» («sampling») представляется нам недостаточно обоснованным. В качестве альтернативы предлагается использовать для них термин $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$-*эффективные* множества, поскольку понятие эффективных множеств, введенное В.Г. Ийером [6] для пространств целых функций, основано на подобном (1) равенстве и полностью соответствует понятию $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ определяющих множеств в смысле [1] по содержанию.

Возможности использования для дальнейших исследований общих результатов о структуре $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$-эффективных множеств, полученных во второй части, демонстрируются в третьем разделе. Установлено, что всякое $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$-эффективное множество содержит в себе $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$-эффективную последовательность, не имеющую предельных точек в $\mathbb{B}^N$, и получено распространение нетривиальных результатов работ [1] и [5] об инвариантных относительно вращения множеств на многомерный случай. При этом выяснено, что такие инвариантные множества слишком густы, чтобы с их помощью изучать тонкие характеристики слабо достаточных или эффективных множеств для пространств функций полиномиального роста. Оказалось, что с их помощью нельзя даже различить свойство слабой достаточности для индивидуального пространства вида $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ от того же свойства для всех таких пространств одновременно.

2. Определяющие множества или эффективные?

В настоящем разделе получено полное топологическое описание определяющих в смысле [1] множеств и показано, что аналог термина «эффективное» в смысле Ийера множество более адекватно в данном случае, чем «определяющее». Будет показано, что это ровно те множества из $\mathbb{B}^N$, которые являются слабо достаточными для всех пространств конечного полиномиального роста $A_{-p}(\mathbb{B}^N) := \bigcup_{0<q<p} A^{-q}(\mathbb{B}^N)$ $(0 < p < \infty)$, наделенных своей естественной топологией τ внутреннего индуктивного предела. Отметим, что в наших обозначениях $A_{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ совпадает с $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$, а $A^{-0}(\mathbb{B}^N)$, очевидно, есть не что иное, как пространство $H^\infty(\mathbb{B}^N)$ всех ограниченных голоморфных в $\mathbb{B}^N$ функций. Ясно, что

$$A^{-q}(\mathbb{B}^N) \hookrightarrow A_{-p}(\mathbb{B}^N) \hookrightarrow A^{-p}(\mathbb{B}^N) \hookrightarrow A^{-\infty}(\mathbb{B}^N), \quad 0 \le q < p < \infty.$$

В рассматриваемых пространствах понятие слабо достаточных множеств выглядит следующим образом. Пусть S — какое-либо подмножество $\mathbb{B}^N$. Для данного $p \in (0,\infty]$ вводим полунормированные пространства

$$A^{-q}_{-p}(\mathbb{B}^N|S) := \left\{ f \in A_{-p}(\mathbb{B}^N) : \|f\|_{q,S} := \sup_{\zeta\in S} |f(\zeta)|(1-|\zeta|)^q < \infty \right\}.$$

В соответствии с общим определением множество $S \subset \mathbb{B}^N$ называется слабо достаточным для пространства $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$, если топология τ_S внутреннего индуктивного предела семейства $\{A^{-q}_{-p}(\mathbb{B}^N|S) : 0 < q < p\}$ в $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ совпадает с его исходной топологией τ. Заметим, что в определении $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ и топологии τ_S в нем вместо всего семейства $\{A^{-q}_{-p}(\mathbb{B}^N|S) : 0 < q < p\}$ можно брать любую последовательность $\{A^{-q_n}_{-p}(\mathbb{B}^N|S) : 0 < q_n \uparrow p\}$. Поскольку отношение весов $(1-|z|)^{q_{n+1}}/(1-|z|)^{q_n}$ стремится к нулю при $|z| \uparrow 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, отсюда, в частности, следует, что $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ — (DFS)-пространство.

Ясно, что любое слабо достаточное для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ множество $(0 < p \le \infty)$ имеет хотя бы одну предельную точку на единичной сфере $\mathbb{S}^N := \{z \in \mathbb{C}^N : |z| = 1\}$. Это следует, например, из того, что при любом $r_0 \in (0,1)$ семейство функций $\{(1-r_0)^q/(1-z_1)^q : q < p\}$, будучи неограниченным в $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$, является ограниченным в этом пространстве, наделенном топологией τ_S с $S := \{\zeta : |\zeta| \le r_0\}$. Использовав примерно те же соображения, нетрудно установить, что на самом деле слабо достаточные для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ множества S обладают тем свойством, что $\overline{S} \supset \mathbb{S}^N$.

Нам потребуется следующая лемма, имеющая также и самостоятельное значение.

Лемма 1. *Пусть функция $f \in A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ нетривиальна. Тогда для любого $p > T(f) =: p_0$ имеем, что*
$$f \cdot A_{-(p-p_0)}(\mathbb{B}^N) \not\subseteq A^{-q}(\mathbb{B}^N),\ \forall q \in [p_0, p).$$

Доказательство. Предположим, рассуждая от противного, что при некотором $q \in [p_0, p)$ имеет место вложение
$$f \cdot A_{-(p-p_0)}(\mathbb{B}^N) \subset A^{-q}(\mathbb{B}^N).$$
Тогда оператор умножения $\Lambda_f : g \mapsto fg$ действует из (DFS)-пространства $A_{-(p-p_0)}(\mathbb{B}^N)$ в банахово пространство $A^{-q}(\mathbb{B}^N)$. Применив теорему о замкнутом графике и использовав стандартные рассуждения (см., напр., [7, п. 5]), получаем отсюда, что этот оператор действует из $A_{-(p-p_0)}(\mathbb{B}^N)$ в $A^{-q}(\mathbb{B}^N)$ непрерывно. По критерию непрерывности линейного оператора в индуктивном пределе для любого $q' \in (0, p - p_0)$ найдется $C_{q'} > 0$ такое, что
$$\|fg\|_q \leq C_{q'}\|g\|_{q'},\ \ \forall g \in A_{-(p-p_0)}(\mathbb{B}^N). \tag{2}$$

Далее, для голоморфных в $\mathbb{B}^N$ функций $g_\zeta(z) := (1 - \langle z, \zeta\rangle)^{-q'}$, где $|\zeta| = 1$ и $\langle z, \zeta\rangle = z_1\zeta_1 + \ldots + z_N\zeta_N$, как нетрудно убедиться, имеем $\|g_\zeta\|_{q'} = 1$. Подставив эти функции в (2), получим
$$|f(z)||1 - \langle z, \zeta\rangle|^{-q'}(1 - |z|)^q \leq C_{q'} \ \text{ для всех } z \in \mathbb{B}^N \text{ и } \zeta : |\zeta| = 1.$$
В частности, при $\zeta = \overline{z}/|z|, z \neq 0$, имеем отсюда, что
$$|f(z)| \leq C_{q'}(1 - |z|)^{q'-q},\ \forall z \in \mathbb{B}^N$$
(при $z = 0$ по соображениям непрерывности это неравенство также выполнено). Поэтому $T(f) \leq q - q'$. Взяв $q' \in (q - p_0, p - p_0)$, получим тогда, что $T(f) < p_0$, что невозможно. □

Перед формулировкой следующего результата напомним, что подмножество S в $\mathbb{B}^N$ называется *множеством единственности* для класса $E \subset H(\mathbb{B}^N)$, если из того, что $f = 0$ на S следует, что $f \equiv 0$ в $\mathbb{B}^N$.

Предложение 1. *Если для множества $S \subset \mathbb{B}^N$ при некоторых $p \in (0, \infty]$ и q, r с $0 < q < r < p$ имеет место вложение*
$$A^{-q}_{-p}(\mathbb{B}^N|S) \subset A^{-r}(\mathbb{B}^N), \tag{3}$$
то S — множество единственности для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$.

Доказательство. Пусть $f \in A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ такова, что $f|_S = 0$. Предположим, что f нетривиальна в $\mathbb{B}^N$. Тогда $T(f) =: p_0 \in [0, r]$ в силу нетривиальности f и вложения (3). По лемме 1 найдем $g \in A_{-(p-p_0)}(\mathbb{B}^N)$ так, чтобы $fg \notin A^{-r}(\mathbb{B}^N)$. Ясно, что $fg \in A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ и $(fg)|_S = 0$. Поэтому $fg \in A^{-q}_{-p}(\mathbb{B}^N|S)$, что невозможно из-за (3). Следовательно, $f \equiv 0$ в $\mathbb{B}^N$, что и требовалось установить. □

Замечание 1. При $N = 1$ и $p = \infty$ утверждение предложения 1 было ранее установлено в [2, лемма 2] с помощью другого метода, предложенного Ч. Горовицем и опирающегося на его тонкие результаты о существовании множеств единственности для классов Бергмана, которые сами являются нулевыми множествами некоторых функций из более широких классов Бергмана (см. [8, теорема 1]).

Справедлив следующий критерий слабой достаточности множества для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$.

Предложение 2. *Пусть $S \subset \mathbb{B}^N$ и $p \in (0, \infty]$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *S слабо достаточно для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$.*

(ii) $\forall q \in (0, p)\ \ \exists q' \in [q, p) :\ \ A^{-q}_{-p}(\mathbb{B}^N|S) \hookrightarrow A^{-q'}(\mathbb{B}^N)$.

(iii) $\forall q \in (0, p)\ \ \exists q' \in [q, p) :\ \ A^{-q}_{-p}(\mathbb{B}^N|S) \subset A^{-q'}(\mathbb{B}^N)$.

Доказательство. По теоремам 1 и 3 из [9] имеем (i)$\Longleftrightarrow$(ii)$\Longleftrightarrow$ S —множество единственности для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ и выполнено (iii). Использовав предложение 1, заключаем, что требование о том, что S — множество единственности для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ является следствием условия (iii). $\square$

Замечание 2. Равносильность (i)$\Longleftrightarrow$(ii) в предложении 2 является стандартной и восходит, по сути, к работе Д.М. Шнейдера [3], который доказал импликацию (ii)$\Longrightarrow$(i) (по поводу этой эквивалентности, помимо [9, теорема 1], см. также [10, следствие 2 из леммы 9]). Решающую роль для наших дальнейших результатов имеет эквивалентность (i)$\Longleftrightarrow$(iii), причем в большей степени для $p < \infty$. При $N = 1$ и $p = \infty$ она была ранее установлена в [2] в качестве следствия теоремы 3 из [9] с помощью утверждения типа предложения 1 (см. выше замечание 1). При $N > 1$ и $p = \infty$ в работе Ле Хай Хоя [4, теоремы 3.4 и 3.6] была доказана лишь эквивалентность (i)$\Longleftrightarrow$ S — множество единственности для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ и выполнено (iii), которая непосредственным образом следует из [9, теорема 3], «обслуживающей» весь класс весовых (DFS)-пространств голоморфных (и даже голоморфно подобных) функций. Отметим попутно, что в [4], с неясной для нас целью, в теореме 3.4 за счет замены пространств общего вида на конкретные пространства $A^{-p}(\mathbb{B}^N)$ и $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ по существу повторено доказательство теоремы 3 из [9].

Определение 1. *Пусть $p \in (0, \infty]$. Назовем множество $S \subset \mathbb{B}^N$ эффективным для пространства $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ (или просто $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$-эффективным), если $T(f) = T_S(f)$ для любой функции $f \in A_{-p}(\mathbb{B}^N)$.*

Так как $T(f) \geq 0$ для любой нетривиальной функции $f \in H(\mathbb{B}^N)$ (возможно, $T(f) = +\infty$), то всякое эффективное для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ множество является для него множеством единственности.

Теорема 1. *Пусть $0 < p < \infty$. Для того чтобы множество $S \subset \mathbb{B}^N$ было слабо достаточным для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$, необходимо и достаточно, чтобы оно было $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$-эффективным.*

Доказательство. Слабая достаточность, равно как и эффективность, S для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ влечет то, что S — множество единственности для этого пространства. Поэтому далее считаем, что S — множество единственности для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$.

Если S — $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$-эффективное множество, то

$$T_S(f) = \inf\{q > 0 : \ f \in A_{-p}^{-q}(\mathbb{B}^N|S)\}.$$

Всегда $T(f) = \inf\{q > 0 : \ f \in A^{-q}(\mathbb{B}^N)\}$. Последние два равенства влекут, что для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$-эффективного множества S выполнено условие

$$\forall q, q', 0 < q < q' < p, \text{ имеем } A_{-p}^{-q}(\mathbb{B}^N|S) \subset A^{-q'}(\mathbb{B}^N).$$

По предложению 2 тогда S слабо достаточно для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$.

Пусть теперь S слабо достаточно для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$. Предположим, рассуждая от противного, что имеется функция $f \in A_{-p}(\mathbb{B}^N)$, для которой $T_S(f) < T(f) =: p_0$. Возьмем $q > 0$ так, чтобы $T_S(f)+p-p_0 < q < p$. В силу слабой достаточности S для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ по предложению 2 найдется такое $q' \in [q, p)$, что

$$A_{-p}^{-q}(\mathbb{B}^N|S) \subset A^{-q'}(\mathbb{B}^N). \tag{4}$$

Далее, так как для любой функции $f \in A_{-(p-p_0)}(\mathbb{B}^N)$

$$T_S(fg) \leq T_S(f) + T_S(g) \leq T_S(f) + T(g) \leq T_S(f) + p - p_0 < q,$$

то $f \cdot A_{-(p-p_0)}(\mathbb{B}^N) \subset A_{-p}^{-q}(\mathbb{B}^N|S)$. С другой стороны, по лемме 1 $f \cdot A_{-(p-p_0)}(\mathbb{B}^N) \not\subseteq A^{-q'}(\mathbb{B}^N)$, что противоречит (4). $\square$

Из теоремы 1 получаем следующие полезные свойства слабо достаточных для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ множеств, которые естественно трактовать как некую монотонность и непрерывность этого свойства по параметру p.

Следствие 1. *Пусть $S \subset \mathbb{B}^N$ и $p \in (0,\infty)$. Верны такие утверждения:*

1) *Если S слабо достаточно для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$, то оно слабо достаточно и для $A_{-q}(\mathbb{B}^N)$ при всех $q \in (0,p)$.*
2) *Если S слабо достаточно для $A_{-p_n}(\mathbb{B}^N)$, где $0 < p_n \uparrow p$, то оно слабо достаточно и для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$.*

Доказательство. 1) В самом деле, слабая достаточность S для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ по теореме 1 влечет, что $T(f) = T_S(f)$ для всех f из $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$. Тем более, $T(f) = T_S(f)$ для всех $f \in A_{-q}(\mathbb{B}^N)$ при $q < p$. Применив еще раз теорему 1, получаем, что S слабо достаточно для $A_{-q}(\mathbb{B}^N)$ при всех $q \in (0,p)$.

2) Доказательство проводится аналогично предыдущему и опирается на то, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{-p_n}(\mathbb{B}^N) = A_{-p}(\mathbb{B}^N)$. □

Таким образом, если S слабо достаточно для какого-то из пространств вида $A_{-r_0}(\mathbb{B}^N)$, $0 < r_0 < \infty$, то оно слабо достаточно для всех пространств $A_{-r}(\mathbb{B}^N)$, где r пробегает какой-либо полуинтервал $(0,p]$ с $r_0 \le p < \infty$ или весь луч $(0,\infty)$. Интересно отметить, что крайне левое положение, соответствующее $p = 0$ и, следовательно, пространству $H^\infty(\mathbb{B}^N)$, и крайне правое — соответствующее $p = \infty$ и $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$, могут также быть включены в этот результат.

Предложение 3. *Если множество $S \subset \mathbb{B}^N$ слабо достаточно для некоторого пространства $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$, $p \in (0,\infty]$, то*

$$\sup_{z\in\mathbb{B}^N} |f(z)| = \sup_{\zeta\in S} |f(\zeta)|, \quad \forall f \in A_{-p}(\mathbb{B}^N). \tag{5}$$

Доказательство. Если $f|_S = 0$, то, так как S — множество единственности для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$, $f \equiv 0$ в $\mathbb{B}^N$ и, значит, равенство (5) верно.

В случае, когда $\sup_{\zeta\in S} |f(z)| = \infty$, доказывать нечего.

Остается рассмотреть ситуацию, когда $M := \sup_{\zeta\in S} |f(z)| \in (0,\infty)$. Покажем, что тогда $f^n \in A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для $p = \infty$ это очевидно, так как $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ — алгебра относительно операции поточечного умножения функций. При $p \in (0,\infty)$ имеем, что $T_S(f) \le 0$. По теореме 1 тогда $T(f) = T_S(f) \le 0$, откуда, очевидно, следует, что $T(f) = 0$ (напомним, что $T(g) \ge 0$ для любой нетривиальной функции g из $H(\mathbb{B}^N)$). Ясно, что это равенство обеспечивает нужное.

Далее используем соображения, впервые примененные в связи со слабо достаточными множествами Д.М. Шнейдером [3, теорема 2.4]. Так как S слабо достаточно для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$, то, взяв какое-либо фиксированное $q \in (0,p)$, найдем $q' \in [q,p)$ и $C > 0$ так, чтобы

$$\|g\|_{q'} \le C\|g\|_{q,S}, \quad \forall g \in A_{-p}(\mathbb{B}^N),$$

(это возможно по предложению 2). Использовав это неравенство для f^n, имеем

$$\sup_{z\in\mathbb{B}^N} |f(z)|^n (1-|z|)^{q'} \le C \sup_{\zeta\in S} |f(\zeta)|^n (1-|\zeta|)^q \le CM^n.$$

Следовательно,

$$|f(z)| \le C^{1/n} M (1-|z|)^{-q'/n}, \quad \forall z \in \mathbb{B}^N, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

и поэтому $|f(z)| \le M$ для всех $z \in \mathbb{B}^N$. Ясно, что последнее неравенство влечет (5). □

Замечание 3. Равенство (5) означает, что любое слабо достаточное для какого-либо пространства $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ $(0 < p \le \infty)$ множество обладает тем свойством, что по нему можно вычислить норму $\|f\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{B}^N} |f(z)|$ любой функции $f \in H^\infty(\mathbb{B}^N)$. При $N = 1$

такие множества (точнее последовательности), для которых имеет место равенство (5) (причем в более общей ситуации, когда вместо круга берется жорданова область), как показали Л. Браун, А. Шилдс и К. Целлер [11, теорема 3], полностью описывают класс последовательностей показателей абсолютно представляющих систем экспонент в одном специальном банаховом пространстве целых функций.

В упомянутой только что теореме 3 из [11] (см. условие (iv)) было также получено геометрическое описание последовательностей, удовлетворяющих (5) при $N = 1$. Использовав его, получаем такой результат.

Следствие 2. *Пусть* $S \subset \mathbb{D}$ *— слабо достаточное для* $A_{-p}(\mathbb{D})$ *множество при некотором* $p \in (0, \infty]$. *Тогда для любой точки* ζ *единичной окружности найдется последовательность точек из* S*, которая сходится к* ζ*, оставаясь на некотором некасательном пути.*

Отметим, что применение результатов из [11] к произвольным множествам вместо последовательностей оправдано, так как ниже будет показано (см. предложение 5), что слабо достаточные для рассматриваемых пространств множества всегда содержат в себе слабо достаточные для них последовательности.

В связи с замечанием 3 и следствием 2 напомним, что множество S называется определяющим (sampling) для $H^\infty(\mathbb{B}^N)$, если имеется такая постоянная $C \geq 1$, что

$$\|f\|_\infty \leq C \sup_{\zeta \in S} |f(\zeta)|, \quad \forall f \in H^\infty(\mathbb{B}^N).$$

Множества S, для которых данное условие выполняется при $C = 1$, как в предложении 3, естественно поэтому называть *вполне определяющими* для $H^\infty(\mathbb{B}^N)$.

Теперь приведем результат, касающийся крайне правого положения параметра p.

Предложение 4. *Если* $S \subset \mathbb{B}^N$ *слабо достаточно для некоторой последовательности пространств* $A_{p_n}(\mathbb{B}^N)$*, где* $0 < p_n \uparrow \infty$*, то оно также слабо достаточно и для* $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$.

Доказательство. Зафиксируем $q > 0$. Для любой функции $f \in A^q_{-\infty}(\mathbb{B}^N|S)$ имеем, что $T_S(f) \leq q$. Для каждой такой функции возьмем $n = n(f)$ настолько большим, чтобы $f \in A_{-p_n}(\mathbb{B}^N)$. Тогда по теореме 1 из слабой достаточности S для $A_{-p_n}(\mathbb{B}^N)$ вытекает, что $T(f) = T_S(f)$. Значит, $T(f) \leq q$ для любой функции $f \in A^q_{-\infty}(\mathbb{B}^N|S)$. Отсюда следует, что $A^q_{-\infty}(\mathbb{B}^N|S) \subset A^{-q'}(\mathbb{B}^N)$, лишь бы $q' > q$. Остается применить предложение 2 (см. условие (iii)), чтобы сделать вывод о том, что S слабо достаточно для $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$. □

Теперь мы готовы привести топологическое описание определяющих в смысле Горовица, Коренблюма и Пинчука множеств для $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$.

Теорема 2. *Для подмножества* S *в* $\mathbb{B}^N$ *эквивалентны следующие условия:*

(i) S *— определяющее для* $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ *множество в смысле работы* [1].

(ii) S *слабо достаточно для всех пространств* $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$, $p \in (0, \infty]$.

(iii) S *слабо достаточно для некоторой последовательности пространств* $A_{-p_n}(\mathbb{B}^N)$*, где* $0 < p_n \uparrow \infty$.

Доказательство. Применив теорему 1 и предложение 4, получаем эквивалентность (i) и (ii).

Импликация (ii)$\Longrightarrow$(iii) очевидна, а обратная ей верна по следствию 1 и предложению 4. □

Полученный результат позволяет, в отличие от предшествующих работ, дать точные ответы на некоторые открытые вопросы или сделать их доказательство элементарным. В следующем разделе это будет продемонстрировано на задаче об описании определяющих в смысле [1] инвариантных относительно вращения множеств.

В заключение настоящего раздела сделаем несколько замечаний относительно используемой терминологии.

Изучение определяющих множеств (sampling sets) в различных банаховых пространствах голоморфных функций является популярной задачей. Мы не будем здесь приводить ссылки на многочисленные работы по данному направлению, поскольку оно имеет косвенное отношение к содержанию настоящей работы. Отметим лишь следующий существенный момент, взяв в качестве модели весовые пространства с равномерной нормой (можно было с тем же успехом рассмотреть весовые пространства с интегральными нормами).

Пусть

$$H_w(\Omega) := \left\{ f \in H(\Omega) : \ \|f\|_w := \sup_{z\in\Omega} \frac{|f(z)|}{w(z)} < \infty \right\},$$

где w — положительная непрерывная на открытом в $\mathbb{C}^N$ множестве Ω функция (*вес*), $H(\Omega)$ — пространство всех голоморфных в Ω функций. Множество $S \subset \Omega$ называют определяющим (sampling) для $H_w(\Omega)$, если существует такая постоянная $C \geq 1$, что

$$\|f\|_w \leq C\|f\|_{w,S}, \ \forall f \in H_w(\Omega), \quad \text{где } \|f\|_{w,S} := \sup_{\zeta\in S} \frac{|f(\zeta)|}{w(\zeta)}.$$

Другими словами, S — определяющее множество для $H_w(\Omega)$, если $\|\cdot\|_{w,S}$ является нормой, задающей в $H_w(\Omega)$ исходную топологию. Отсюда следует, что в данном случае определяющие множества — это то же самое, что и достаточные в смысле Л. Эренпрайса множества [12, стр. 3, 4, 13], а также и слабо достаточные множества (имеем вырожденный индуктивный предел, задаваемый одним банаховым пространством). Впрочем, как показали В.В. Напалков [13] и К. Бирштед, Р. Майзе и У. Саммерс [14], в индуктивных пределах вида $\mathcal{V}H(\Omega)$ классы достаточных и слабо достаточных множеств одинаковы. Таким образом, понятия определяющих и достаточных множеств по сути совпадают. Фактически, это подмножества области определения функций из данного функционального пространства, по которым можно задавать исходную топологию.

С другой стороны, теорема 2 показывает, что определяющие (sampling) для $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ в смысле [1] множества являются слабо достаточными не только для $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$, но и для всех пространств $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$, $0 < p < \infty$, и наоборот. При этом, как известно (см., напр., [2]), имеются примеры слабо достаточных для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$ множеств, которые не являются для этого пространства определяющими в смысле Горовица, Коренблюма и Пинчука.

Поэтому использование термина «sampling» для подмножеств $\mathbb{B}^N$, для которых выполнено (1), представляется неправомерным. Для них более адекватным было бы, на наш взгляд, название $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$-эффективных (по Ийеру) множеств. В связи с этим отметим, что Г. Ийер в 1937 г. [6] назвал последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, $|z_n| \to \infty$, комплексных чисел эффективной для пространства $E[\rho, \sigma)$ всех целых функций порядка не выше ρ и типа при этом порядке меньше σ, если по ней можно вычислить тип любой функции из $E[\rho, \sigma)$, то есть

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln|f(z_n)|}{|z_n|^\rho} = \limsup_{|z|\to\infty} \frac{\ln|f(z)|}{|z|^\rho}, \quad \forall f \in E[\rho, \sigma).$$

Критериальная связь между слабо достаточными и эффективными множествами впервые была обнаружена в [9, теорема 6] для пространств целых функций, рост которых ограничен сверху некоторой положительной плюрисубгармонической в $\mathbb{C}^N$ функцией. Как показывает теорема 1, аналогичная связь имеет место для пространств $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ при конечных p и, следовательно, в этом случае можно использовать любой из терминов — слабо достаточный, эффективный или определяющий, поскольку все они равносильны. Так как для $p = \infty$ такой взаимосвязи нет, мы в последующем изложении (в третьем разделе) будем называть определяющие в смысле [1] множества для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ *эффективными* для этого пространства (или $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$-эффективными).

3. Эффективные множества, инвариантные относительно вращения

Ч. Горовиц, Б. Коренблюм и Б. Пинчук показали [1, предложения 2.4 и 3.3], что последовательность концентрических окружностей

$$E(\mathbf{r}) := \bigcup_{n=1}^{\infty}\{z \in \mathbb{D}:\ |z_n| = r_n\},\ \mathbf{r} = (r_n)_{n=1}^{\infty}, 0 < r_n \uparrow 1,$$

является $A^{-\infty}(\mathbb{D})$-эффективным множеством в том и только в том случае, когда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\ln(1-r_{n+1})|}{|\ln(1-r_n)|} = 1.$$

При этом, доказательство достаточности (предложение 2.4) тривиально, а при доказательстве необходимости (предложение 3.3) были использованы тонкие результаты Ч. Горовица о существовании голоморфных в круге функций с регулярным относительно заданного веса ростом максимума модуля.

Х. Бонет и П. Домански в [5] исследовали более общую, с их точки зрения, задачу об описании эффективных и слабо достаточных для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$ множеств вида $E(A) := \{z \in \mathbb{D} : |z| \in A\}$, где A — какое-либо замкнутое множество на полуинтервале $[0, 1)$ (в относительной топологии). Их подход основан на исследовании введенных ими (p, q)-определяющих множеств, а для доказательства своих результатов они использовали технически громоздкую схему, которая существенно одномерна (см. раздел 3 в [5]).

В статье Л.Х. Хоя [4] была сделана попытка перенести упомянутый выше результат работы [1] на случай $N > 1$ (ясно, что вместо окружностей рассматриваются сферы). Однако, ему удалось установить лишь достаточную часть, доказательство которой не зависит от числа переменных.

В настоящем разделе, используя полученные выше результаты и некоторые идеи, развитые ранее в [15] при изучении слабо достаточных и эффективных множеств для пространств целых функций, будет показано, что при исследовании подобных множеств для рассматриваемых пространств можно всегда ограничиться последовательностями, не имеющими предельных точек в $\mathbb{B}^N$. Отсюда, в частности, следует, что для инвариантных относительно вращения множеств, достаточно рассматривать только последовательности сфер типа $E(\mathbf{r})$. Кроме того, на этом пути удается распространить упомянутый выше результат работы [1] (его нетривиальную часть) на многомерный случай. При этом будет использован элементарный метод, который является новым и для $N = 1$.

Нам потребуется следующий простой факт.

Лемма 2. *Пусть $p \in (0, \infty]$ и множество $S \subset \mathbb{B}^N$ слабо достаточно для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$. Тогда для любого $r_0 \in (0, 1)$ множество $S_{r_0} := \{\zeta \in S : |\zeta| > r_0\}$ также слабо достаточно для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$.*

Доказательство. Этот результат — прямое следствие предложения 2, поскольку очевидно, что $A_{-p}^{-q}(\mathbb{B}^N|S_{r_0}) = A_{-p}^{-q}(\mathbb{B}^N|S)$ (напомним, что в соответствии с отмеченным в начале предыдущего раздела S_{r_0} всегда непусто). □

Предложение 5. *Всякое слабо достаточное для некоторого пространства $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$, $0 < p \le \infty$, или $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$-эффективное множество содержит в себе слабо достаточную для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ или, соответственно, $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$-эффективную последовательность $(\zeta_n)_{n=1}^{\infty}$, для которой $|\zeta_n| \uparrow 1$.*

Доказательство. Для слабо достаточных множеств это утверждение следует непосредственно из общего результата О.В. Епифанова [16, теорема 1].

Пусть теперь S — $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$-эффективное множество. Возьмем некоторую числовую последовательность $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ с $0 < p_n < \infty$. По теореме 2 S тогда слабо достаточно для любого пространства $A_{-p_n}(\mathbb{B}^N)$, $n = 1, 2, \dots$. В соответствии с только что упомянутым результатом О.В. Епифанова, выделим из S последовательность $Z^1 := (\zeta_n^1)_{n=1}^\infty$, которая слабо достаточна для $A_{-p_1}(\mathbb{B}^N)$ и $|\zeta_n^1| \uparrow 1$. По лемме 2 множество $S_2 := \{\zeta \in S : |\zeta| > 1/2\}$ слабо достаточно для $A_{-p_2}(\mathbb{B}^N)$. Выделим из него последовательность $Z^2 := (\zeta_n^2)_{n=1}^\infty$, которая слабо достаточна для $A_{-p_2}(\mathbb{B}^N)$ и $|\zeta_n^2| \uparrow 1$. Ясно, что $|\zeta_n^2| > 1/2$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Продолжив этот процесс, выделим из S последовательности $Z^m = (\zeta_n^m)_{n=1}^\infty$, которые слабо достаточны для соответствующих пространств $A_{-p_m}(\mathbb{B}^N)$, $|\zeta_n^m| \uparrow 1$ и $|\zeta_n^m| > (m-1)/m$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Перенумерованная в порядке неубывания модулей последовательность $Z := \bigcup_{m=1}^\infty Z^m = (\zeta_n)_{n=1}^\infty$ будет, очевидно, слабо достаточной для всех $A_{-p_m}(\mathbb{B}^N)$, $m = 1, 2, \dots$. Применив еще раз теорему 2, заключаем, что $(\zeta_n)_{n=1}^\infty$ является $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$-эффективной. Ясно, что она обладает тем свойством, что $|\zeta_n| \uparrow 1$. □

Замечание 4. Рассмотрим инвариантное относительно вращения множество сфер $E(A) = \{\zeta \in \mathbb{B}^N : |\zeta| \in A\}$, где A — произвольное, не обязательно замкнутое как в [5], подмножество полуинтервала $[0, 1)$. Из предложения 5 следует, что $E(A)$ является слабо достаточным для какого-либо пространства $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ $(0 < p \le \infty)$ или $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$-эффективным в том и только в том случае, когда имеется такая последовательность $\mathbf{r} = (r_n)_{n=1}^\infty$, $r_n \in A$, $0 < r_n \uparrow 1$, что соответствующая последовательность сфер $E(\mathbf{r})$ слабо достаточна для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ или, соответственно, $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$-эффективна. Таким образом, имеет смысл изучать только случай инвариантных относительно вращения последовательностей сфер.

Предложение 6. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *$E(\boldsymbol{r})$ слабо достаточно для какого-либо пространства $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$, $0 < p < \infty$.*
(ii) *$E(\boldsymbol{r})$ слабо достаточно для всех пространств $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$, $0 < p \le \infty$.*
(iii) *$E(\boldsymbol{r})$ является $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$-эффективной.*
(iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 - r_{n+1})}{\ln(1 - r_n)} = 1.$

Доказательство. (i)$\Longrightarrow$(ii): Предположим, рассуждая от противного, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln(1 - r_{n+1})}{\ln(1 - r_n)} > 1.$$

Тогда имеются такие $\alpha > 1$ и $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$1 - r_{n+1} < (1 - r_n)^\alpha, n \ge n_0. \tag{6}$$

Без ограничения общности считаем, что $\alpha < 2$. Возьмем $\beta \in (1, \alpha)$ и $q \in (p\beta/\alpha, p)$.

Так как по условию $E(\mathbf{r})$ слабо достаточно для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$, то по предложению 2 существуют $q' \in [q, p)$ и $C > 0$ такие, что $\|f\|_{q'} \le C\|f\|_{q,E(\mathbf{r})}$ для всех $f \in A_{-p}(\mathbb{B}^N)$. Тем более,

$$\|f\|_p \le C\|f\|_{q,E(\mathbf{r})}, \quad \forall f \in A_{-p}(\mathbb{B}^N). \tag{7}$$

Положим $s_n := [q(1 - r_n)^{-\beta}]$, где $[x]$ обозначает целую часть числа x. Ясно, что для достаточно больших n числа s_n натуральны. Функция $t^{s_n}(1 - t)^q$ возрастает на $\left[0, \dfrac{s_n}{s_n + q}\right]$ и убывает на $\left[\dfrac{s_n}{s_n + q}, 1\right)$. Аналогично ведет себя функция того же вида, если вместо q взять p. Обозначим $t_n := \dfrac{s_n}{s_n + p}$.

При всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{s_n}{s_n + q} \le \frac{q(1 - r_n)^{-\beta}}{q(1 - r_n)^{-\beta} + q} = \frac{1}{1 + (1 - r_n)^\beta} \le 1 - \frac{1}{2}(1 - r_n)^\beta,$$

а также (с учетом того, что $q > p\beta/\alpha > p/2$)

$$\frac{s_n}{s_n+p} \geq \frac{q(1-r_n)^{-\beta}-1}{q(1-r_n)^{-\beta}+p-1} = \frac{q-(1-r_n)^{\beta}}{q+(p-1)(1-r_n)^{\beta}} \geq 1-2(1-r_n)^{\beta}.$$

Тогда при тех же n

$$1-2(1-r_n)^{\beta} \leq t_n \leq \frac{s_n}{s_n+q} \leq 1-\frac{1}{2}(1-r_n)^{\beta} \tag{8}$$

и, следовательно, начиная с некоторого номера

$$r_n < \frac{s_n}{s_n+q} < r_{n+1}$$

(правая часть получена с учетом (6) и $\alpha > \beta$). Поэтому для функций $f_n(z) = z_1^{s_n} \in A_{-p}(\mathbb{B}^N)$, $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{B}^N$, получаем

$$\|f_n\|_{q,E(\mathbf{r})} = \sup_{\zeta\in E(\mathbf{r})} |\zeta_1|^{s_n}(1-|\zeta|)^q = \sup_{k\geq 1} r_k^{s_n}(1-r_k)^q = \max(A_n, B_n),$$

где $A_n := r_n^{s_n}(1-r_n)^q$, $B_n := r_{n+1}^{s_n}(1-r_{n+1})^q$. Далее,

$$\|f\|_p = \sup_{z\in\mathbb{B}^N} |z_1|^{s_n}(1-|z|)^p = t_n^{s_n}(1-t_n)^p =: C_n.$$

Использовав (8), имеем

$$\begin{aligned}\ln\frac{C_n}{A_n} &= s_n\ln\frac{t_n}{r_n} + p\ln(1-t_n) - q\ln(1-r_n) \geq \\ &\geq s_n\ln\frac{1-2(1-r_n)^{\beta}}{r_n} + (p\beta-q)\ln(1-r_n) + p\ln\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Так как при $n\to\infty$

$$s_n\ln\frac{1-2(1-r_n)^{\beta}}{r_n} \sim q(1-r_n)^{-\beta}\,\frac{(1-r_n)-2(1-r_n)^{\beta}}{r_n} \sim q(1-r_n)^{1-\beta},$$

то из последней оценки следует, что $\ln\frac{C_n}{A_n} \to +\infty$ при $n\to\infty$. А тогда и $C_n/A_n \to +\infty$ при $n\to\infty$.

Еще раз воспользовавшись (8), а также (6), имеем

$$\begin{aligned}\ln\frac{C_n}{B_n} &= s_n\ln\frac{t_n}{r_{n+1}} + p\ln(1-t_n) - q\ln(1-r_{n+1}) \geq \\ &\geq q(1-r_n)^{-\beta}\ln t_n + p\beta\ln(1-r_n) - q\alpha\ln(1-r_n) + p\ln\frac{1}{2} \geq \\ &\geq q(1-r_n)^{-\beta}\ln(1-2(1-r_n)^{\beta}) + (q\alpha-p\beta)\ln\frac{1}{1-r_n} + p\ln\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Поскольку $(1-r_n)^{-\beta}\ln(1-2(1-r_n)^{\beta}) \to -2$ при $n\to\infty$, то, учитывая, что $q\alpha > p\beta$, получаем отсюда, что и $C_n/B_n \to +\infty$ при $n\to\infty$.

Таким образом, $\|f_n\|_p/\|f_n\|_{q,E(\mathbf{r})} \to \infty$ при $n\to\infty$, что противоречит (7).

(iv)$\Longrightarrow$(iii): Достаточно дословно повторить доказательство предложения 2.4 из [1], которое не зависит от N (в [1] $N=1$).

(iii)$\Longrightarrow$(ii): По теореме 2.

(ii)$\Longrightarrow$(i): Очевидно. □

Предложение 6 не только распространяет результаты работ [1] и [5] об инвариантных множествах вращения на многомерный случай, но и показывает, что такие множества слишком густы, чтобы на них можно было выяснять какие-либо тонкие характеристики слабо достаточных для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ или определяющих для $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ множеств. В самом деле, будучи слабо достаточными для какого-то $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ $(p<\infty)$, они автоматически слабо достаточны для всех таких пространств при любых p, включая и $p = \infty$, что, конечно, невозможно для произвольных слабо достаточных для $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ множеств.

В заключение считаю приятным долгом вспомнить добрым словом Игоря Федоровича Красичкова–Терновского. Именно его глубокое по содержанию замечание в отзыве официального оппонента на защите моей кандидатской диссертации о перспективности изучения слабо достаточных множеств как самостоятельного объекта определило на долгие годы направление моих исследований и нашло, надеюсь, достойное отражение в результатах данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C. Horowitz, B. Korenblum, B. Pinchuk. *Sampling sequences for $A^{-\infty}$* // Michigan Math. J. 1997. Vol. 44, № 2. P. 389–398.
2. L.H. Khoi, P. Thomas. *Weakly sufficient sets for $A^{-\infty}(\mathbb{D})$* // Publ. Mat. 1998. Vol. 42, № 2. P. 435–448.
3. D.M. Schneider. *Sufficient sets for some spaces of entire functions* // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 197. P. 161–180.
4. L.H. Khoi. *Sets of uniqueness, weakly sufficient sets and sampling sets for $A^{-\infty}(\mathbb{B})$* // Bull. Korean Math. Soc. 2010. Vol. 47, № 5. P. 933–950.
5. J. Bonet, P. Domański. *Sampling sets and sufficient sets for $A^{-\infty}$* // J. Math. Anal. Appl. 2003. Vol. 277, № 2. P. 651–669.
6. V.G. Iyer. *On effective sets of points in relation to integral functions* // Trans. Amer. Math. Soc. 1937. Vol. 42. P. 358–365.
7. A.V. Abanin, Pham Trong Tien. *Continuation of holomorphic functions and some of its applications* // Studia Math. 2010. Vol. 200, № 3. P. 279–295.
8. C. Horowitz. *Zeros of functions in the Bergman spaces* // Duke Math. J. 1974. Vol. 41. P. 693–710.
9. Абанин А.В. *О некоторых признаках слабой достаточности* // Математические заметки. 1986. Т. 40, вып. 4. С. 442–454.
10. Коробейник Ю.Ф. *Индуктивные и проективные топологии. Достаточные множества и представляющие системы* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50, № 3. С. 539–565.
11. L. Brown, A. Shields, K. Zeller. *On absolutely convergent exponential sums* // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. Vol. 96, № 1. P. 162–183.
12. L. Ehrenpreis. *Fourier analysis in several complex variables.* New York: Wiley-Intersci. Publ. 1970. (Pure Appl. Math.; V. 17).
13. Напалков В.В. *О сравнении топологий в некоторых пространствах целых функций* // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 4. С. 827–830.
14. K.D. Bierstedt, R. Meise, W.H. Summers. *A projective description of weighted inductive limits* // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 272. P. 107–160.
15. Абанин А.В. *Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы.* Дис.... д-ра физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 1995.
16. Епифанов О.В. *Вариации слабо достаточных множеств в пространствах аналитических функций* // Изв. вузов. Математика. 1986. № 7. С. 50–56.

Александр Васильевич Абанин,
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22,
362027, г. Владикавказ, Россия

Южный федеральный университет,
ул. Мильчакова, 8а,
344090, г. Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: abanin@math.rsu.ru